Prüfungsklausur Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

13.08.2022

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Ges.
Punkte:	22	21	18	22	14	23	120
Erreicht:							

Dauer der Klausur: 2 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Kurzaufgaben (22 Punkte)

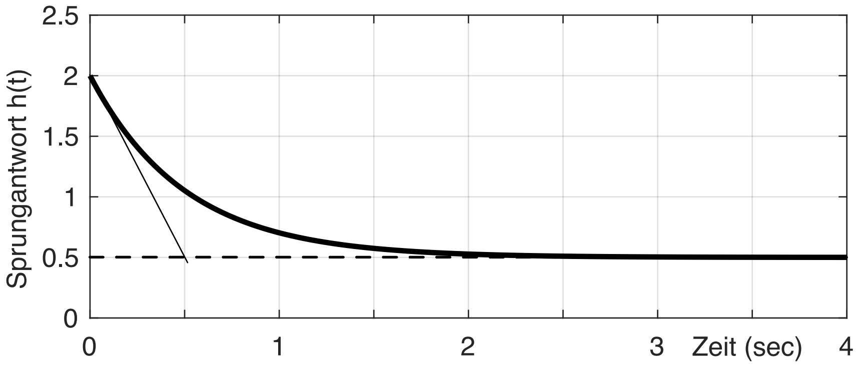
a) Bei einem Kompensationsreglerentwurf wird der Regler $G_R(s)$ wie folgt aus der Regelstrecke $G_S(s)$ und dem gewünschten Führungsverhalten $G_W(s)$ berechnet (4 Punkte):

$$G_R(s) = \frac{G_W(s)}{G_S(s)(1 - G_W(s))}$$

1) Welche Anforderung an $G_W(s)$ kann aus dem Term $(1 - G_W(s))$ abgeleitet werden?
2) Was verrät der Term $G_W(s)/G_S(s)$ über die Funktionsweise des Kompensationsreglers und was bedeutet dies für die Nullstellen der Regelstrecke?

b) Gegeben ist die Sprungantwort folgender Übertragungsfunktion (8 Punkte):

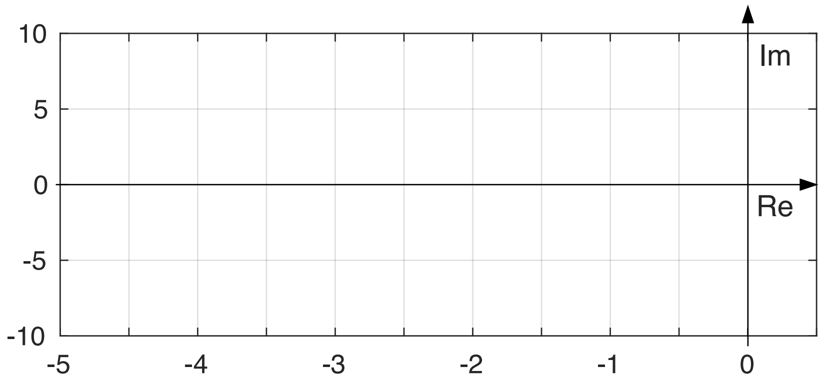
$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}$$



1) Wie lautet die allgemeine Bezeichnung dieses Übertragungsgliedes?
2) Wie müsste a_0 in Abhängigkeit von b_0 und b_1 gewählt werden, damit sich ein Allpassglied ergäbe und welches Vorzeichen müsste a_0 haben?
3) Bestimmen Sie den Pol p und die Zeitkonstante T anhand der oben abgebildeten Sprungantwort.
4) Bestimmen Sie nun die unbekannten Parameter a_0, b_0, b_1 der Übertragungsfunktion anhand der Sprungantwort. **Hinweis:** Sie benötigen hierzu Pol oder Zeitkonstante aus dem vorherigen Aufgabenteil.

c) Die Wurzelortskurve der folgenden Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises soll untersucht werden (10 Punkte):

$$G_0(s) = \frac{k(s + n_1)}{(s + 0{,}5)(s + 1{,}5)(s + 2)}$$



1) Zeichnen Sie die Pole in das obige Diagramm ein. Nehmen Sie an, die Nullstelle n_1 läge weiter links als alle Pole. Zwischen welchen Polen würde eine Verzweigung der Wurzelortskurve auftreten? Die verzweigenden Äste nähern sich für $k \to \infty$ den Asymptoten an. **Begründen Sie kurz**, warum die Stabilität des Regelkreises von der Lage des Schnittpunkts s_A dieser Asymptoten abhängt.

2) Berechnen Sie nun den Schnittpunkt s_A in Abhängigkeit der unbekannten Lage der Nullstelle n_1. Bestimmen Sie dann, wo die Nullstelle liegen müsste, damit der Regelkreis für $k \to \infty$ gerade nicht mehr instabil werden kann.

3) Tragen Sie die berechnete Nullstelle in das Diagramm ein und skizzieren Sie nun die Wurzelortskurve (Verzweigungspunkte können näherungsweise in der Mitte zwischen zwei Polen eingezeichnet werden).

4) Schauen Sie sich noch einmal die Gleichung zur Berechnung von s_A an. Wenn Sie einen der Pole zusammen mit der Nullstelle n_1 verschieben würden (beide also den gleichen Abstand behalten), hätte dies einen Einfluss auf die Stabilität? **Kurze Begründung!**

Aufgabe 2: Vorfilter und Vorsteuerung (21 Punkte)

Im Folgenden soll die Erweiterung eines Regelkreises um einen weiteren Freiheitsgrad untersucht werden. Dazu soll zur gegenüberstellung Regelkreis zunächst mit einer Vorsteuerung und in einem weiteren Fall mit einer Vorfilterung erweitert werden.
Der Regelkreis besteht aus der Strecke $G_S(s)$, dem Regler $G_R(s)$ sowie einem Sensor $G_M(s)$. Des weiteren beeinflusst eine Eingangsstörung $D_i(s)$ über die Übertragungsfunktion $G_{Di}(s)$ den Regelkreis. Der Sensor wird benötigt, um die Regelgröße zu messen. Es handelt sich um einen nicht idealen Sensor mit einer zunächst beliebigen Übertragungsfunktion $G_M(s) \neq 1$.

a) Zeichnen Sie das Blockschaubild des beschriebenen Regelkreises erweitert um eine Vorsteuerung.

b) Zeichnen Sie das Blockschaubild des beschriebenen Regelkreises erweitert um eine Vorfilterung.

c) Prüfen Sie, ob für diese beiden Regelkreise weiterhin die Äquivalenz zwischen Vorsteuerung und Vorfilterung gilt. Berechnen Sie dazu zunächst die Führungsübertragungsfunktion der Ansätze. Bei der Berechnung darf auf das Argument der Funktionen verzichtet werden.

d) Die Übertragungsfunktionen seien nun definiert als $G_S(s) = \frac{3}{s(s+4)}$,
$G_R(s) = \frac{K_R(s+3)}{s+4}$, $G_M(s) = \frac{1}{s+5}$ sowie $G_D(s) = \frac{s}{s^2+1}$.
Legen Sie nun einen Vorfilter $\tilde{G}_V(s)$ für diesen erweiterten Regelkreis aus. Dieser soll mögliche Nullstellen in der Führungsübertragungsfunktion kompensieren und dabei die Gesamtverstärkung unbeeinflusst lassen.

e) Legen Sie nun einen neuen Vorfilter aus. Dieser soll so entworfen werden, dass er die Gesamtverstärkung des Systems gleich 1 ist.

Aufgabe 3: Stabilität (18 Punkte)

Gegeben ist die folgende Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{s}{(s+3)(s+2)(s-1)}.$$

Diese soll mit einem PI-Regler

$$G_R(s) = K + \frac{K}{T_I \cdot s}$$

geregelt werden.

a) Bestimmen Sie die Integrationszeit T_I, sodass der langsamste stabile Pol kompensiert wird. Wie lautet die Übertragungsfunktion des offen Regelkreises nach der Kompensation?

Für $K = 1$ ist ein Teil der Ortskurve gegeben.

b) Vervollständigen Sie bitte diese Abbildung. Ergänzen Sie hierfür die horizontale und vertikale Achse, beschriften Sie die Achsen und markieren Sie außerdem den Punkt $(-1, 0)$.

Hinweis: Die Bestimmung der Skalierung der vertikalen Achse ist nicht notwendig.

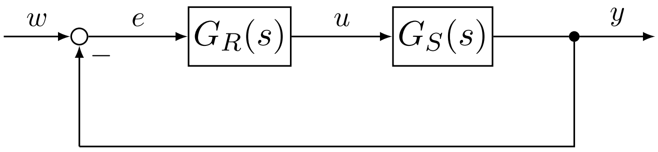
c) Analysieren Sie mithilfe des Nyquist-Kriteriums die Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Begründen Sie, welches Nyquist-Kriterium hierfür genutzt wird.

d) Wie hoch muss die Verstärkung K des PI-Reglers gewählt werden, damit der geschlossene Regelkreis stabil wird? Wie ändert sich hierfür qualitativ die Ortskurve? Zeichnen Sie diese für eine Verstärkung, die zu einem stabilen geschlossen Regelkreis führt. Begründen Sie die Stabilität ebenfalls mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums.

e) Bestimmen Sie nun auch mit dem Hurwitz-Kriterium, welche Bedingungen für einen stabilen Regelkreis gelten müssen.

Aufgabe 4: Kompensationsreglerentwurf (22 Punkte)

Folgender Regelkreis wird in dieser Aufgabe betrachtet:



Die Strecke $G_S(s)$ besitzt folgende Übertragungsfunktion.

$$G_S(s) = \frac{1}{\frac{1}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1}$$

a) Berechnen Sie die Pole der Regelstrecke. Besitzt die gegebene Regelstrecke stabiles oder instabiles Verhalten? Ist die Regelstrecke schwingungsfähig oder nicht schwingungsfähig? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Der Regler $G_R(s)$ soll nach dem Kompensationsverfahren ausgelegt werden. Geben sie die allgemeine Formel für den Regler $G_R(s)$ an wenn das Führungsverhalten $G_w(s)$ gefordert ist.

c) Welches Führungsverhalten wird für einen perfekten Regler gefordert? Warum ist diese Regelung nicht umsetzbar?

d) Jetzt werden konkrete gewünschte Führungsverhalten vorgegeben. Berechnen Sie den Regler $G_R(s)$ für folgende Führungsverhalten:

$$G_{w,1}(s) = \frac{1}{3s+1} \qquad G_{w,2}(s) = \frac{1}{2s^2+s+1} \qquad G_{w,3}(s) = \frac{1}{s^3+4s^2+s+1}$$

e) Welche der berechneten Regler sind realisierbar? Welche der berechneten Regler besitzen sprungfähiges Verhalten? Welche der berechneten Regler besitzen globales I-Verhalten?
Füllen Sie dazu jede Zelle der vorgegebenen Tabelle mit entweder *ja* oder *nein* aus. Erklären Sie, warum sich die Einträge für das globale I-Verhalten ergeben.

	realisierbar	sprungfähig	I-Anteil
$G_{R,1}(s)$			
$G_{R,2}(s)$			
$G_{R,3}(s)$			

Tabelle 1: Tabelle für Aufgabenteil e)

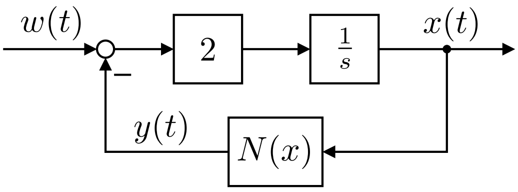
f) Die Regelstrecke wird nun geändert. Sie besitzt folgende Übertragungsfunktion:

$$\tilde{G}_S(s) = \frac{1-3s}{1+3s}$$

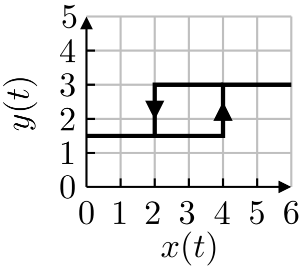
Welche besondere Eigenschaft besitzt die Regelstrecke $\tilde{G}_S(s)$, die bei der Vorgabe des Führungsverhaltens berücksichtigt werden muss. Erklären Sie warum diese Eigenschaft bei der Vorgabe des Führungsgrößenverhaltens berücksichtigt werden muss. Geben Sie außerdem ein mögliches Führungsverhalten vor.

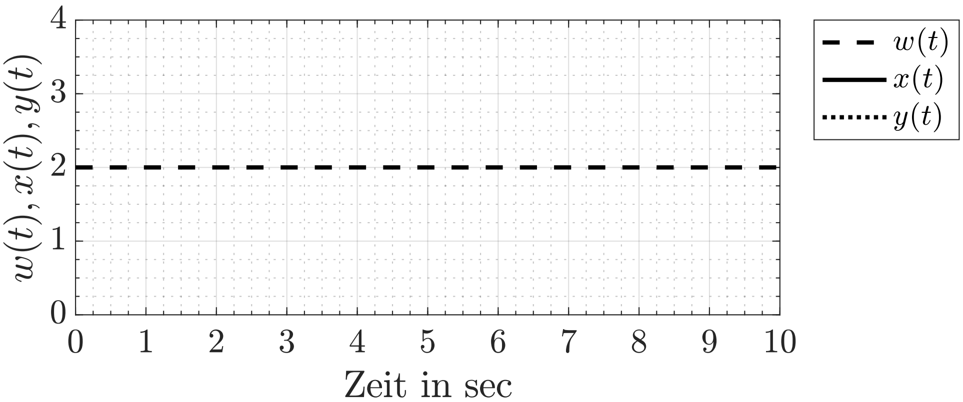
Aufgabe 5: Nichtlinearer Regelkreis (14 Punkte)

Bestimmen Sie die Größen $x(t)$ und $y(t)$ des abgebildeten nichtlinearen Regelkreises für den gegebenen Verlauf der Führungsgröße $w(t)$. Zeichnen Sie die zeitlichen Verläufe von $x(t)$ und $y(t)$ in das gegebene Diagramm ein. Die **Anfangsbedingung** des Integrators beträgt $x(t = 0) = 0$.



$N(x)$:





Aufgabe 6: Dynamische Systeme (23 Punkte)

Gegeben ist ein System, das mit der Differentialgleichung

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

und den Koeffizienten $a_2 = a_1 = b_0 = 1$, $a_0 = 5$ beschrieben wird.

a) Transformieren Sie das System in den Laplace-Bereich und stellen Sie die Übertragungsfunktion auf.

b) Berechnen Sie die Pole der Übertragungsfunktion.

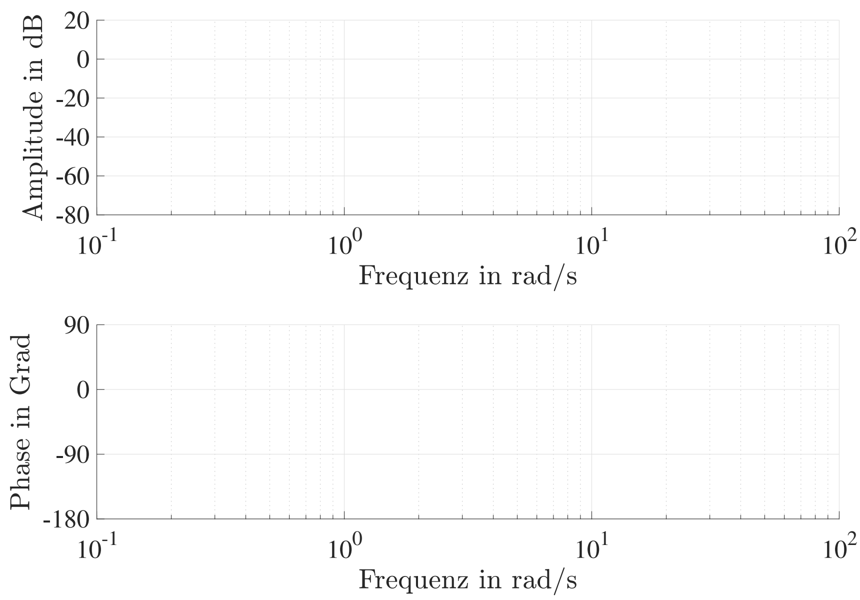
c) Wie wird das in b) berechnete Polpaar bezeichnet? Welche zwei anderen (stabilen) Polpaarkombinationen gibt es für PT_2-Systeme?

d) Berechnen Sie die Verstärkung des Systems.

e) Skizzieren Sie grob die Sprungantwort des Systems. Beachten Sie dabei, dass der Endwert korrekt eingezeichnet wird.

f) Skizzieren Sie den asymptotischen und realen Amplituden- und Phasengang. Achten Sie darauf, dass die wichtigsten Merkmale erkennbar sind.

Hinweis: Nutzen Sie den Zusammenhang $(s-\alpha-i\beta)(s-\alpha+i\beta) = s^2+2D\omega_0 s+\omega_0^2$.



g) Wie wird das charakteristische Phänomen genannt, welches im Amplitudengang für konjugiert komplexe Polstellen auftreten kann? Ab welchem Wert von D tritt es auf?

h) Nehmen Sie an, dass eine PT_2-Regelstrecke mit zwei reellen, nicht identischen, stabilen Polen mit einem P-Regler geregelt wird. Skizzieren Sie grob die WOK zu diesem Fall. Erklären Sie anhand der Skizze, wann die Polpaarkombinationen aus c) abhängig von der Reglerverstärkung entstehen.

Lösung:

Aufgabe 1: Kurzaufgaben (22 Punkte)

a) Bei einem Kompensationsreglerentwurf wird der Regler $G_R(s)$ wie folgt aus der Regelstrecke $G_S(s)$ und dem gewünschten Führungsverhalten $G_W(s)$ berechnet (4 Punkte):

$$G_R(s) = \frac{G_W(s)}{G_S(s)(1 - G_W(s))}$$

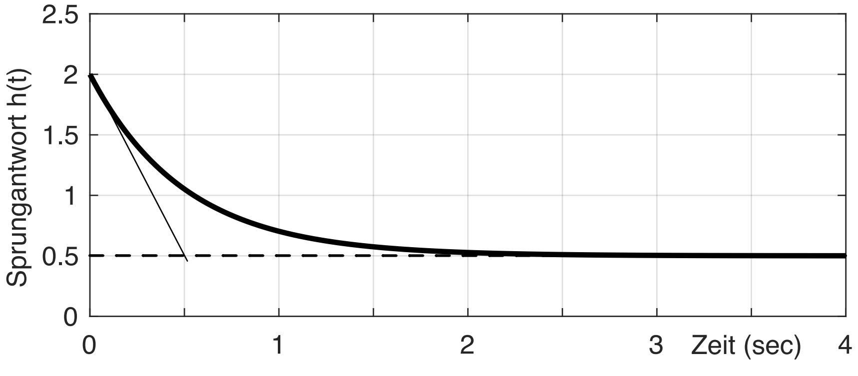
1) Welche Anforderung an $G_W(s)$ kann aus dem Term $(1 - G_W(s))$ abgeleitet werden?
2) Was verrät der Term $G_W(s)/G_S(s)$ über die Funktionsweise des Kompensationsreglers und was bedeutet dies für die Nullstellen der Regelstrecke?

Antwort:

1) $G_W(s)$ darf nicht gleich 1 gewählt werden, ideale Regelung $y = u$ ist nicht möglich, die Regelgröße muss immer eine zeitliche Verzögerung aufweisen. Je näher die Regelung dem Ideal kommt, umso größer wird die Stellgröße. $\boxed{2}$
2) Der Kompensationsregler versucht im Wesentlichen die Regelstrecke zu invertieren (zu kürzen), wie dies auch bei der Steuerung gemacht wird. Vorsicht! Nichtphasenminimales Verhalten der Strecke führt zu einem instabilen oder akausalem Regler. $\boxed{2}$

b) Gegeben ist die Sprungantwort folgender Übertragungsfunktion (8 Punkte):

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}$$



1) Wie lautet die allgemeine Bezeichnung dieses Übertragungsgliedes?
2) Wie müsste a_0 in Abhängigkeit von b_0 und b_1 gewählt werden, damit sich ein Allpassglied ergäbe und welches Vorzeichen müsste a_0 haben?
3) Bestimmen Sie den Pol p und die Zeitkonstante T anhand der oben abgebildeten Sprungantwort.
4) Bestimmen Sie nun die unbekannten Parameter a_0, b_0, b_1 der Übertragungsfunktion anhand der Sprungantwort. **Hinweis:** Sie benötigen hierzu Pol oder Zeitkonstante aus dem vorherigen Aufgabenteil.

Antwort:

1) $PD - T_1$ 1

2) Der Pol muss stabil sein, also $a_0 > 0$. Die Nullstelle muss dann bei $-a_0$ liegen:

$$G(s) = \frac{b_1\left(s + \frac{b_0}{b_1}\right)}{s + a_0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{b_0}{b_1} = -a_0,\ a_0 > 0}$$ 2

3) T ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Anfangsteigung mit dem Endwert:

$$T = 0.5\,\text{sec} \Leftrightarrow \boxed{p = -1/T = -2}$$ 2

4) Für Anfangs- und Endwert gilt:

$$h(t=0) = 2 = \lim_{s\to\infty} G(s) = b_1 \Leftrightarrow \boxed{b_1 = 2}$$

$$h(t\to\infty) = 0{,}5 = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{b_0}{a_0}$$

Aus vorheriger Aufgabe ist $p = -2$ bekannt, daraus ergibt sich a_0:

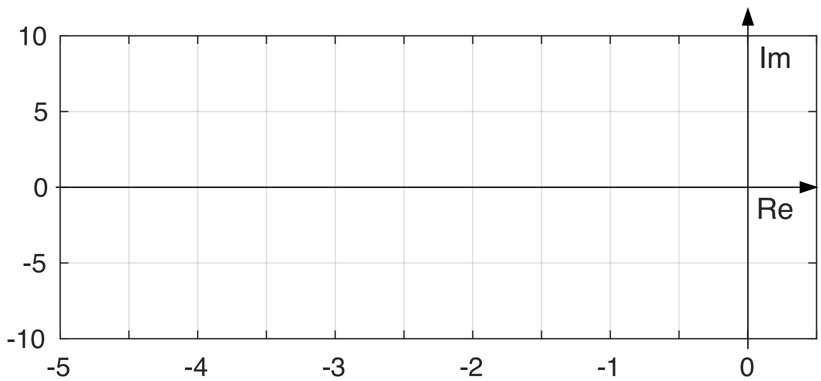
$$\boxed{a_0 = -p = 1/T = 2}$$

Schließlich erhält man für b_0:

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_0}{2} = 0{,}5 \Leftrightarrow \boxed{b_0 = 1} \Rightarrow G(s) = \frac{2s+1}{s+2}$$ 3

c) Die Wurzelortskurve der folgenden Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises soll untersucht werden (10 Punkte):

$$G_0(s) = \frac{k(s+n_1)}{(s+0{,}5)(s+1{,}5)(s+2)}$$



1) Zeichnen Sie die Pole in das obige Diagramm ein. Nehmen Sie an, die Nullstelle n_1 läge weiter links als alle Pole. Zwischen welchen Polen würde eine Verzweigung der Wurzelortskurve auftreten? Die verzweigenden Äste nähern sich für $k \to \infty$ den Asymptoten an. **Begründen Sie kurz**, warum die Stabilität des Regelkreises von der Lage des Schnittpunkts s_A dieser Asymptoten abhängt.

2) Berechnen Sie nun den Schnittpunkt s_A in Abhängigkeit der unbekannten Lage der Nullstelle n_1. Bestimmen Sie dann, wo die Nullstelle liegen müsste, damit der Regelkreis für $k \to \infty$ gerade nicht mehr instabil werden kann.
3) Tragen Sie die berechnete Nullstelle in das Diagramm ein und skizzieren Sie nun die Wurzelortskurve (Verzweigungspunkte können näherungsweise in der Mitte zwischen zwei Polen eingezeichnet werden).
4) Schauen Sie sich noch einmal die Gleichung zur Berechnung von s_A an. Wenn Sie einen der Pole zusammen mit der Nullstelle n_1 verschieben würden (beide also den gleichen Abstand behalten), hätte dies einen Einfluss auf die Stabilität? **Kurze Begründung!**

Antwort:

1) Aufgrund der Konstruktionsregeln verzweigt die Wurzelortskurve zwischen den beiden rechten Polen (-0,5 und -1,5) und strebt entlang der 2 Asymptoten (90°, 270°) gegen unendlich. Der linke Pol stebt in die Nullstelle weiter links. Nur die beiden verzweigenden Äste sind also für die Stabilität relevant, je nachdem ob der Asymptotenschnittpunkt links oder rechts von der Imaginärachse liegt. 3
2) Für den Asymptotenschnittpunkt gilt:

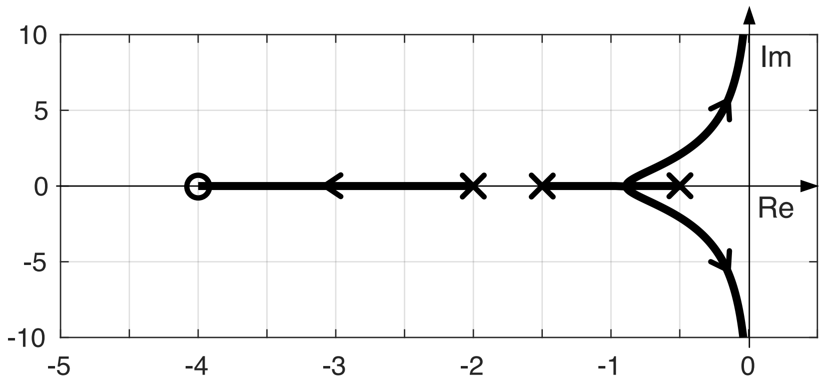
$$s_A = \frac{\sum_i^n p_i - \sum_i^m n_i}{n-m} = \frac{-0{,}5 - 1{,}5 - 2 - n_1}{3-1} \Rightarrow \boxed{s_A = \frac{-4-n_1}{2}}$$

Damit der Regelkreis (gerade noch) stabil ist, darf s_A nicht in der positiven Halbebene liegen, also $s_A = 0$:

$$s_A = \frac{-4-n_1}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{n_1 = -4}$$

3

3) Die Wurzelortskurve für den strukturstabilen Fall:



2

4) Angenommen p_3 und n_1 hätten eine festen Abstand Δ zueinander. Dann gilt $n_1 = p_3 + \Delta$ und somit für s_A:

$$s_A = \frac{p_1 + p_2 + p_3 - (p_3 + \Delta)}{2} \Leftrightarrow \boxed{s_A = \frac{p_1 + p_2 - \Delta}{2}}$$

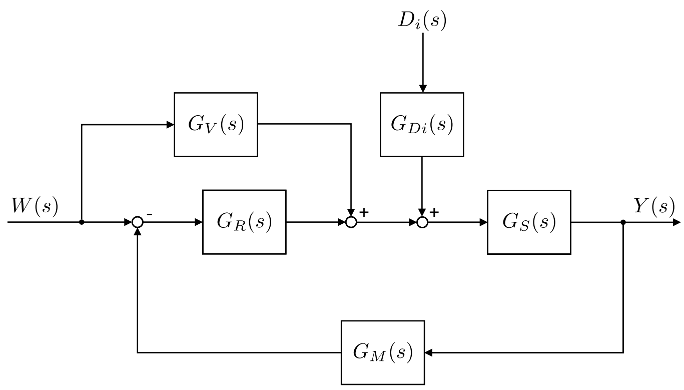
Also hängt s_A nur vom Abstand Δ zwischen Pol p_3 und Nullstelle n_1 ab, nicht von der Lage des Pols p_3 selbst. Verschieben eines Pol-/Nullstellenpaares mit gleichem Abstand verändert zwar die Form der Wurzelortkurve, aber nicht die Lage von s_A und damit auch nicht die Stabilität. Dies gilt natürlich ebenso für die anderen Pole p_1 und p_2 2

Aufgabe 2: Vorfilter und Vorsteuerung (21 Punkte)

Im Folgenden soll die Erweiterung eines Regelkreises um einen weiteren Freiheitsgrad untersucht werden. Dazu soll zur gegenüberstellung Regelkreis zunächst mit einer Vorsteuerung und in einem weiteren Fall mit einer Vorfilterung erweitert werden.
Der Regelkreis besteht aus der Strecke $G_S(s)$, dem Regler $G_R(s)$ sowie einem Sensor $G_M(s)$. Des weiteren beeinflusst eine Eingangsstörung $D_i(s)$ über die Übertragungsfunktion $G_{Di}(s)$ den Regelkreis. Der Sensor wird benötigt, um die Regelgröße zu messen. Es handelt sich um einen nicht idealen Sensor mit einer zunächst beliebigen Übertragungsfunktion $G_M(s) \neq 1$.

a) Zeichnen Sie das Blockschaubild des beschriebenen Regelkreises erweitert um eine Vorsteuerung.

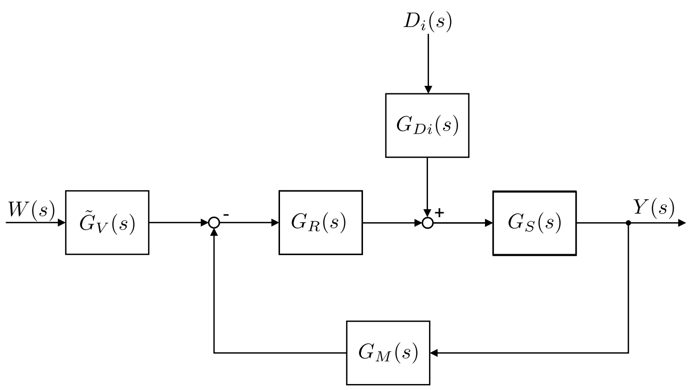
Antwort:



2

b) Zeichnen Sie das Blockschaubild des beschriebenen Regelkreises erweitert um eine Vorfilterung.

Antwort:



2

c) Prüfen Sie, ob für diese beiden Regelkreise weiterhin die Äquivalenz zwischen Vorsteuerung und Vorfilterung gilt. Berechnen Sie dazu zunächst die Führungsübertragungsfunktion der Ansätze. Bei der Berechnung darf auf das Argument der Funktionen verzichtet werden.

Antwort:
Zur besseren Übersicht wird im Folgenden das Argument (s) nicht notiert.

- Vorsteuerung:

$$Y = G_S \left[G_{Di} D_i + G_V W + G_R \left(W - G_M Y\right)\right]$$
$$Y = G_S G_{Di} D_i + G_S G_V W + G_S G_R W$$
$$- G_S G_R G_M Y$$
$$Y \left(1 + G_S G_R G_M\right) = G_S G_{Di} D_i + \left(G_S G_V + G_S G_R\right) W$$
$$Y = \frac{G_S G_V + G_S G_R}{1 + G_S G_R G_M} W + \frac{G_S G_{Di}}{1 + G_S G_R G_M} D_i$$
$$\boxed{G_W = \frac{G_S G_V + G_S G_R}{1 + G_S G_R G_M}}$$

- Vorfilterung:

$$Y = G_S G_{Di} D_i + G_S G_R \left[\tilde{G}_V W - G_M Y\right]$$
$$Y \left(1 + G_S G_R G_M\right) = G_S G_R \tilde{G}_V W + G_S G_{Di} D_i$$
$$Y = \frac{G_S G_R \tilde{G}_V}{1 + G_S G_R G_M} W + \frac{G_S G_{Di}}{1 + G_S G_R G_M} D_i$$
$$\boxed{G_W = \frac{G_S G_R \tilde{G}_V}{1 + G_S G_R G_M}}$$

- Gleichsetzen:

$$\frac{G_S G_R \tilde{G}_V}{1 + G_S G_R G_M} = \frac{G_S G_V + G_S G_R}{1 + G_S G_R G_M}$$
$$G_S G_R \tilde{G}_V = G_S G_V + G_S G_R$$
$$\boxed{G_V = G_R \left(\tilde{G}_V - 1\right)}$$
$$\boxed{\tilde{G}_V = 1 + \frac{G_V}{G_R}}$$

Da ein Ansatz in den Anderen umgerechnet werden kann, sind beide Ansätze äquivalent.

9

d) Die Übertragungsfunktionen seien nun definiert als $G_S(s) = \frac{3}{s(s+4)}$, $G_R(s) = \frac{K_R(s+3)}{s+4}$, $G_M(s) = \frac{1}{s+5}$ sowie $G_D(s) = \frac{s}{s^2+1}$.
Legen Sie nun einen Vorfilter $\tilde{G}_V(s)$ für diesen erweiterten Regelkreis aus. Dieser soll mögliche Nullstellen in der Führungsübertragungsfunktion kompensieren und dabei die Gesamtverstärkung unbeeinflusst lassen.

Antwort:

- Führungsverhalten $G_{\tilde{W}}(s)$ berechnen:

$$
\begin{aligned}
G_{\tilde{W}}(s) &= \frac{G_S(s)G_R(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)G_M(s)} \\
&= \frac{\frac{3K_R(s+3)}{s(s+4)^2}}{1 + \frac{3K_R(s+3)}{s(s+4)^2}\frac{1}{(s+5)}} \\
&= \frac{\frac{3K_R(s+3)}{s(s+4)^2}}{\frac{s(s+4)^2(s+5)+3K_R(s+3)}{s(s+4)^2(s+5)}} \\
&= \frac{3K_R(s+3)s(s+4)^2(s+5)}{s(s+4)^2)\left[s(s+4)^2(s+5) + 3K_R(s+3)\right]} \\
&= \frac{3K_R(s+3)(s+5)}{s(s+4)^2(s+5) + 3K_R(s+3)}
\end{aligned}
$$

- Vorfilter auslegen:
  Nullstellen durch Filter wegkürzen sowie Verstärkung Filter $\tilde{G}_V(0) = 1$

$$\boxed{\tilde{G}_V = \frac{15}{(s+3)(s+5)}}$$

6

e) Legen Sie nun einen neuen Vorfilter aus. Dieser soll so entworfen werden, dass er die Gesamtverstärkung des Systems gleich 1 ist.

Antwort:

- Verstärkung $G_{\tilde{W}}(s)$ berechnen:

$$G_{\tilde{W}}(0) = \frac{3K_R \cdot 3 \cdot 5}{3K_R \cdot 3} = 5$$

Verstärkung Regelkreis: $\tilde{G}_V(0) \cdot G_{\tilde{W}}(0)$
Um Gesamtverstärkung von 1 zu erhalten gilt für den Vorfilter: $\tilde{G}_V(0) = \frac{1}{5}$
Daraus folgt:

$$\boxed{\tilde{G}_V = \frac{3}{(s+3)(s+5)}}$$

3

$\sum$ 21

Aufgabe 3: Stabilität (18 Punkte)

Gegeben ist die folgende Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{s}{(s+3)(s+2)(s-1)}.$$

Diese soll mit einem PI-Regler

$$G_R(s) = K + \frac{K}{T_I \cdot s}$$

geregelt werden.

a) Bestimmen Sie die Integrationszeit T_I, sodass der langsamste stabile Pol kompensiert wird. Wie lautet die Übertragungsfunktion des offen Regelkreises nach der Kompensation?

Antwort:

Der langsamste stabile Pol liegt bei $s = -2$. Mit

$$G_R(s) = \frac{K \cdot (T_I s + 1)}{T_I \cdot s}$$

mit $T_I = 0.5$ wird der Regler zu:

$$G_R(s) = \frac{K \cdot (0.5s + 1)}{0.5 \cdot s} = \boxed{\frac{K \cdot (s+2)}{s}}.$$

Hierfür ergibt sich G_0 zu

$$\boxed{G_0(s) = \frac{K}{(s+3)(s-1)}}.$$

3

Für $K = 1$ ist ein Teil der Ortskurve gegeben.

b) Vervollständigen Sie bitte diese Abbildung. Ergänzen Sie hierfür die horizontale und vertikale Achse, beschriften Sie die Achsen und markieren Sie außerdem den Punkt $(-1, 0)$.

Hinweis: Die Bestimmung der Skalierung der vertikalen Achse ist nicht notwendig.

Antwort:

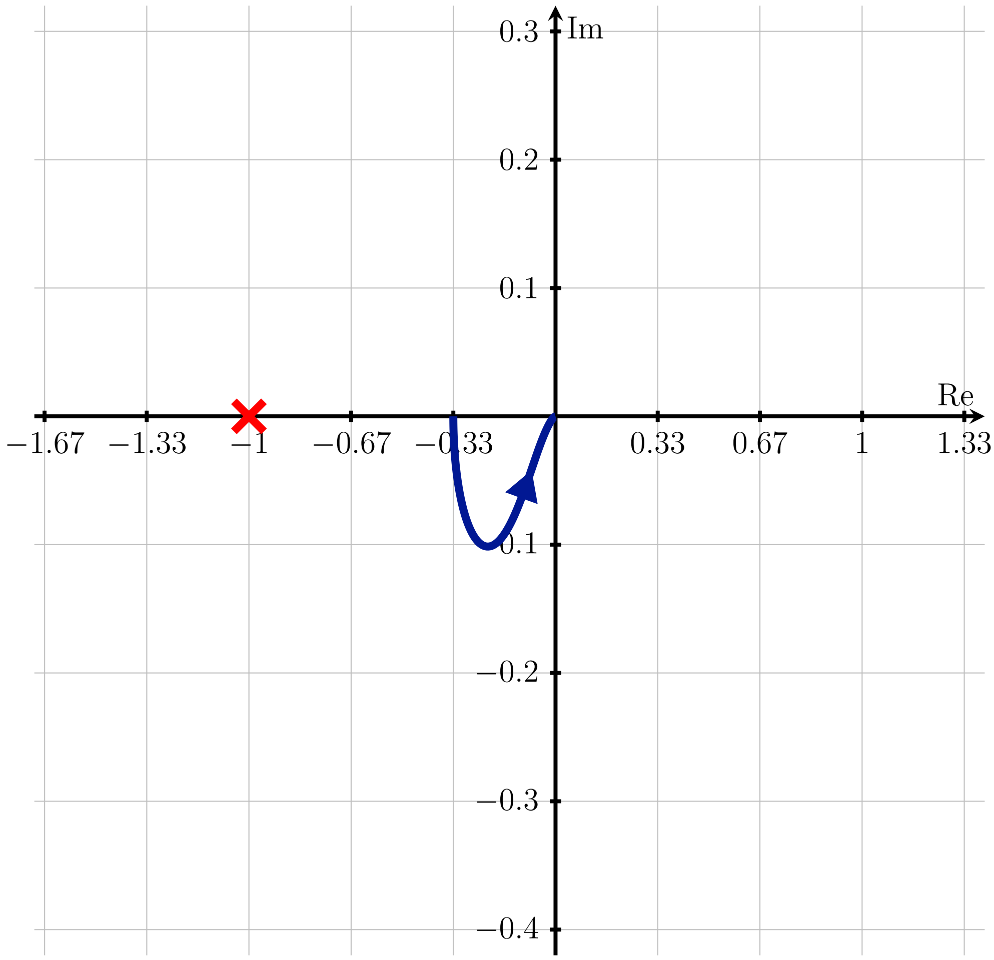
Die Verstärkung des Systems (Start der OK) liegt bei

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{s} G_0(s) = \frac{1}{(0+3)(0-1)} = -\frac{1}{3}$$

und die OK startet auf der reelen Achse (kein I-/D-Verhalten).

Die Ortskurve endet bei einer Amplitude von:

$$\lim_{s\to \infty} \frac{s}{s} G_0(s) = \frac{1}{\infty} = 0.$$

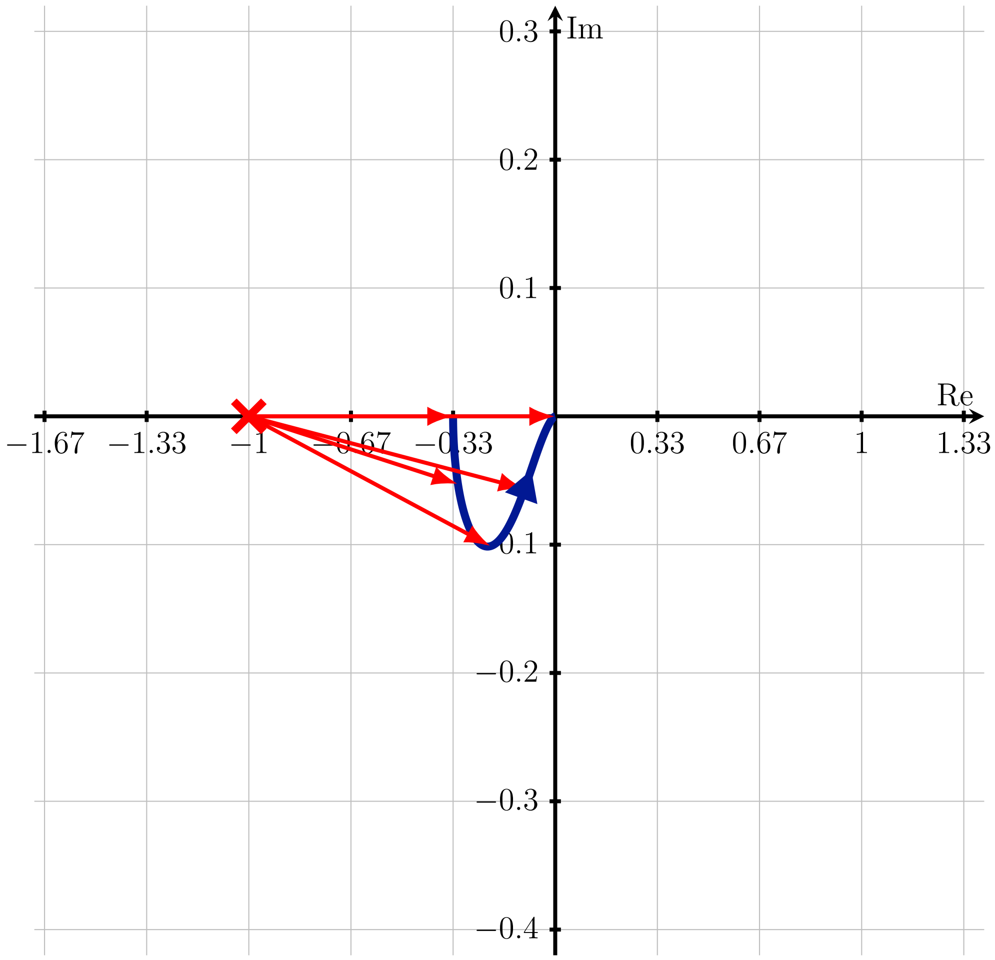


5

c) Analysieren Sie mithilfe des Nyquist-Kriteriums die Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Begründen Sie, welches Nyquist-Kriterium hierfür genutzt wird.

Antwort: Da das System einen instabilen Pol besitzt, muss hier das allgemeine Nyquist-Kriterium genutzt werden.

$$\angle(1 + G_0(i\omega)|_{\omega=0\ldots\infty}) = -\pi n_o^+ - \frac{\pi}{2} n_o^g = -\pi 1 - \frac{\pi}{2} 0 = -\pi$$

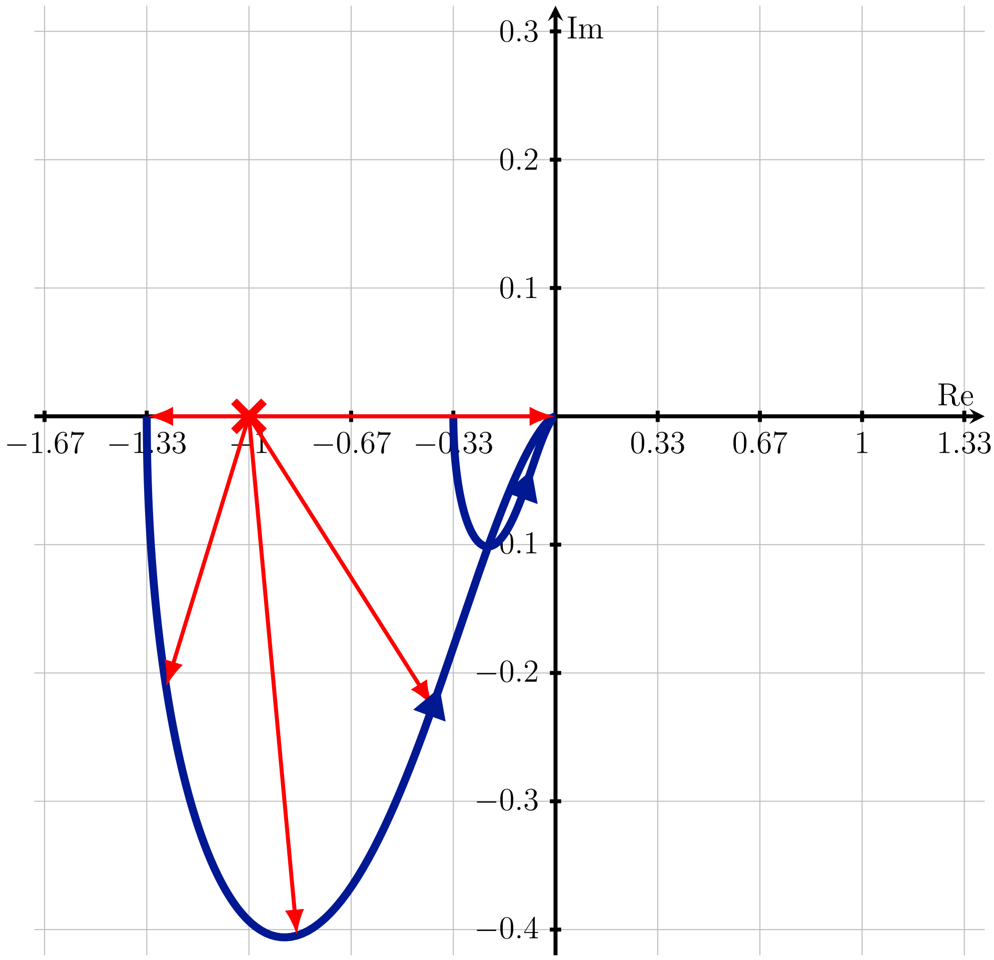


$$\boxed{\angle(1 + G_0(i\omega)|_{\omega=0\ldots\infty}) = 0 \neq -\pi}$$

$\Longrightarrow$ instabil $\boxed{3}$

d) Wie hoch muss die Verstärkung K des PI-Reglers gewählt werden, damit der geschlossene Regelkreis stabil wird? Wie ändert sich hierfür qualitativ die Ortskurve? Zeichnen Sie diese für eine Verstärkung, die zu einem stabilen geschlossen Regelkreis führt. Begründen Sie die Stabilität ebenfalls mit Hilfe des Nyquist-Kriteriums.

<u>**Antwort**</u>: Mit einer eine Verstärkung $K > 3$ startet die Ortskurve links des Punktes $(-1, 0)$, somit wird eine halbe Umdrehung gegen den Uhrzeigersinn (negativer Winkel) durchlaufen. Für $K = 4$ ergibt sich zum Beispiel diese neue Ortskurve:



Mit dem allgemeinen Nyquist-Kriterium gilt:

$$\boxed{\angle(1 + G_0(i\omega)|_{\omega=0\ldots\infty}) = -\pi = -\pi}$$

$\Longrightarrow$ $K > 3$: stabil, $K < 3$: instabil 4

e) Bestimmen Sie nun auch mit dem Hurwitz-Kriterium, welche Bedingungen für einen stabilen Regelkreis gelten müssen.

Antwort: Die Gleichung des geschlossenen Regelkreis lautet:

$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K}{(s+3)(s-1)+K} = \frac{K}{s^2+2s-3+K}.$$

Bei Polynomen 2. Ordnung gilt mit dem Hurwitz-Kriterium:

$$c_2 > 0, c_1 > 0, c_0 > 0.$$

Bei Polynomen 2. Ordnung gilt:

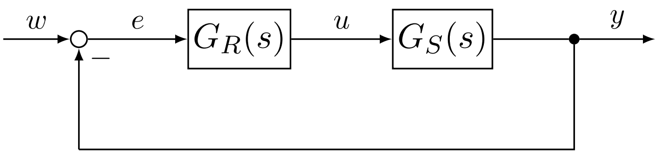
$$c_2 > 0, c_1 > 0, c_0 > 0$$

$$c_2 = 1 > 0\checkmark, c_1 = 2 > 0\checkmark, c_0 = K - 3 > 0$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{K > 3}$ 3

Aufgabe 4: Kompensationsreglerentwurf (22 Punkte)

Folgender Regelkreis wird in dieser Aufgabe betrachtet:



Die Strecke $G_S(s)$ besitzt folgende Übertragungsfunktion.

$$G_S(s) = \frac{1}{\frac{1}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1}$$

a) Berechnen Sie die Pole der Regelstrecke. Besitzt die gegebene Regelstrecke stabiles oder instabiles Verhalten? Ist die Regelstrecke schwingungsfähig oder nicht schwingungsfähig? Begründen Sie ihre Antwort.
Antwort:
Die Pole der Regelstrecke lassen sich anhand des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion berechnen. Für die Pole muss gelten:

$$\frac{1}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

Die Pole lassen sich mit der pq-Formel berechnen. Es ergeben sich die beiden folgenden Pole:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow s^2 + 4s + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow p_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{2^2} - 3} = -2 \pm 1 \\
&\Rightarrow p_1 = -3 \\
&\Rightarrow p_2 = -1
\end{aligned}$$

Beide Pole besitzen einen negativen Realteil. Damit besitzt die Regelstrecke **stabiles Verhalten** .

Da die Pole der Übertragungsfunktion der Regelstrecke keinen Imaginärteil besitzen ist die Regelstrecke **nicht schwingungsfähig**. 4

b) Der Regler $G_R(s)$ soll nach dem Kompensationsverfahren ausgelegt werden. Geben sie die allgemeine Formel für den Regler $G_R(s)$ an wenn das Führungsverhalten $G_w(s)$ gefordert ist.
Antwort:
Das Führungsverhalten wird durch den geschlossenen Regelkreis vorgegeben. Dieses lässt sich wie folgt berechnen:

$$G_w(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}$$

Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich die Übertragungsfunktion des Regler in Abhängigkeit der Regelstrecke sowie des gewünschten Führungsverhaltens:

$$G_R(s) = \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))}$$

$\boxed{1}$

c) Welches Führungsverhalten wird für einen perfekten Regler gefordert? Warum ist diese Regelung nicht umsetzbar?

Antwort:
Für eine perfekte Regelung wird $G_w(s) = 1$ gefordert. Es bedeute, dass sich die Führungsgröße direkt auf die Ausgangsgröße überträgt.

Die Regelung ist nicht umsetzbar, weil diese einen Regler $G_R(s) \to \infty$ benötigen würde.

$$G_R(s) = \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))} \overset{G_w(s)=1}{=} \frac{1}{G_S(s)\,(1-1)} \to \infty$$

$\boxed{2}$

d) Jetzt werden konkrete gewünschte Führungsverhalten vorgegeben. Berechnen Sie den Regler $G_R(s)$ für folgende Führungsverhalten:

$$G_{w,1}(s) = \frac{1}{3s+1} \qquad G_{w,2}(s) = \frac{1}{2s^2+s+1} \qquad G_{w,3}(s) = \frac{1}{s^3+4s^2+s+1}$$

Antwort:
Mit der allgemeinen Formel aus Aufgabenteil b) lassen sich die Regler wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} G_{R,1}(s) &= \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))} = \frac{\frac{1}{3s+1}}{\frac{1}{\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}\left(1 - \frac{1}{3s+1}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}{3s+1-1} = \boxed{\frac{\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}{3s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{R,2}(s) &= \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}}{\frac{1}{2s^2+s+1}\left(1 - \frac{1}{2\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}{2s^2+s+1-1} = \boxed{\frac{\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}{2s^2+2s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{R,3}(s) &= \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))} = \frac{\frac{1}{s^3+4s^2+s+1}}{\frac{1}{\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}\left(1 - \frac{1}{s^3+4s^2+s+1}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}{s^3+4s^2+s+1-1} = \boxed{\frac{\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+1}{s^3+4s^2+s}} \end{aligned}$$

$\boxed{7}$

	realisierbar	sprungfähig	I-Anteil
$G_{R,1}(s)$	nein	ja	ja
$G_{R,2}(s)$	ja	ja	ja
$G_{R,3}(s)$	ja	nein	ja

e) Welche der berechneten Regler sind realisierbar? Welche der berechneten Regler besitzen sprungfähiges Verhalten? Welche der berechneten Regler besitzen globales I-Verhalten?
Füllen Sie dazu jede Zelle der vorgegebenen Tabelle mit entweder *ja* oder *nein* aus. Erklären Sie, warum sich die Einträge für das globale I-Verhalten ergeben.

Antwort:
Alle berechneten Regler besitzen ein globales I-Verhalten. Dies liegt daran, dass alle gewünschten Führungsverhalten die Verstärkung $K = 1$ besitzen. Dies bedeutet, dass keine bleibende Regelabweichung vorhanden sein soll. Um dieses Ziel zu erreichen, muss der offene Regelkreis einen I-Anteil besitzen. Da die Strecke keinen I-Anteil besitzt, muss dieser durch den Regler eingeführt werden. 6

f) Die Regelstrecke wird nun geändert. Sie besitzt folgende Übertragungsfunktion:

$$\tilde{G}_S(s) = \frac{1 - 3s}{1 + 3s}$$

Welche besondere Eigenschaft besitzt die Regelstrecke $\tilde{G}_S(s)$, die bei der Vorgabe des Führungsverhaltens berücksichtigt werden muss. Erklären Sie warum diese Eigenschaft bei der Vorgabe des Führungsgrößenverhaltens berücksichtigt werden muss. Geben Sie außerdem ein mögliches Führungsverhalten vor.

Antwort:
Die Regelstrecke ist nicht phasenminimal. Sie besitzt eine instabile Nullstelle. Diese darf nicht durch den Regler gekürzt werden, da der Regler ansonsten einen instabilen Pol besitzen würde. Dieser kann zu unendlich großen Stellgrößen führen. Deswegen muss dieses Verhalten beim Reglerentwurf hingenommen werden.

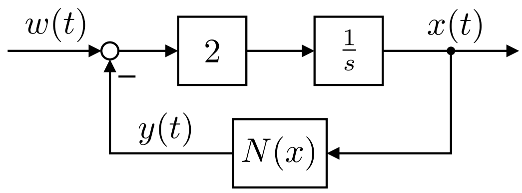
Um dies beim Regler zu berücksichtigen, wird im gewünschten Führungsverhalten ebenfalls die instabile Nullstelle gefordert. Eine mögliches gewünschtes Führungsverhalten sieht wie folgt aus:

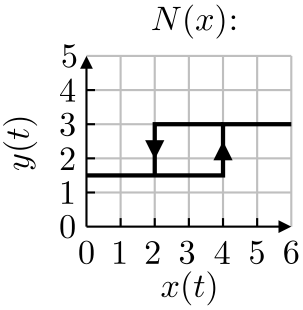
$$\tilde{G}_w(s) = G_{w,1} \cdot (1 - 3s) = \frac{1 - 3s}{3s + 1}$$

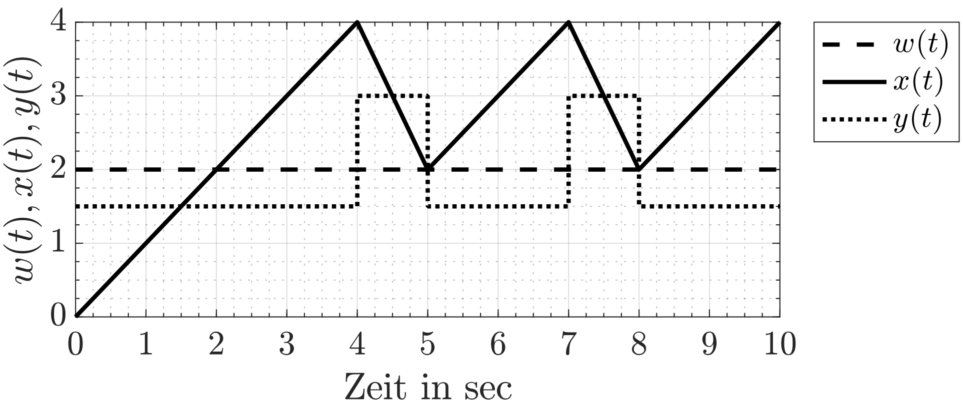
2

Aufgabe 5: Nichtlinearer Regelkreis (14 Punkte)

Bestimmen Sie die Größen $x(t)$ und $y(t)$ des abgebildeten nichtlinearen Regelkreises für den gegebenen Verlauf der Führungsgröße $w(t)$. Zeichnen Sie die zeitlichen Verläufe von $x(t)$ und $y(t)$ in das gegebene Diagramm ein. Die **Anfangsbedingung** des Integrators beträgt $x(t = 0) = 0$.







Antwort: Der Ausgang des nichtlinearen Gliedes $y(t)$ in der Rückführung beträgt 1.5 oder 3. Daraus ergibt sich eine Differenz mit $w(t)$ von 0.5 ($w(t) - y(t) = 2 - 1.5 = 0.5$) oder -1 ($w(t) - y(t) = 2 - 3 = -1$). Nach der Multiplikation mit 2 beträgt das Eingangssignal am Integrator 1 oder -2. Somit setzt sich das Ausgangssignal $x(t)$ aus Geradenstücken mit diesen Steigungen zusammen. Die Umschaltung zwischen diesen Geradenstücken findet bei $x(t) = 2$ und $x(t) = 4$ statt (siehe Bild $N(x)$).

- $x(t)$ besteht aus Geradenstücken $\boxed{2}$
- $x(t)$ nimmt Werte zwischen 0 und 4 an $\boxed{2}$
- $x(t = 0) = 0$, $y(t = 0) = 1.5$ $\boxed{2}$
- $y(t)$ nimmt Werte zwischen 1.5 und 3 an $\boxed{2}$
- Das Verhalten von $x(t)$ und $y(t)$ ändert sich nach 4 sec, 5 sec, 7 sec und 8 sec $\boxed{2}$
- $y(t)$ ist ein sprungförmiges Signal $\boxed{2}$
- $x(t)$ korrekt gezeichnet $\boxed{1}$
- $y(t)$ korrekt gezeichnet $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 14}$

Aufgabe 6: Dynamische Systeme (23 Punkte)

Gegeben ist ein System, das mit der Differentialgleichung

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

und den Koeffizienten $a_2 = a_1 = b_0 = 1$, $a_0 = 5$ beschrieben wird.

a) Transformieren Sie das System in den Laplace-Bereich und stellen Sie die Übertragungsfunktion auf.

Antwort:

$$\begin{aligned} a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) &= b_0 u(t) \\ &\ \circ\!\!-\!\!\bullet \\ a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) &= b_0 U(s) \\ Y(s)(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) &= b_0 U(s) \\ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{s^2 + s + 5}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$

b) Berechnen Sie die Pole der Übertragungsfunktion.

Antwort:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 5} \\ p_1 &= -0.5 + 2.18i \\ p_2 &= -0.5 - 2.18i \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

c) Wie wird das in b) berechnete Polpaar bezeichnet? Welche zwei anderen (stabilen) Polpaarkombinationen gibt es für PT_2-Systeme?

Antwort:

Das in b) berechnete Polpaar ist konjugiert komplex. Alternativ gibt es den Fall zweier reeller Pole und zweier *identischer* reeller Pole. $\boxed{2}$

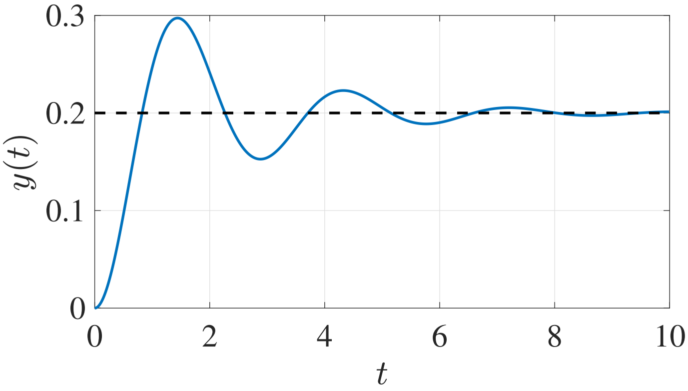
d) Berechnen Sie die Verstärkung des Systems.

Antwort:

$$y(t \to \infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G_W \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G_W = \frac{1}{5}$$

$\boxed{2}$

e) Skizzieren Sie grob die Sprungantwort des Systems. Beachten Sie dabei, dass der Endwert korrekt eingezeichnet wird. **Antwort**: $\boxed{2}$

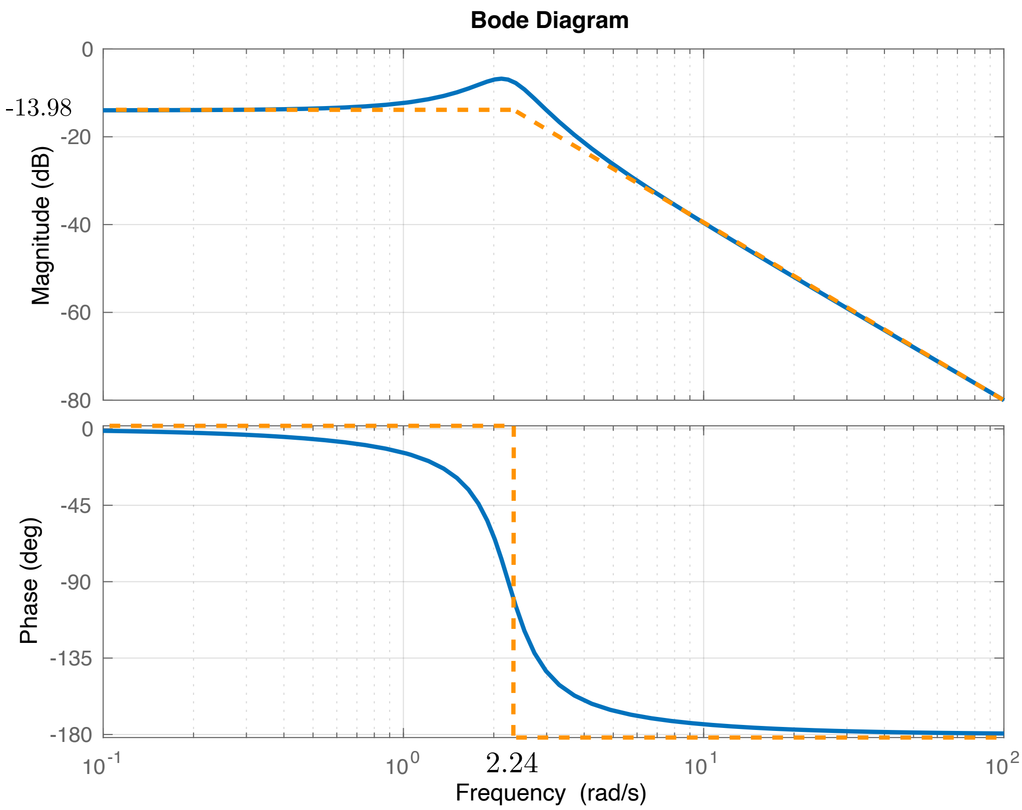


f) Skizzieren Sie den asymptotischen und realen Amplituden- und Phasengang. Achten Sie darauf, dass die wichtigsten Merkmale erkennbar sind.

Hinweis: Nutzen Sie den Zusammenhang $(s-\alpha-i\beta)(s-\alpha+i\beta) = s^2+2D\omega_0 s+\omega_0^2$.

$$\begin{aligned}(s-\alpha-i\beta)(s-\alpha+i\beta) &= s^2+s+5\\ \omega_0^2 &= 5\\ \omega_0 &= 2.24.\end{aligned}$$

6



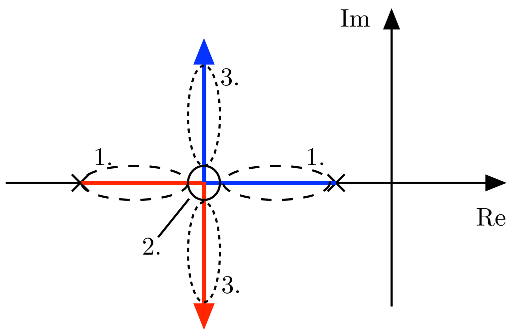
g) Wie wird das charakteristische Phänomen genannt, welches im Amplitudengang für konjugiert komplexe Polstellen auftreten kann? Ab welchem Wert von D tritt es auf?

Antwort:

Im konjugiert komplexen Fall treten Resonanzüberhöhungen für $D \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ auf. 2

h) Nehmen Sie an, dass eine PT$_2$-Regelstrecke mit zwei reellen, nicht identischen, stabilen Polen mit einem P-Regler geregelt wird. Skizzieren Sie grob die WOK zu diesem Fall. Erklären Sie anhand der Skizze, wann die Polpaarkombinationen aus c) abhängig von der Reglerverstärkung entstehen.

Antwort:



- 1. Bei niedrigen Reglerverstärkungen befinden sich beide Pole des geschlossenen Regelkreises auf der reellen Achse.
- 2. Bei steigender Reglerverstärkung wandern die Pole des geschlossenen Regelkreises weiter zusammen, bis sie einen reellen Doppelpol bilden.
- 3. Wird die Reglerverstärkung noch weiter erhöht, besitzt der geschlossene Regelkreis zwei konjugiert komplexe Pole.

4

$\sum 23$