Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

28. März 2011

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Gesamt
Mat.-Nr.:	Soll:	20	27	29	24	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Was trifft für eine Übertragungsfunktion mit globalem I-Verhalten zu?

- ☐ Die Sprungantwort fällt für $t \to \infty$ auf Null ab.
- ☐ Die asymptotische Amplitudenkennlinie hat für niedrige Frequenzen eine negative Steigung (z.B. -20 dB/Dekade).
- ☐ Die Frequenzgangortskurve endet im Ursprung des Koordinatensystems.

b) Die Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = \ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) + u(t)$ kann als Übertragungsfunktion $G(s)$ folgendermaßen geschrieben werden:

- ☐ $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 1}$
- ☐ $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s}$
- ☐ $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2 + 2s + 1}{s + 2}$

c) Für ein System 2. Ordnung mit der Dämpfung D gilt:

- ☐ Für $D = 0$ sind Resonanzfrequenz ω_m und Eigenfrequenz ω_e gleich groß.
- ☐ Für $D < 1$ ist das System nicht schwingungsfähig.
- ☐ Für $D < 1/\sqrt{2}$ zeigt der Amplitudengang eine Resonanzüberhöhung.

d) Welche Systeme sind phasenminimal?

- [ ] Systeme, die zu einem gegebenen Amplitudengang die minimale Phase aufweisen.
- [ ] Systeme, die eine Totzeit enthalten.
- [ ] Systeme, die eine Phasenverschiebung von weniger als -90° haben.

e) Warum wird der Amplitudenverlauf im Bodediagramm doppelt logarithmisch aufgetragen?

- [ ] Weil der Verlauf dann näherungsweise mit linearen Asymptoten dargestellt werden kann.
- [ ] Weil die Parallelschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.
- [ ] Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.

f) Wofür ist die Frequenzgangsortskurve besonders geeignet?

- [ ] Zur Ermittlung von Amplitude und Phasenverschiebung bei einer bestimmten Kreisfrequenz.
- [ ] Um die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises abzulesen.
- [ ] Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu analysieren.

g) Woran erkennt man, ob ein System globales P-, I- oder D-Verhalten hat?

- [ ] Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to \infty$.
- [ ] Am Verlauf der Sprungantwort für $t \to \infty$.
- [ ] Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to 0$.

h) Welche Aussagen treffen für das **allgemeine** Nyquist-Kriterium zu?

- [ ] Zur Anwendung benötigt man den Frequenzgang des offenen Regelkreises.
- [ ] Zur Anwendung benötigt man den Frequenzgang des geschlossenen Regelkreises.
- [ ] Kann für Systeme mit instabilen Polen angewendet werden.

i) Wann ist ein System asymptotisch stabil?

- [ ] Wenn alle Pole einen positiven Realteil haben.
- [ ] Wenn die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.
- [ ] Wenn die Sprungantwort für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.

j) Welche Entsprechung hat die Faltung $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$ im Bildbereich?

- [ ] $Y(s) = G(s) + U(s)$.
- [ ] $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$.
- [ ] $Y(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) \cdot U(s)$.

k) Was bedeutet Rückkopplung?

- ☐ Aufschaltung einer messbaren Führungsgröße auf die Störgröße.
- ☐ Rückwirkung der Regelgröße auf die Stellgröße.
- ☐ Durch eine Rückkopplung ist das Ausregeln einer Störgröße möglich.

l) Welche Bezeichnungen sind in der Regelungstechnik üblich?

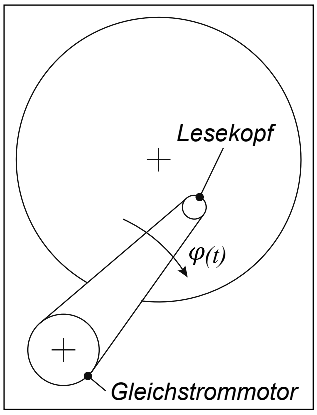
- ☐ Mit $y(t)$ wird im Standard-Regelkreis die Stellgröße bezeichnet.
- ☐ Mit $w(t)$ wird im Standard-Regelkreis die Führungsgröße bezeichnet.
- ☐ Mit $u(t)$ wird im Standard-Regelkreis die Führungsgröße bezeichnet.

m) Wie beeinflusst die Pollage eines Systems dessen dynamisches Verhalten?

- ☐ Systeme mit reellen Doppelpolen sind schwingungsfähig.
- ☐ Je weiter links die stabilen Pole des Systems liegen, um so schneller ist es.
- ☐ Bei konjugiert komplexen Polen kann das System schwingen.

Aufgabe 2: Laplace-Transformation

Für den Lesekopf eines Festplattenlaufwerks soll eine Positionsregelung durchgeführt werden. Die zu regelnde Größe ist der Winkel des Lesekopfes $\varphi(t)$. Der Lesekopf wird mit Hilfe eines Gleichstrommotors positioniert. Stellgröße des Regelungssystems ist daher die Ankerspannung $u(t)$. Die Festplatte mit Lesekopf und Gleichstrommotor ist in der Abbildung schematisch dargestellt.



a) Für die Lesekopfposition $\varphi(t)$, die Ankerstromstärke des Elektromotors $i(t)$ und die Ankerspannung $u(t)$ ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen:

$$J \cdot \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt} = i(t)\,, \quad u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{d\varphi(t)}{dt}\,.$$

Transformieren Sie die Differentialgleichungen zunächst allgemein unter Verwendung der physikalischen Konstanten J (Trägheitsmoment), R und L (Widerstand und Induktivität) in den Frequenzbereich. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke $G_S(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)}$, indem Sie die Ankerstromstärke $I(s)$ aus den Gleichungen eliminieren.

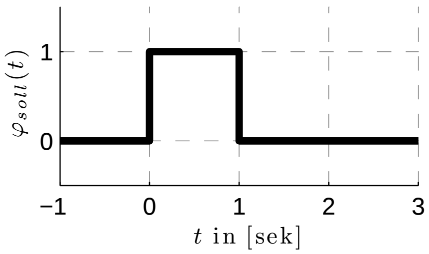
b) Zur Vereinfachung der Rechnung wird das folgende Näherungsmodell 2. Ordnung für die Regelstrecke verwendet:

$$G_S(s) = \frac{5}{s(s+20)}\,.$$

Das System wird mit dem Regler $G_R(s) = 20$ geregelt. Wie lautet die Bezeichnung der gegebenen Regelstrecke und um welchen Reglertyp handelt es sich?

Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ und ermitteln Sie die Pole des geschlossenen Regelkreises. Begründen Sie, warum es sich um ein stabiles System handelt.

c) Zur Positionierung des Lesekopfes wird dem System folgendes Zeitsignal als Führungsgröße $\varphi_{soll}(t)$ aufgeschaltet:

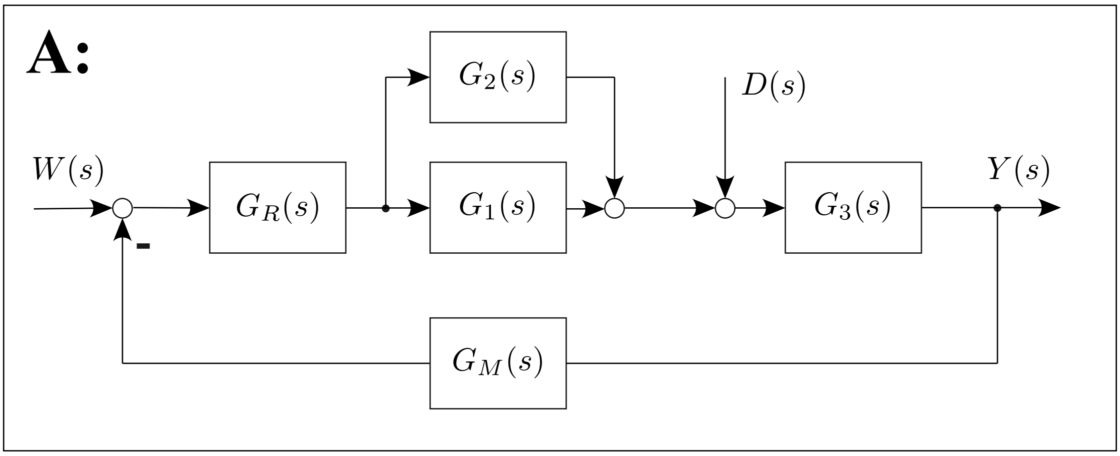


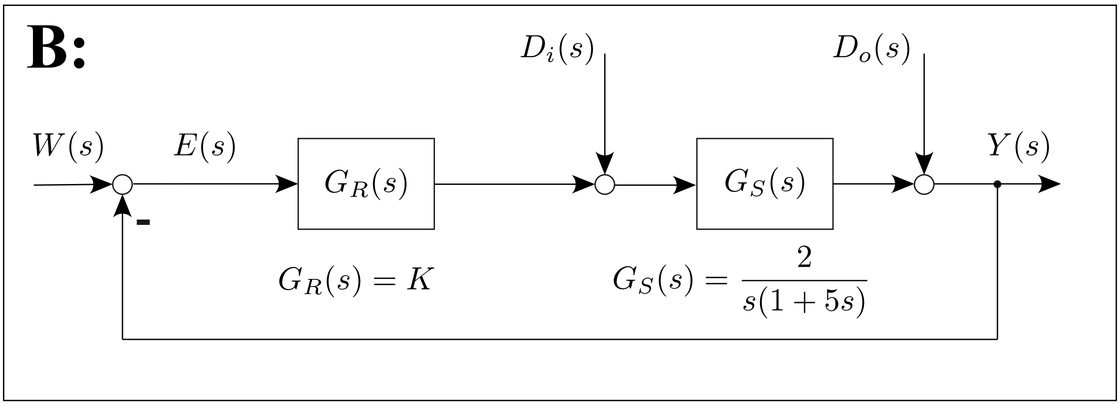
Bestimmen Sie das Eingangssignal $\Phi_{soll}(s)$ aus dem oben abgebildeten Zeitverlauf für $\varphi_{soll}(t)$ und ermitteln Sie die resultierende Regelgröße $\Phi(s) = G_W(s) \cdot \Phi_{soll}(s)$. Transformieren Sie die Regelgröße $\Phi(s)$ mittels inverser Laplace-Transformation in den Zeitbereich, um $\varphi(t)$ zu erhalten. Dazu benötigen Sie folgende Korrespondenz:

$$\frac{1}{s(s+a)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{a^2} \cdot \left(1 - e^{-at} - a \cdot t \cdot e^{-at}\right) \cdot \sigma(t)\,.$$

Aufgabe 3: Reglerentwurf

Gegeben sind folgende Regelkreise **A** und **B**:





Hinweis: Alle Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar!

a) Leiten Sie für den Regelkreis **A** die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ und die Störübertragungsfunktion $G_D(s)$ her:

$$Y(s) = G_W(s) \cdot W(s) + G_D(s) \cdot D(s)$$

b) Für den Regelkreis **B** gelten folgende Zusammenhänge zwischen den Störgrößen $D_i(s)$, $D_o(s)$ und dem Regelfehler $E(s)$:

$$E(s) = \frac{-G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \cdot D_i(s), \qquad E(s) = \frac{-1}{1 + G_R(s)G_S(s)} \cdot D_o(s)$$

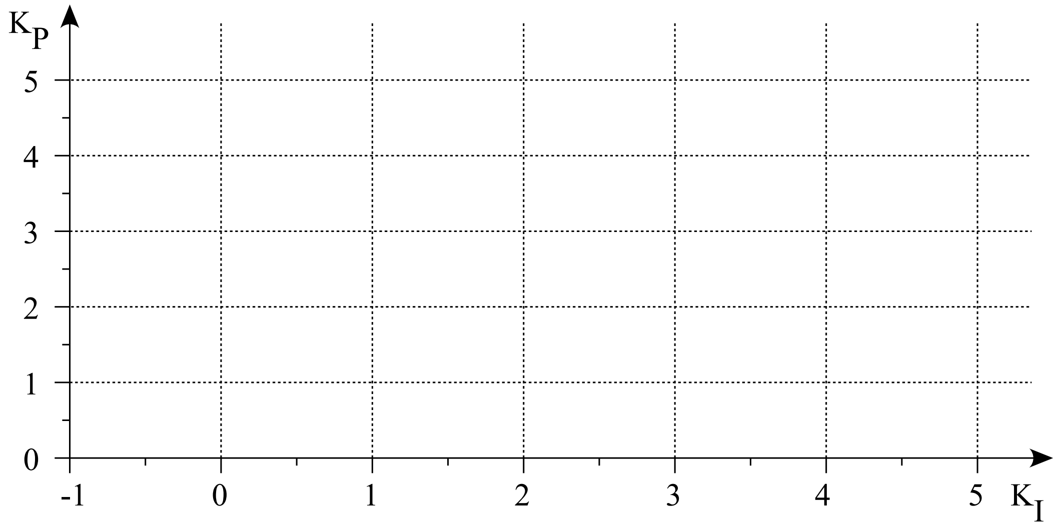
Zeigen Sie für die im Bild angegebenen Übertragungsfunktionen von Regler ($G_R(s)$) und Strecke ($G_S(s)$) mit Hilfe des Endwertsatzes, dass bei einer sprungförmigen Störung am Eingang ($D_i(s) = \frac{1}{s}$) bzw. am Ausgang ($D_o(s) = \frac{1}{s}$) der Regelstrecke nur in einem der beiden Fälle der Regelfehler $e(t \to \infty)$ für einen beliebigen Reglerparameter K des P-Reglers gegen Null strebt.

Bestimmen Sie für den anderen Fall den Reglerparameter K so, dass der Betrag des bleibenden Regelfehlers $|e(t \to \infty)|$ maximal 0,1 beträgt.

c) Gegeben ist ein **Standardregelkreis** mit einem PI-Regler und einem instabilen Verzögerungsglied 2. Ordnung als Regelstrecke:

$$G_R(s) = \frac{K_P s + K_I}{s}, \qquad G_S(s) = \frac{5}{s^2 + 2s - 10}$$

- Begründen Sie kurz, warum eine Mindestreglerverstärkung benötigt wird, um in diesem Beispiel einen stabilen Regelkreis zu erhalten?
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Hurwitzkriteriums, wie der Reglerparameter K_P in Abhängigkeit von K_I gewählt werden muss, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist.
- Zeichnen Sie den Zusammenhang in das unten abgebildete Diagramm ein und kennzeichnen Sie den stabilen Bereich.



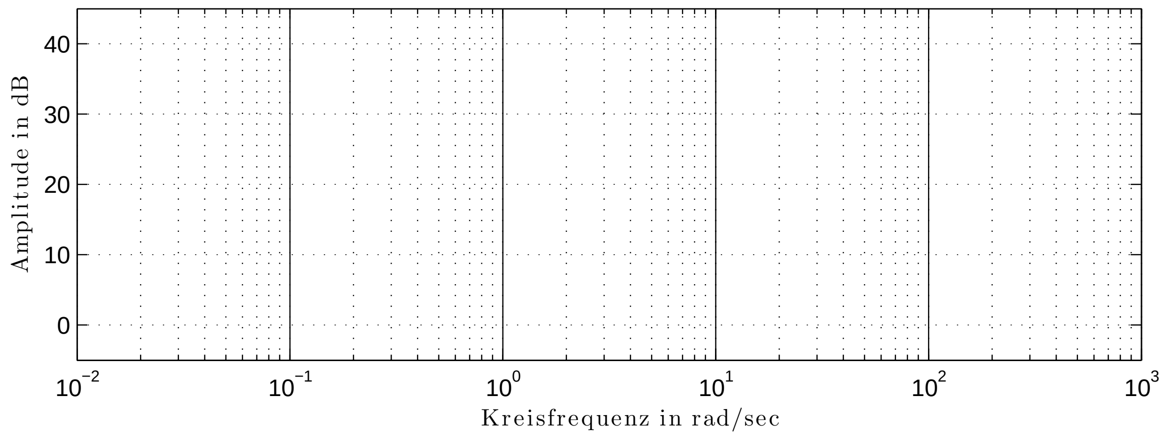
Aufgabe 4: Frequenzgang einer Übertragungsfunktion

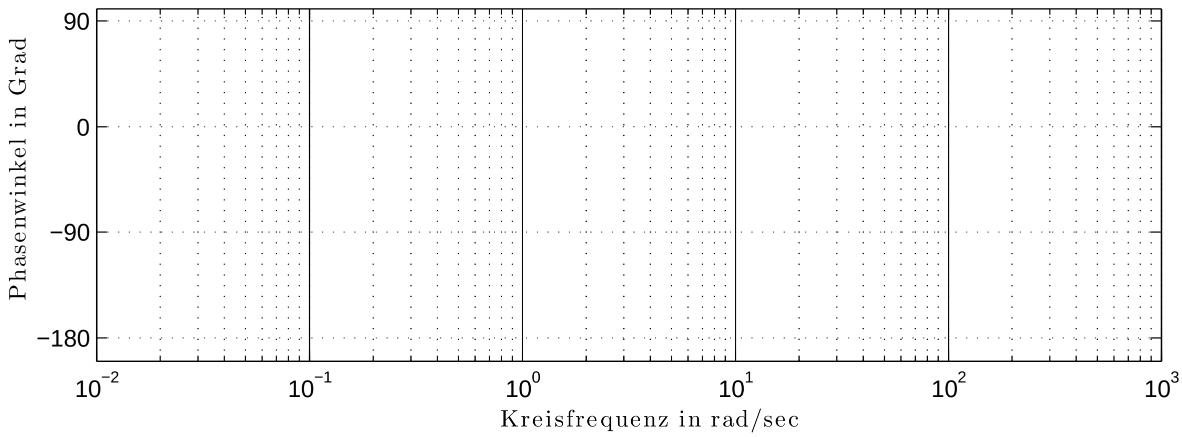
Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises:

$$G_0(s) = \frac{(1+10s)\left(1+\frac{1}{2}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)}{s\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2\left(1+\frac{1}{300}s\right)^2}$$

a) Welches globale Verhalten besitzt die Übertragungsfunktion? Ermitteln Sie die Eckfrequenzen, Asymptotensteigungen, Phasenwinkel sowie die Verstärkung des Systems und benennen Sie die Teilglieder der Übertragungsfunktion $G_0(s)$.

b) Zeichnen Sie den asymptotischen Amplituden- und Phasengang in das unten stehende Bodediagramm ein.





Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Was trifft für eine Übertragungsfunktion mit globalem I-Verhalten zu?

- [ ] Die Sprungantwort fällt für $t \to \infty$ auf Null ab.
- [x] Die asymptotische Amplitudenkennlinie hat für niedrige Frequenzen eine negative Steigung (z.B. -20 dB/Dekade).
- [x] Die Frequenzgangortskurve endet im Urspung des Koordinatensystems.

b) Die Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = \ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) + u(t)$ kann als Übertragungsfunktion $G(s)$ folgendermaßen geschrieben werden:

- [ ] $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 1}$
- [x] $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s}$
- [ ] $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2 + 2s + 1}{s + 2}$

c) Für ein System 2. Ordnung mit der Dämpfung D gilt:

- [x] Für $D = 0$ sind Resonanzfrequenz ω_m und Eigenfrequenz ω_e gleich groß.
- [ ] Für $D < 1$ ist das System nicht schwingungsfähig.
- [x] Für $D < 1/\sqrt{2}$ zeigt der Amplitudengang eine Resonanzüberhöhung.

d) Welche Systeme sind phasenminimal?

- [x] Systeme, die zu einem gegebenen Amplitudengang die minimale Phase aufweisen.
- [ ] Systeme, die eine Totzeit enthalten.
- [ ] Systeme, die eine Phasenverschiebung von weniger als -90° haben.

e) Warum wird der Amplitudenverlauf im Bodediagramm doppelt logarithmisch aufgetragen?

- [x] Weil der Verlauf dann näherungsweise mit linearen Asymptoten dargestellt werden kann.
- [ ] Weil die Parallelschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.
- [x] Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.

f) Wofür ist die Frequenzgangsortskurve besonders geeignet?

- [ ] Zur Ermittlung von Amplitude und Phasenverschiebung bei einer bestimmten Kreisfrequenz.
- [ ] Um die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises abzulesen.
- [x] Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu analysieren.

g) Woran erkennt man, ob ein System globales P-, I- oder D-Verhalten hat?

- [ ] Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to \infty$.
- [x] Am Verlauf der Sprungantwort für $t \to \infty$.
- [x] Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to 0$.

h) Welche Aussagen treffen für das **allgemeine** Nyquist-Kriterium zu?

- [x] Zur Anwendung benötigt man den Frequenzgang des offenen Regelkreises.
- [ ] Zur Anwendung benötigt man den Frequenzgang des geschlossenen Regelkreises.
- [x] Kann für Systeme mit instabilen Polen angewendet werden.

i) Wann ist ein System asymptotisch stabil?

- [ ] Wenn alle Pole einen positiven Realteil haben.
- [ ] Wenn die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.
- [x] Wenn die Sprungantwort für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.

j) Welche Entsprechung hat die Faltung $y(t) = \int\limits_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$ im Bildbereich?

- [ ] $Y(s) = G(s) + U(s)$.
- [x] $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$.
- [ ] $Y(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) \cdot U(s)$.

k) Was bedeutet Rückkopplung?

- [ ] Aufschaltung einer messbaren Führungsgröße auf die Störgröße.
- [x] Rückwirkung der Regelgröße auf die Stellgröße.
- [x] Durch eine Rückkopplung ist das Ausregeln einer Störgröße möglich.

l) Welche Bezeichnungen sind in der Regelungstechnik üblich?

- [ ] Mit $y(t)$ wird im Standard-Regelkreis die Stellgröße bezeichnet.
- [x] Mit $w(t)$ wird im Standard-Regelkreis die Führungsgröße bezeichnet.
- [ ] Mit $u(t)$ wird im Standard-Regelkreis die Führungsgröße bezeichnet.

m) Wie beeinflusst die Pollage eines Systems dessen dynamisches Verhalten?

- [ ] Systeme mit reellen Doppelpolen sind schwingungsfähig.
- [x] Je weiter links die stabilen Pole des Systems liegen, um so schneller ist es.
- [x] Bei konjugiert komplexen Polen kann das System schwingen.

$\boxed{\sum 20}$

Aufgabe 2: Laplace-Transformation

a) Laplacetransformation ergibt:

$$J \cdot s^2 \cdot \Phi(s) + s \cdot \Phi(s) = I(s), \qquad U(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) + s \cdot \Phi(s)\,.$$ 4

Die zweite Gleichung umgestellt nach $I(s)$ lautet:

$$I(s) = \frac{U(s) - s \cdot \Phi(s)}{R + s \cdot L}$$

Einsetzen in die erste Gleichung eliminiert $I(s)$:

$$J \cdot s^2 \cdot \Phi(s) + s \cdot \Phi(s) = \frac{U(s) - s \cdot \Phi(s)}{R + s \cdot L}$$

$$\Leftrightarrow (R + Ls)(Js^2 + s) \cdot \Phi(s) = U(s) - s \cdot \Phi(s)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{G_S(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{1}{LJs^3 + (RJ + L)s^2 + (R+1)s}}$$ 4

b) Die Bezeichnung der Regelstrecke lautet IT_1. Bei $G_R(s)$ handelt es sich um einen P-Regler. 2

Berechnung der Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$:

$$G_W(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}\,, \qquad G_R(s)G_S(s) = \frac{100}{s(s+20)}$$

$$\Leftrightarrow G_W(s) = \frac{\frac{100}{s(s+20)}}{1 + \frac{100}{s(s+20)}} \Rightarrow \boxed{G_W(s) = \frac{100}{s^2 + 20s + 100} = \frac{100}{(s+10)^2}}$$ 4

Stabilität:

$$\boxed{p_{1/2} = -10}$$

Es handelt sich um ein stabiles System, weil sich der Doppelpol in der linken s-Halbebene befindet. 3

c) Das Eingangssignal $\varphi_{soll}(t)$ setzt sich aus zwei Einheitssprüngen zusammen. Neben der bereits angegebenen Korrespondenz wird der Zeitverschiebungssatz benötigt:

$$f(t - T) \circ\!\!-\!\!\!\bullet\, F(s)\, e^{-sT}$$

$$\varphi_{soll}(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1)$$

$$\circ\!\!-\!\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}\Phi_{soll}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-s} \\ &= \frac{1}{s} \cdot \left(1 - e^{-s}\right)\end{aligned}$$ 4

Um $\Phi(s)$ zu berechnen muss die Strecke mit dem Eingangssignal im Bildbereich multipliziert werden:

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= G_W(s) \cdot \Phi_{soll}(s) \\ &= \frac{100}{(s+10)^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(1 - e^{-s}\right) \\ &= \underbrace{\frac{100}{s\,(s+10)^2}}_{\Phi_1(s)} + \underbrace{\frac{100}{s\,(s+10)^2} \cdot e^{-s}}_{\Phi_2(s)}\end{aligned}$$ $\boxed{1}$

Für $\varphi(t)$ gilt:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$$

Durch Anwendung der angegebenen Korrespondenz ergibt sich die Transformation von $\Phi_1(s)$ in den Zeitbereich zu:

$$\varphi_1(t) = \left(1 - e^{-10t} - 10\,t\,e^{-10t}\right) \cdot \sigma(t)$$

$\boxed{2}$

$\varphi_2(t)$ ergibt sich aus $\varphi_1(t)$, indem der Zeitverschiebungssatz angewendet wird:

$$\varphi_2(t) = \left(1 - e^{-10(t-1)} - 10\,(t-1)\,e^{-10(t-1)}\right) \cdot \sigma(t-1)\,.$$ $\boxed{2}$

Für $\varphi(t)$ gilt daher:

$$\begin{aligned}\varphi(t) = &\left(1 - e^{-10t} - 10\,t\,e^{-10t}\right) \cdot \sigma(t) \\ &+ \left(1 - e^{-10(t-1)} - 10\,(t-1)\,e^{-10(t-1)}\right) \cdot \sigma(t-1)\,.\end{aligned}$$

$\boxed{1}$

$\boxed{\sum 27}$

Aufgabe 3: Reglerentwurf

a) Aus dem Blockschaltbild liest man ab:

$$[(W - G_M \cdot Y) \cdot G_R \cdot (G_1 + G_2) + D] \cdot G_3 = Y$$ 3

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man:

$$G_R \cdot (G_1 + G_2) \cdot G_3 \cdot W - G_R \cdot (G_1 + G_2) \cdot G_3 \cdot G_M \cdot Y + G_3 \cdot D = Y$$

$$Y \cdot [1 + G_R \cdot (G_1 + G_2) \cdot G_3 \cdot G_M] = G_R \cdot (G_1 + G_2) \cdot G_3 \cdot W + G_3 \cdot D$$

$$\boxed{Y = \underbrace{\frac{G_R \cdot (G_1 + G_2) \cdot G_3}{1 + G_R \cdot (G_1 + G_2) \cdot G_3 \cdot G_M}}_{G_W} \cdot W + \underbrace{\frac{G_3}{1 + G_R \cdot (G_1 + G_2) \cdot G_3 \cdot G_M}}_{G_D} \cdot D}$$ 3

b) Störung am Eingang:

$$E(s) = \frac{-G_S(s)}{1 + G_R(s) G_S(s)} \cdot D_i(s) \Rightarrow E(s) = \frac{-2}{s(1+5s)\left(1 + \frac{2K}{s(1+5s)}\right)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$E(s) = \frac{-2}{s[s(1+5s) + 2K]} = \frac{-2}{s(5s^2 + s + 2K)}$$ 2

$$e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{-2}{\cancel{s}(5s^2 + s + 2K)} = \frac{-2}{0 + 0 + 2K} = \boxed{\frac{-1}{K} \neq 0}$$ 2

Trotz des globalen I-Verhaltens der Regelstecke bleibt ein stationärer Regelfehler bei einer sprungförmigen Störung am Streckeneingang (Regler mit I-Anteil zur Vermeidung eines bleibenden Regelfehlers nötig). Fordert man einen Regelfehler $|e(t \to \infty)|$ von höchstens 0,1 ergibt sich für die Reglerverstärkung K:

$$\left|\frac{-1}{K}\right| = \frac{1}{K} \leq 0.1 \Leftrightarrow \boxed{K \geq 10}$$ 2

Störung am Ausgang:

$$E(s) = \frac{-1}{1 + G_R(s) G_S(s)} \cdot D_o(s) \Rightarrow E(s) = \frac{-1}{1 + \frac{2K}{s(1+5s)}} \cdot \frac{1}{s}$$

$$E(s) = \frac{-\cancel{s}(1+5s)}{\cancel{s}[s(1+5s) + 2K]} = \frac{-(1+5s)}{5s^2 + s + 2K}$$ 2

$$e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{-s(1+5s)}{5s^2 + s + 2K} = \boxed{\frac{0}{2K} = 0}$$ 2

Bei einer sprungförmigen Störung am Ausgang einer Regelstrecke mit globalem I-Verhalten genügt ein P-Regler, um den stationären Regelfehler auf Null zu bringen.

c) Es ist eine Mindestverstärkung zu erwarten, weil die Regelstrecke instabil ist (negativer Koeffizient im Nennerpolynom)! 2

Das charakteristische Polynom des Standardregelkreises lautet mit den gegebenen Übertragungsfunktionen für G_R und G_S:

$$1+G_RG_S = 0 \Rightarrow 1+\frac{5(K_P s + K_I)}{s(s^2+2s-10)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{1}_{c_3}\cdot s^3 + \underbrace{2}_{c_2}\cdot s^2 + \underbrace{(5K_P-10)}_{c_1} s + \underbrace{5K_I}_{c_0} = 0$$ $\boxed{2}$

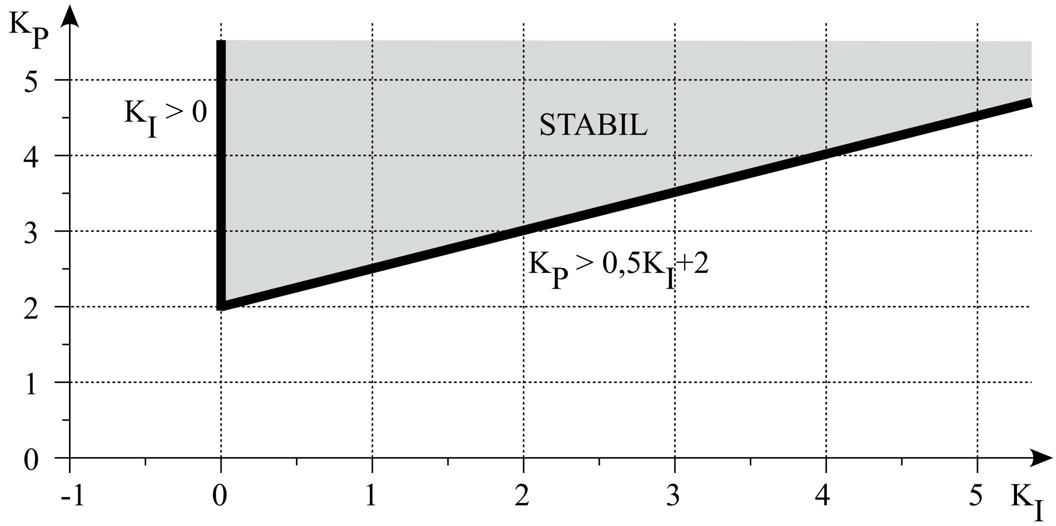
Die Bedingung für Stabilität, dass alle $c_i > 0$ sein müssen, ist erfüllt für $c_3 = 1 > 0$ und $c_2 = 2 > 0$. Für die anderen Fälle ergibt sich:

$$c_1: \; 5K_P - 10 > 0 \Leftrightarrow \boxed{K_P > 2}, \qquad c_0: \; 5K_I > 0 \Leftrightarrow \boxed{K_I > 0}$$ $\boxed{2}$

Für Übertragungsfunktionen 3. Ordnung ist zusätzlich folgende Bedingung zu prüfen:

$$c_1 \cdot c_2 - c_0 \cdot c_3 > 0: \; (5K_P - 10)\cdot 2 - 5K_I \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{K_P > 0{,}5 \cdot K_I + 2}$$ $\boxed{3}$

Stabilitätsdiagramm (die Bedingung für c_1 muss nicht eingezeichnet werden, weil sie in der letzten Bedingungen enthalten ist):



$\boxed{4}$

$\boxed{\sum 29}$

Aufgabe 4: Frequenzgang einer Übertragungsfunktion

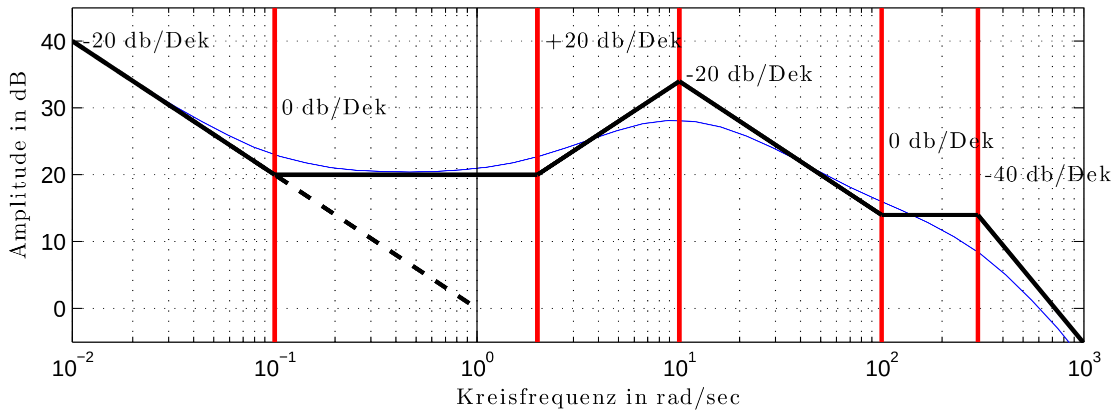
a) Da die Übertragungsfunktion globales I-Verhalten hat, trägt man die Verstärkung $k_{G_0(s)} = 1$ (entspricht 0 dB) für die Konstruktion des Amplitudengangs bei $\omega = 1\,sec^{-1}$ ein. Das Amplitudenverhältnis beginnt mit -20 dB/Dek. und das Phasenverhältnis bei $-90°$. Sortiert nach steigender Eckfrequenz ω_e lauten die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion: 2

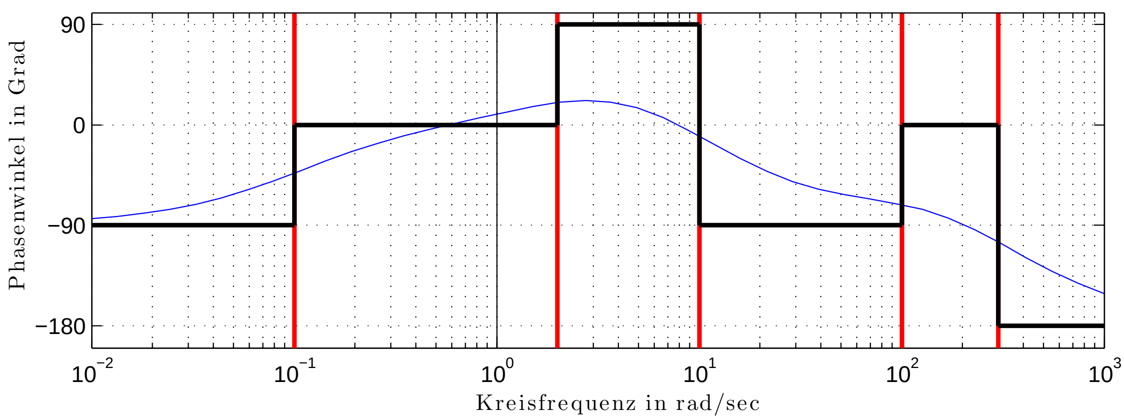
$$G_0(s) = \frac{(1+10s)\left(1+\frac{1}{2}s\right)\left(1+\frac{1}{100}s\right)}{s\left(1+\frac{1}{10}s\right)^2\left(1+\frac{1}{300}s\right)^2}$$

$\omega_{e1} = 0$ sec^{-1}	I-Glied	Polstelle bei s=0	-20 dB/Dek.	$-90°$
$\omega_{e2} = 0.1$ sec^{-1}	PD-Glied	Nullstelle bei s=-0,1	0 dB/Dek.	$0°$
$\omega_{e3} = 2$ sec^{-1}	PD-Glied	Nullstelle bei s=-2	20 dB/Dek.	$90°$
$\omega_{e4,5} = 10$ sec^{-1}	PT_2-Glied	Doppelpolstelle bei s=-10	-20 dB/Dek.	$-90°$
$\omega_{e6} = 100$ sec^{-1}	PD-Glied	Nullstelle bei s=-100	0 dB/Dek.	$0°$
$\omega_{e7,8} = 300$ sec^{-1}	PT_2-Glied	Doppelpolstelle bei s=-300	-40 dB/Dek.	$-180°$

12

b) Asymptotischer Amplituden- und Phasengang:





10

$\sum 24$