Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

2. Februar 2011

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Gesamt
Mat.-Nr.:	Soll:	20	25	25	30	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Was ist das Hurwitz-Kriterium?
- ☐ Eine Methode zur Überprüfung der Stabilität linearer dynamischer Systeme.
- ☐ Eine Methode mit der überprüft werden kann, ob die Nullstellen eines Polynoms einen negativen Realteil haben.
- ☐ Eine Methode zur Überprüfung der Stabilität **nicht**linearer dynamischer Systeme.

b) Was trifft für das Hurwitzkriterium zu?
- ☐ Das Kriterium ist auch bei Systemen hoher Ordnung sehr einfach auszuwerten.
- ☐ Das Kriterium ist bei Systemen bis zu 3. Ordnung besonders einfach auszuwerten.
- ☐ Eine positive Eigenschaft ist, dass mit dem Kriterium errechnet werden kann, in welchem Bereich die Reglerparameter liegen müssen, damit das geregelte System stabil bleibt.

c) Wobei handelt es sich um **keine** Regelung?
- ☐ Automatische Straßenbeleuchtung mit Messung der Helligkeit des Himmels.
- ☐ Tempomat.
- ☐ Heizkörper mit Thermostat.

d) Welche Vorteile hat der Entwurf eines Kompensationsreglers?

- [ ] Unabhängig von den Eigenschaften der Regelstrecke kann ein beliebiges gewünschtes Verhalten des geschlossenen Regelkreises erreicht werden.
- [ ] Das Entwurfsverfahren ergibt nicht nur die Reglerparameter sondern auch die Reglerstruktur.
- [ ] Der Kompensationsregler ist besonders gut zur Kompensation der Totzeit der Regelstrecke geeignet.

e) Folgendes ist beim Entwurf eines Kompensationsreglers zu beachten?

- [ ] Nichtphasenminimales Verhalten der Regelstrecke muss beim Entwurf nicht gesondert berücksichtigt werden.
- [ ] Damit sich ein realisierbarer Regler ergibt, muss der Polüberschuss der Regelstrecke bei der Auswahl der gewünschten Übertragungsfunkton des geschlossenen Regelkreises berücksichtigt werden.
- [ ] Die Regelstrecke muss stabil sein, wenn ein Kompensationsregler verwendet werden soll.

f) Was gilt für den Polvorgaberegler?

- [ ] Der Polvorgaberegler kann sowohl für stabile als auch instabile Regelstrecken verwendet werden.
- [ ] Beim Entwurf eines Polvorgabereglers ist es nicht möglich, einen Regler mit I-Anteil zu erzeugen.
- [ ] Es werden nur die Pole des geschlossenen Regelkreises vorgegeben, die Nullstellen ergeben sich zwangsläufig aus dem Entwurf.

g) Was ist ein Vorfilter?

- [ ] Der Vorfilter dient dazu, Störgrößen zu filtern.
- [ ] Mit dem Vorfilter wird die gemessene Regelgröße gefiltert, um Messrauschen zu entfernen.
- [ ] Mit dem Vorfilter wird die Führungsgröße gefiltert.

h) Für ein nichtphasenminimales System soll eine Steuerung berechnet werden. Was ist zu beachten?

- [ ] Die nichtphasenminimalen Nullstellen dürfen durch die Steuerung auf keinen Fall gekürzt werden.
- [ ] Der nichtphasenminimale Einfluss kann durch eine geeignete Steuerung aus dem Systemverhalten entfernt werden.
- [ ] Eine übliche Vorgehensweise ist, die an der Imaginärachse gespiegelten nichtminimalphasigen Nullstellen entweder in den Zähler oder den Nenner der Steuerung einzufügen. Dadurch wird entweder der gewünschte ideale Phasengang ($\varphi(\omega)$=0°) oder der Amplitudengang (A(ω)=1) besser angenähert.

i) Was ist bezüglich des D-Anteils im PID Regler zu beachten?

- [ ] Der D-Anteil verstärkt das Messrauschen. Je nach Stärke des Messrauschen ist daher eine geeignete Filterung des Messsignales notwendig, um eine verrauschte Stellgröße zu vermeiden.
- [ ] Der D-Anteil in einem PID-Regler wirkt sich stets destabilisierend auf die Regelung aus.
- [ ] Bei sprungartig veränderlichen Führungsgrößen ist es sinnvoll, das D-Glied nicht auf den Regelfehler sondern nur auf die Regelgröße anzuwenden, um starke Stöße in der Stellgröße zu vermeiden.

j) Wozu dienen Einstellregeln, z.B. nach Ziegler-Nichols oder mittels Summenzeitkonstante?

- [ ] Sie dienen dazu, möglichst schnell (ohne genaue Modellvorstellung der Regelstrecke) anhand von Messdaten einen ersten groben Reglerentwurf durchzuführen.
- [ ] Der Entwurf ist auf stabile und schwingungsarme Regelstrecken, in der Regel Verzögerungssysteme mit Ausgleich, beschränkt.
- [ ] Die Regeln basieren auf langjähriger Erfahrung und führen stets zu hervorragenden Regelergebnissen.

k) Was gilt für die Wurzelortskurve?

- [ ] Die Äste der Wurzelortskurve beginnen in den Polen des offenen Regelkreises und enden in den Nullstellen, bzw. im Unendlichen.
- [ ] Die Wurzelortskurve zeigt alle Pollagen des geschlossenen Regelkreises an, die auftreten können, wenn die Verstärkung des offenen Regelkreises von 0 bis Unendlich variiert wird.
- [ ] Die Wurzelortskurve stellt das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung eines dynamischen Systems bei verschiedenen Frequenzen in einem Zeigerdiagramm dar.

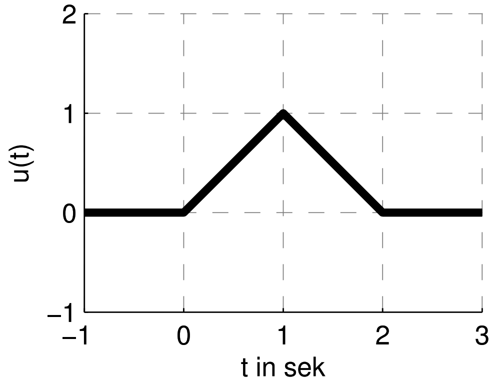
l) Was gilt für den Phasengang des offenen Regelkreises beim Reglerentwurf?

- [ ] Eine Absenkung der Phase, wie sie z.B. durch I-Anteile oder Totzeit verursacht wird, ist ungünstig für den Reglerentwurf und macht in der Regel eine langsamere Regelung nötig, um Stabilitätsprobleme zu vermeiden.
- [ ] Die Phase hat keinen Einfluss auf die Stabilität des Regelkreises.
- [ ] Durch die Absenkung der Phase verbessert sich stets das Regelverhalten.

Aufgabe 2: Laplace-Transformation

Ein System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ wird mit dem Eingangssignal $U(s)$ angeregt.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{9}{s+3}$$



a) Bestimmen Sie das Eingangssignal $U(s)$ aus dem oben abgebildeten Zeitverlauf $u(t)$ und ermitteln Sie das Ausgangssignal $Y(s)$.

b) Das Ausgangssignal besteht aus mehreren Summanden mit verschiedenen Zeitverschiebungen:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \ldots$$

Der Term

$$Y_1(s) = \frac{9}{s^2\,(s+3)}$$

ist dabei Bestandteil aller anderer Summanden $Y_i(s)$. Berechnen Sie daher $y_1(t)$ aus $Y_1(s)$, indem Sie eine Partialbruchzerlegung durchführen oder den Integrationssatz anwenden und mit Hilfe bekannter Korrespondenzen in den Zeitbereich zurücktransformieren. Falls Sie mit dem Integrationssatz arbeiten, gilt die Anfangsbedingung $y(t=0) = 0$.

c) Bestimmen Sie $y(t)$ aus dem Ergebnis für $y_1(t)$ aus Aufgabenteil b). Erläutern Sie dazu kurz, wie sich die weiteren Summanden aus $y_1(t)$ ergeben.

Hinweis: Aufgabenteil b) kann unabhängig von a) und c) gelöst werden.

Aufgabe 3: Wurzelortskurve

Gegeben sind die Übertragungsfunktionen des offenen Regelkreises $G_0(s)$:

I) $G_{01}(s) = K \cdot \dfrac{1}{(s+1)^2\,(s+2)}$ II) $G_{02}(s) = K \cdot \dfrac{(s+1)}{(s+1)\,(s+4)\,(s^2+4s+5)}$

III) $G_{03}(s) = K \cdot \dfrac{(s+10)}{s\,(s+2)}$ IV) $G_{04}(s) = K \cdot \dfrac{1}{(s+1)^2}$

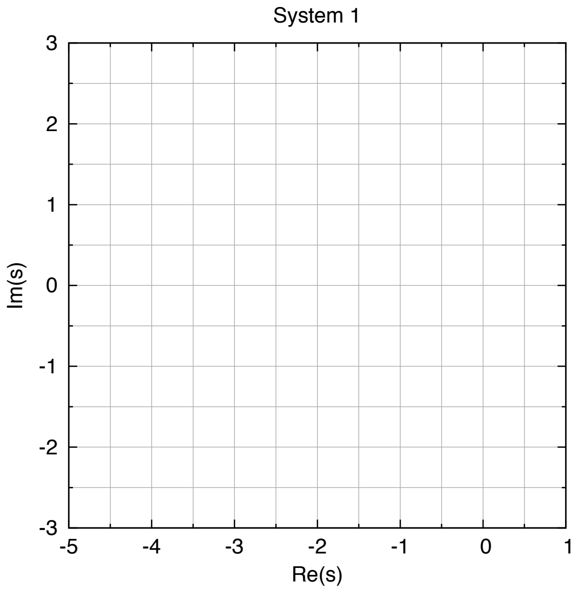
Hinweis: Alle Aufgabenteile können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

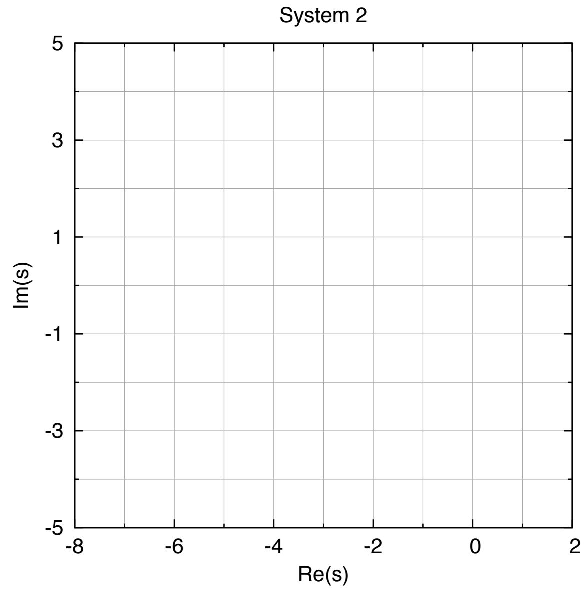
a) Zeichnen Sie für alle vier Systeme die Pole und Nullstellen in die vorbereiteten Diagramme ein. Kennzeichnen Sie dabei Nullstellen mit „o“ und Pole mit „x“.

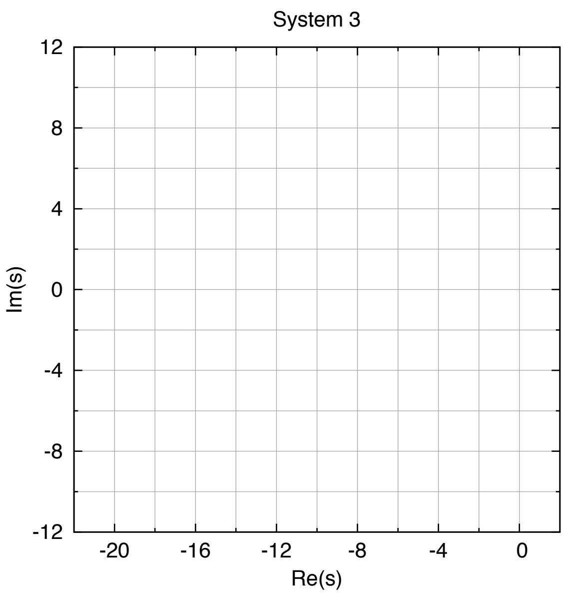
b) Zeichnen Sie für die vier gegebenen Systeme jeweils den qualitativen Verlauf der Wurzelortskurve in die vorbereiteten Diagramme ein. Die Berechnung von Verzweigungspunkten oder Asymptotenwinkeln ist für diesen Aufgabenteil **nicht** notwendig!

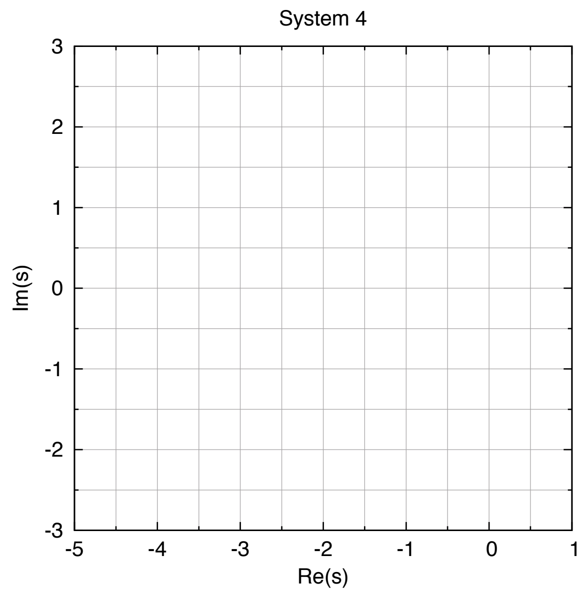
c) Betrachtet wird nun im Speziellen die Wurzelortskurve für System 1 mit der Übertragungsfunktion $G_{01}(s)$. Berechnen Sie hierfür den Schnittpunkt der Asymptoten s_A mit der reellen Achse und die Asymptotenwinkel ψ_i.

d) Begründen Sie, warum sich für System 1 mit gegebenem P-Regler eine stabile Regelung erzielen lässt. Für welche Verstärkung K_{krit} wird der geschlossene Regelkreis instabil?


System 1
Im(s)
Re(s)

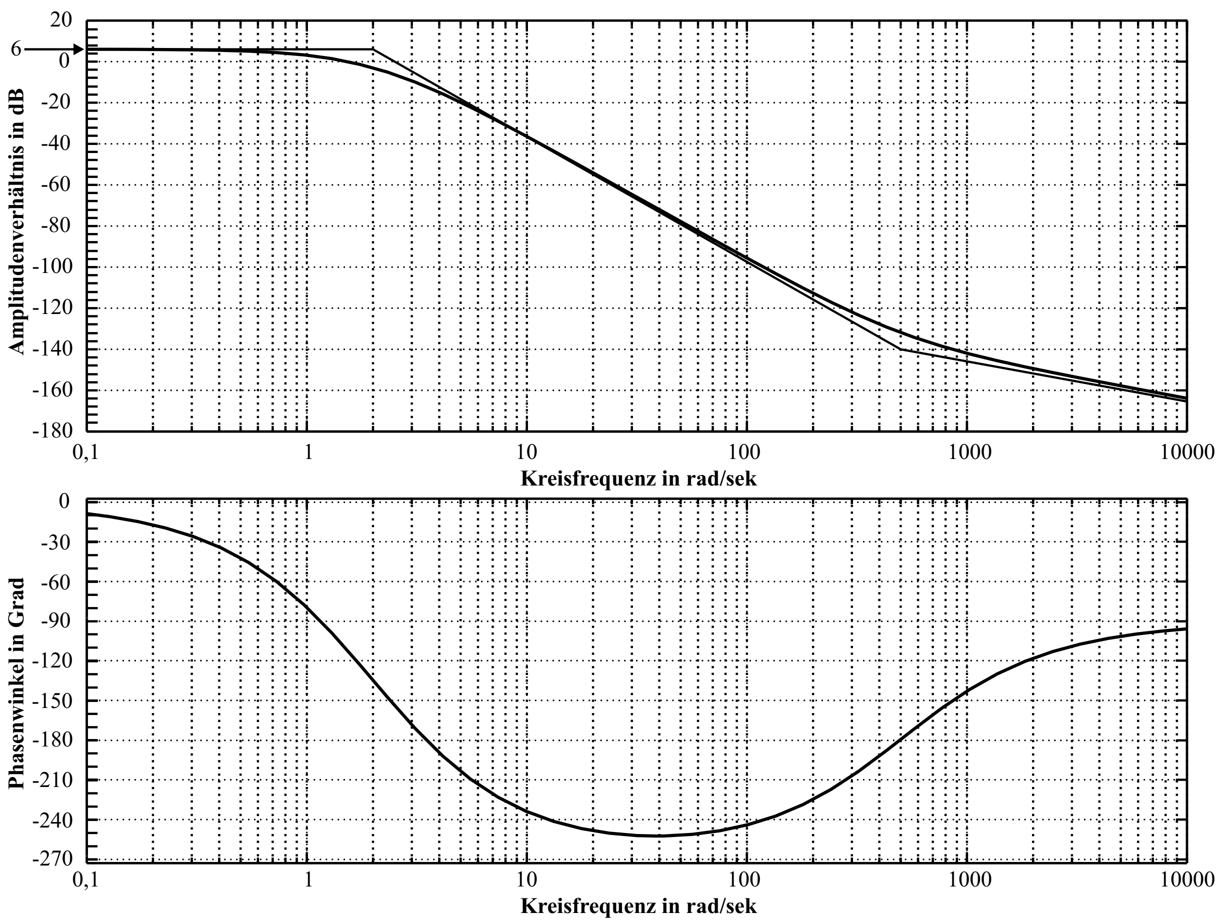

System 2
Im(s)
Re(s)


System 3
Im(s)
Re(s)


System 4
Im(s)
Re(s)

Aufgabe 4: Frequenzgang

Gegeben ist der nachfolgend dargestellte Frequenzgang einer Regelstrecke $G_S(s)$.



Hinweis: Alle Aufgabenteile können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Ermitteln Sie aus dem gegebenen Frequenzgang die Übertragungsfunktion der Regelstrecke $G_S(s)$. Der Wert der Verstärkung kann als ganzzahlig angenommen werden.

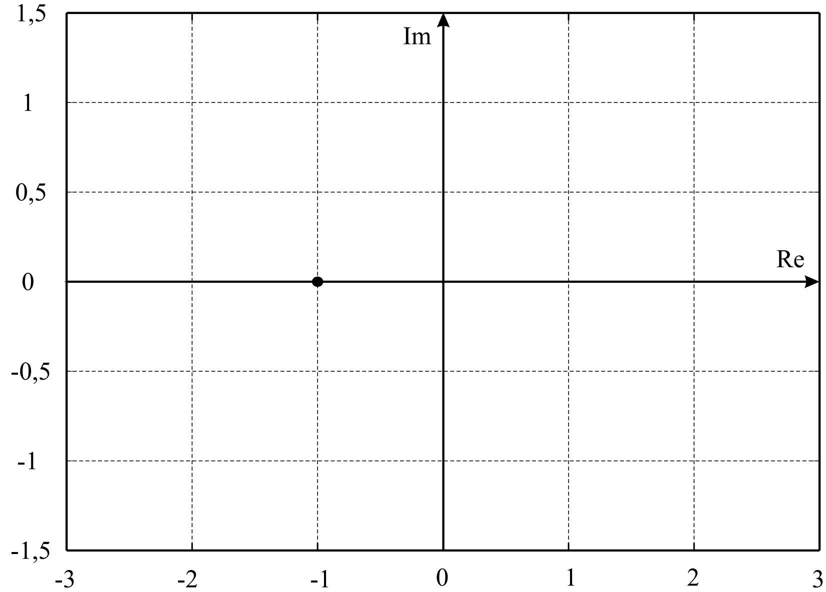
b) Zeichnen Sie den asymptotischen Phasengang in das oben stehende Diagramm.

c) Welches Verhalten der Sprungantwort für $h(t \to \infty)$ und $h(t \to 0)$ lässt sich aus dem Frequenzgang ableiten?

d) Ermitteln Sie die Amplitudenreserve A_r in dB und die Phasenreserve unter der Annahme, dass ein P-Regler $G_R(s) = 1$ verwendet wird. Ist der geschlossene Regelkreis mit diesem Regler stabil?

e) Um eine gute Dämpfung zu erhalten, soll die Phasenreserve mindestens 30° betragen. Um wie viel dB darf die Reglerverstärkung höchstens verändert werden, um diese Bedingung einzuhalten?

f) Zeichnen Sie in das nachfolgend vorbereitete Diagramm **qualitativ (Skizze in den richtigen Quadranten)** die Frequenzgangortskurve von $G_S(s)$ mit dem **exakten** Anfangswert ($\omega \to 0$).



Lösungen:

Aufgabe 1: Lösung Verständnisfragen

a) Was ist das Hurwitz-Kriterium?

- [x] Eine Methode zur Überprüfung der Stabilität linearer dynamischer Systeme.
- [x] Eine Methode mit der überprüft werden kann, ob die Nullstellen eines Polynoms einen negativen Realteil haben.
- [ ] Eine Methode zur Überprüfung der Stabilität **nicht**linearer dynamischer Systeme.

b) Was trifft für das Hurwitzkriterium zu?

- [ ] Das Kriterium ist auch bei Systemen hoher Ordnung sehr einfach auszuwerten.
- [x] Das Kriterium ist bei Systemen bis zu 3. Ordnung besonders einfach auszuwerten.
- [x] Eine positive Eigenschaft ist, dass mit dem Kriterium errechnet werden kann, in welchem Bereich die Reglerparameter liegen müssen, damit das geregelte System stabil bleibt.

c) Wobei handelt es sich um **keine** Regelung?

- [x] Automatische Straßenbeleuchtung mit Messung der Helligkeit des Himmels.
- [ ] Tempomat.
- [ ] Heizkörper mit Thermostat.

d) Welche Vorteile hat der Entwurf eines Kompensationsreglers?

- [ ] Unabhängig von den Eigenschaften der Regelstrecke kann ein beliebiges gewünschtes Verhalten des geschlossenen Regelkreises erreicht werden.
- [x] Das Entwurfsverfahren ergibt nicht nur die Reglerparameter sondern auch die Reglerstruktur.
- [ ] Der Kompensationsregler ist besonders gut zur Kompensation der Totzeit der Regelstrecke geeignet.

e) Folgendes ist beim Entwurf eines Kompensationsreglers zu beachten?

- [ ] Nichtphasenminimales Verhalten der Regelstrecke muss beim Entwurf nicht gesondert berücksichtigt werden.
- [x] Damit sich ein realisierbarer Regler ergibt, muss der Polüberschuss der Regelstrecke bei der Auswahl der gewünschten Übertragungsfunkton des geschlossenen Regelkreises berücksichtigt werden.
- [x] Die Regelstrecke muss stabil sein, wenn ein Kompensationsregler verwendet werden soll.

f) Was gilt für den Polvorgaberegler?

- [x] Der Polvorgaberegler kann sowohl für stabile als auch instabile Regelstrecken verwendet werden.
- [ ] Beim Entwurf eines Polvorgabereglers ist es nicht möglich, einen Regler mit I-Anteil zu erzeugen.
- [x] Es werden nur die Pole des geschlossenen Regelkreises vorgegeben, die Nullstellen ergeben sich zwangsläufig aus dem Entwurf.

g) Was ist ein Vorfilter?

- [ ] Der Vorfilter dient dazu, Störgrößen zu filtern.
- [ ] Mit dem Vorfilter wird die gemessene Regelgröße gefiltert, um Messrauschen zu entfernen.
- [x] Mit dem Vorfilter wird die Führungsgröße gefiltert.

h) Für ein nichtphasenminimales System soll eine Steuerung berechnet werden. Was ist zu beachten?

- [x] Die nichtphasenminimalen Nullstellen dürfen durch die Steuerung auf keinen Fall gekürzt werden.
- [ ] Der nichtphasenminimale Einfluss kann durch eine geeignete Steuerung aus dem Systemverhalten entfernt werden.
- [x] Eine übliche Vorgehensweise ist, die an der Imaginärachse gespiegelten nichtminimalphasigen Nullstellen entweder in den Zähler oder den Nenner der Steuerung einzufügen. Dadurch wird entweder der gewünschte ideale Phasengang ($\varphi(\omega)$=0°) oder der Amplitudengang (A(ω)=1) besser angenähert.

i) Was ist bezüglich des D-Anteils im PID Regler zu beachten?

- [x] Der D-Anteil verstärkt das Messrauschen. Je nach Stärke des Messrauschen ist daher eine geeignete Filterung des Messsignales notwendig, um eine verrauschte Stellgröße zu vermeiden.
- [ ] Der D-Anteil in einem PID-Regler wirkt sich stets destabilisierend auf die Regelung aus.
- [x] Bei sprungartig veränderlichen Führungsgrößen ist es sinnvoll, das D-Glied nicht auf den Regelfehler sondern nur auf die Regelgröße anzuwenden, um starke Stöße in der Stellgröße zu vermeiden.

j) Wozu dienen Einstellregeln, z.B. nach Ziegler-Nichols oder mittels Summenzeitkonstante?

- [x] Sie dienen dazu, möglichst schnell (ohne genaue Modellvorstellung der Regelstrecke) anhand von Messdaten einen ersten groben Reglerentwurf durchzuführen.
- [x] Der Entwurf ist auf stabile und schwingungsarme Regelstrecken, in der Regel Verzögerungssysteme mit Ausgleich, beschränkt.
- [ ] Die Regeln basieren auf langjähriger Erfahrung und führen stets zu hervorragenden Regelergebnissen.

k) Was gilt für die Wurzelortskurve?

- [x] Die Äste der Wurzelortskurve beginnen in den Polen des offenen Regelkreises und enden in den Nullstellen, bzw. im Unendlichen.
- [x] Die Wurzelortskurve zeigt alle Pollagen des geschlossenen Regelkreises an, die auftreten können, wenn die Verstärkung des offenen Regelkreises von 0 bis Unendlich variiert wird.
- [ ] Die Wurzelortskurve stellt das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung eines dynamischen Systems bei verschiedenen Frequenzen in einem Zeigerdiagramm dar.

l) Was gilt für den Phasengang des offenen Regelkreises beim Reglerentwurf?

- [x] Eine Absenkung der Phase, wie sie z.B. durch I-Anteile oder Totzeit verursacht wird, ist ungünstig für den Reglerentwurf und macht in der Regel eine langsamere Regelung nötig, um Stabilitätsprobleme zu vermeiden.
- [ ] Die Phase hat keinen Einfluss auf die Stabilität des Regelkreises.
- [ ] Durch die Absenkung der Phase verbessert sich stets das Regelverhalten.

$\boxed{\sum 20}$

Aufgabe 2: Laplace-Transformation

a) Das Eingangssignal U(s) setzt sich aus drei Rampen zusammen. Folgende Korrespondenz wird benötigt:

$$\frac{1}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ t \cdot \sigma(t)$$

Weiterhin muss die zeitliche Verschiebung beachtet werden:

$$f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)\, e^{-sT}$$

$$u(t) = t \cdot \sigma(t) - 2\,(t-1) \cdot \sigma(t-1) + (t-2) \cdot \sigma(t-2)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{s^2} - 2 \cdot \frac{1}{s^2} \cdot e^{-1 \cdot s} + \frac{1}{s^2} \cdot e^{-2 \cdot s} \\ &= \frac{1}{s^2} \cdot \left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right) \end{aligned}$$ 3

Um $Y(s)$ zu berechnen muss die Strecke mit dem Eingangssignal im Bildbereich multipliziert werden:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot U(s) \\ &= \frac{9}{s+3} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \left(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right) \\ &= \underbrace{\frac{9}{s^2\,(s+3)}}_{Y_1(s)} + \underbrace{(-2) \cdot \frac{9}{s^2\,(s+3)} \cdot e^{-s}}_{Y_2(s)} + \underbrace{\frac{9}{s^2\,(s+3)} \cdot e^{-2\,s}}_{Y_3(s)} \end{aligned}$$ 3

b) Zuerst muss eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{9}{s^2\,(s+3)} \\ &= \frac{B_{11}}{s} + \frac{B_{12}}{s^2} + \frac{B_2}{s+3} \end{aligned}$$ 1

Anschließend müssen die Parameter B_{11}, B_{12} und B_2 berechnet werden:

$$B_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} \cdot \left(Y_1(s) \cdot s^2\right)\Big|_{s=0} = \frac{1}{1} \cdot \frac{d}{ds} \cdot \left(\frac{9}{s+3}\right)\Big|_{s=0}$$ 2

$$= \frac{-9}{(s+3)^2}\Big|_{s=0} = -1$$ 1

$$B_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \cdot \frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}} \cdot \left(Y_1(s) \cdot s^2\right)\Big|_{s=0} = \frac{1}{1}\,\frac{9}{s+3}\Big|_{s=0}$$ 2

$$= 3$$ 1

$$B_2 = Y_1(s) \cdot (s+3)\big|_{s=-3} = 1$$ 2

Mit den Parametern ist es nun möglich $Y_1(s)$ in folgender Form darzustellen und mit Hilfe der Korrespondenzen in den Zeitbereich zu übertragen. Folgende Korrespondenzen werden benötigt:

$$\frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \sigma(t)\ , \qquad \frac{1}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ t\cdot\sigma(t)\ , \qquad \frac{1}{s+a} \bullet\!\!-\!\!\circ\ e^{-at}\cdot\sigma(t)$$

$$Y_1(s) = (-1)\cdot\frac{1}{s} + 3\cdot\frac{1}{s^2} + 1\cdot\frac{1}{s+3}$$

$$y_1(t) = (-1)\cdot\sigma(t) + 3\cdot t\cdot\sigma(t) + e^{-3\cdot t}\cdot\sigma(t) \qquad \boxed{3}$$

c) Für $y(t)$ gilt:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$

$y_2(t)$ ergibt sich aus $y_1(t)$, indem eine Zeitverschiebung um eine Sekunde durchgeführt wird und der Summand mit einem Vorfaktor von (-2) multipliziert wird. $\boxed{1}$

$$y_2(t) = (-2)\cdot\left(-1 + 3\,(t-1) + e^{-3\cdot(t-1)}\right)\cdot\sigma(t-1) \qquad \boxed{2}$$

$y_3(t)$ ergibt sich aus $y_1(t)$, indem eine Zeitverschiebung um zwei Sekunden durchgeführt wird. $\boxed{1}$

$$y_3(t) = \left(-1 + 3\,(t-2) + e^{-3\cdot(t-2)}\right)\cdot\sigma(t-2) \qquad \boxed{2}$$

Für $y(t)$ gilt daher:

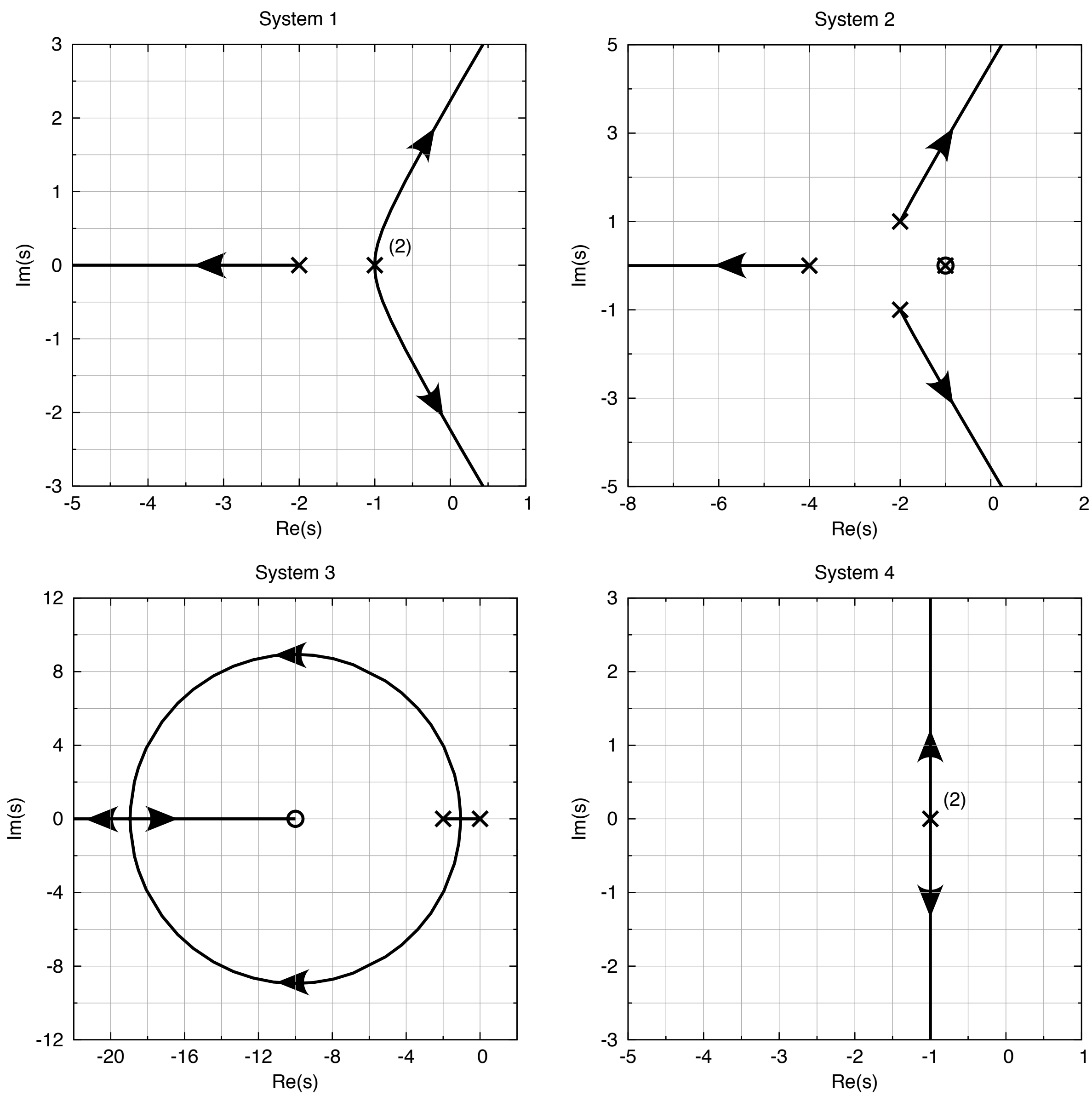
$$\begin{aligned} y(t) = {} & \left(-1 + 3\,t + e^{-3\cdot t}\right)\cdot\sigma(t) \\ & + (-2)\cdot\left(-1 + 3\,(t-1) + e^{-3\cdot(t-1)}\right)\cdot\sigma(t-1) \\ & + \left(-1 + 3\,(t-2) + e^{-3\cdot(t-2)}\right)\cdot\sigma(t-2) \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

$\boxed{\sum 25}$

Aufgabe 3: Wurzelortskurve

a) Pole und Nullstellen zeichnen: $\boxed{4}$

b) Wurzelortskurven skizzieren: $\boxed{8}$



c) Schnittpunkt s_A der Asymptoten mit der reellen Achse:

$$S_A = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{i=1}^{m} n_i}{n-m} = \frac{1}{3}\left(-1-1-2\right) = -\frac{4}{3}$$ $\boxed{2}$

Asymptotenwinkel:

$$\varphi_l = (1 + 2 \cdot l)\,\frac{180^\circ}{n-m} \qquad \text{mit: } l = 0, 1, \ldots, n-m-1$$

$$\varphi_0 = (1 + 2 \cdot 0)\,\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \qquad l = 0, 1, 2$$

$$\varphi_1 = (1 + 2 \cdot 1)\,\frac{180^\circ}{3} = 180^\circ$$

$$\varphi_1 = (1 + 2 \cdot 2)\,\frac{180^\circ}{3} = 300^\circ = -60^\circ$$

3

d) Untersuchung der Stabilität:

Mit gegebenem P-Regler lässt sich für $G_{01}(s)$ eine stabile Regelung erzielen, da alle Pole stabil sind und alle WOK-Äste bis zur kritischen Verstärkung K_{krit} in der linken s-Halbebene liegen. 2

Berechnung der charakteristischen Gleichung und Anwendung des Hurwitz-Kriteriums:

$$\begin{aligned} 1 + G_{01}(s) &= 0 \\ 1 + K\,\frac{1}{(s+1)^2\,(s+2)} &= 0 \\ (s^2 + 2\,s + 1)\,(s+2) + K &= 0 \\ \underbrace{1}_{c_3}\,s^3 + \underbrace{4}_{c_2}\,s^2 + \underbrace{5}_{c_1}\,s + \underbrace{2+K}_{c_0} &= 0 \end{aligned}$$

2

1) alle $c_i > 0 \quad \Rightarrow 2 + K > 0 \quad \Rightarrow K > -2$ 1

2) $c_1\,c_2 - c_0\,c_3 > 0$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4 - (2+K) \cdot 1 &> 0 \\ 20 - 2 - K &> 0 \\ 18 &> K \\ \Rightarrow \quad -2 < K &< 18 \end{aligned}$$

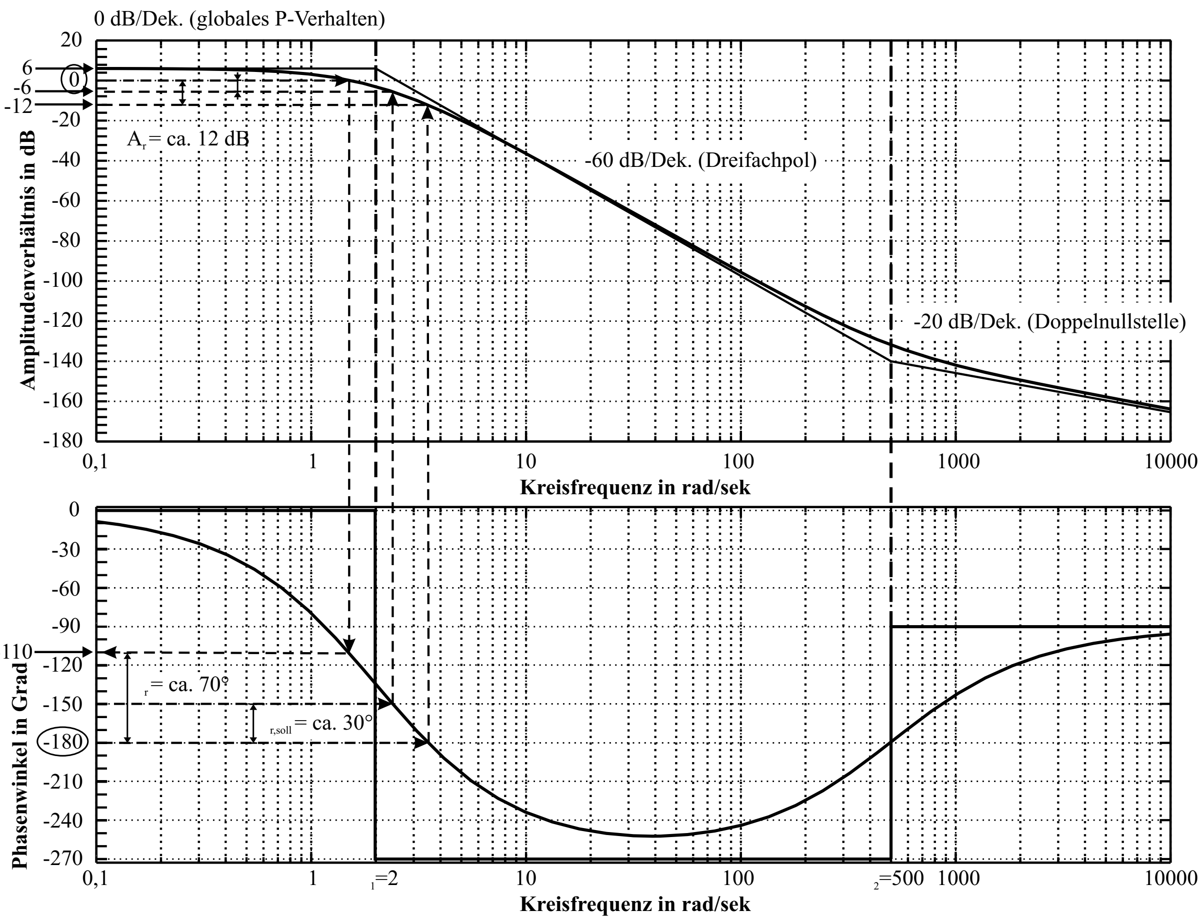
2

WOK-Regeln gelten nur für Verstärkungen $K \geq 0$ (andernfalls ändern sich die Winkel um 180°). Für $K_{krit} \geq 18$ wird der geschlossene Regelkreis instabil. 1

$\sum 25$

Aufgabe 4: Frequenzgang

a) Die Steigung des Amplitudengangs für kleine Frequenzen ($\omega \rightarrow 0$) liegt bei 0 dB/Dek., wodurch ein globales P-Verhalten vorliegt. Die Verstärkung kann man bei $\omega \rightarrow 0$ ablesen und erhält 6 dB, was ganzzahlig gerundet 2 entspricht.
Bei $\omega_1 = 2\,\text{sek}^{-1}$ fällt die Steigung um 60 dB/Dek., daher liegt ein Dreifachpol bei $s = -2$ vor. 3
Bei $\omega_2 = 500\,\text{sek}^{-1}$ nimmt die Steigung um 40 dB/Dek. zu, daher liegt eine Doppelnullstelle bei $s = -500$ vor. Die resultierende Gesamtsteigung liegt bei -20 dB/Dek. ab der Doppelnullstelle.



Es ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G_S(s) = 2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{500}s\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2}s\right)^3} = 2 \cdot \frac{(1 + 0{,}002s)^2}{(1 + 0{,}5s)^3} \quad \text{oder} \quad G_S(s) = 6{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{(s + 500)^2}{(s + 2)^3}$$ 5

b) Asymptotischer Phasengang: siehe Diagramm. 3

c) $A(\omega \rightarrow 0) = 6\,\text{dB}$ (globales P-Verhalten), damit konvergiert die Sprungantwort $h(t)$ für $t \rightarrow \infty$ mit einer Verstärkung von 2 gegen einen konstanten Endwert $h(t \rightarrow \infty) = 2$. 2
$A(\omega \rightarrow \infty) = -\infty\,\text{dB} = 0$, somit gilt $h(t = 0) = 0$, d.h. das System ist nicht sprungfähig. 2

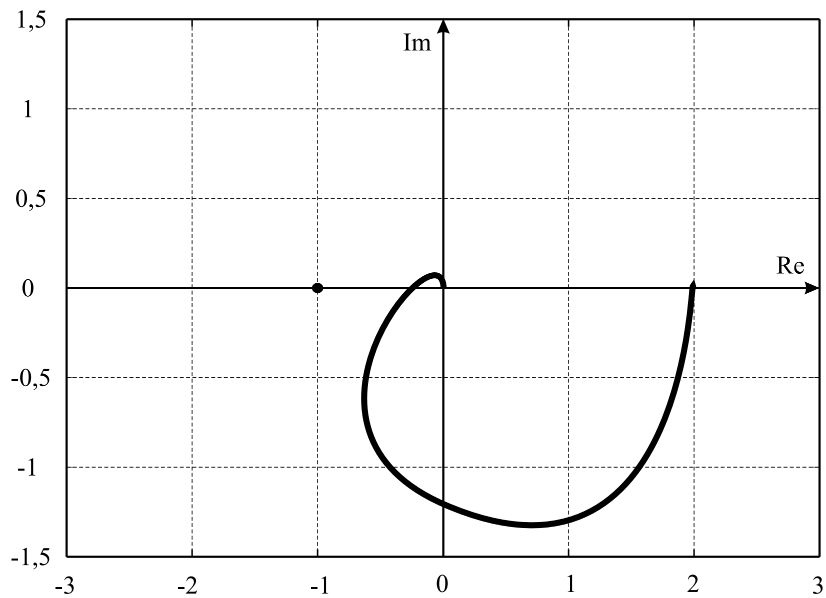
d) Bei einer Reglerverstärkung von 1 (0 dB) ändert sich der Frequenzgang nicht, somit können Amplituden- und Phasenreserve direkt abgelesen werden (siehe Diagramm): 6

$$A_r \approx 12\,\text{dB} \qquad \text{und} \qquad \varphi_r \approx 70°$$

Der geschlossene Regelkreis ist **stabil**, weil die Amplitudenreserve $A_r > 0\,\text{dB}$, bzw. die Phasenreserve $\varphi_r > 0°$ ist. 1

e) Bei einer Phasenreserve von 30°, beträgt die zulässige Phasenverschiebung $\varphi = -150°$. Bei dieser Phasenverschiebung beträgt das Amplitudenverhältnis ca. -6 dB. Die Reglerverstärkung kann also um ca. **6 dB** erhöht werden. 4

f) Der Anfangswert ($\omega \to 0$) liegt mit einem Phasenwinkel von 0° auf der positiv, reellen Achse mit einer Verstärkung (Entfernung vom Nullpunkt) von 2. Mit einem Phasenwinkel von -90° endet die Frequenzgangortskurve ($\omega \to \infty$) im Ursprung ohne den kritischen Punkt (-1,0) zu umschlingen. (siehe Diagramm)



4

$\sum$ 30