Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 2 (MRT2)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

27. Juli 2005

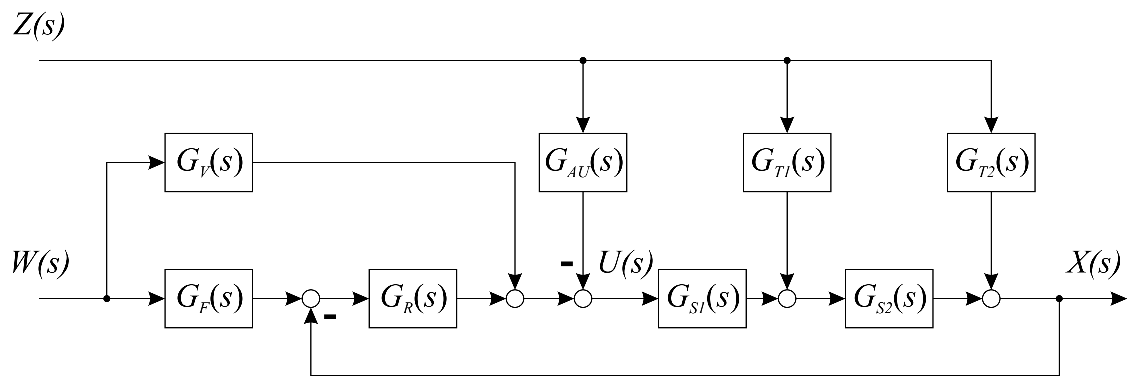
Name:	Punkte	A1	A2	A3	Gesamt
Mat.-Nr.:	Soll:	35	20	45	100
Note:	Ist:				

Aufgabe 1: Vorsteuerung und Störgrößenaufschaltung

Auf einen Regelkreis bestehend aus einem Regler $G_R(s)$ und zwei Teilstrecken $G_{S1}(s)$, $G_{S2}(s)$ wirkt eine Störung über die Teilstecken $G_{T1}(s)$ und $G_{T2}(s)$.

Durch eine Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ und eine Vorsteuerung $G_V(s)$ soll das Stör- und Führungsverhalten verbessert werden. Die Übertragungsfunktion $G_F(s)$ bezeichnet dabei das gewünschte Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises. Es ergibt sich das unten dargestellte Blockschaltbild.

Hinweis: Aufgabenteil d) kann unabhängig gelöst werden.



a) Ermitteln Sie die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ und Störübertragungsfunktion $G_Z(s)$ des geschlossenen Regelkreises gemäß:

$$X(s) = G_W(s) \cdot W(s) + G_Z(s) \cdot Z(s)$$

b) Wie muss die Übertragungsfunktion $G_V(s)$ gewählt werden, damit die Regelstrecke ohne Störungen ($Z(s) = 0$) das gewünschte Führungsverhalten $G_F(s)$ aufweist:

$$X(s) = G_F(s) \cdot W(s)$$

c) Die Regelstecke hat die Übertragungsfunktionen $G_{S1}(s) = \frac{1}{s}$ und $G_{S2}(s) = \frac{1}{s+2}$. Angenommen Sie haben folgende Übertragungsfunktionen für $G_F(s)$ zur Auswahl:

1) $G_F(s) = \frac{100}{s+100}$
2) $G_F(s) = \frac{1}{(s+10)^2}$
3) $G_F(s) = \frac{100}{(s+10)^2}$
4) $G_F(s) = \frac{100}{s^2+100}$

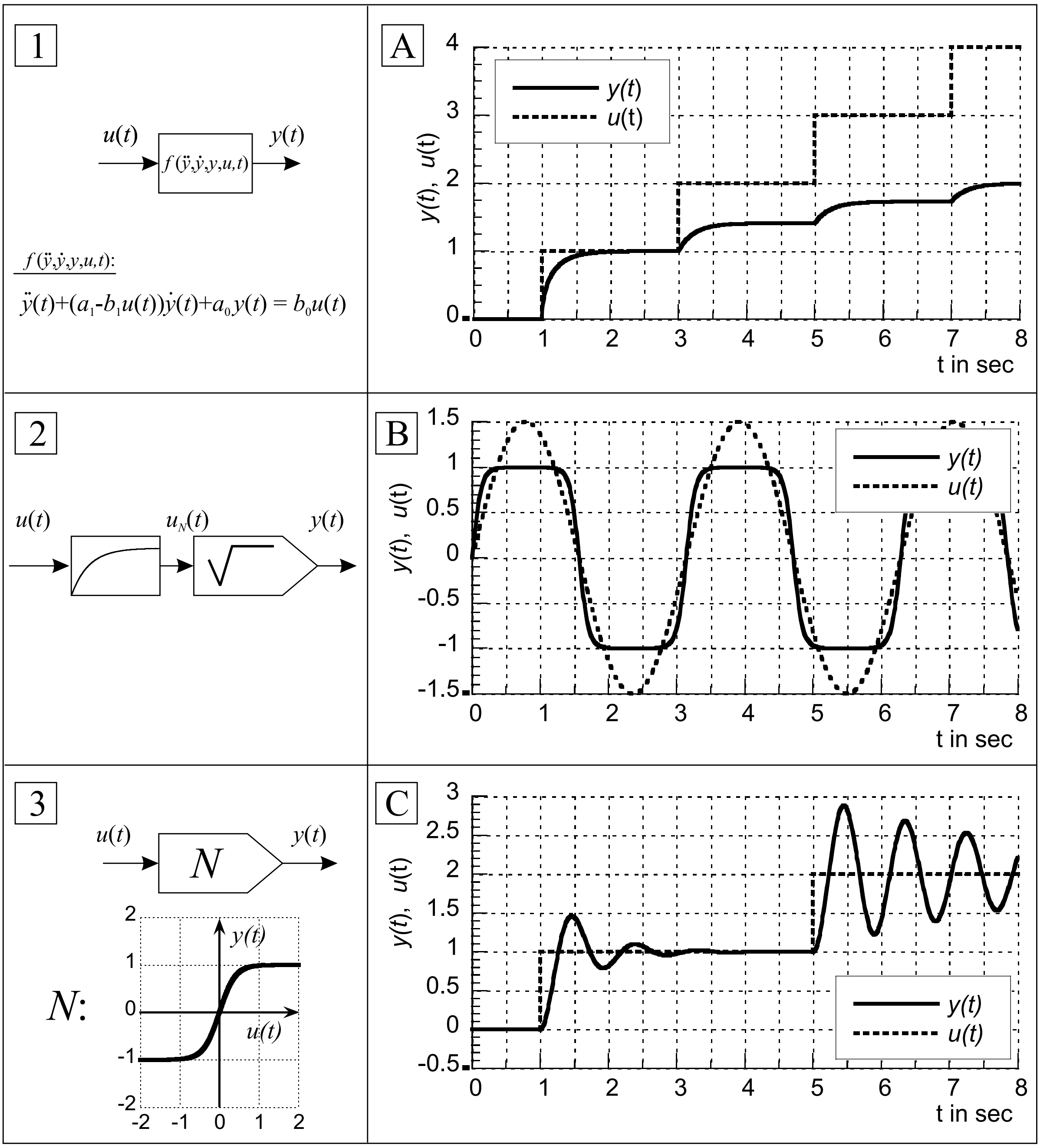
Für welche der Übertragungsfunktionen ergeben sich realisierbare Vorsteuerungen $G_V(s)$? Von den realisierbaren Möglichkeiten ist aber nur eine sinnvoll! Warum?

d) Die Störungen wirken über die Teilstrecken $G_{T1}(s) = \frac{0{,}5}{s+0{,}5}$ und $G_{T2}(s) = \frac{1}{s+1}$. Berechnen Sie, für welche Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ der Störgrößeneinfluss verschwindet. Sie erhalten eine Reihenschaltung von zwei Teilübertragungsfunktionen $G_{AU}(s) = G_{AU1}(s) + G_{AU2}(s)$. Sind beide Teilübertragungsfunktionen realisierbar? Falls nicht, schlagen Sie eine näherungsweise Realisierung vor. Ist eine statische Störgrößenaufschaltung sinnvoll?

Aufgabe 2: Nichtlineare Systeme

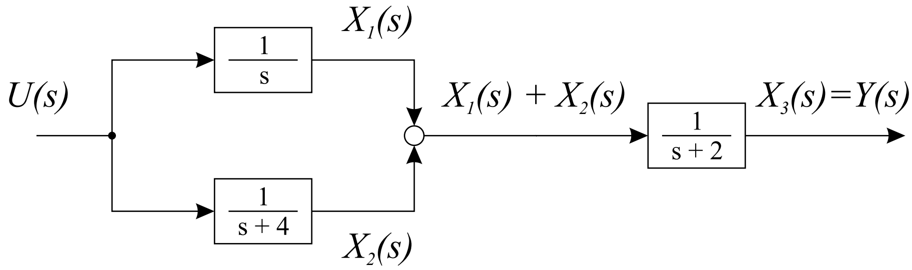
Für drei nichtlineare Systeme wurden die unten abgebildeten Verläufe der Ein- und Ausgangsgröße gemessen.

Begründen Sie anhand der Zeitverläufe, warum es sich um nichtlineare Systeme handeln muss. Ordnen Sie die abgebildeten Systeme den Zeitverläufen zu. Begründen Sie Ihre Wahl.



Aufgabe 3: Zustandsregelung

Gegeben sei das Blockschaltbild einer Regelstrecke im Bildbereich.



a) Stellen Sie die Zustandsgleichungen im Zeitbereich auf (für jeden Block eine Gleichung). Ermitteln Sie $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}^T$.

b) Ermitteln Sie die Pole des Systems. Ist das System stabil?

c) Zeigen Sie, dass das System nicht vollständig zustandssteuerbar ist, sondern nur 2 Zustände beeinflusst werden können.

d) Trotz eingeschränkter Steuerbarkeit soll eine Zustandsregelung für die steuerbaren Pole entworfen werden. Weil nur 2 Pole beeinflusst werden können, wird ein Zustandsregler mit nur 2 Freiheitsgraden benötigt. Wählen Sie $\mathbf{k}^T = [k_1 \quad k_2 \quad 0]$. Bestimmen Sie k_1 und k_2 so, dass die beeinflussbaren Pole des Systems nach -5 und -6 verschoben werden. Welcher Pol lässt sich nicht verändern?

e) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G_S(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$. Begründen Sie anhand von $G_S(s)$, warum das System einen nicht steuerbaren Pol hat.

Lösungen Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 2 (MRT2)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

27. Juli 2005

<u>Aufgabe 1:</u> Vorsteuerung und Störgrößenaufschaltung

a) Ermittlung der Übertragungsfunktionen $G_W(s)$ und $G_Z(s)$:

Aus dem Blockschaltbild liest man ab:

$$\begin{aligned} X(s) =& Z(s)G_{T2}(s) + G_{S2}(s)[Z(s)G_{T1}(s) + G_{S1}(s)[-Z(s)G_{AU}(s) + \ldots \\ &+ W(s)G_V(s) + G_R(s)[-X(s) + G_F(s)W(s)]]] \end{aligned} \quad \boxed{7}$$

$$\begin{aligned} X(s) =& Z(s)G_{T2}(s) + G_{S2}(s)[Z(s)G_{T1}(s) - Z(s)G_{AU}(s)G_{S1}(s) + \ldots \\ &+ W(s)G_V(s)G_{S1}(s) - G_{S1}(s)G_R(s)X(s) + G_{S1}(s)G_R(s)G_F(s)W(s)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) =& Z(s)G_{T2}(s) + Z(s)G_{T1}(s)G_{S2}(s) - Z(s)G_{AU}(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s) + \ldots \\ &+ W(s)G_V(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s) - G_{S1}(s)G_{S2}(s)G_R(s)X(s) + \ldots \\ &+ G_{S1}(s)G_{S2}(s)G_R(s)G_F(s)W(s) \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

Nachdem die Gleichung nach $X(s)$ aufgelöst wird, ergibt sich:

$$\begin{aligned} X(s) =& \underbrace{\frac{G_{S1}(s)G_{S2}(s)G_V(s) + G_F(s)G_R(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s)}{1 + G_R(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s)}}_{G_W(s)} W(s) + \ldots \quad \boxed{2} \\ &+ \underbrace{\frac{G_{T2}(s) + G_{S2}(s)G_{T1}(s) - G_{AU}(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s)}{1 + G_R(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s)}}_{G_Z(s)} Z(s) \quad \boxed{2} \end{aligned}$$

b) Ermittlung der Übertragungsfunktion $G_V(s)$:

$$G_F(s) \stackrel{!}{=} \frac{G_{S1}(s)G_{S2}(s)G_V(s) + G_F(s)G_R(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s)}{1 + G_R(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s)}$$ $\boxed{2}$

Um die obige Gleichung zu erfüllen, ergibt sich:

$$G_{S1}(s)G_{S2}(s)G_V(s) \stackrel{!}{=} G_F(s)$$ $\boxed{2}$

$$G_V(s) = \frac{G_F(s)}{G_{S1}(s)G_{S2}(s)}$$ $\boxed{2}$

c) Ermittlung der Übertragungsfunktionen mit realisierbaren Vorsteuerungen $G_V(s)$:

$$\begin{aligned} G_V(s) &= \frac{G_F(s)}{\frac{1}{s}\frac{1}{s+2}} \\ &= s(s+2)G_F(s) \end{aligned}$$

Um eine realisierbare Vorsteuerung $G_V(s)$ zu erhalten, muss der Nennergrad der Übertragungsfunktion größer gleich dem Zählergrad sein ($n \geq m$).

$\Rightarrow$ $G_F(s)$ benötigt einen Nennergrad von mindestens 2.

$\Rightarrow$ 1) $G_F(s)$ hat einen zu geringen Nennergrad. $\boxed{2}$

2) $G_F(s)$ hat einen stationären Endwert von 0,01 und ist daher nicht sinnvoll. $\boxed{2}$

3) $G_F(s)$ ist geeignet (nicht schwingungsfähig, Endwert von 1). $\boxed{2}$

4) $G_F(s)$ ist grenzstabil (Dauerschwingung). $\boxed{2}$

d) Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$:

$$\begin{aligned} G_{T2}(s) + G_{S2}(s)[G_{T1}(s) - G_{AU}(s)G_{S1}(s)] &= 0 \\ G_{T2}(s) + G_{S2}(s)G_{T1}(s) - G_{AU}(s)G_{S1}(s)G_{S2}(s) &= 0 \end{aligned}$$ $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad G_{AU}(s) &= \frac{G_{T2}(s)}{G_{S1}(s)G_{S2}(s)} + \frac{G_{S2}(s)G_{T1}(s)}{G_{S1}(s)G_{S2}(s)} \\ &= \frac{G_{T1}(s)}{G_{S1}(s)} + \frac{G_{T2}(s)}{G_{S1}(s)G_{S2}(s)} \\ &= \frac{\frac{0,5}{s+0,5}}{\frac{1}{s}} + \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s}\frac{1}{s+2}} \\ &= \underbrace{\frac{0,5s}{s+0,5}}_{\text{realisierbar}} + \underbrace{\frac{s(s+2)}{s+1}}_{\text{nicht realisierbar}} \end{aligned}$$ $\boxed{2+2}$

Möglichkeiten der näherungsweisen Realisierung: $\boxed{2}$

a) Realisierung durch Hinzufügen eines schnellen PT_1-Gliedes mit der Verstärkung 1:

$$G_{AU}(s) = \frac{0,5s}{s+0,5} + \frac{s(s+2)}{s+1} \quad \Rightarrow \quad G_{AU}(s) = \frac{0,5s}{s+0,5} + \frac{s(s+2)}{(s+1)(1+0,01s)}$$
$$= \underline{\frac{0,5s}{s+0,5} + \frac{100s(s+2)}{(s+1)(s+100)}}$$

b) Realisierung durch Entfernen der Nullstelle bei $s = -2$:

$$G_{AU}(s) = \frac{0,5s}{s+0,5} + \frac{s(s+2)}{s+1} \quad \Rightarrow \quad G_{AU}(s) = \underline{\frac{0,5s}{s+0,5} + \frac{2s}{s+1}}$$

Statisch nicht sinnvoll, da D-Verhälten vorliegt. $\Rightarrow$ Endwert = 0 $\boxed{2}$

$\boxed{\sum 35}$

Aufgabe 2: Nichtlineare Systeme

- **Verlauf A:** Der Endwert des Systems beträgt nach Anregung mit einem Einheitssprung 1. Bei den folgenden Sprüngen der Eingangsgröße auf 2, 3 und 4, müsste die Ausgangsgrößen bei einem linearen System ebenfalls auf 2, 3 und 4 ansteigen, weil die Verstärkung eines linearen Systems von der Eingangsgröße unabhängig ist. Das System zeigt typisches Verzögerungsverhalten, aber mit abnehmender Verstärkung bei zunehmender Sprunghöhe, deshalb ist es **System 2** zuzuordnen (Reihenschaltung eines Verzögerungsgliedes mit einer Wurzelfunktion). $\boxed{3}$ $\boxed{3}$

- **Verlauf B:** Die Antwort eines linearen Systems auf eine sinusförmige Schwingung ist immer eine sinusförmige Schwingung gleicher Frequenz. Es kann nur eine Veränderung der Amplitude und der Phase auftreten. Dieses System verformt aber die Sinusschwingung stark. Bei niedrigen Werten wird das Eingangssignal verstärkt, bei hohen verkleinert, bzw. auf maximal 1 begrenzt. Die Kennlinie von **System 3** hat genau diese Eigenschaft. $\boxed{3}$ $\boxed{3}$

- **Verlauf C:** Das schwingungsfähige System hat bei einem Sprung auf 1 eine viel größere Dämpfung als bei einem Sprung auf 2. Bei linearen Systemen sind aber die Systemeigenschaften (Stabilität/Dämpfung, Eigenfrequenz) vom Eingangssignal unabhängig. Zu dem vorliegenden Verhalten passt **System 1**, das durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben wird, bei der die Eingangsgröße den Koeffizienten von $\dot{y}$ und damit die Dämpfung ändert (Eingang u und $\dot{y}$ sind multiplikativ verknüpft). $\boxed{4}$ $\boxed{4}$

$\boxed{\sum 20}$

Aufgabe 3: Zustandsregelung

a) Zustandsgleichungen im Bildbereich:

$$X_1(s) = \frac{1}{s}U(s) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{sX_1(s) = U(s)} \qquad \boxed{1}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+4}U(s) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{sX_2(s) + 4X_2(s) = U(s)} \qquad \boxed{1}$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+2}[X_1(s) + X_2(s)] \quad \Leftrightarrow \quad \underline{sX_3(s) + 2X_3(s) = X_1(s) + X_2(s)} \qquad \boxed{1}$$

$$\underline{Y(s) = X_3(s)} \qquad \boxed{1}$$

Zustandsgleichungen im Zeitbereich:

$$\dot{x}_1(t) = u(t) \qquad \boxed{1}$$

$$\dot{x}_2(t) = -4x_2(t) + u(t) \qquad \boxed{1}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2x_3(t) \qquad \boxed{1}$$

$$y(t) = x_3(t) \qquad \boxed{1}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u(t), \quad \mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}(t)} \qquad \boxed{3}$$

b) Stabilität:

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s+4 & 0 \\ -1 & -1 & s+2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \underline{s(s+4)(s+2) = 0} \qquad \boxed{1+1}$$

<u>Pole:</u> $s_1 = 0; \quad s_2 = -2; \quad s_3 = -4$ $\boxed{1}$

Das System ist grenzstabil, da der Pol $s_1 = 0$ auf der imaginären Achse liegt. $\boxed{1}$

c) Zustandssteuerbarkeit:

Zustandssteuerbarkeitsmatrix: $\mathbf{S}_S = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A^2b}]$

$$\mathbf{S}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 16 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$ 2

$$\det[\mathbf{S}_S] = (-1)^2 \cdot [-4 \cdot (-8) - 16 \cdot 2] = \underline{0}$$ 1

$\Rightarrow$ Das System ist nicht vollständig zustandssteuerbar. 1

Ermittlung einer Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang} = \underline{2}$$ 1+2

$\Rightarrow$ 2 Zustände können beeinflusst werden. 1

d) Entwurf einer Zustandsregelung für die steuerbaren Pole:

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bk^T}] = 0$$ 1

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$ 3

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s+4 & 0 \\ -1 & -1 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} s+k_1 & k_2 & 0 \\ k_1 & s+4+k_2 & 0 \\ -1 & -1 & s+2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Entwicklung der Determinante nach der dritten Spalte:

$$(-1)^6 \cdot (s+2)[(s+k_1)(s+4+k_2) - (k_1k_2)] = 0$$
$$(s+2) \cdot [s^2 + 4s + k_2s + k_1s + 4k_1 + k_1k_2 - k_1k_2] = 0$$

$$\underbrace{(s+2)} \cdot [s^2 + (4+k_1+k_2)s + 4k_1] = 0$$ 2

Pol bei $s = -2$ kann nicht verändert werden! 1

$\underline{\text{Polvorgabe:}}$ $(s+5)(s+6) = s^2 + 11s + 30 = 0$ $\boxed{1}$

Durch einen Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$4k_1 \overset{!}{=} 30 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 7,5 \qquad \boxed{1}$$

$$4 + k_1 + k_2 \overset{!}{=} 11 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -0,5 \qquad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{k^T} = \begin{bmatrix} 7,5 & -0,5 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \boxed{1}$$

e) Übertragungsfunktion der Strecke $G_S(s)$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s+4 & 0 \\ -1 & -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \cdots & \mathcal{A}_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{31} & \cdots & \mathcal{A}_{33} \end{bmatrix}^T$$

$\underline{\text{mit:}}$

$$\begin{aligned}
\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) &= (-1)^2 \cdot s[(s+4)(s+2) - 0(-1)] = \underline{s(s+4)(s+2)} \\
\mathcal{A}_{11} &= (-1)^2 \cdot [(s+4)(s+2) - 0(-1)] = \underline{(s+4)(s+2)} \\
\mathcal{A}_{12} &= (-1)^3 \cdot [0(s+2) - 0(-1)] = \underline{0} \\
\mathcal{A}_{13} &= (-1)^4 \cdot [0(-1) - (s+4)(-1)] = \underline{s+4} \\
\mathcal{A}_{21} &= (-1)^3 \cdot [0(s+2) - 0(-1)] = \underline{0} \\
\mathcal{A}_{22} &= (-1)^4 \cdot [s(s+2) - 0(-1)] = \underline{s(s+2)} \\
\mathcal{A}_{23} &= (-1)^5 \cdot [s(-1) - 0(-1)] = \underline{s} \\
\mathcal{A}_{31} &= (-1)^4 \cdot [0 \cdot 0 - 0(s+4)] = \underline{0} \\
\mathcal{A}_{32} &= (-1)^5 \cdot [s \cdot 0 - 0 \cdot 0] = \underline{0} \\
\mathcal{A}_{33} &= (-1)^6 \cdot [s(s+4) - 0 \cdot 0)] = \underline{s(s+4)}
\end{aligned} \qquad \boxed{5}$$

$$\Rightarrow \quad (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s(s+4)(s+2)} \begin{bmatrix} (s+4)(s+2) & 0 & s+4 \\ 0 & s(s+2) & s \\ 0 & 0 & s(s+4) \end{bmatrix}^T \qquad \boxed{1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+4} & 0 \\ \frac{1}{s(s+2)} & \frac{1}{(s+4)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \qquad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \quad G_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+4} & 0 \\ \frac{1}{s(s+2)} & \frac{1}{(s+4)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+2)} & \frac{1}{(s+4)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{1}$$

Bei Vereinfachung der Übertragungsfunktion $G_S(s)$ zeigt sich:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad G_S &= \frac{1}{s(s+2)} + \frac{1}{(s+4)(s+2)} \\
&= \frac{2(s+2)}{s(s+4)(s+2)} \\
&= \frac{2}{s(s+4)}
\end{aligned}$$ $\boxed{1}$

Der Pol bei $s = -2$ kürzt sich. $\Rightarrow$ Steuerbarkeit ist eingeschränkt! $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 45}$