Prüfungsklausur Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

25.02.2023

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Ges.
Punkte:	22	18	21	24	14	21	120
Erreicht:							

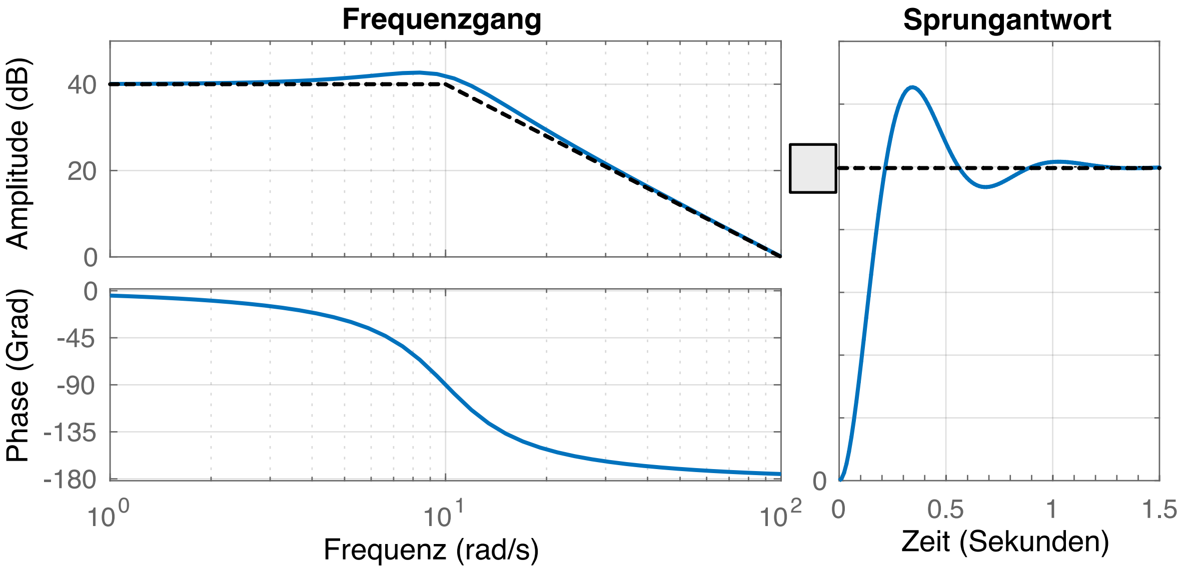
Dauer der Klausur: 2 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Kurzaufgaben (22 Punkte)

Alle Antworten zu den folgenden Aufgaben sind kurz zu begründen!

a) Gegeben sind der Frequenzgang und die Sprungantwort eines dynamischen Systems (10 Punkte):



1) Nehmen Sie an das System hat keine Nullstellen. Wie viele Pole hat das System? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils einmal anhand das Amplituden- und des Phasenganges.
2) Ermitteln Sie den stationären Endwert der Sprungantwort.
3) Ermitteln Sie die Eckfrequenz ω_0 des Systems und markieren Sie sie im Diagramm.
4) Ermitteln Sie die Resonanzfrequenz ω_r des Systems und markieren Sie sie im Diagramm.
5) Ermitteln Sie die Eigenfrequenz ω_e des Systems aus der Periodendauer T und kennzeichnen Sie T im Diagramm.
6) Ist die Dämpfung D des Systems in etwa 0,4 oder 1,4?
7) Ermitteln Sie mit den Ergebnissen aus 1), 2), 3) und 6) die Übertragungsfunktion des Systems $G(s)$.

b) Folgendes System soll mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geregelt werden (12 Punkte):

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

1) Ist das ungeregelte System $G(s)$ schwingungsfähig?
2) Wie verhält sich das ungeregelte System $G(s)$ bei Anregung mit einem Impuls für $t \to \infty$?
3) Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums, bei welcher Reglerverstärkung K_R (mit $K_R > 0$) der geschlossene Regelkreis an die Stabilitätsgrenze kommt.

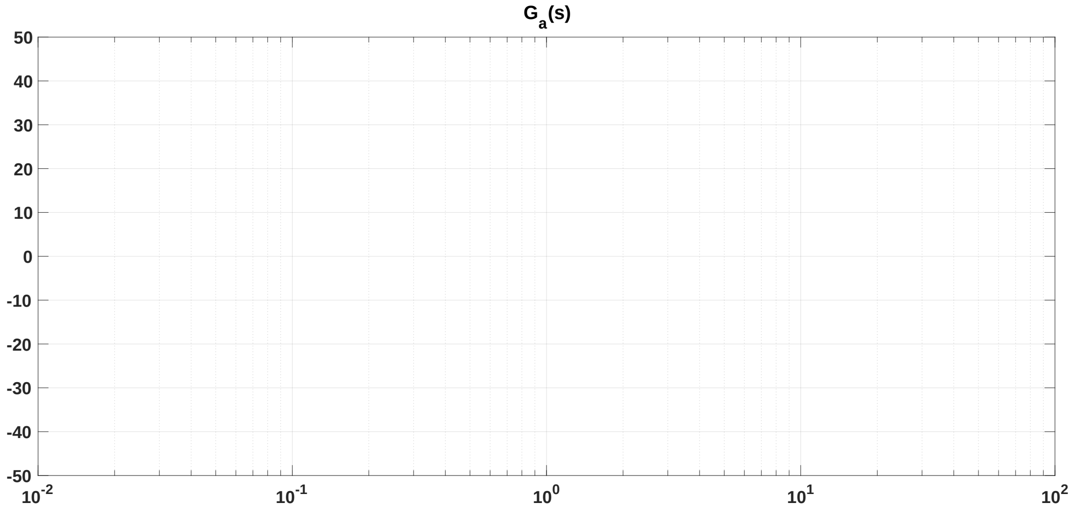
4) Der Nenner der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises für den grenzstabilen Fall aus 3) hat die Form $(s+a)(s^2+b)$. Berechnen Sie mit diesem Hinweis die Pole der Übertragungsfunktion. Mit welcher Frequenz schwingt das System? Klingt die Schwingung ab?

5) Nach den Einstellregeln von Ziegler-Nichols wählt man bei Verwendung eines P-Reglers die Reglerverstärkung so, dass sich eine Amplitudenreserve von 2 ergibt. Welcher Wert für K_R würde sich hier nach dieser Regel ergeben?

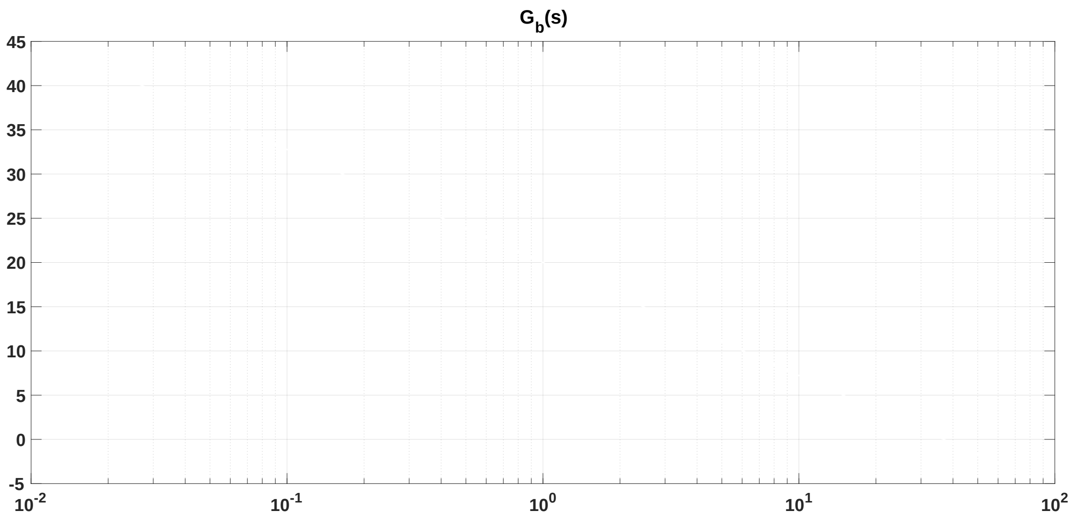
Aufgabe 2: Dynamische Systeme: Benennung und Bode Plot (18 Punkte)

Im Folgenden sind verschiedene dynamische Systeme gegeben. Benennen Sie zunächst jedes System. Berechnen Sie anschließend die Pole und Nullstellen sowie die Verstärkung.
Skizzieren Sie abschließend für jedes System den Amplitudengang. Vervollständigen Sie dazu die Diagramme. Machen Sie die Steigung der Kurve deutlich. Tragen Sie dazu auch vorhandene Nullstellen und Pole in die Skizzen ein. Für System $G_c(s)$ ist eine schematische Zeichnung ausreichend.

a) $G_a(s) = \dfrac{1 + \frac{2}{s}}{2s + 1}$

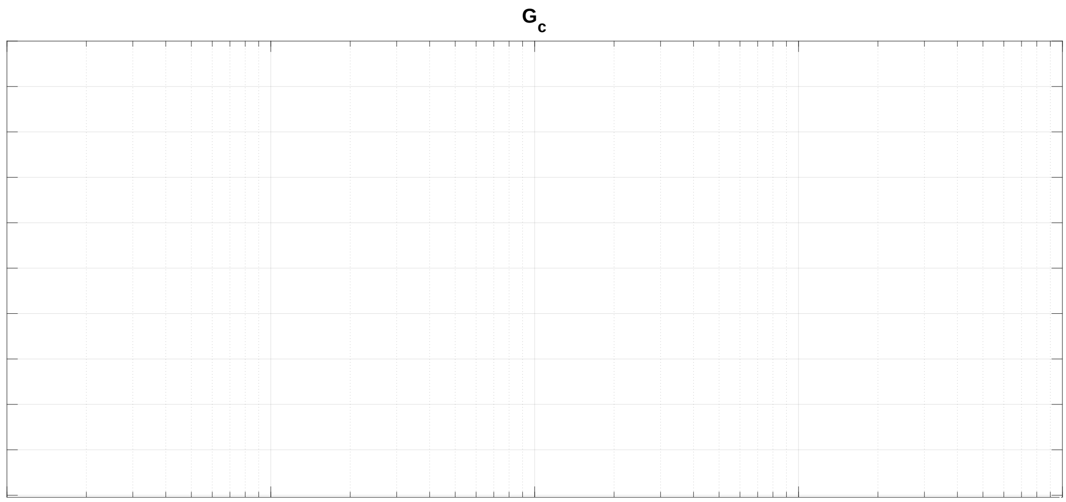


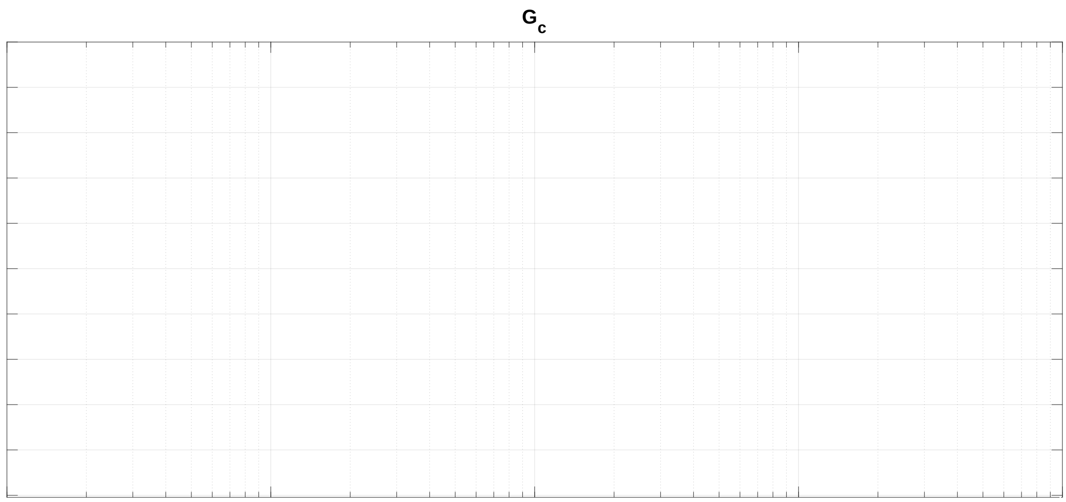
b) $G_b(s) = \dfrac{2 + 10s}{s(0{,}2s + 1)}$



c) $G_c(s) = \dfrac{1 + T_D s}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$

Zeichnen Sie für diesen Aufgabenteil nur den schematischen Verlauf des Amplitudengangs.
Hinweis: Beachten sie bei der Erstellung des Amplitudengangs auf alle möglichen Reihenfolgen der Eckfrequenzen der Nullstellen sowie Pole.





Aufgabe 3: Stabilität (21 Punkte)

Gegeben ist die folgende Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{8 \cdot s}{(s+0.5)(s+2)(s+1)(s+1)}.$$

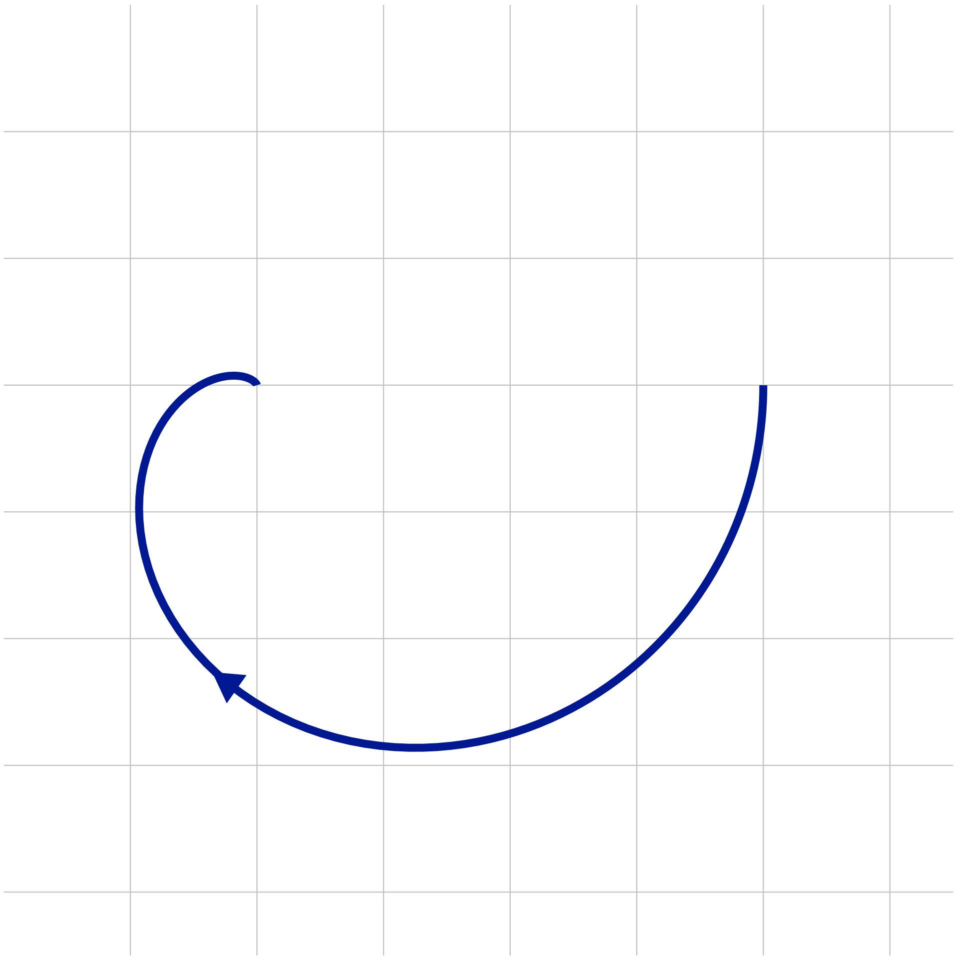
Diese soll mit einem PI-Regler

$$G_R(s) = K + \frac{K}{T_I \cdot s}$$

geregelt werden.

a) Bestimmen Sie die Integrationszeit T_I, sodass der langsamste Pol kompensiert wird. Wie lautet die Übertragungsfunktion des offen Regelkreises nach der Kompensation?

Für $K = 1$ ist die Ortskurve des offenen Regelkreises gegeben (In diesem Bild fehlen allerdings noch die Achsen, die Achsenbeschriftungen und die Zahlenwerte).



b) Vervollständigen Sie bitte diese Abbildung. Ergänzen Sie hierfür die horizontale und vertikale Achse, beschriften Sie die Achsen und markieren Sie den $(-1, 0)$-Punkt. Bestimmen Sie hierzu zuerst den Start- und Endpunkt der Ortskurve.

Hinweis: Wählen Sie die Skalierung der vertikalen Achse identisch zur Skalierung der horizontalen Achse.

c) Analysieren Sie mithilfe des Nyquist-Kriteriums die Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Begründen Sie, welches Nyquist-Kriterium hierfür genutzt wird.

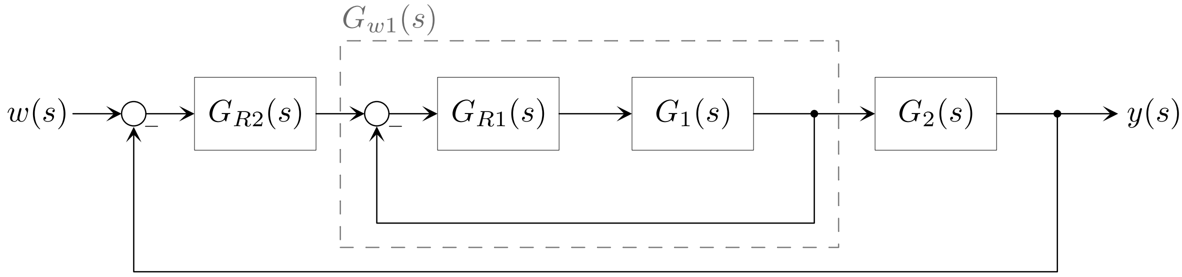
d) Wie hoch ist der Amplitudenrand und der Phasenrand? Bestimmen Sie diese **grob** und zeichnen Sie die hierfür benötigen Punkte in die Ortskurve ein.

e) Was hat der Amplitudenrand mit der Stabilität und der Stabilitätsgrenze des geschlossenen Regelkreises zu tun? Erläutern Sie dies kurz.

f) Bestimmen Sie nun mit dem Hurwitz-Kriterium welche Bedingungen für einen stabilen Regelkreis gelten müssen. Bestimmen Sie daraus den genauen Amplitudenrand.

Aufgabe 4: Kaskadenregler und Wurzelortskurve (24 Punkte)

Gegeben ist folgender Regelkreis:



Die Übertragungsfunktionen der beiden Regelstrecken lauten:

$$G_1(s) = \frac{1}{1+s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}$$

Allgemeiner Hinweis: Für alle Wurzelortskurven, die in dieser Aufgabe zu zeichnen sind, reicht eine Prinzipskizze. Berechnungen sind nicht nötig.

Teil 1:

Für den Regler des inneren Regelkreises $G_{R1}(s)$ wird zunächst ein P-Regler gewählt. Seine Übertragungsfunktion lautet $G_{R1}(s) = K_1 = 1$. Für den äußeren Regelkreis wird ein PI-Regler gewählt. Seine Übertragungsfunktion lautet $G_{R2}(s) = K_2(\frac{T_I s+1}{T_I s})$

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_{w1}(s)$ des inneren Regelkreises. Wählen sie anschließend die Integrationszeitkonstante T_I des äußeren Reglers so, dass die langsamste Polstelle des **inneren** Regelkreises kompensiert wird.

b) Zeichnen Sie schematisch die Wurzelortskurve für den Gesamtregelkreis mit den berechneten Werten. Markieren Sie dazu zuerst alle Pol- und Nullstellen des offenen Regelkreises im gegebenen Diagramm.

c) Die Verstärkung des P-Reglers des inneren Regelkreises wird zu $\tilde{K}_1 = 0.5$ geändert. Der Regler des äußeren Regelkreises bleibt unverändert. Zeichnen Sie die Wurzelortskurve des geänderten Gesamtsystems schematisch in das zweite Diagramm. Was ändert sich in der Wurzelortskurve des Gesamtregelkreises? Begründen Sie.

Teil 2:

Anstatt des PI-Reglers wird nun ein idealer **PD-Regler** mit der Übertragungsfunktion $\tilde{G}_{R2} = K_2(1 + T_D s)$ für den äußeren Regelkreis verwendet. Für den inneren Regelkreis wird die ursprüngliche Verstärkung von $K_1 = 1$ verwendet.

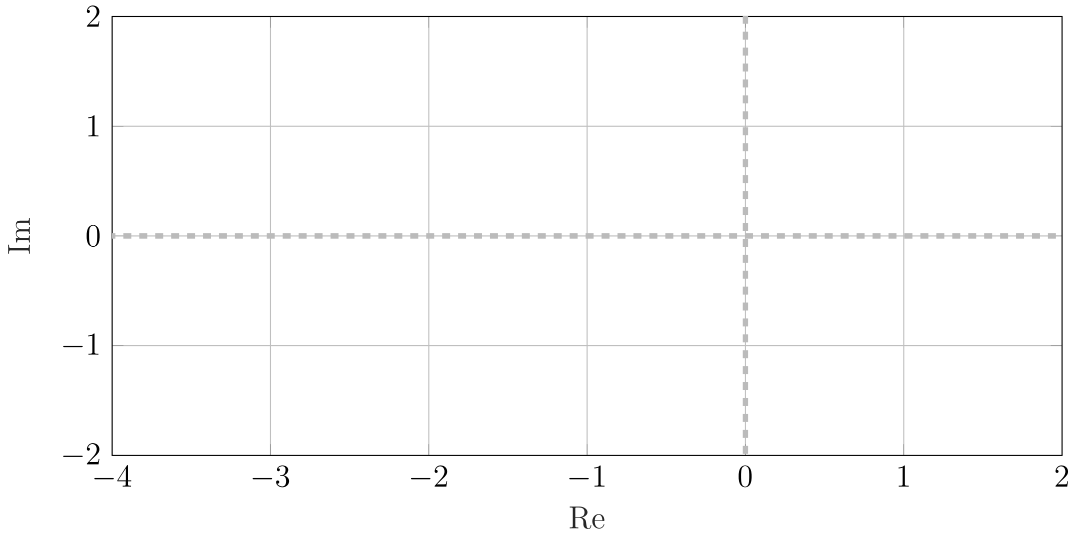
d) Wählen Sie die Differentiationszeitkonstante T_D so, dass der langsamste Pol des inneren Regelkreises kompensiert wird.

e) Zeichnen Sie schematisch die Wurzelortskurve für den Gesamtregelkreis mit den berechneten Werten. Markieren Sie dazu zuerst alle Pol- und Nullstellen des offenen Regelkreises im gegebenen Diagramm.

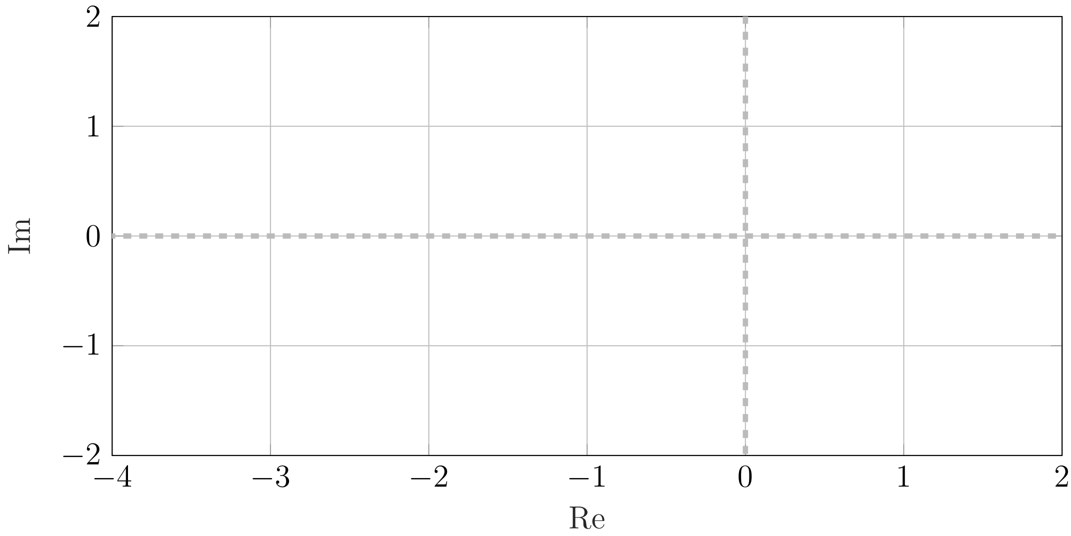
f) Welchen Unterschied zwischen den Gesamtregelkreisen bezüglich Stabilität und bleibender Regelabweichung aus **Teil 1** und **Teil 2** können Sie feststellen? Begründen Sie ihre Antwort.

Diagramme für Wurzelortskurve

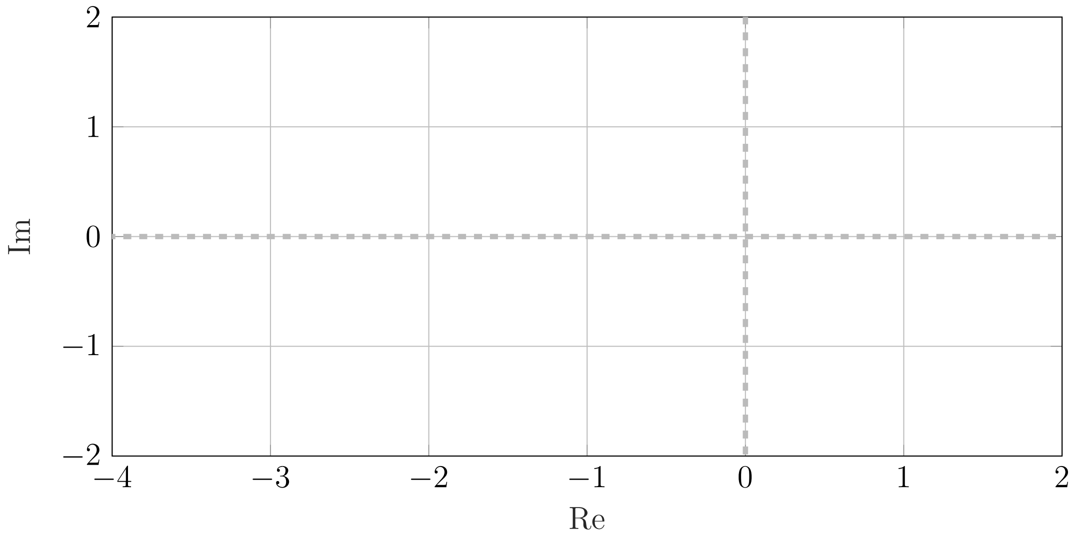
Aufgabenteil b)



Aufgabenteil c)

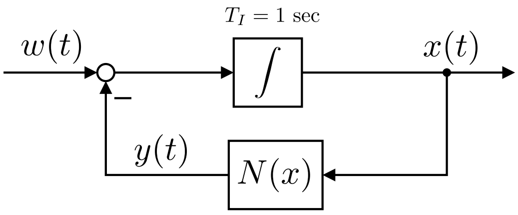


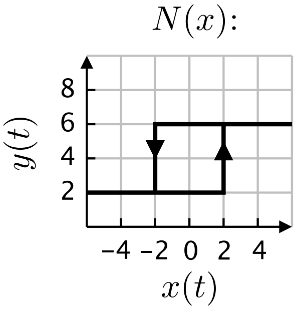
Aufgabenteil e)

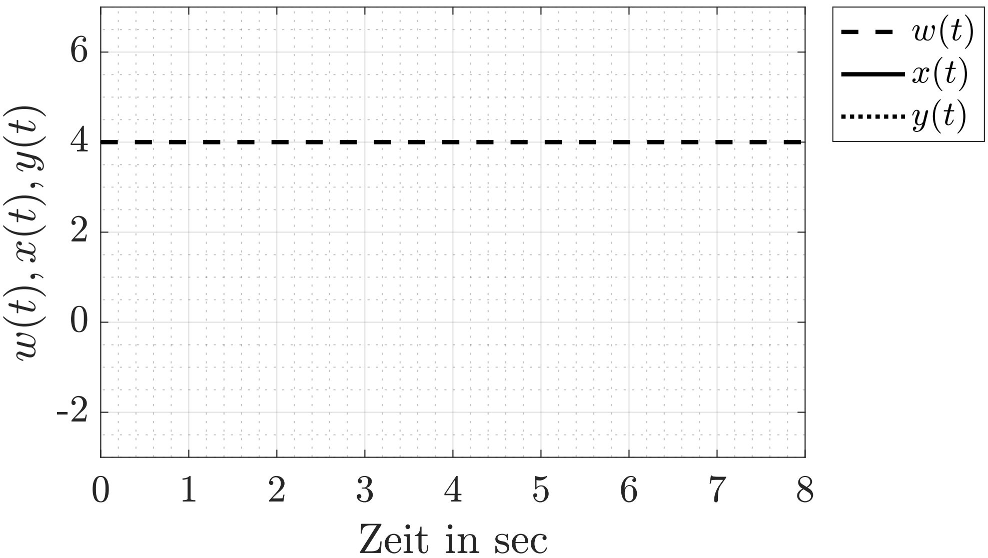


Aufgabe 5: Nichtlinearer Regelkreis (14 Punkte)

Bestimmen Sie die Größen $x(t)$ und $y(t)$ des abgebildeten nichtlinearen Regelkreises für den gegebenen Verlauf der Führungsgröße $w(t)$. Zeichnen Sie die zeitlichen Verläufe von $x(t)$ und $y(t)$ in das gegebene Diagramm ein. Die **Anfangsbedingung** des Integrators beträgt $x(t=0)=0$. Die Integrationszeit beträgt $T_I = 1$ sec.







Aufgabe 6: Dynamische Systeme (21 Punkte)

Gegeben ist ein System, das mit der Differentialgleichung

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

und den Koeffizienten $a_2 = 1$, $a_1 = 2$, $a_0 = 10$ und $b_0 = 5$ beschrieben wird.

a) Transformieren Sie das System in den Laplace-Bereich und stellen Sie die Übertragungsfunktion auf.

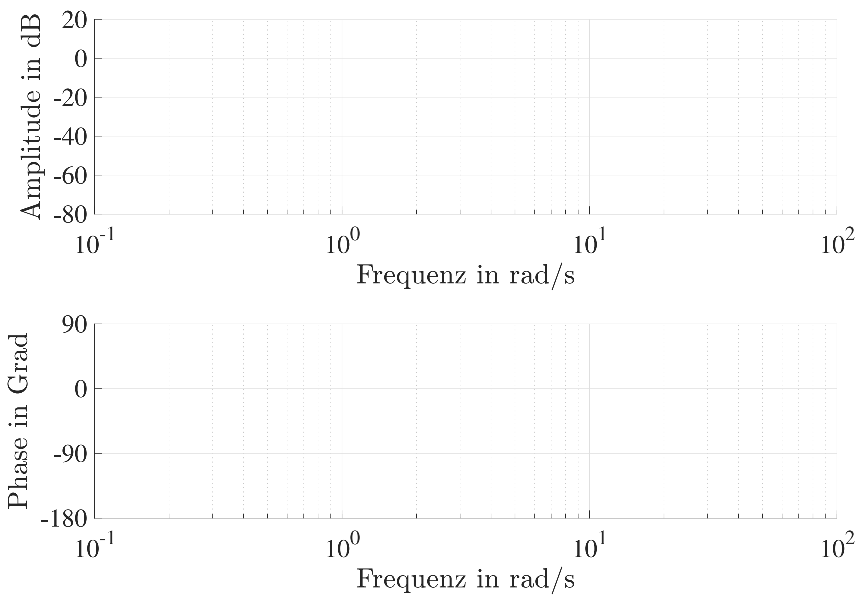
b) Berechnen Sie die Pole der Übertragungsfunktion.

c) Berechnen Sie die Verstärkung des Systems.

d) Skizzieren Sie grob die Sprungantwort des Systems. Beachten Sie dabei, dass der Endwert korrekt eingezeichnet wird.

e) Skizzieren Sie den asymptotischen und realen Amplituden- und Phasengang. Achten Sie darauf, dass die wichtigsten Merkmale erkennbar sind.

Hinweis: Nutzen Sie den Zusammenhang $(s-\alpha-i\beta)(s-\alpha+i\beta) = s^2+2D\omega_0 s+\omega_0^2$.



f) Wie wird das charakteristische Phänomen genannt, welches im Amplitudengang für konjugiert komplexe Polstellen auftreten kann? Ab welchem Wert von D tritt es auf?

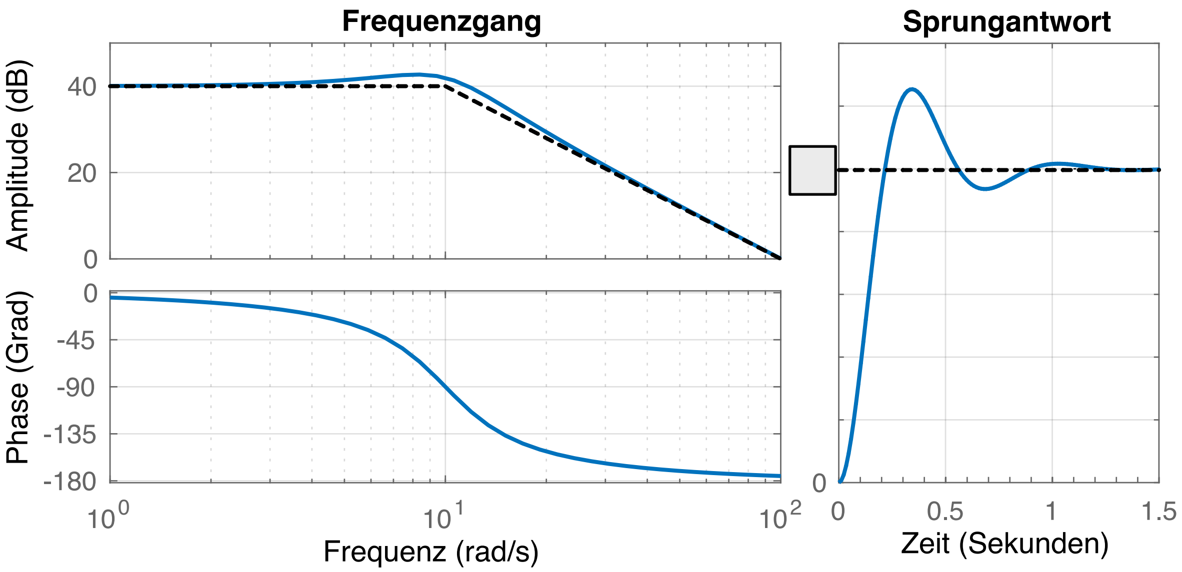
g) Nehmen Sie an, dass eine PT_2-Regelstrecke mit zwei reellen, nicht identischen, stabilen Polen mit einem P-Regler geregelt wird. Skizzieren Sie grob die WOK zu diesem Fall. Erklären Sie anhand der Skizze, wann die folgenden drei Polpaarkombinationen des geschlossenen Regelkreises abhängig von der Reglerverstärkung entstehen:
1.) Unterschiedliche reelle Pole, 2.) Identische reelle Pole, 3.) Konjugiert komplexe Pole.

Lösung:

Aufgabe 1: Kurzaufgaben (22 Punkte)

Alle Antworten zu den folgenden Aufgaben sind kurz zu begründen!

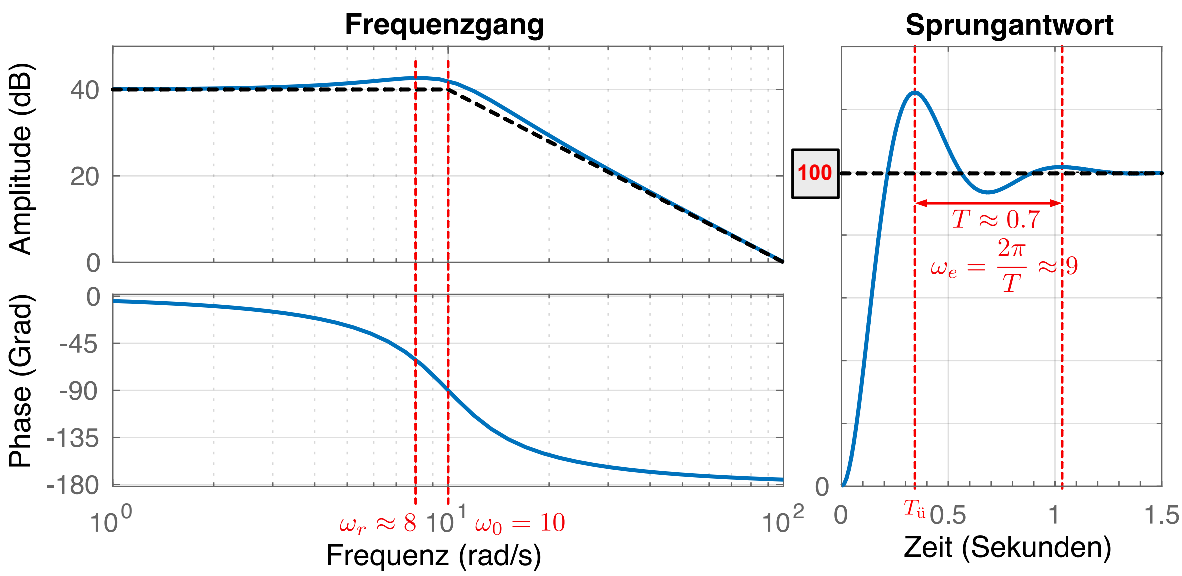
a) Gegeben sind der Frequenzgang und die Sprungantwort eines dynamischen Systems (10 Punkte):



1) Nehmen Sie an das System hat keine Nullstellen. Wie viele Pole hat das System? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils einmal anhand das Amplituden- und des Phasenganges.
2) Ermitteln Sie den stationären Endwert der Sprungantwort.
3) Ermitteln Sie die Eckfrequenz ω_0 des Systems und markieren Sie sie im Diagramm.
4) Ermitteln Sie die Resonanzfrequenz ω_r des Systems und markieren Sie sie im Diagramm.
5) Ermitteln Sie die Eigenfrequenz ω_e des Systems aus der Periodendauer T und kennzeichnen Sie T im Diagramm.
6) Ist die Dämpfung D des Systems in etwa 0,4 oder 1,4?
7) Ermitteln Sie mit den Ergebnissen aus 1), 2), 3) und 6) die Übertragungsfunktion des Systems $G(s)$.

Antwort:

1) Der Phasengang geht für $\omega \to \infty$ gegen -180°, dies bedeutet einen Polüberschuss von 2 (-90° pro Pol). Wenn keine Nullstelle vorliegt, hat das System daher 2 Pole. Die Steigung des Amplitudengangs für $\omega \to \infty$ beträgt -40dB pro Dekade (-20dB pro Pol). $\boxed{2}$



2) Am Amplitudengang kann man ablesen $A(\omega \to 0) = 40\text{dB}$. Dies entspricht dem Wert 100. Der stationäre Endwert ($t \to \infty$) der Sprungantwort ist daher 100. $\boxed{1}$

3) Bei der Eckfrequenz $\omega_0 = 10$ treffen sich die Asymptoten des Frequenzgangs. Außerdem hat die Phase hier den halben Maximalwert erreicht (-90°). $\boxed{1}$

4) Bei der Resonanzfrequenz ω_r ist die Amplitude maximal. Dies ist bei $\omega_r \approx 8$ der Fall. $\boxed{1}$

5) Die Eigenfrequenz ω_e kann nur aus der Sprungantwort abgelesen werden. Eine volle Schwingungsperiode (Maximum bis Maximum) dauert $T \approx 0{,}7$ Sekunden. Als Eigenfrequenz ergibt sich damit:

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{2\pi}{0{,}7\,\text{sec}} \approx 9\,\text{rad/sec}$$

Alternativ:
Zwischen dem Zeitpunkt des ersten Maximums $T_ü \approx 0{,}35$ Sekunden und der Eigenfrequenz ω_e gilt bei der Sprungantwort folgender Zusammenhang:

$$T_ü = \frac{\pi}{\omega_e} \Leftrightarrow \omega_e = \frac{\pi}{T_ü} \approx \frac{\pi}{0{,}35\,\text{sec}} \approx 9\,\text{rad/sec}$$ $\boxed{2}$

6) Anhand der Sprungantwort und der Resonanzüberhöhung ($D < 1/\sqrt{2} \approx 0{,}71$) im Amplitudengang erkennt man, dass das System schwingungsfähig ist. Daher gilt $D < 1$, also $D = 0{,}4$. Alternativ: Die Dämpfung D kann aus ω_0 und ω_e berechnet werden:

$$\omega_e = \omega_0\sqrt{1 - D^2} \Leftrightarrow D = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2} \approx 0{,}435\ldots \approx 0{,}4.$$ $\boxed{1}$

7) Die allgemeine Übertragungsfunktion eines Systems 2. Ordnung ohne Nullstellen lautet:

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \Rightarrow G(s) = \frac{100 \cdot 10^2}{s^2 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 10s + 10^2} = \frac{10000}{s^2 + 8s + 100}$$ $\boxed{2}$

b) Folgendes System soll mit einem P-Regler $G_R(s) = K_R$ geregelt werden (12 Punkte):

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

1) Ist das ungeregelte System $G(s)$ schwingungsfähig?
2) Wie verhält sich das ungeregelte System $G(s)$ bei Anregung mit einem Impuls für $t \to \infty$?
3) Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums, bei welcher Reglerverstärkung K_R (mit $K_R > 0$) der geschlossene Regelkreis an die Stabilitätsgrenze kommt.
4) Der Nenner der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises für den grenzstabilen Fall aus 3) hat die Form $(s+a)(s^2+b)$. Berechnen Sie mit diesem Hinweis die Pole der Übertragungsfunktion. Mit welcher Frequenz schwingt das System? Klingt die Schwingung ab?
5) Nach den Einstellregeln von Ziegler-Nichols wählt man bei Verwendung eines P-Reglers die Reglerverstärkung so, dass sich eine Amplitudenreserve von 2 ergibt. Welcher Wert für K_R würde sich hier nach dieser Regel ergeben?

Antwort:

1) Keiner der drei Pole (0, -1, -2) hat einen Imaginäranteil, daher keine Schwingungsfähigkeit. $\boxed{1}$
2) Durch den Pol bei 0 hat das Sytem integrierendes Verhalten. Da alle anderen Pole stabil sind, verbleibt die Impulsantwort auf einem konstanten Endwert.
   Alternativ:
   Berechnung des stationären Endwerts mit dem Endwertsatz, $U(s) = 1$:

$$y(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{2}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} \cdot 1 = \frac{2}{(0+1)(0+2)} = 1$$

$\boxed{1}$

3) Als charakteristische Gleichung des Systems ergibt sich:

$$1 + G_0 = 0 \Rightarrow 1 + \frac{2K_R}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Leftrightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + 2K_R = 0$$

Nach Hurwitz müssen bei einem System 3. Ordnung für Stabilität folgende Bedingungen für die Koeffizenten des charakteristischen Polynoms erfüllt sein:

$$\text{alle } c_i > 0,\ c_1c_2 - c_0c_3 > 0$$

$$c_3 = 1 > 0,\ c_2 = 3 > 0,\ c_1 = 2 > 0,\ c_0 = 2K_R > 0 \Leftrightarrow K_R > 0$$

$$2 \cdot 3 - 2K_R \cdot 1 > 0 \Rightarrow K_R < 3$$

Für $K_R = 3$ befindet sich der Regelkreis an der Stabilitätsgrenze. $\boxed{4}$

4) Mit dem Ergebnis aus 3) gilt:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 2K_R = (s+a)(s^2+b) = s^3 + as^2 + bs + ab$$

Koeffizentenvergleich führt auf:

$$a = 3,\ b = 2 \Rightarrow (s+3)(s^2+2) = 0 \Rightarrow s_1 = -3,\ s_{2,3} = \pm\sqrt{2}i$$

Das System führt an der Stabilitätsgrenze Schwingungen mit der Frequenz $\omega = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ rad/sec aus. Die Schwingungen klingen nicht ab (Dauerschwingungen), da der Realteil des konjugiert komplexen Polpaares Null ist. $\boxed{4}$

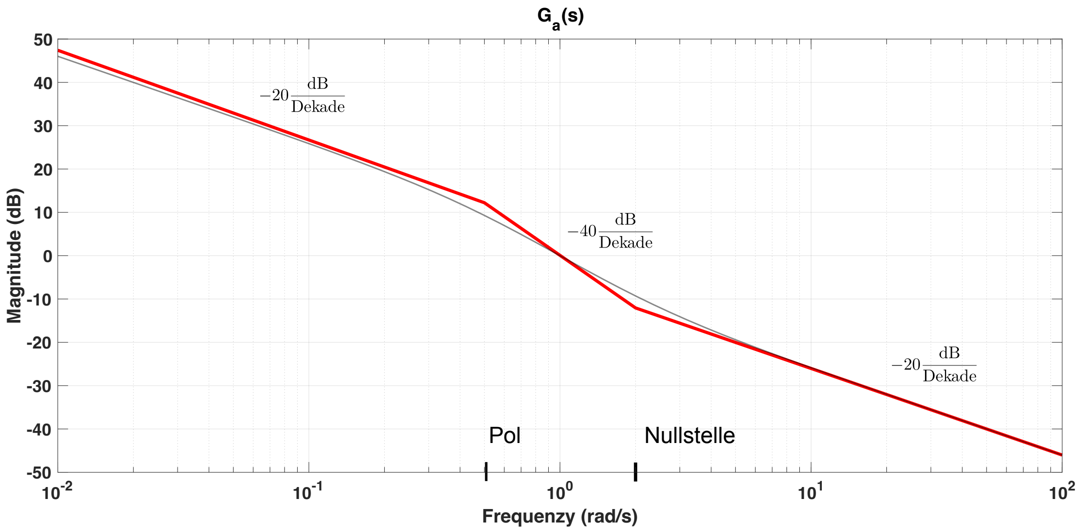
5) Eine Amplitudenreserve von 0,5 bedeutet, dass man die Stabititätsgrenze erreicht, wenn man die Reglerverstärkung verdoppelt. Da das System bei $K_R = 3$ an der Stabilitätsgrenze ist, muss man nach Ziegler-Nichols K_R auf 1,5 halbieren. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Dynamische Systeme: Benennung und Bode Plot (18 Punkte)

Im Folgenden sind verschiedene dynamische Systeme gegeben. Benennen Sie zunächst jedes System. Berechnen Sie anschließend die Pole und Nullstellen sowie die Verstärkung.
Skizzieren Sie abschließend für jedes System den Amplitudengang. Vervollständigen Sie dazu die Diagramme. Machen Sie die Steigung der Kurve deutlich. Tragen Sie dazu auch vorhandene Nullstellen und Pole in die Skizzen ein. Für System $G_c(s)$ ist eine schematische Zeichnung ausreichend.

a) $G_a(s) = \dfrac{1 + \frac{2}{s}}{2s + 1}$

Antwort:



PI-T$_1$

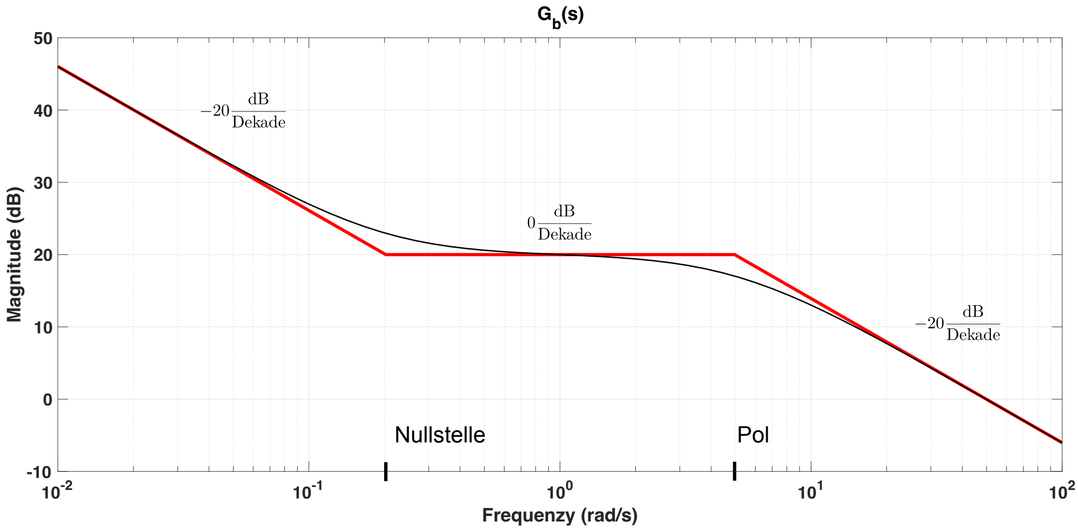
$$G_a(s) = \frac{s+2}{2s^2 + s}$$

Verstärkung:	$K = 2$
Nullstelle:	$s = -\dfrac{5}{1} = -2$
Pole:	$s_1 = 0$
	$s_2 = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

6

b) $G_b(s) = \dfrac{2 + 10s}{s(0{,}2s + 1)}$

Antwort:



$$G_b(s) = \frac{\frac{2}{s} + 10}{0{,}2s + 1}$$

PI-T_1

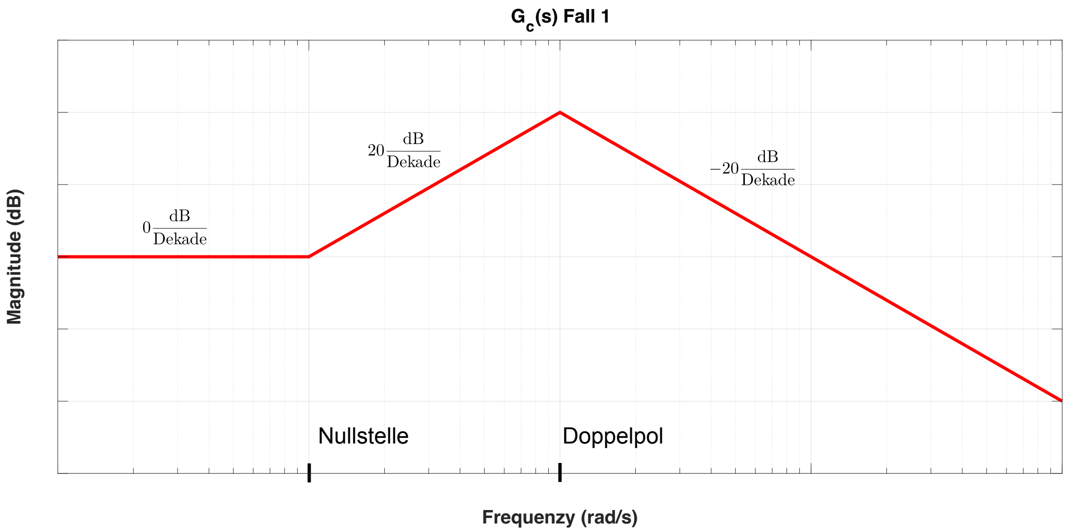
$$G_b(s) = \frac{10s + 2}{0{,}2s^2 + s}$$

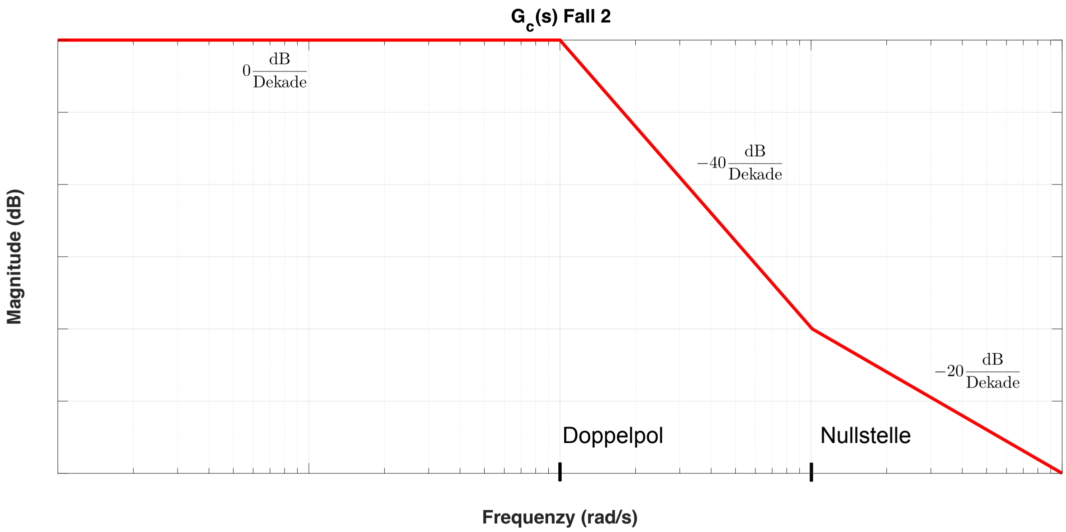
Verstärkung:	$K = 2$
Nullstelle:	$s = -\dfrac{1{,}5}{1} = -0{,}2$
Pole:	$s_1 = 0$
	$s_2 = -\dfrac{1}{0{,}2} = -5$

5

c) $G_c(s) = \dfrac{1 + T_D s}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$

Zeichnen Sie für diesen Aufgabenteil nur den schematischen Verlauf des Amplitudengangs.
Hinweis: Beachten sie bei der Erstellung des Amplitudengangs auf alle möglichen Reihenfolgen der Eckfrequenzen der Nullstellen sowie Pole.





Antwort:

schwingungsfhiges PD-T_2

Verstärkung: $K = \frac{1}{\omega_0^2}$

Nullstelle: $s = -\frac{1}{T_D}$

Pole:
$$\begin{aligned} s &= -D\omega_0 \pm \sqrt{D^2\omega_0^2 - \omega_0^2} \\ &= -D\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - D^2} \end{aligned}$$

$\boxed{7}$

$\boxed{\sum 18}$

Aufgabe 3: Stabilität (21 Punkte)

Gegeben ist die folgende Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{8 \cdot s}{(s+0.5)(s+2)(s+1)(s+1)}.$$

Diese soll mit einem PI-Regler

$$G_R(s) = K + \frac{K}{T_I \cdot s}$$

geregelt werden.

a) Bestimmen Sie die Integrationszeit T_I, sodass der langsamste Pol kompensiert wird. Wie lautet die Übertragungsfunktion des offen Regelkreises nach der Kompensation?

Antwort:

Der langsamste Pol liegt bei $s = -0.5$. Mit

$$G_R(s) = \frac{K \cdot (T_I s + 1)}{T_I \cdot s}$$

mit $T_I = 2$ wird der Regler zu:

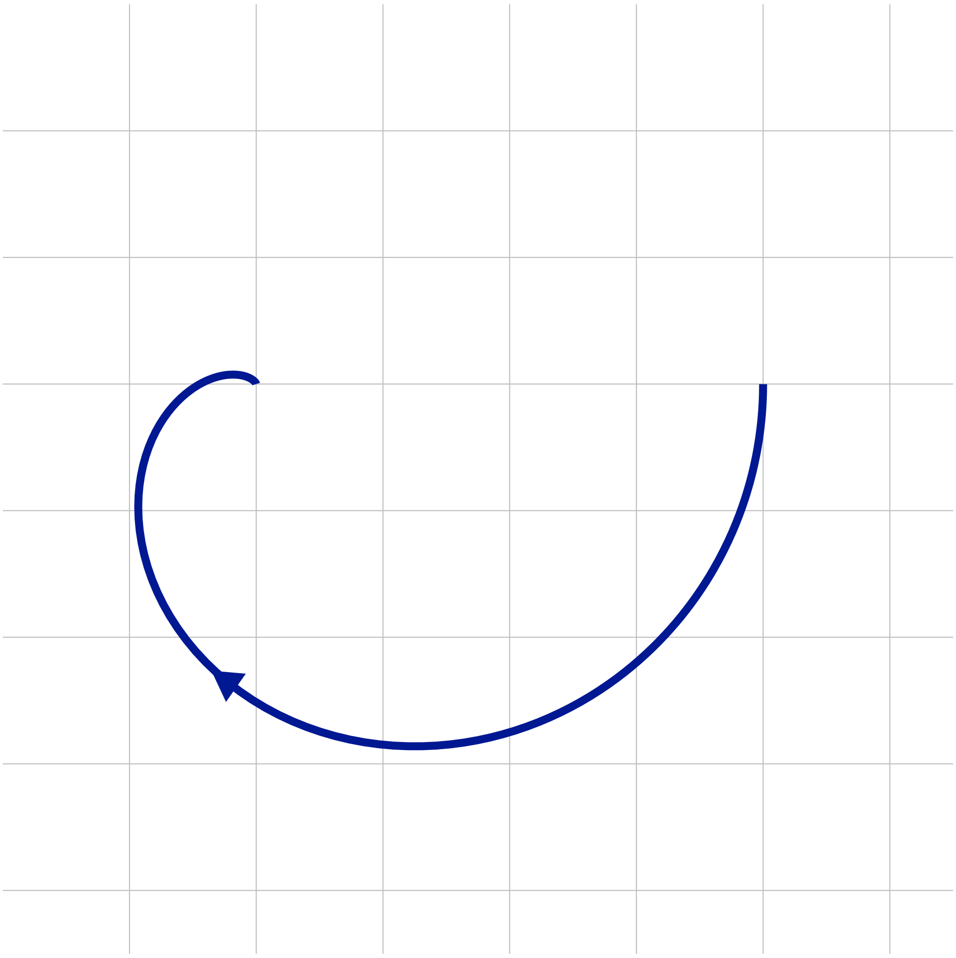
$$G_R(s) = \frac{K \cdot (2s+1)}{2 \cdot s} = \boxed{\frac{K \cdot (s+0.5)}{s}}.$$

Hierfür ergibt sich G_0 zu

$$\boxed{G_0(s) = \frac{8 \cdot K}{(s+2)(s+1)(s+1)}}.$$

3

Für $K = 1$ ist die Ortskurve des offenen Regelkreises gegeben (In diesem Bild fehlen allerdings noch die Achsen, die Achsenbeschriftungen und die Zahlenwerte).



b) Vervollständigen Sie bitte diese Abbildung. Ergänzen Sie hierfür die horizontale und vertikale Achse, beschriften Sie die Achsen und markieren Sie den $(-1, 0)$-Punkt. Bestimmen Sie hierzu zuerst den Start- und Endpunkt der Ortskurve.

Hinweis: Wählen Sie die Skalierung der vertikalen Achse identisch zur Skalierung der horizontalen Achse.

Antwort:

Die Verstärkung des Systems (Start der OK) liegt bei

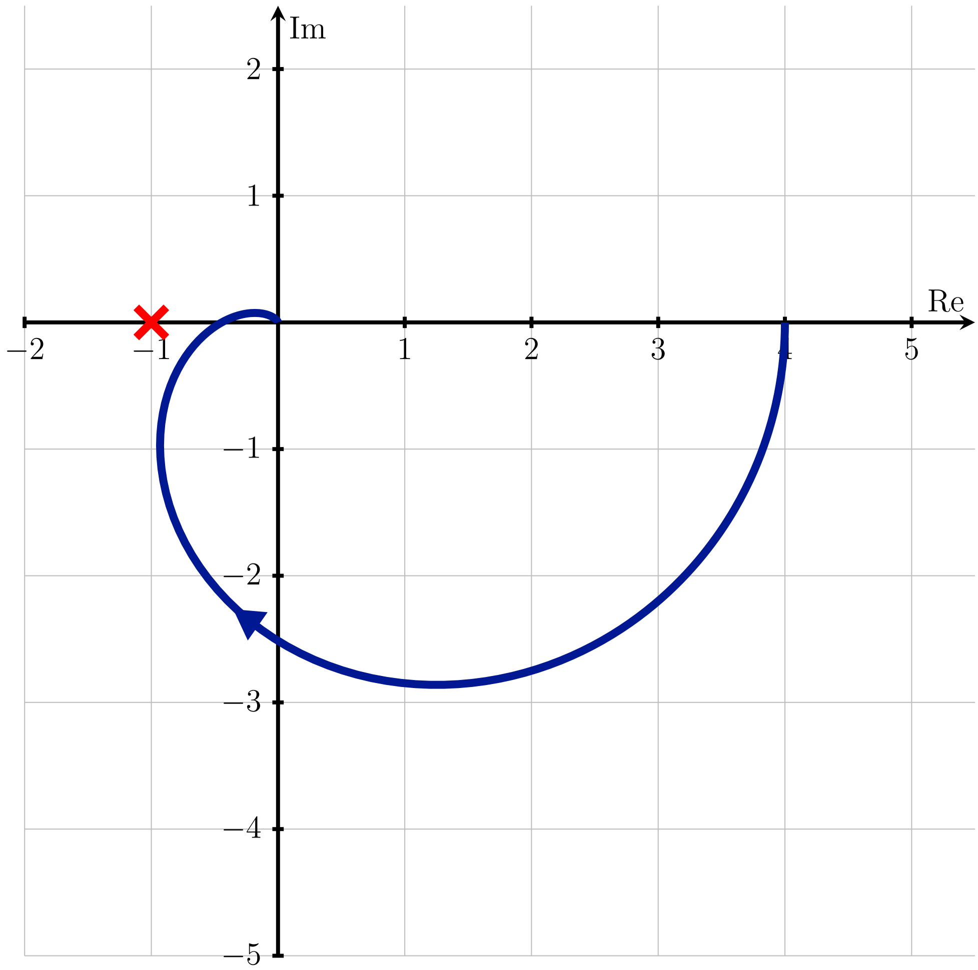
$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{s} G_0(s) = \frac{8}{(0+2)(0+1)(0+1)} = 4$$

und die OK startet auf der reelen Achse (kein I-/D-Verhalten) $\Longrightarrow \boxed{(4,0)}$.

Die Ortskurve endet bei einer Amplitude von:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s}{s} G_0(s) = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$\Longrightarrow \boxed{(0,0)}$



5

c) Analysieren Sie mithilfe des Nyquist-Kriteriums die Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Begründen Sie, welches Nyquist-Kriterium hierfür genutzt wird.

Antwort: Da das System nur stabile Pole besitzt, kann das einfache Nyquist-Kriterium angewandt werden.

Der Punkt $(-1, 0)$ wird dabei nicht umschlungen.

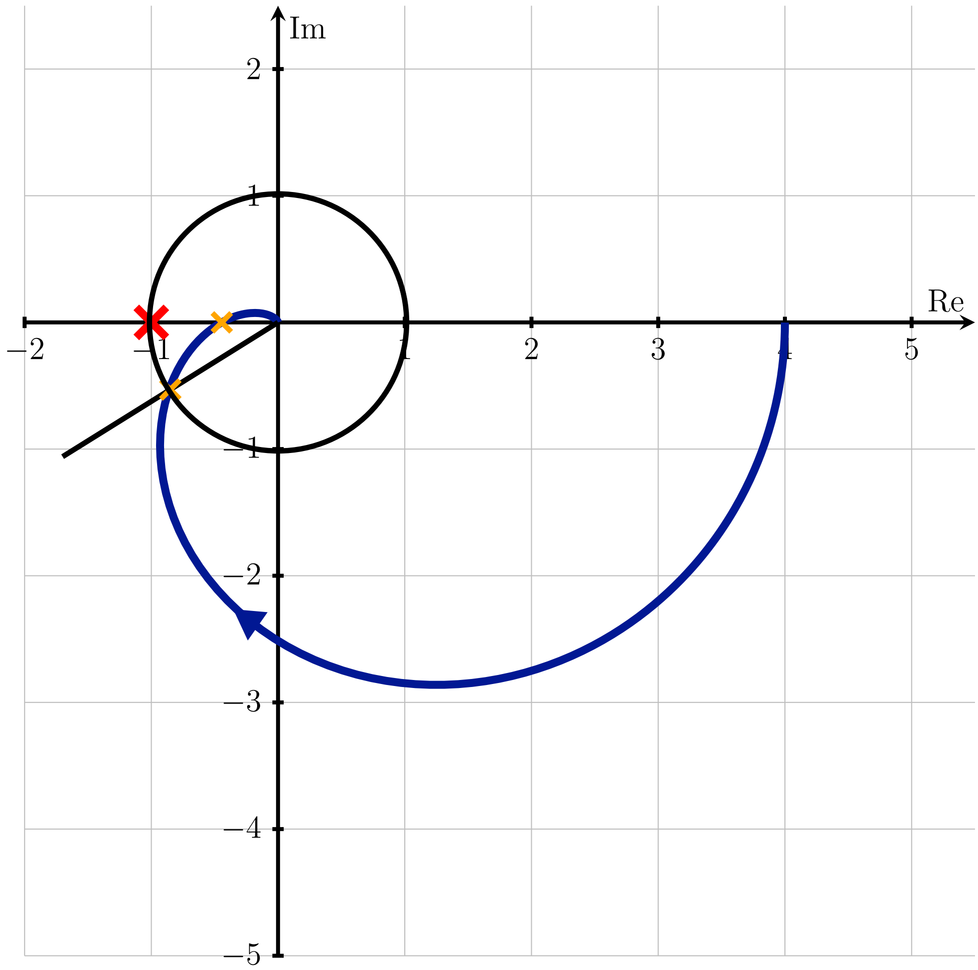
$\Longrightarrow$ stabil 2

d) Wie hoch ist der Amplitudenrand und der Phasenrand? Bestimmen Sie diese **grob** und zeichnen Sie die hierfür benötigen Punkte in die Ortskurve ein.

Antwort:

$k_{\mathrm{R}} \approx \frac{1}{0.5} = 2$

$\varphi_{\mathrm{R}} \approx 30°$



4

e) Was hat der Amplitudenrand mit der Stabilität und der Stabilitätsgrenze des geschlossenen Regelkreises zu tun? Erläutern Sie dies kurz.

Antwort:Der offene Regelkreis hat einen Amplitudenrand $k_\mathrm{R} > 1$, deshalb ist der geschlossene Regelkreis stabil. Der offene Regelkreis kann mit einer Verstärkung von k_R multipliziert werden, um an die Stabilitätsgrenze gebracht zu werden. Für $K > k_\mathrm{R}$ wird der geschlossene Regelkreis instabil. 2

f) Bestimmen Sie nun mit dem Hurwitz-Kriterium welche Bedingungen für einen stabilen Regelkreis gelten müssen. Bestimmen Sie daraus den genauen Amplitudenrand.

Antwort: Die Gleichung des geschlossenen Regelkreis lautet:

$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{8K}{(s+2)(s+1)(s+1)+8K} = \frac{8K}{s^3+4s^2+5s+2+8K}.$$

Bei Polynomen 3. Ordnung gilt mit dem Hurwitz-Kriterium:

$$c_3 > 0, c_2 > 0, c_1 > 0, c_0 > 0 \text{ und } c_2c_3 - c_1c_4 > 0$$

$$c_3 = 1 > 0\checkmark, c_2 = 4 > 0\checkmark, c_1 = 5 > 0\checkmark, c_0 = 2+8K > 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{K > -\frac{1}{4}}$$

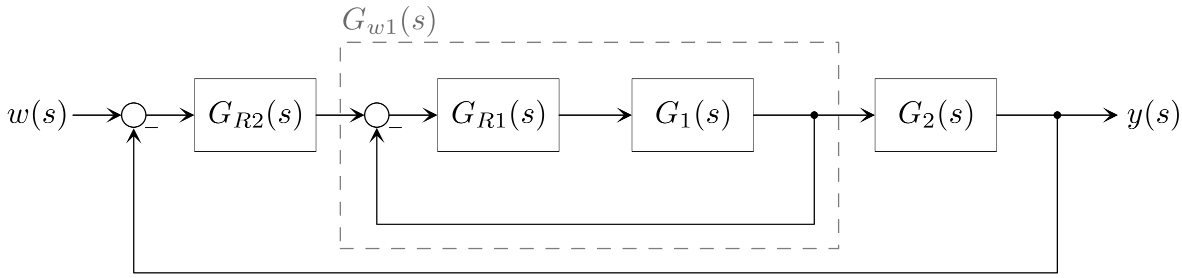
$$20 - (2 + 8K) > 0 \implies 18 > 8K$$

$$\implies \boxed{K < \frac{18}{8} = 2{,}25}$$

Der Amplitudenrand gibt an wie sehr das System verstärkt werden kann, um es an die Stabilitätsgrenze zu bringen. $\implies k_{\mathrm{R}} = 2{,}25$ $\boxed{5}$

Aufgabe 4: Kaskadenregler und Wurzelortskurve (24 Punkte)

Gegeben ist folgender Regelkreis:



Die Übertragungsfunktionen der beiden Regelstrecken lauten:

$$G_1(s) = \frac{1}{1+s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}$$

Allgemeiner Hinweis: Für alle Wurzelortskurven, die in dieser Aufgabe zu zeichnen sind, reicht eine Prinzipskizze. Berechnungen sind nicht nötig.

Teil 1:

Für den Regler des inneren Regelkreises $G_{R1}(s)$ wird zunächst ein P-Regler gewählt. Seine Übertragungsfunktion lautet $G_{R1}(s) = K_1 = 1$. Für den äußeren Regelkreis wird ein PI-Regler gewählt. Seine Übertragungsfunktion lautet $G_{R2}(s) = K_2(\frac{T_I s+1}{T_I s})$

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_{w1}(s)$ des inneren Regelkreises. Wählen sie anschließend die Integrationszeitkonstante T_I des äußeren Reglers so, dass die langsamste Polstelle des **inneren** Regelkreises kompensiert wird.

Antwort:

Die Übertragungsfunktion des inneren Regelkreises lässt sich wie folgt berechnen:

$$G_{w1}(s) = \frac{G_{R1}(s)G_1(s)}{1+G_{R1}(s)G_1(s)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{1+s}}{1+1\cdot\frac{1}{1+s}} = \frac{1}{1+s+1} = \frac{1}{s+2}$$

$G_{w1}(s)$ besitzt nur eine Polstelle bei $p = -2$. Um diese zu kompensieren, wird die Nullstelle des PI-Reglers genutzt. Mit der Integratorzeitkonstante lässt sich die Nullstelle einstellen:

$$T_I s + 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad T_I = -\frac{1}{s}$$

Eine Polstelle bei $p = -2$ lässt sich damit folgend ausgleichen:

$$T_I = -\frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$

Damit ergibt sich für den PI-Regler folgende Übertragungsfunktion

$$G_{R2} = K_2\frac{\frac{1}{2}s+1}{\frac{1}{2}s} = K_2\frac{s+2}{s}$$

4

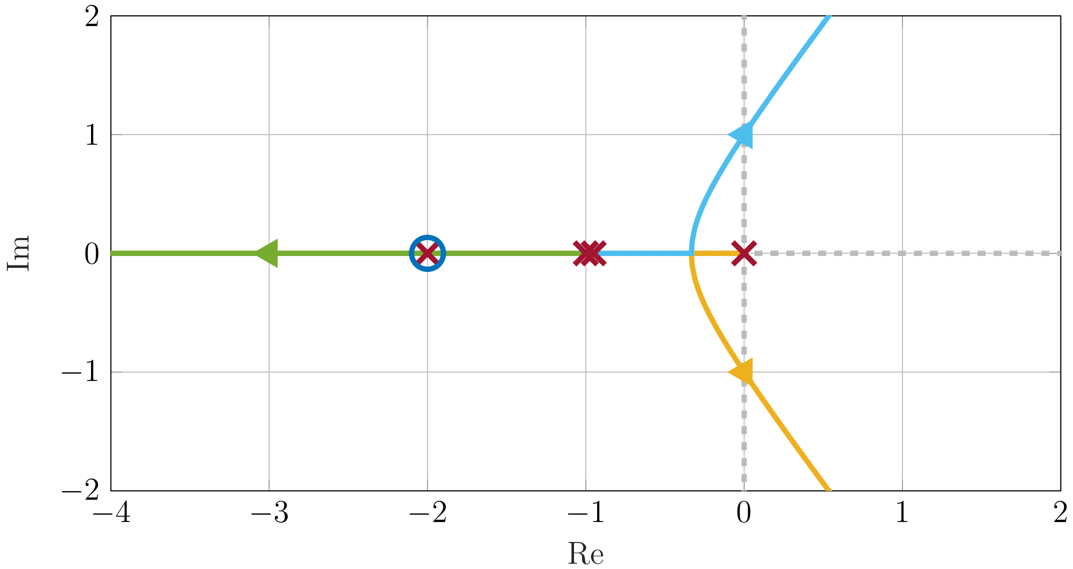
b) Zeichnen Sie schematisch die Wurzelortskurve für den Gesamtregelkreis mit den berechneten Werten. Markieren Sie dazu zuerst alle Pol- und Nullstellen des offenen Regelkreises im gegebenen Diagramm.

Antwort:

Zum Zeichnen der Wurzelortskurve werden zunächst die Pol- und Nullstellen des offenen Regelkreises benötigt. Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises lautet:

$$
\begin{aligned}
G_0 = G_{R2}G_{w1}G_2 &= K_2\frac{\cancel{s+2}}{s}\frac{1}{\cancel{s+2}}\frac{1}{s^2+2s+1} = K_2\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+2s+1} \\
&= K_2\frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)(s+1)}
\end{aligned}
$$

Anhand der Übertragungsfunktion ist ablesbar, dass für den offenen Regelkreis 3 Polstellen bei $p_{1,2} = -1$ und $p_3 = 0$ existieren



4

c) Die Verstärkung des P-Reglers des inneren Regelkreises wird zu $\tilde{K}_1 = 0.5$ geändert. Der Regler des äußeren Regelkreises bleibt unverändert. Zeichnen Sie die Wurzelortskurve des geänderten Gesamtsystems schematisch in das zweite Diagramm. Was ändert sich in der Wurzelortskurve des Gesamtregelkreises? Begründen Sie.

Antwort:

Da durch die Änderung der Verstärkung des inneren Regelkreises die Kompensation der Polstelle des inneren Regelkreises nicht mehr vorhanden ist, besitzt der offene Gesamtregelkreis nun 4 Polstellen und 1 Nullstelle. Dadurch bekommt die Wurzelortskurve einen weiteren Ast. Außerdem verändern sich die Verläufe der übrigen Äste.

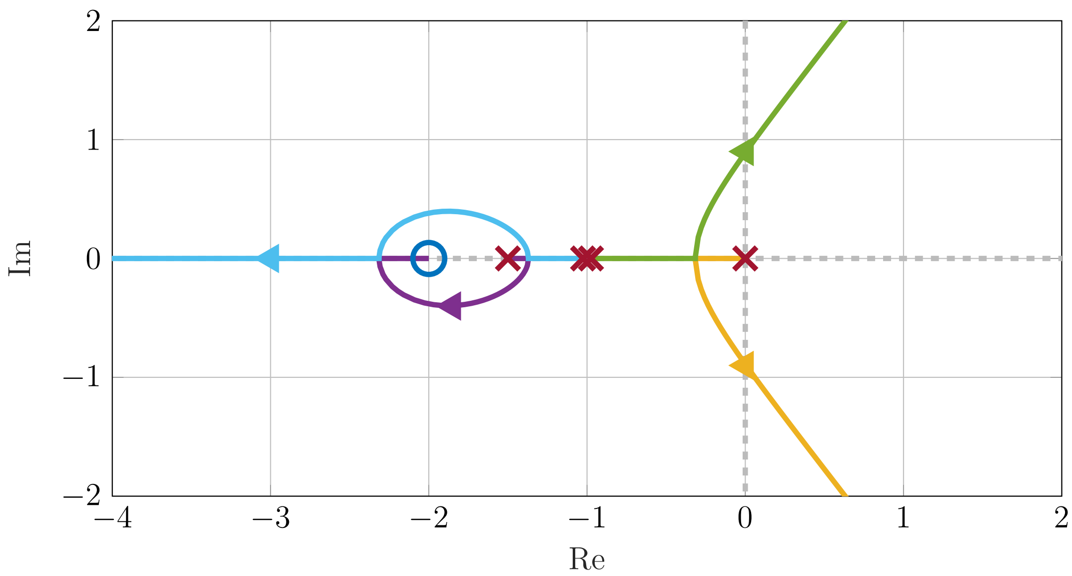
Die Übertragungsfunktion des inneren Regelkreises ändert sich zu:

$$
\tilde{G}_{w1} = \frac{\tilde{G}_{R1}(s)G_1(s)}{1+\tilde{G}_{R1}(s)G_1(s)} = \frac{0.5\cdot\frac{1}{1+s}}{1+0.5\cdot\frac{1}{1+s}} = \frac{0.5}{1+s+0.5} = \frac{0.5}{s+1.5}
$$

Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises ändert sich dementsprechend zu:

$$\tilde{G}_0 = G_{R2}\tilde{G}_{w1}G_2 = K_2\frac{s+2}{s}\frac{0.5}{s+1.5}\frac{1}{(s+1)(s+1)}$$

Anhand der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises lässt sich ablesen, dass 4 Polstellen bei $p_{1,2} = -1$, $p_2 = 0$ und $p_4 = -1.5$ existieren. Außerdem beinhaltet der offene Regelkreis eine Nullstelle bei $n_1 = -2$. Dementsprechend ergibt sich die folgende Wurzelortskurve des geänderten Gesamtregelkreises.



6

Teil 2:

Anstatt des PI-Reglers wird nun ein idealer **PD-Regler** mit der Übertragungsfunktion $\tilde{G}_{R2} = K_2(1 + T_D s)$ für den äußeren Regelkreis verwendet. Für den inneren Regelkreis wird die ursprüngliche Verstärkung von $K_1 = 1$ verwendet.

d) Wählen Sie die Differentiationszeitkonstante T_D so, dass der langsamste Pol des inneren Regelkreises kompensiert wird.

<u>**Antwort**</u>:

$G_{w1}(s)$ besitzt nur eine Polstelle bei $p = -2$. Um diese zu kompensieren, wird die Nullstelle des PD-Reglers genutzt. Mit der Differentiationszeitkonstante lässt sich die Nullstelle einstellen:

$$T_D s + 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad T_D = -\frac{1}{s}$$

Eine Polstelle bei $p = -2$ lässt sich damit folgend ausgleichen:

$$T_D = -\frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$

Damit ergibt sich für den PD-Regler folgende Übertragungsfunktion:

$$\tilde{G}_{R2} = K_2(1 + \frac{1}{2}s) = \frac{K_2}{2}(2 + s)$$

2

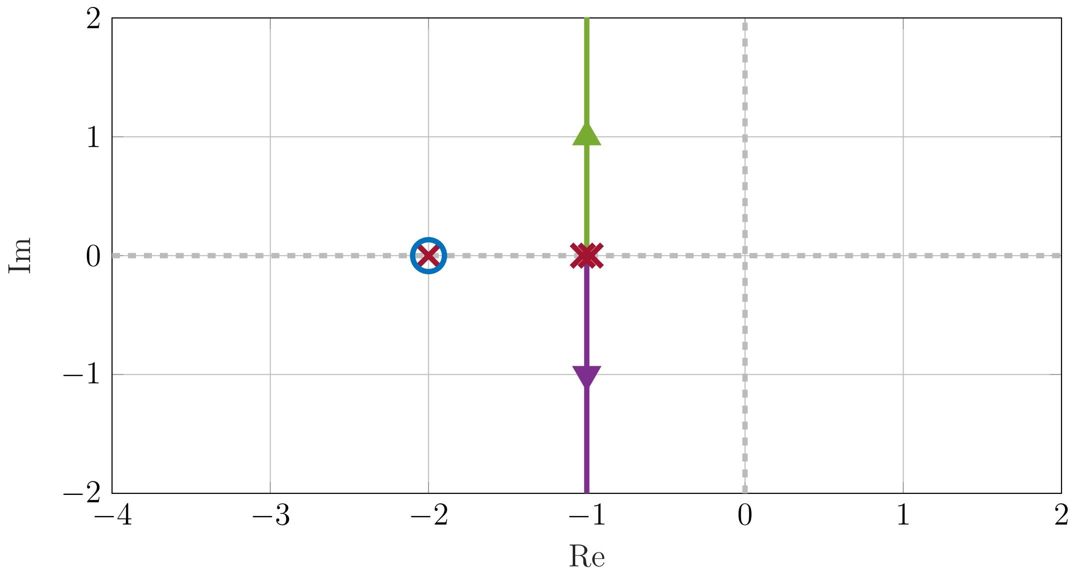
e) Zeichnen Sie schematisch die Wurzelortskurve für den Gesamtregelkreis mit den berechneten Werten. Markieren Sie dazu zuerst alle Pol- und Nullstellen des offenen Regelkreises im gegebenen Diagramm.

Antwort:

Zum Zeichnen der Wurzelortskurve werden zunächst die Pol- und Nullstellen des offenen Regelkreises benötigt. Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises lautet:

$$G_0 = G_{R2} G_{w1} G_2 = \frac{K_2}{2} \cancel{(s+2)} \frac{1}{\cancel{s+2}} \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{K_2}{2} \frac{1}{(s+1)(s+1)}$$

Anhand der Übertragungsfunktion ist ablesbar, dass für den offenen Regelkreis 2 Polstellen bei $p_{1,2} = -1$ existieren. Damit ergibt sich die folgende Wurzelortskurve:



4

f) Welchen Unterschied zwischen den Gesamtregelkreisen bezüglich Stabilität und bleibender Regelabweichung aus **Teil 1** und **Teil 2** können Sie feststellen? Begründen Sie ihre Antwort.

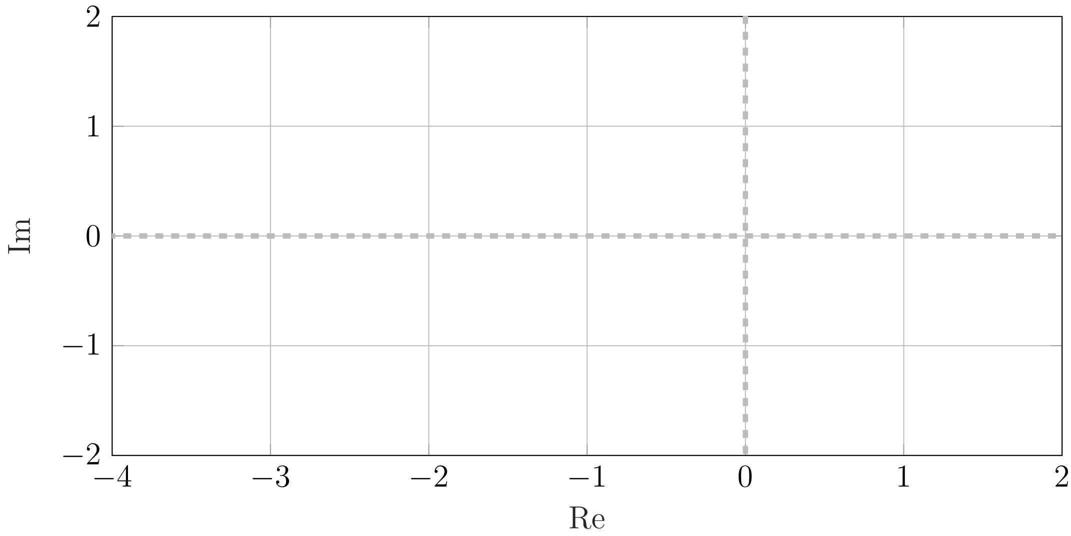
Antwort:

Anhand der Wurzelortskurven lässt sich feststellen, dass für den PI-Regler eine kritische Verstärkung existiert, bei der der Gesamtregelkreis instabil wird. Dies ist für den PD-Regler nicht der Fall. Die Wurzelortskurve für den Gesamtregelkreis mit PD-Regler verlässt die linke s-Halbebene nicht. Für den Gesamtregelkreis mit PI-Regler ist dies allerdings der Fall.

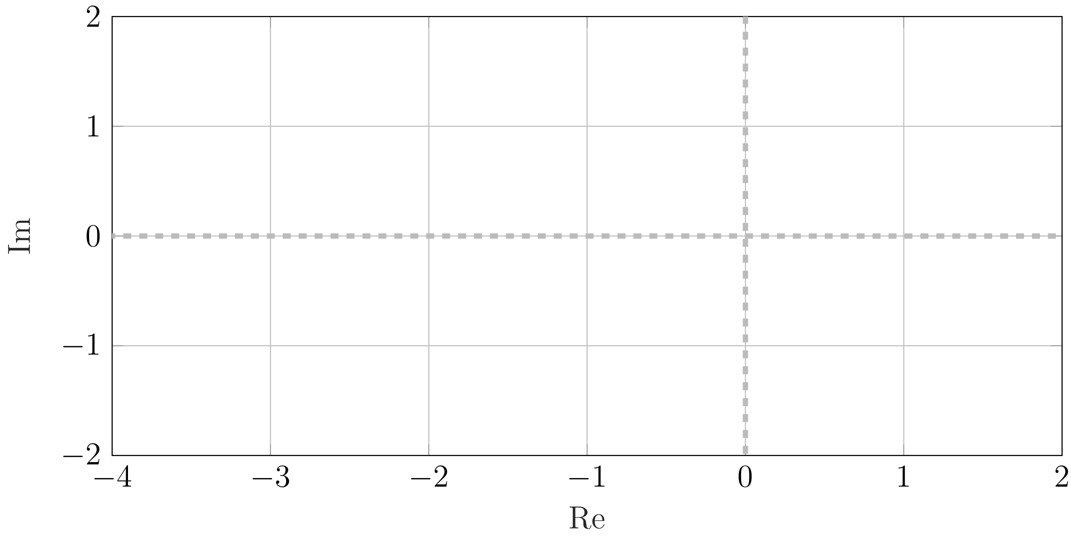
Da die Übertragungsfunktion des offenen Gesamtregelkreises für den PI-Regler einen I-Anteil enthält, besitzt der geschlossene Regelkreis keine bleibende Regelabweichung. Der offene Gesamtregelkreis für den PD-Regler besitzt dagegen keinen I-Anteil. Das bedeutet der geschlossene Regelkreis besitzt eine bleibende Regelabweichung. 4

Diagramme für Wurzelortskurve

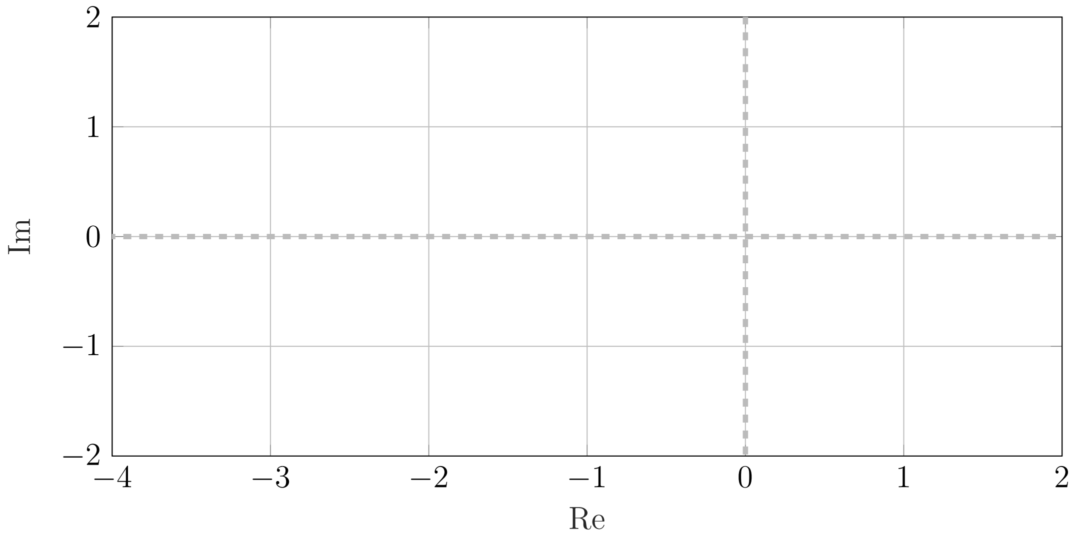
Aufgabenteil b)



Aufgabenteil c)

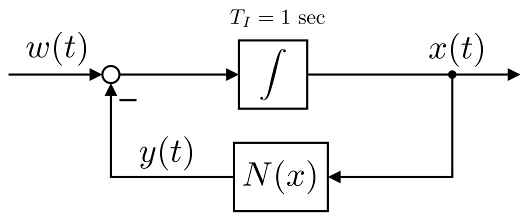


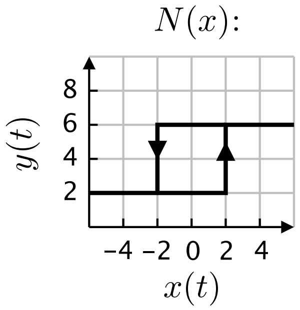
Aufgabenteil e)

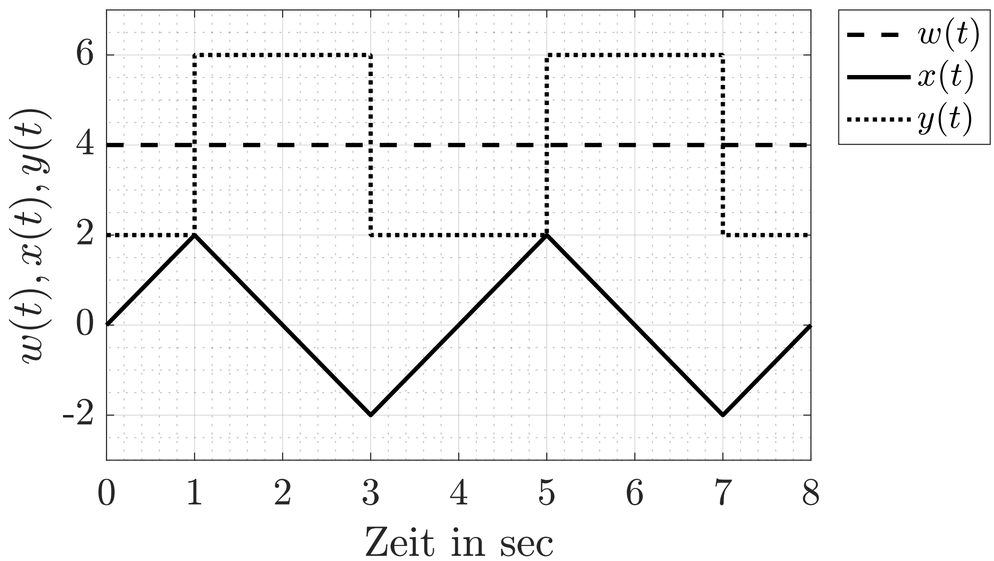


Aufgabe 5: Nichtlinearer Regelkreis (14 Punkte)

Bestimmen Sie die Größen $x(t)$ und $y(t)$ des abgebildeten nichtlinearen Regelkreises für den gegebenen Verlauf der Führungsgröße $w(t)$. Zeichnen Sie die zeitlichen Verläufe von $x(t)$ und $y(t)$ in das gegebene Diagramm ein. Die **Anfangsbedingung** des Integrators beträgt $x(t = 0) = 0$. Die Integrationszeit beträgt $T_I = 1$ sec.







Antwort: Der Ausgang des nichtlinearen Gliedes $y(t)$ in der Rückführung beträgt 2 oder 6. Daraus ergibt sich eine Differenz mit $w(t)$ von 2 ($w(t) - y(t) = 4 - 2 = 2$) oder -2 ($w(t) - y(t) = 4 - 6 = -2$). Das Eingangssignal am Integrator beträgt 2 oder -2. Somit setzt sich das Ausgangssignal $x(t)$ aus Geradenstücken mit diesen Steigungen zusammen. Die Umschaltung zwischen diesen Geradenstücken findet bei $x(t) = 2$ und $x(t) = -2$ statt (siehe Bild $N(x)$).

- $x(t)$ besteht aus Geradenstücken 2
- $x(t)$ nimmt Werte zwischen 2 und -2 an 2
- $x(t = 0) = 0$, $y(t = 0) = 2$ 2

- $y(t)$ nimmt Werte zwischen 2 und 6 an $\boxed{2}$
- Das Verhalten von $x(t)$ und $y(t)$ ändert sich nach 1 sec, 3 sec, 5 sec und 7 sec $\boxed{2}$
- $y(t)$ ist ein sprungförmiges Signal $\boxed{2}$
- $x(t)$ korrekt gezeichnet $\boxed{1}$
- $y(t)$ korrekt gezeichnet $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 14}$

Aufgabe 6: Dynamische Systeme (21 Punkte)

Gegeben ist ein System, das mit der Differentialgleichung

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

und den Koeffizienten $a_2 = 1$, $a_1 = 2$, $a_0 = 10$ und $b_0 = 5$ beschrieben wird.

a) Transformieren Sie das System in den Laplace-Bereich und stellen Sie die Übertragungsfunktion auf.

Antwort:

$$\begin{aligned}
a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) &= b_0 u(t) \\
&\;\circ\!\!-\!\!\bullet \\
a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) &= b_0 U(s) \\
Y(s)(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) &= b_0 U(s) \\
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{5}{s^2 + 2s + 10}.
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

b) Berechnen Sie die Pole der Übertragungsfunktion.

Antwort:

$$\begin{aligned}
p_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1^2 - 10} \\
p_1 &= -1 + 3i \\
p_2 &= -1 - 3i
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

c) Berechnen Sie die Verstärkung des Systems.

Antwort:

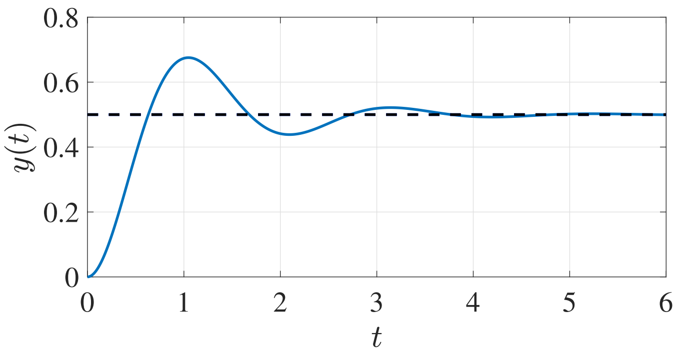
$$y(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot G_W \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} G_W = \frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$

d) Skizzieren Sie grob die Sprungantwort des Systems. Beachten Sie dabei, dass der Endwert korrekt eingezeichnet wird. **Antwort**: $\boxed{2}$

e) Skizzieren Sie den asymptotischen und realen Amplituden- und Phasengang. Achten Sie darauf, dass die wichtigsten Merkmale erkennbar sind.

Hinweis: Nutzen Sie den Zusammenhang $(s - \alpha - i\beta)(s - \alpha + i\beta) = s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2$.



$$
\begin{aligned}
(s-\alpha-i\beta)(s-\alpha+i\beta) &= s^2+2s+5 \\
\omega_0^2 &= 10 \\
\omega_0 &= 3.16.
\end{aligned}
$$

6

f) Wie wird das charakteristische Phänomen genannt, welches im Amplitudengang für konjugiert komplexe Polstellen auftreten kann? Ab welchem Wert von D tritt es auf?

Antwort:

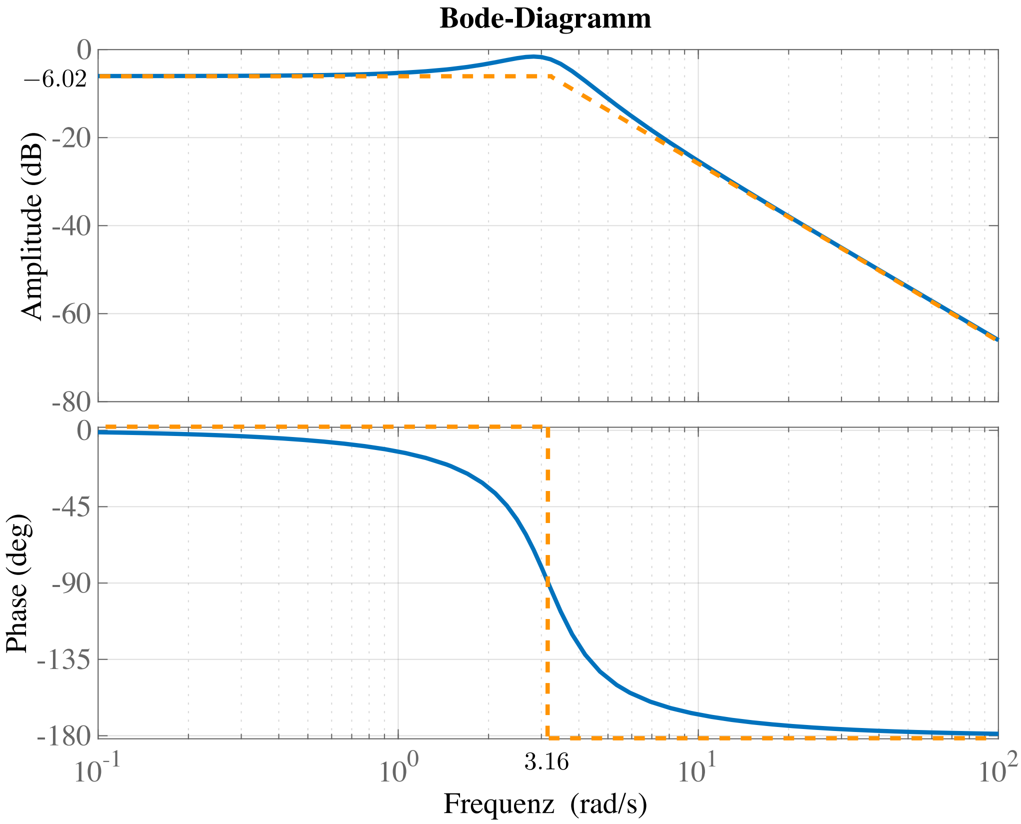
Im konjugiert komplexen Fall treten Resonanzüberhöhungen für $D \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ auf. 2

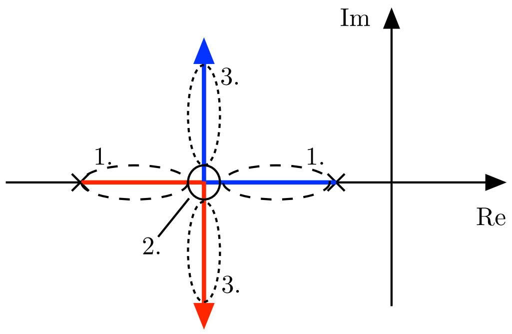
g) Nehmen Sie an, dass eine PT_2-Regelstrecke mit zwei reellen, nicht identischen, stabilen Polen mit einem P-Regler geregelt wird. Skizzieren Sie grob die WOK zu diesem Fall. Erklären Sie anhand der Skizze, wann die folgenden drei Polpaarkombinationen des geschlossenen Regelkreises abhängig von der Reglerverstärkung entstehen:
1.) Unterschiedliche reelle Pole, 2.) Identische reelle Pole, 3.) Konjugiert komplexe Pole.

Antwort:

- 1. Bei niedrigen Reglerverstärkungen befinden sich beide Pole des geschlossenen Regelkreises auf der reellen Achse.
- 2. Bei steigender Reglerverstärkung wandern die Pole des geschlossenen Regelkreises weiter zusammen, bis sie einen reellen Doppelpol bilden.
- 3. Wird die Reglerverstärkung noch weiter erhöht, besitzt der geschlossene Regelkreis zwei konjugiert komplexe Pole.

4


Bode-Diagramm
0
−6.02
-20
-40
-60
-80
Amplitude (dB)
0
-45
-90
-135
-180
Phase (deg)
10^{-1}
10^{0}
3.16
10^{1}
10^{2}
Frequenz (rad/s)


Im
Re
1.
1.
2.
3.
3.

$\sum 21$