Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

26. März 2008

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	20	30	30	20	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Bei einer Steuerung...
- ☐ ... ist keine Rückkopplung vorhanden.
- ☐ ... benötigt man immer eine Messeinrichtung.
- ☐ ... führen nicht messbare Störungen zur Abweichung vom gewünschten Verhalten.

b) Was bedeutet Rückkopplung in der Regelungstechnik?
- ☐ Wirkung der Stellgröße auf die Regelgröße.
- ☐ Wirkung der Stellgröße auf die Störgröße.
- ☐ Wirkung der Regelgröße auf die Stellgröße.

c) Totzeitglieder...
- ☐ ... haben einen Phasengang der für $\omega \to \infty$ gegen $-\infty°$ strebt.
- ☐ ... wirken sich günstig auf die Stabilität eines Regelkreises aus.
- ☐ ... reduzieren die Phasenreserve eines Regelkreises.

d) Eine Wurzelortskurve...
- ☐ ... stellt den Frequenzgang eines dynamischen Systems dar.
- ☐ ... stellt die Lage der Pole des **geschlossenen** Regelkreises bei Variation der Verstärkung des offenen Regelkreises dar.
- ☐ ... stellt die Lage der Pole des **offenen** Regelkreises bei Variation der Verstärkung des offenen Regelkreises dar.

e) Welche Entsprechung hat das Produkt $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ im Zeitbereich?

- ☐ $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$.
- ☐ $y(t) = g(t) \cdot u(t)$.
- ☐ $y(t) = g(t) + u(t)$.

f) Wann ist ein dynamisches System instabil?

- ☐ Wenn die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) gegen $+\infty/-\infty$ strebt.
- ☐ Wenn mindestens eine Nullstelle des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion einen positiven Realteil hat.
- ☐ Wenn die Pole der Übertragungsfunktion einen negativen Realteil haben.

g) Für die Anwendung des **allgemeinen** Nyquist-Kriteriums ist Folgendes zu beachten:

- ☐ Man betrachtet den Frequenzgang des offenen Regelkreises.
- ☐ Das Kriterium kann auch bei instabilen Regelstrecken angewendet werden.
- ☐ Das betrachtete geregelte System ist stabil, wenn die Ortskurve den Punkt -1 auf der reellen Achse nicht umschlingt.

h) Ein geschlossener Regelkreis $G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$ ist stabil, wenn…

- ☐ …die Phasenreserve von $G_0(s)$ negativ ist.
- ☐ …die Wurzelortskurve von $G_0(s)$ den Punkt -1 auf der reellen Achse umschlingt (stabiles $G_0(s)$ vorausgesetzt).
- ☐ Die Realteile aller Nullstellen des Polynoms $1 + G_0(s)$ negativ sind.

i) Das System $G(s) = \frac{2s+1}{s+4}$…

- ☐ …ist nicht phasenminimal.
- ☐ …hat eine Sprungantwort mit dem Endwert $h(t \to \infty) = 0{,}25$.
- ☐ …hat eine Sprungantwort mit dem Anfangswert $h(t = 0) = 2$.

j) Ein Regelkreis weist ein gutes stationäres Verhalten auf, wenn…

- ☐ …der Frequenzgang der Führungsübertragungsfunktion für $\omega \to \infty$ gleich 1 ist.
- ☐ …der Frequenzgang der Führungsübertragungsfunktion für $\omega = 0$ gleich 1 ist.
- ☐ …der Frequenzgang der Störübertragungsfunktion für $\omega = 0$ gleich 0 ist.

k) Bei dem Entwurf eines Kompensationsreglers ist zu beachten, dass…

- ☐ …die Regelstrecke höchstens einen instabilen Pol haben darf.
- ☐ …das gewünschte Führungsverhalten so gewählt wird, dass sich ein realisierbarer Regler ergibt.
- ☐ …die Regelstrecke minimalphasig sein muss.

l) Ein PID-Regler…
- ☐ …hat die Sprungantwort $h(t \to \infty) = 0$.
- ☐ …hat die Sprungantwort $h(t \to \infty) = \infty$.
- ☐ …ist eine Reihenschaltung aus einem P-, I- und D-Glied.

m) Ein Polvorgaberegler…
- ☐ …wird so entworfen, dass die **Pole** des geschlossenen Regelkreises bestimmte Werte annehmen.
- ☐ …wird so entworfen, dass die **Pole und Nullstellen** des geschlossenen Regelkreises bestimmte Werte annehmen.
- ☐ …kann bei instabilen Regelstrecken nicht verwendet werden.

Aufgabe 2: Stabilitätsdiagramm

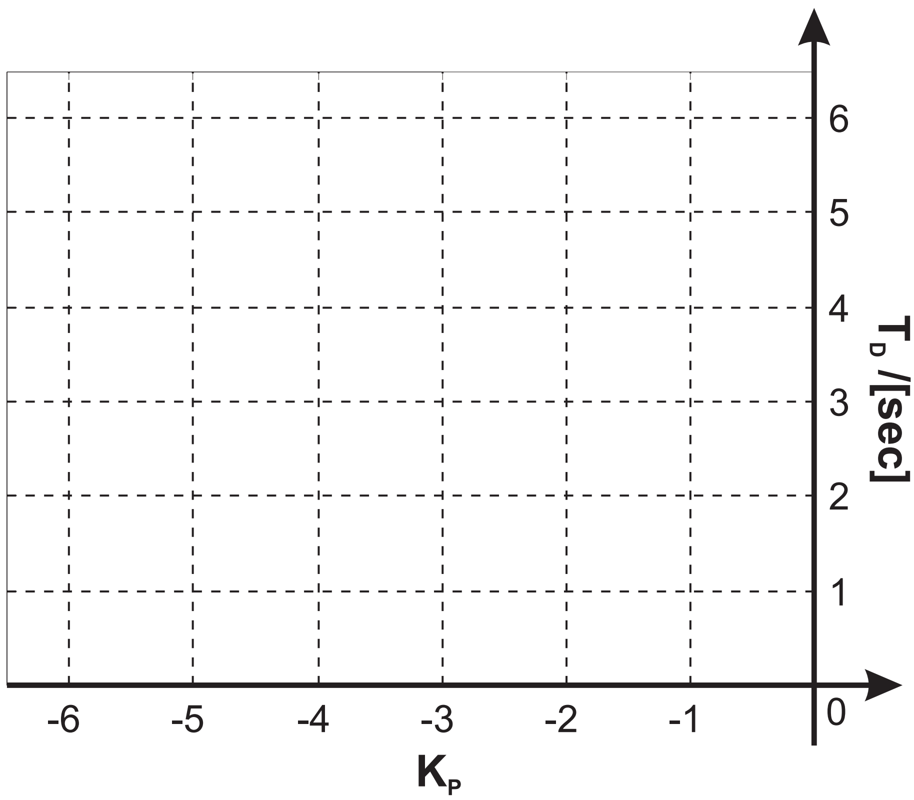
Gegeben sind die Übertragungsfunktionen einer Regelstrecke und eines PD-Reglers:

$$G_S(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \qquad G_R(s) = K_P(1 + T_D s) \quad \text{mit } K_P < 0 \text{ und } T_D > 0\,.$$

a) Ist die Strecke stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

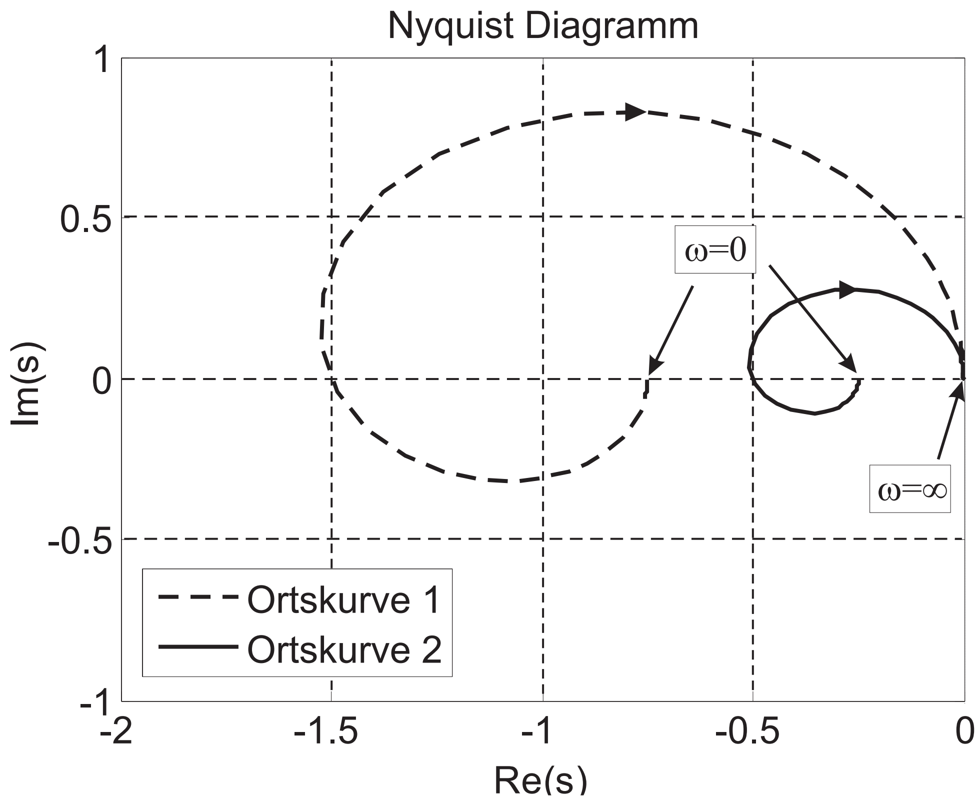
b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums die Stabilitätsbedingungen des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_P und T_D. Zeichnen Sie die Bedingungen in das vorbereitete Diagramm ein und kennzeichnen Sie den stabilen Bereich.

Hinweis: Beachten Sie bei den Berechnungen der Ungleichungen zum Aufstellen der Stabilitätsbedingungen, dass K_P nur negative Werte annehmen darf!



c) Im Nyquist-Diagramm sind die Ortskurven für die zwei Reglerverstärkungen $K_P = -1{,}5$ und $K_P = -0{,}5$ dargestellt. Die Vorhaltezeit beträgt in beiden Fällen $T_D = 3\,sec$. Ordnen Sie die Verstärkungen den beiden Ortskurven zu und treffen Sie Aussagen zur Stabilität der beiden Regelkreise.

d) Bestimmen Sie für beide Ortskurven die Amplitudenreserve k_R. Treffen Sie auch hier Stabilitätsaussagen auf Basis der Amplitudenreserve. Wie groß sind k_R und K_P für den grenzstabilen Fall?



Aufgabe 3: Modellbildung und inverse Laplace-Transformation

Die Drehzahl $y(t)$ eines Gleichstrommotors in Abhängigkeit der Ankerspannung $u(t)$ (Stellgröße), des Ankerstroms $i(t)$ sowie eines Lastmomentes $d(t)$ (Störgröße) können mit Hilfe folgender Differentialgleichungen berechnet werden:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 4 \cdot i(t) - 10 \cdot d(t), \quad \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + 5 \cdot i(t) = 5 \cdot u(t) - 2 \cdot y(t)$$

Hinweis: Die Aufgabenteile b) und c) können unabhängig von a) gelöst werden.

a) Transformieren Sie beide Differentialgleichungen in den Bildbereich, eliminieren Sie die Stromstärke $I(s)$ und ermitteln Sie die Übertragungsfunktionen $G_u(s)$ und $G_d(s)$, die den Zusammenhang zwischen der Drehzahl $Y(s)$ und der Ankerspannung $U(s)$, bzw. dem Lastmoment $D(s)$ beschreiben:

$$Y(s) = G_u(s) \cdot U(s) + G_d(s) \cdot D(s)$$

b) Für die weiteren Berechnungen gehen Sie von folgenden Übertragungsfunktionen aus (die nicht mit dem korrekten Ergebnis aus a) übereinstimmen):

$$Y(s) = \frac{60}{(s+2)(s+5)} \cdot U(s) - \frac{3s+45}{(s+2)(s+5)} \cdot D(s)$$

Berechnen Sie durch Partialbruchzerlegung und inverse Laplace-Transformation den Zeitverlauf $y(t)$, wenn die Stellgröße schon immer (seit $t = -\infty\, sec$) auf den Wert $u(t) = 3$ eingestellt ist (System im eingeschwungenen Zustand) und die Störgröße zum Zeitpunkt $t = 1\, sec$ von $d(t) = 0$ auf $d(t) = 10$ springt:

$$u(t) = 3, \quad d(t) = 10 \cdot \sigma(t-1)\,.$$

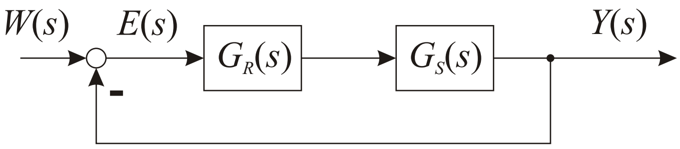
Sie benötigen folgende Korrespondenzen:

$$\frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\; 1 \cdot \sigma(t), \quad \frac{1}{s+a} \bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-at} \cdot \sigma(t), \quad F(s) \cdot e^{-Ts} \bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t-T) \cdot \sigma(t-T)$$

c) Zeichnen Sie qualitativ den Zeitverlauf auf. Berechnen Sie dazu als Hilfe die Drehzahlen $y(t=0)$, $y(t \to \infty)$ und $y(t=1)$.

Aufgabe 4: Konstruktion einer Wurzelortskurve

Gegeben ist der abgebildete Standardregelkreis mit der Übertragungsfunktion $G_R(s)$ für den Regler und $G_S(s)$ für die Strecke:



$$G_R(s) = K \qquad G_S(s) = \frac{s}{(s-1)\cdot(s-4)}$$

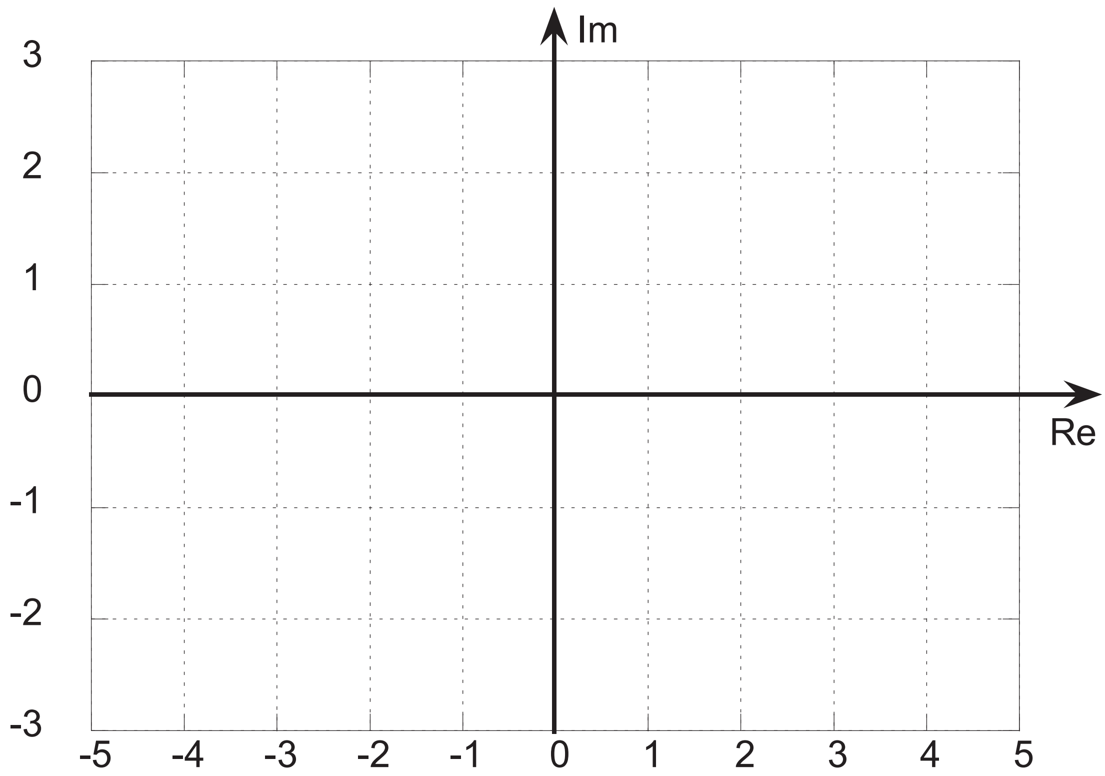
a) Ermitteln Sie $G_0(s)$ und geben Sie die Pole und Nullstellen von $G_0(s)$ an. Ist der offene Regelkreis stabil?

b) Berechnen Sie die Verzweigungspunkte s_{vi} der Wurzelortskurve sowie die Anzahl und Winkel der Äste, die im Unendlichen enden.

c) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve in das vorbereitete Diagramm. Tragen Sie alle zuvor berechneten Größen ein.

d) Kennzeichnen Sie die Richtung zunehmender Verstärkung sowie die kritische Verstärkung $K_{kritisch}$ in der Wurzelortskurve.

Hinweis: Die Berechnung der kritischen Verstärkung ist nicht erforderlich!



Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Bei einer Steuerung...

- ■ ... ist keine Rückkopplung vorhanden.
- ☐ ... benötigt man immer eine Messeinrichtung.
- ■ ... führen nicht messbare Störungen zur Abweichung vom gewünschten Verhalten.

b) Was bedeutet Rückkopplung in der Regelungstechnik?

- ☐ Wirkung der Stellgröße auf die Regelgröße.
- ☐ Wirkung der Stellgröße auf die Störgröße.
- ■ Wirkung der Regelgröße auf die Stellgröße.

c) Totzeitglieder...

- ■ ... haben einen Phasengang der für $\omega \to \infty$ gegen $-\infty°$ strebt.
- ☐ ... wirken sich günstig auf die Stabilität eines Regelkreises aus.
- ■ ... reduzieren die Phasenreserve eines Regelkreises.

d) Eine Wurzelortskurve...

- ☐ ... stellt den Frequenzgang eines dynamischen Systems dar.
- ■ ... stellt die Lage der Pole des **geschlossenen** Regelkreises bei Variation der Verstärkung des offenen Regelkreises dar.
- ☐ ... stellt die Lage der Pole des **offenen** Regelkreises bei Variation der Verstärkung des offenen Regelkreises dar.

e) Welche Entsprechung hat das Produkt $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ im Zeitbereich?

- ■ $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$.
- ☐ $y(t) = g(t) \cdot u(t)$.
- ☐ $y(t) = g(t) + u(t)$.

f) Wann ist ein dynamisches System instabil?

- ■ Wenn die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) gegen $+\infty/-\infty$ strebt.
- ■ Wenn mindestens eine Nullstelle des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion einen positiven Realteil hat.
- ☐ Wenn die Pole der Übertragungsfunktion einen negativen Realteil haben.

g) Für die Anwendung des **allgemeinen** Nyquist-Kriteriums ist Folgendes zu beachten:

- ■ Man betrachtet den Frequenzgang des offenen Regelkreises.
- ■ Das Kriterium kann auch bei instabilen Regelstrecken angewendet werden.
- ☐ Das betrachtete geregelte System ist stabil, wenn die Ortskurve den Punkt -1 auf der reellen Achse nicht umschlingt.

h) Ein geschlossener Regelkreis $G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$ ist stabil, wenn...

☐ ...die Phasenreserve von $G_0(s)$ negativ ist.

☐ ...die Wurzelortskurve von $G_0(s)$ den Punkt -1 auf der reellen Achse umschlingt (stabiles $G_0(s)$ vorausgesetzt).

■ Die Realteile aller Nullstellen des Polynoms $1 + G_0(s)$ negativ sind.

i) Das System $G(s) = \frac{2s+1}{s+4}\ldots$

☐ ...ist nicht phasenminimal.

■ ...hat eine Sprungantwort mit dem Endwert $h(t \to \infty) = 0{,}25$.

■ ...hat eine Sprungantwort mit dem Anfangswert $h(t = 0) = 2$.

j) Ein Regelkreis weist ein gutes stationäres Verhalten auf, wenn...

☐ ...der Frequenzgang der Führungsübertragungsfunktion für $\omega \to \infty$ gleich 1 ist.

■ ...der Frequenzgang der Führungsübertragungsfunktion für $\omega = 0$ gleich 1 ist.

■ ...der Frequenzgang der Störübertragungsfunktion für $\omega = 0$ gleich 0 ist.

k) Bei dem Entwurf eines Kompensationsreglers ist zu beachten, dass...

☐ ...die Regelstrecke höchstens einen instabilen Pol haben darf.

■ ...das gewünschte Führungsverhalten so gewählt wird, dass sich ein realisierbarer Regler ergibt.

■ ...die Regelstrecke minimalphasig sein muss.

l) Ein PID-Regler...

☐ ...hat die Sprungantwort $h(t \to \infty) = 0$.

■ ...hat die Sprungantwort $h(t \to \infty) = \infty$.

☐ ...ist eine Reihenschaltung aus einem P-, I- und D-Glied.

m) Ein Polvorgaberegler...

■ ...wird so entworfen, dass die **Pole** des geschlossenen Regelkreises bestimmte Werte annehmen.

☐ ...wird so entworfen, dass die **Pole und Nullstellen** des geschlossenen Regelkreises bestimmte Werte annehmen.

☐ ...kann bei instabilen Regelstrecken nicht verwendet werden.

$\sum 20$

Aufgabe 2: Stabilitätsdiagramm

a) Die Strecke hat keine Pole in der rechten Halbebene und ist daher **stabil**. 2

b) Berechnung der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises: 2

$$1 + G_0(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + G_R(s)G_S(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K_P(1 + T_D s)}{(s+2)(s+1)} = 0$$

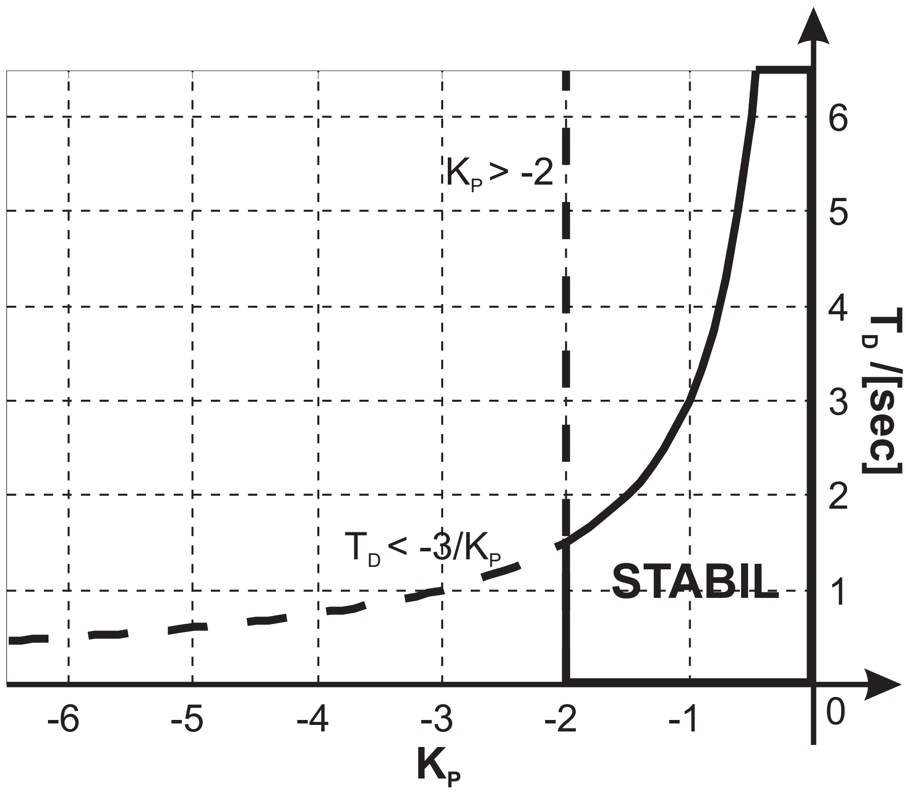
$$\Rightarrow \underbrace{1}_{c_2} \cdot s^2 + \underbrace{(3 + K_P T_D)}_{c_1} s + \underbrace{K_P + 2}_{c_0} = 0$$ 4

Für Polynome 2. Grades muss für Stabilität nach dem Hurwitz-Kriterium nur die Bedingung $c_i > 0$ erfüllt sein:

$$c_2 > 0: \; c_2 = 1 > 0$$ 1

$$c_1 > 0: \; 3 + K_P T_D > 0 \Leftrightarrow 3 > (-K_P) T_D \Leftrightarrow \boxed{T_D < -\frac{3}{K_P}} \quad \text{für } K_P < 0, T_D > 0\,.$$ 1

$$c_0 > 0: \; K_P + 2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{K_P > -2}$$ 1



7

c) Aus dem Stabilitätsdiagramm lässt sich ablesen, dass das System für $K_P = -1{,}5$ instabil und für $K_P = -0{,}5$ stabil ist. Ortskurve 1 umschlingt den Punkt $(-1; 0)$. Da die Regelstrecke stabil ist, darf das vereinfachte Nyquist-Kriterium angewendet werden. Demnach ist die Ortskurve 1 instabil. Weiterhin spricht die größere Ausdehnung von Ortskurve 1 für eine betragsmäßig größere Verstärkung K_P als bei Ortskurve 2. Daher ist $K_P = -1{,}5$ der Ortskurve 1 und $K_P = -0{,}5$ der Ortskurve 2 zuzuordnen. Ortskurve 2 umschlingt den Punkt $(-1; 0)$ nicht und ist daher stabil. 6

d) Ortskurve 1:

$$k_R = \frac{1}{G_0(i\omega_{-180^\circ})} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{instabil.}$$ 2

Ortskurve 2:

$$k_R = \frac{1}{G_0(i\omega_{-180°})} = \frac{1}{0{,}5} = 2 > 1 \Rightarrow \text{stabil.}$$ 2

Im grenzstabilen Fall hat die Amplitudenreserve den Wert $k_R = 1$. Laut Stabilitätsdiagramm und Nyquist-Diagramm tritt dieser Fall für $K_P = -1$ ein. 2

$\sum 30$

Aufgabe 3: Modellbildung und inverse Laplace-Transformation

a) Laplacetransformation ergibt:

$$s \cdot Y(s) = 4 \cdot I(s) - 10 \cdot D(s), \qquad s \cdot I(s) + 5 \cdot I(s) = 5 \cdot U(s) - 2 \cdot Y(s)$$ 2

Die zweite Gleichung umgestellt nach $I(s)$ lautet:

$$I(s) = \frac{5 \cdot U(s) - 2 \cdot Y(s)}{s+5}$$ 1

Einsetzen in die erste Gleichung eliminiert $I(s)$:

$$s \cdot Y(s) = \frac{20 \cdot U(s) - 8 \cdot Y(s)}{s+5} - 10 \cdot D(s)$$ 1

$$\Leftrightarrow (s^2 + 5s) \cdot Y(s) = 20 \cdot U(s) - 8 \cdot Y(s) - 10(s+5) \cdot D(s)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y(s) = \frac{20}{s^2+5s+8} \cdot U(s) - \frac{10(s+5)}{s^2+5s+8} \cdot D(s)} = Y_1(s) - Y_2(s)$$ 2

b) Für die erste Übertragungsfunktion soll angenommen werden, dass das System bereits bei einer konstanten Stellgröße $u(t) = 3$ auf einen stationären Endwert eingeschwungen ist. Daher wird der stationäre Endwert bei einer Anregung mit $U(s) = \frac{3}{s}$ berechnet:

$$y_1(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot \left(\frac{60}{(s+2)(s+5)} \cdot \frac{3}{s} \right) = 18$$ 3

Für den zweiten Summanden ergibt sich mit $d(t) = 10 \cdot \sigma(t-1) ○\!\!-\!\!\bullet\ D(s) = \frac{10}{s} \cdot e^{-s}$:

$$Y_2(s) = \frac{30s + 450}{s(s+2)(s+5)} \cdot e^{-s}$$ 2

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$Y_2(s) = \left(\frac{30s+450}{s(s+2)(s+5)} \right) \cdot e^{-s} = \left(\frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s+2} + \frac{B_3}{s+5} \right) \cdot e^{-s}$$

$$B_1 = \left[\frac{30s+450}{s(s+2)(s+5)} \cdot s \right]_{s=0} = \frac{0+450}{2 \cdot 5} \Leftrightarrow \boxed{B_1 = 45}$$ 2

$$B_2 = \left[\frac{30s+450}{s(s+2)(s+5)} \cdot (s+2) \right]_{s=-2} = \frac{-60+450}{-2 \cdot 3} \Leftrightarrow \boxed{B_2 = -65}$$ 2

$$B_3 = \left[\frac{30s+450}{s(s+2)(s+5)} \cdot (s+5) \right]_{s=-5} = \frac{-150+450}{-5 \cdot (-3)} \Leftrightarrow \boxed{B_3 = 20}$$ 2

Die Rücktransformation ergibt mit Hilfe des Zeitverschiebungssatzes:

$$y_2(t) = (45 - 65e^{-2(t-1)} + 20e^{-5(t-1)}) \cdot \sigma(t-1)$$ $\boxed{3}$

Für den gesamten Ausgang $Y(s) = Y_1(s) - Y_2(s)$ ergibt sich:

$$\boxed{y(t) = 18 - (45 - 65e^{-2(t-1)} + 20e^{-5(t-1)}) \cdot \sigma(t-1)}$$ $\boxed{1}$

c) Für $t = 0$ ergibt sich, da $\sigma(t-1) = 0$:

$$y(t=0) = 18 - (45 - 65e^{-2(0-1)} + 20e^{-5(0-1)}) \cdot 0 \Leftrightarrow \boxed{y(t=0) = 18}$$ $\boxed{2}$

Für $t \to \infty$ erhält man, da $\sigma(t-1) = 1$:

$$y(t \to \infty) = 18 - (45 - 65e^{-\infty} + 20e^{-\infty}) = 18 - 45$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t \to \infty) = -27}$$ $\boxed{2}$

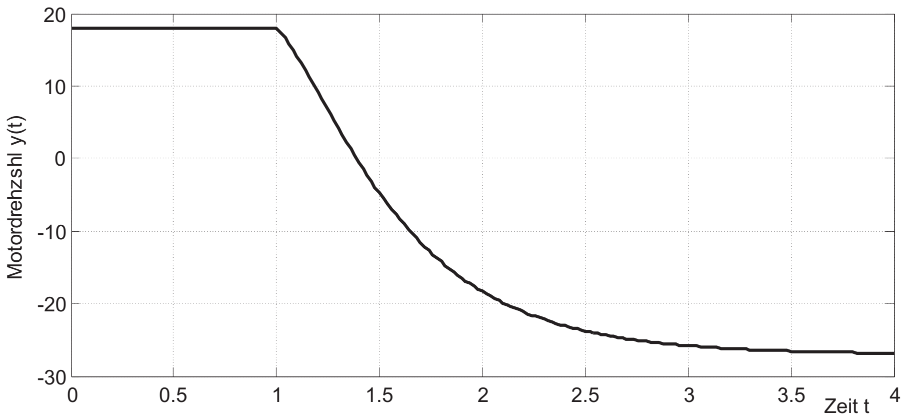
Zum Zeitpunkt $t = 1$ folgt, da $\sigma(t-1) = 1$:

$$y(t=1) = 18 - (45 - 65e^0 + 20e^0)$$

$$\Leftrightarrow y(t=1) = 18 - (45 - 65 + 20) = 18 - 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t=1) = 18}$$ $\boxed{2}$

Der Drehzahlverlauf beginnt bei 18, bleibt zunächst konstant und sinkt wegen Auftreten der Störgröße ab dem Teitpunkt t=1 asymptotisch auf den Wert -27 ab (siehe Abbildung), d.h. der Motor dreht rückwärts, da die Last größer als das Antriebsmoment ist.



$\boxed{3}$

$\boxed{\sum 30}$

Aufgabe 4: Konstruktion einer Wurzelortskurve

a) Der offene Regelkreis ist nicht stabil, da beide Polstellen positiv sind. $\boxed{5}$

$$G_0(s) = K\frac{s}{(s-1)\cdot(s-4)}$$

b) Anzahl der Äste, die im Unendlichen enden:

$$n - m = 2 - 1 = 1$$ 3

Winkel der Äste, die im Unendlichen enden:

$$\Psi_l = (1 + 2 \cdot l) \cdot \frac{180°}{n-m} \qquad \underline{\text{mit:}}\ l = 0, \ldots, n-m-1$$ 2

$$\Psi_0 = (1 + 2 \cdot 0) \cdot \frac{180°}{1} = 180°$$

Verzweigungspunkte:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s_v - n_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_v - p_i}$$

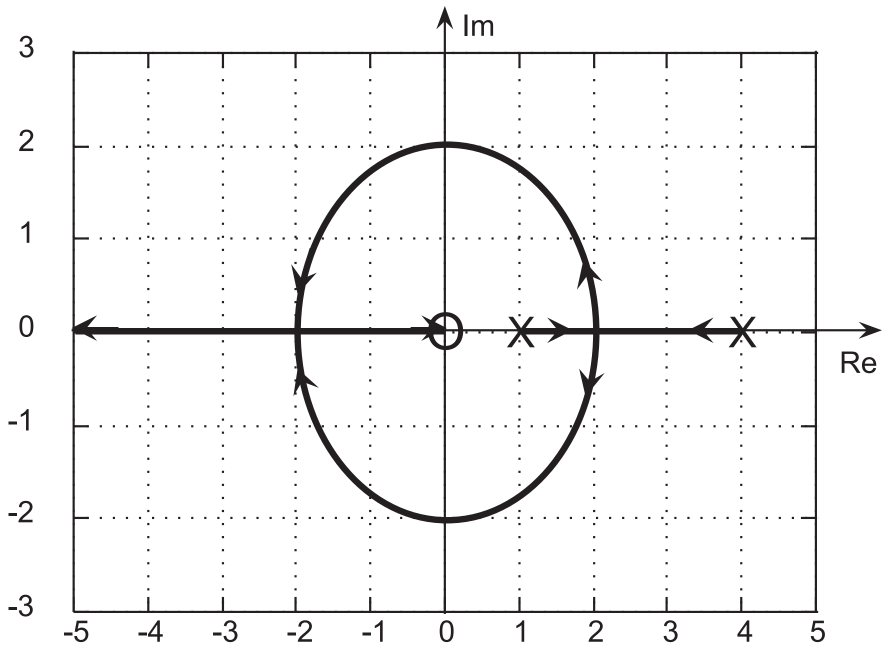
$$\frac{1}{s_v} = \frac{1}{s_v - 1} + \frac{1}{s_v - 4}$$ 2

$$\frac{1}{s_v} = \frac{s_v - 4 + s_v - 1}{s_v^2 - 4s_v - s_v + 4}$$

$$s_v^2 - 5s_v + 4 = 2s_v^2 - 5s_v$$

$$4 = s_v^2 \qquad \Rightarrow \qquad s_{v1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

c) Skizze der Wurzelortskurve



4

d) Richtung zunehmender Verstärkung sowie kritischen Verstärkung: siehe Skizze 4

$\sum 20$