Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 2 (MRT2)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

23. September 2010

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	20	30	30	20	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Welche Kennlinien lassen sich immer invertieren?

- ☐ Streng monoton fallende Kennlinien.
- ☐ Monoton steigende Kennlinien.
- ☐ Eindeutige Kennlinien.

b) Die Empfindlichkeitsfunktion...

- ☐ ... beschreibt den Zusammenhang zwischen Stör- und Regelgröße im Standardregelkreis.
- ☐ ... ist kleiner als 0 dB im Gegenkopplungsbereich einer Regelung und größer 0 dB im Mittkopplungsbereich.
- ☐ ... ist die Inverse der komplementären Empfindlichkeitsfunktion.

c) Wozu dient die Vorsteuerung?

- ☐ Mit einer Vorsteuerung lassen sich unangenehme nicht phasenminimale Eigenschaften eines Systems (positive Nullstellen, Totzeit) eliminieren.
- ☐ Mit der Vorsteuerung können Störeinflüsse eliminiert werden.
- ☐ Da als Vorsteuerung die Inverse der Strecke (gegebenenfalls nur näherungsweise) verwendet wird, ergibt sich bereits ein sehr gutes Führungsverhalten und ein Reglerentwurf ist nur noch für Störungen nötig.

d) In welcher Reihenfolge erfolgt der Reglerentwurf bei der Kaskadenregelung?

- ☐ Vom äußersten Regelkreis nach innen.
- ☐ Vom innersten Regelkreis nach außen.
- ☐ Die Reihenfolge ist egal.

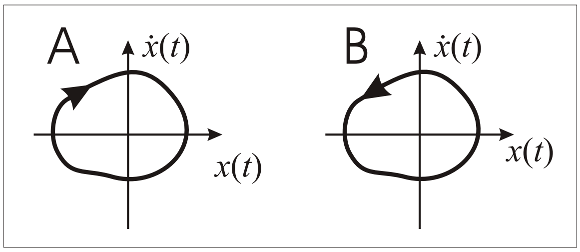
e) Was ist ein Smithprädiktor?

- ☐ Als Smithprädiktor bezeichnet man den Regler bei der prädiktiven Regelung.
- ☐ Ein modellbasiertes Regelverfahren für Regelstecken mit Totzeit.
- ☐ Wenn die Totzeit eines Systems genau bekannt ist, ermöglicht der Smithprädiktor die Verwendung eines Reglerentwurfsverfahrens.

f) Die Regelung von Strecken mit Totzeiten...

- ☐ ist problematisch, da Totzeiten die Phase im Frequenzgang absenken.
- ☐ ist unproblematisch, da Totzeiten für eine Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises sorgen.
- ☐ ist problematisch, da sich viele regelungstechnische Methoden, z.B. das Hurwitz-Kriterium oder der Polvorgabe-Regler, nicht oder nicht direkt anwenden lassen.

g) In den unten abgebildeten Zustandsdiagrammen ist die Ableitung $\dot{x}(t)$ über $x(t)$ dargestellt. Welche der Aussagen über die dargestellen zwei Trajektorien sind gültig?



- ☐ Bei einer geschlossenen Trajektorie liegt eine Dauerschwingung vor.
- ☐ Nur Trajektorie A ist physikalisch sinnvoll.
- ☐ Nur Trajektorie B ist physikalisch sinnvoll.

h) Welche Eigenschaften besitzt die Zustandsraummethode?

- ☐ Eine Differentialgleichung n. Ordnung wird auf ein System aus n Differentialgleichungen jeweils 1. Ordnung gebracht.
- ☐ Man benötigt kein Modell der Strecke, da die Regelung mit Hilfe von Zuständen entworfen wird.
- ☐ Eine Erweiterung der Zustandsraummethode auf Mehrgrößensysteme ist möglich.

i) Welche Aussagen bezüglich Zustandsgleichungen treffen zu?

- ☐ Wenn die Zustandsgleichungen in Regelungsnormalform aufgestellt sind, so lassen sich die Zähler- und Nennerkoeffizienten der Übertragungsfunktion direkt ablesen.
- ☐ Die charakteristische Gleichung des Systems ändert sich, wenn die Systemmatrix **A** in Diagonalform statt in Regelungsnormalform vorliegt.
- ☐ Liegt die Systemmatrix **A** in Diagonalform vor, so lassen sich die Pole des Systems direkt anhand der Diagonalelemente ablesen.

j) Welche Aussagen treffen auf die Diagonalform der Systemmatrix **A** zu?

☐ Die Diagonalform von **A** wird auch Modalform genannt.

☐ Eine Transformation der Systemmatrix **A** in Diagonalform ist immer möglich.

☐ Die Diagonalelemente von **A** sind gleichzeitig die Eigenwerte λ_i von **A**.

k) Was ist die Methode von Ljapunow?

☐ Ein Verfahren für den Stabilitätsnachweis bei nichtlinearen Systemen.

☐ Eine Methode zur Berechnung der Pole einer Übertragungsfunktion.

☐ Ein numerisches Verfahren zur Matrixinversion.

l) Welche der folgenden Aussagen zum Zweipunktregler mit Hysterese treffen zu?

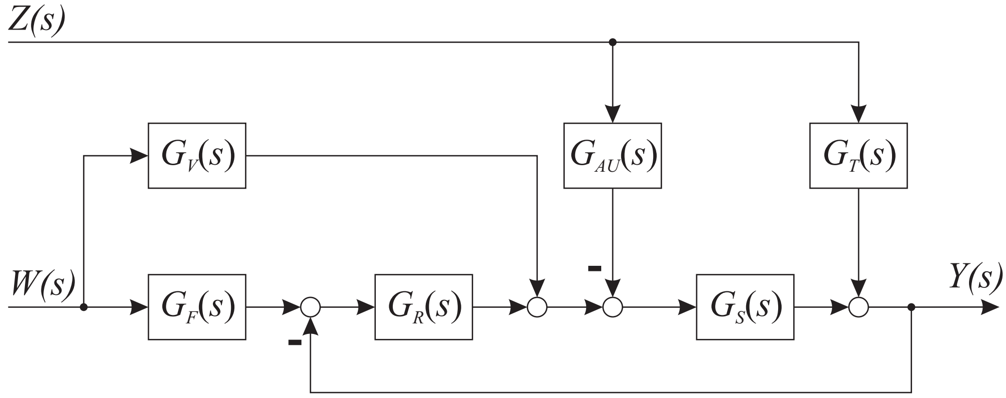
☐ Beim Zweipunktregler mit Hysterese stellt sich nach Erreichen des Sollwertes eine Dauerschwingung ein.

☐ Die Amplitude und Frequenz der Dauerschwingung ist unabhängig von der Hysteresebreite.

☐ Eine Dauerschwingung lässt sich verhindern, indem man den Zweipunktregler mit Hysterese durch einen Zweipunktregler mit toter Zone ersetzt.

Aufgabe 2: Vorsteuerung und Störgrößenaufschaltung

Auf einen Regelkreis bestehend aus einem Regler $G_R(s)$ und der Strecke $G_S(s)$ wirkt eine Störung über die Strecke $G_T(s)$. Durch eine Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ und eine Vorsteuerung $G_V(s)$ sollen das Stör- und Führungsverhalten verbessert werden. Die Übertragungsfunktion $G_F(s)$ bezeichnet dabei das gewünschte Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises. Es ergibt sich das folgende Blockschaltbild.



Hinweis: Die Aufgabenteile d) und e) können unabhängig von a), b) und c) gelöst werden.

a) Ermitteln Sie die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ und die Störübertragungsfunktion $G_Z(s)$ des geschlossenen Regelkreises gemäß:

$$Y(s) = G_W(s) \cdot W(s) + G_Z(s) \cdot Z(s)$$

b) Wie muss die Übertragungsfunktion $G_V(s)$ gewählt werden, damit die Regelstrecke ohne Störung ($Z(s) = 0$) das gewünschte Führungsverhalten $G_F(s)$ aufweist:

$$Y(s) = G_F(s) \cdot W(s)$$

c) Die Regelstrecke hat die Übertragungsfunktion $G_S(s) = \frac{1}{s^2}$. Sie haben folgende Übertragungsfunktionen für $G_F(s)$ zur Auswahl:

1) $G_F(s) = \frac{100}{s+100}$
2) $G_F(s) = \frac{1}{(s+10)^2}$
3) $G_F(s) = \frac{100}{(s+10)^2}$
4) $G_F(s) = \frac{100}{s^2+100}$

Für welche der Übertragungsfunktionen ergeben sich realisierbare Vorsteuerungen $G_V(s)$? Erklären Sie kurz, warum nur eine der realisierbaren Möglichkeiten sinnvoll ist (Verstärkung und Stabilität).

d) Die Störung wirkt über die Strecke $G_T(s) = \frac{0{,}5}{s+0{,}5}$. Berechnen Sie, für welche Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ der Störgrößeneinfluss verschwindet.

e) Warum ist die in d) berechnete Übertragungsfunktion nicht realisierbar? Schlagen Sie eine näherungsweise dynamische Realisierung vor. Ist eine statische Störgrößenaufschaltung ebenfalls sinnvoll?

Aufgabe 3: Zustandsraum

Gegeben sind die Übertragungsfunktion eines Systems $G(s)$ und ein weiteres System in Zustandsschreibweise:

$$\textbf{System 1: } G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^3 + 5s^2 + 2s + 2}$$

$$\textbf{System 2: } \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(\mathbf{t})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u(t), \;\; y = \underbrace{[1 \; 0]}_{\mathbf{c}^T} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

Hinweis: Alle Unteraufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Überführen Sie das **System 1** in die Zustandsschreibweise (alle Anfangsbedingungen gleich Null) und geben Sie die Matrizen bzw. Vektoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}^T$ an. Wählen Sie hierzu die drei Zustände $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ folgendermaßen:

$$y(t) = x_1(t), \quad \dot{y}(t) = x_2(t), \quad \ddot{y}(t) = x_3(t)$$

b) Überführen Sie das **System 2** in den Frequenzbereich, indem Sie die Übertragungsfunktion berechnen. Benutzen Sie hierfür den bekannten Zusammenhang:

$$G(s) = \mathbf{c}^T \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

c) Zur Regelung des **Systems 2** soll ein Zustandsregler verwendet werden. Da aber aus Kostengründen nur einer der Zustände des Systems gemessen werden kann, wird ein Zustandsbeobachter benötigt. Zeigen Sie durch die Überprüfung der Beobachtbarkeit, welche der Zustandsgrößen (x_1 oder x_2) gemessen werden muss, damit ein Beobachter eingesetzt werden kann.

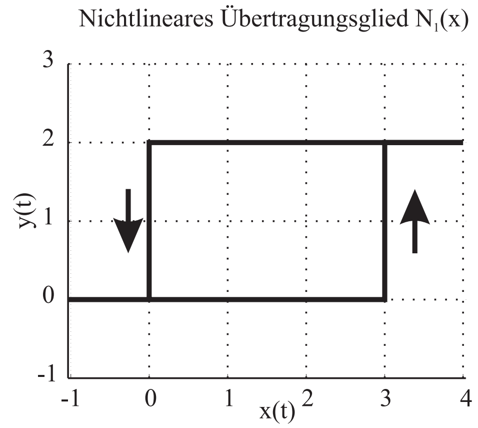
d) Entwerfen Sie einen Zustandsregler für **System 2** mit der Zustandsrückführung $u(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}(t) = [k_1 \; k_2] \cdot \mathbf{x}(t)$. Berechnen Sie die Reglerparameter k_1 und k_2 so, dass der geschlossene Regelkreis einen Doppelpol bei $-a$ hat.

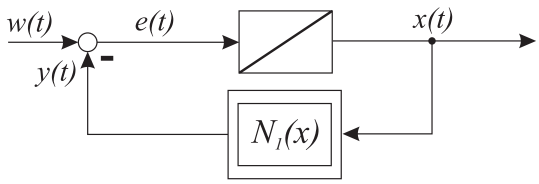
e) Berechnen Sie die Pole des ungeregelten **Systems 2**. Begründen Sie anhand der berechneten Pole, warum bei dem zustandsgeregelten System der Regelfehler bei einer Anregung mit einem Führungssprung für $t \to \infty$ gegen Null streben wird.

Aufgabe 4: Nichtlineare Systeme

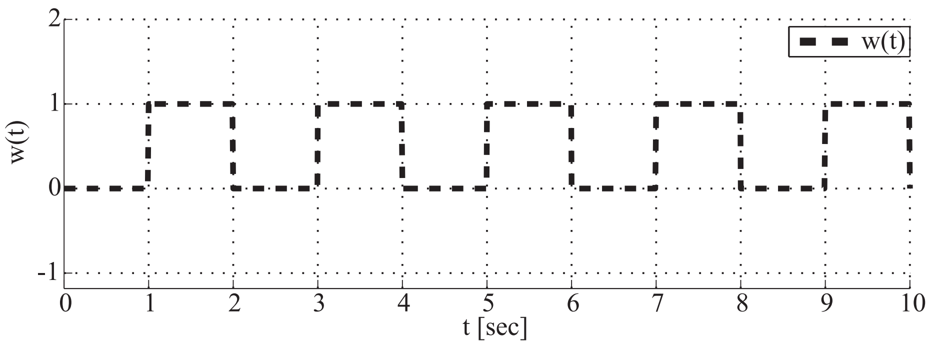
Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden!

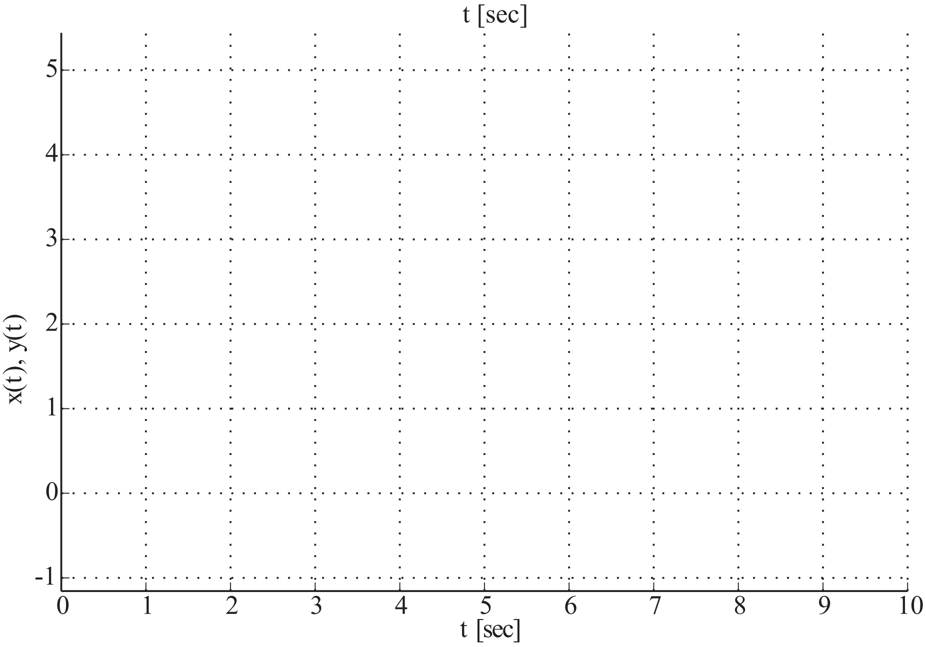
a) Gegeben ist das nichtlineare Übertragungsglied $N_1(x)$ und der im Folgenden dargestellte Regelkreis.



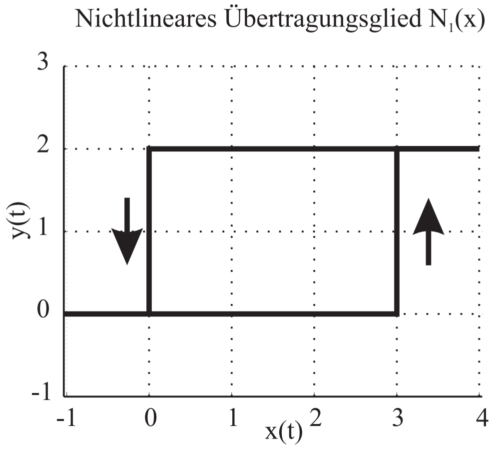


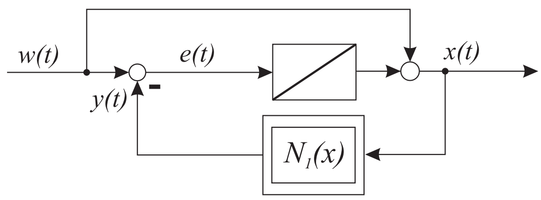
Zeichnen Sie den Verlauf der Regelgröße $x(t)$ und Messgröße $y(t)$ in das vorbereitete Diagramm. Beachten Sie die Anfangsbedingung des Integrators $x(t = 0) = 0$ und der Messgröße $y(t = 0) = 0$. Für die Umschaltpunkte der Hysterese $N_1(x)$ gilt: $N_1(x = 3) = 2$, $N_1(x = 0) = 0$. Die Führungsgröße $w(t)$ ist aus dem folgenden Bild abzulesen:



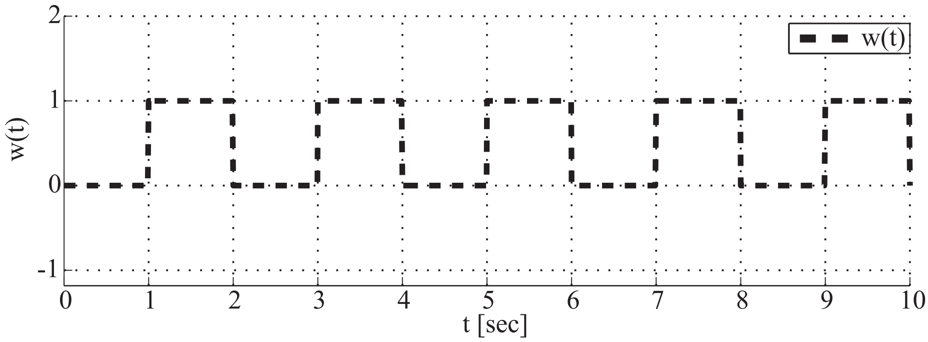


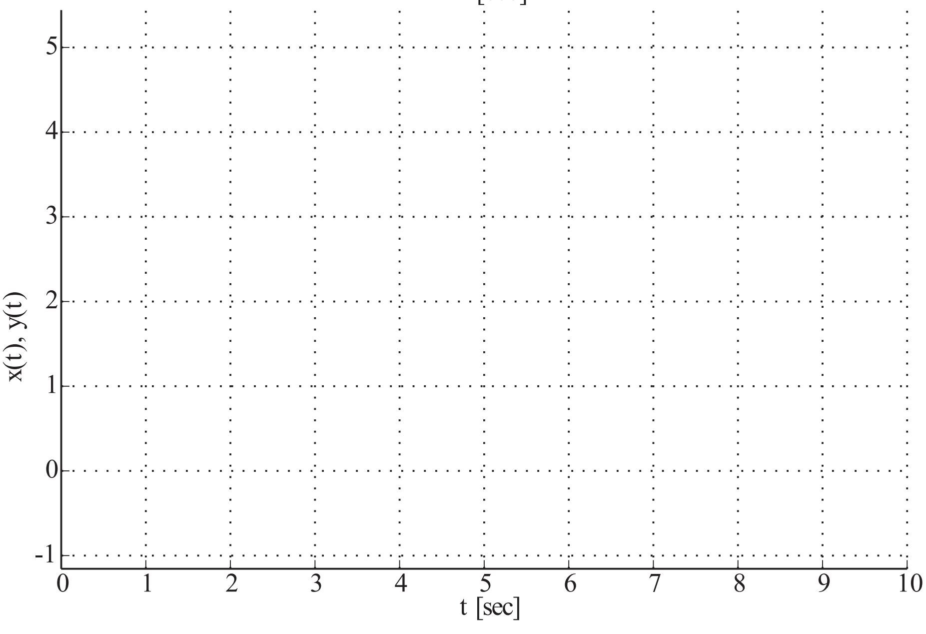
b) Gegeben ist das nichtlineare Übertragungsglied $N_1(x)$ und der im Folgenden dargestellte Regelkreis.





Zeichnen Sie den Verlauf der Regelgröße $x(t)$ und Messgröße $y(t)$ in das vorbereitete Diagramm. Beachten Sie die Anfangsbedingung des Integrators $x(t = 0) = 0$ und der Messgröße $y(t = 0) = 0$. Die Führungsgröße $w(t)$ ist aus dem folgenden Bild abzulesen:





Lösungen:

Aufgabe 1: Lösung Verständnisfragen

a) Welche Kennlinien lassen sich immer invertieren?

■ Streng monoton fallende Kennlinien.

□ Monoton steigende Kennlinien.

□ Eindeutige Kennlinien.

b) Die Empfindlichkeitsfunktion…

■ …beschreibt den Zusammenhang zwischen Stör- und Regelgröße im Standardregelkreis.

■ …ist kleiner als 0 dB im Gegenkopplungsbereich einer Regelung und größer 0 dB im Mittkopplungsbereich.

□ …ist die Inverse der komplementären Empfindlichkeitsfunktion.

c) Wozu dient die Vorsteuerung?

□ Mit einer Vorsteuerung lassen sich unangenehme nicht phasenminimale Eigenschaften eines Systems (positive Nullstellen, Totzeit) eliminieren.

□ Mit der Vorsteuerung können Störeinflüsse eliminiert werden.

■ Da als Vorsteuerung die Inverse der Strecke (gegebenenfalls nur näherungsweise) verwendet wird, ergibt sich bereits ein sehr gutes Führungsverhalten und ein Reglerentwurf ist nur noch für Störungen nötig.

d) In welcher Reihenfolge erfolgt der Reglerentwurf bei der Kaskadenregelung?

□ Vom äußersten Regelkreis nach innen.

■ Vom innersten Regelkreis nach außen.

□ Die Reihenfolge ist egal.

e) Was ist ein Smithprädiktor?

□ Als Smithprädiktor bezeichnet man den Regler bei der prädiktiven Regelung.

■ Ein modellbasiertes Regelverfahren für Regelstecken mit Totzeit.

■ Wenn die Totzeit eines Systems genau bekannt ist, ermöglicht der Smithprädiktor die Verwendung eines Reglerentwurfsverfahrens.

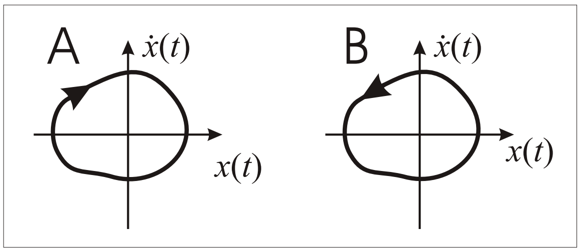
f) Die Regelung von Strecken mit Totzeiten…

■ ist problematisch, da Totzeiten die Phase im Frequenzgang absenken.

□ ist unproblematisch, da Totzeiten für eine Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises sorgen.

■ ist problematisch, da sich viele regelungstechnische Methoden, z.B. das Hurwitz-Kriterium oder der Polvorgabe-Regler, nicht oder nicht direkt anwenden lassen.

g) In den unten abgebildeten Zustandsdiagrammen ist die Ableitung $\dot{x}(t)$ über $x(t)$ dargestellt. Welche der Aussagen über die dargestellen zwei Trajektorien sind gültig?



■ Bei einer geschlossenen Trajektorie liegt eine Dauerschwingung vor.

■ Nur Trajektorie A ist physikalisch sinnvoll.

☐ Nur Trajektorie B ist physikalisch sinnvoll.

h) Welche Eigenschaften besitzt die Zustandsraummethode?

■ Eine Differentialgleichung n. Ordnung wird auf ein System aus n Differentialgleichungen jeweils 1. Ordnung gebracht.

☐ Man benötigt kein Modell der Strecke, da die Regelung mit Hilfe von Zuständen entworfen wird.

■ Eine Erweiterung der Zustandsraummethode auf Mehrgrößensysteme ist möglich.

i) Welche Aussagen bezüglich Zustandsgleichungen treffen zu?

■ Wenn die Zustandsgleichungen in Regelungsnormalform aufgestellt sind, so lassen sich die Zähler- und Nennerkoeffizienten der Übertragungsfunktion direkt ablesen.

☐ Die charakteristische Gleichung des Systems ändert sich, wenn die Systemmatrix $\mathbf{A}$ in Diagonalform statt in Regelungsnormalform vorliegt.

■ Liegt die Systemmatrix $\mathbf{A}$ in Diagonalform vor, so lassen sich die Pole des Systems direkt anhand der Diagonalelemente ablesen.

j) Welche Aussagen treffen auf die Diagonalform der Systemmatrix $\mathbf{A}$ zu?

■ Die Diagonalform von $\mathbf{A}$ wird auch Modalform genannt.

☐ Eine Transformation der Systemmatrix $\mathbf{A}$ in Diagonalform ist immer möglich.

■ Die Diagonalelemente von $\mathbf{A}$ sind gleichzeitig die Eigenwerte λ_i von $\mathbf{A}$.

k) Was ist die Methode von Ljapunow?

■ Ein Verfahren für den Stabilitätsnachweis bei nichtlinearen Systemen.

☐ Eine Methode zur Berechnung der Pole einer Übertragungsfunktion.

☐ Ein numerisches Verfahren zur Matrixinversion.

l) Welche der folgenden Aussagen zum Zweipunktregler mit Hysterese treffen zu?

■ Beim Zweipunktregler mit Hysterese stellt sich nach Erreichen des Sollwertes eine Dauerschwingung ein.

☐ Die Amplitude und Frequenz der Dauerschwingung ist unabhängig von der Hysteresebreite.

■ Eine Dauerschwingung lässt sich verhindern, indem man den Zweipunktregler mit Hysterese durch einen Zweipunktregler mit toter Zone ersetzt.

Aufgabe 2: Vorsteuerung und Störgrößenaufschaltung

a) Ermittlung der Übertragungsfunktionen $G_W(s)$ und $G_Z(s)$:

Aus dem Blockschaltbild liest man ab:

$$\begin{aligned} Y(s) =& Z(s)G_T(s) + G_S(s)[-Z(s)G_{AU}(s) + \dots \\ & + W(s)G_V(s) + G_R(s)[-Y(s) + G_F(s)W(s)]] \end{aligned} \quad \boxed{4}$$

$$\begin{aligned} Y(s) =& Z(s)G_T(s) - Z(s)G_{AU}(s)G_S(s) + \dots \\ & + W(s)G_V(s)G_S(s) - G_S(s)G_R(s)Y(s) + G_S(s)G_R(s)G_F(s)W(s)] \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

Nachdem die Gleichung nach $Y(s)$ aufgelöst wird, ergibt sich:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_S(s)G_V(s) + G_F(s)G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}}_{G_W(s)} W(s) + \dots \quad \boxed{2}$$

$$+ \underbrace{\frac{G_T(s) - G_{AU}(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}}_{G_Z(s)} Z(s) \quad \boxed{2}$$

b) Ermittlung der Übertragungsfunktion $G_V(s)$:

$$G_F(s) \stackrel{!}{=} \frac{G_S(s)G_V(s) + G_F(s)G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \quad \boxed{2}$$

Um die obige Gleichung zu erfüllen, ergibt sich:

$$G_S(s)G_V(s) \stackrel{!}{=} G_F(s) \quad \boxed{2}$$

$$G_V(s) = \frac{G_F(s)}{G_S(s)} \quad \boxed{2}$$

c) Ermittlung der Übertragungsfunktionen mit realisierbaren Vorsteuerungen $G_V(s)$:

$$G_V(s) = \frac{G_F(s)}{\frac{1}{s^2}} = s^2 G_F(s) \quad \boxed{1}$$

Um eine realisierbare Vorsteuerung $G_V(s)$ zu erhalten, muss der Nennergrad der Übertragungsfunktion größer gleich dem Zählergrad sein ($n \geq m$).

$\Rightarrow$ $G_F(s)$ benötigt einen Nennergrad von mindestens 2.

1) $G_F(s)$ Nennergrad zu gering, daher nicht realisierbar. $\boxed{2}$
2) $G_F(s)$ realisierbar, stationärer Endwert von 0,01, daher nicht sinnvoll. $\boxed{2}$
3) $G_F(s)$ realisierbar, stationärer Endwert von 1, nicht schwingungsfähig, daher sinnvoll. $\boxed{2}$
4) $G_F(s)$ realisierbar, grenzstabil (Dauerschwingung), daher nicht sinnvoll. $\boxed{2}$

d) Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$:

$$G_T(s) - G_{AU}(s)G_S(s) = 0 \qquad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \quad G_{AU}(s) = \frac{G_T(s)}{G_S(s)} = \frac{\frac{0{,}5}{s+0{,}5}}{\frac{1}{s^2}} = \frac{0,5s^2}{s+0,5} \qquad \boxed{2}$$

e) Realisierung der Übertragungsfunktion:

Nennergrad zu gering, daher nicht realisierbar: $\boxed{1}$

- Hinzufügen eines schnellen PT_1-Gliedes mit der Verstärkung 1:

$$G_{AU}(s) = \frac{0,5s^2}{s+0,5} \quad \Rightarrow \quad G_{AU,PT1}(s) = \frac{0,5s^2}{s+0,5} \cdot \frac{1}{1+0{,}01s} \qquad \boxed{1}$$
$$= \underline{\frac{50s^2}{(s+0,5)(s+100)}}$$

- Entfernen einer Nullstelle bei $s = 0$ (Alternativlösung):

$$G_{AU}(s) = \frac{0,5s^2}{s+0,5} \quad \Rightarrow \quad G_{AU,NS}(s) = \underline{\frac{0,5s}{s+0,5}}$$

Statisch nicht sinnvoll, da D-Verhalten vorliegt. $\Rightarrow$ Endwert $= 0$ $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 30}$

Aufgabe 3: Zustandsraum

a) Rücktransformation der Übertragungsfunktion in den Zeitbereich (mit verschwindenden Anfangsbedingungen):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^3 + 5s^2 + 2s + 2} \Rightarrow s^3Y(s) + 5s^2Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = 4U(s)$$ 1

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \; \dddot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 4u(t)$$ 1

Mit den angegebene Zuständen ergibt sich daraus:

$$\dot{x}_3 + 5x_3(t) + 2x_2(t) + 2x_1(t) = 4u(t)$$

Man erhält somit 3 Zustandsgleichungen:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_3(t) = 4u(t) - 5x_3(t) - 2x_2(t) - 2x_1(t)$$ 3

Beziehungsweise in Matrixschreibweise:

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u(t), \; y = \underbrace{[1 \; 0 \; 0]}_{\mathbf{c}^T} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{t})}$$ 3

b) Einsetzen in die Gleichung $G(s) = \mathbf{c}^T \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b}$ ergibt:

$$G(s) = [1 \; 0] \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{mit:} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ 1

$$\Rightarrow G(s) = [1 \; 0] \cdot \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s(s+4)} = [s+4 \;\; 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s(s+4)}$$ 3

$$\boxed{\Rightarrow G(s) = \frac{2}{s(s+4)}}$$ 1

c) Für die vollständige Zustandsbeobachtbarkeit gilt bei einem System 2. Ordnung:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \end{bmatrix} = 2 \quad \text{beziehungsweise:} \begin{vmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \end{vmatrix} \neq 0$$ 1

Misst man x_1, so gilt mit $\mathbf{c}^T = [1 \; 0]$:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{A} = [0 \; 1] \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{vollständig zustandsbeobachtbar}}$$ 2

Misst man x_2, so gilt mit $\mathbf{c}^T = [0 \; 1]$:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{A} = [0 \; -4] \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{nicht vollst. zustandsbeobachtbar}}$$ 2

Nur wenn x_1 gemessen wird, ist das System vollständig zustandsbeobachtbar. 1

d) Aus der charakteristischen Gleichung für eine Zustandsregelung $|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}^T| = 0$ ergibt sich mit $\mathbf{k} = [k_1\ k_2]$:

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2k_1 & 2k_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$ 2

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2k_1 & s+4+2k_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow s^2 + (4+2k_2)s + 2k_1 = 0$$ 2

Wenn alle Pole bei $-a$ liegen sollen, ergibt sich das Polynom: $(s+a)^2 = s^2+2as+a^2$. 1
Daraus erhält man durch Koeffizientenvergleich:

$$4 + 2k_2 = 2a \Leftrightarrow \boxed{k_2 = a - 2}$$ 1

$$2k_1 = a^2 \Leftrightarrow \boxed{k_1 = \frac{a^2}{2}}$$ 1

e) Die Berechnung der Pole ergibt:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s+4 \end{vmatrix} = s(s+4) = 0 \Rightarrow \boxed{p_1 = 0, \quad p_2 = -4}$$ 2

Das System hat globales I-Verhalten, weil ein Pol bei $s = 0$ liegt. Damit verschwindet gemäß des inneren Modell Prinzips der Regelfehler bei der Sprungantwort, obwohl der Zustandsregler selbst nur globales P-Verhalten hat. (Das globale I-Verhalten kann auch anhand des Faktors s im Nenner der Übertragungsfunktion aus b) erkannt werden.) 2

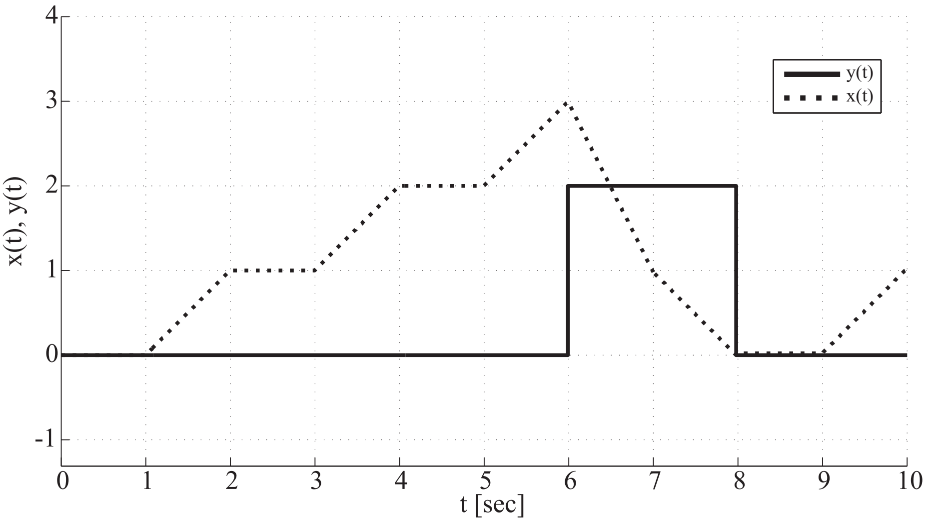
$\sum 30$

Aufgabe 4: Nichtlineare Systeme

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $x(t) = 0$ und somit auch $y(t) = 0$. Die Steigung $e(t)$ für den ersten Geradenabschnitt ist also 0. Für $t = 1 \ldots 2$, $t = 3 \ldots 4$, $t = 5 \ldots 6$ ist $w(t) = 1$, d.h. x(t=1…2, 3…4, 5…6) besitzt für diese Zeitintervalle eine Steigung von 1, zwischen diesen Intervallen eine Steigung von 0.

Ab $t = 6$ wird das Nichtlineare Übertragungglied aktiv und $y(t)$ springt auf den Wert 2. Da $w(t = 6 \ldots 7) = 0$ und $y(t = 6 \ldots 7) = 2$ ist $e(t = 6 \ldots 7) = -2$, $x(t = 6 \ldots 7)$ besitzt also eine Steigung von -2. Für den nachfolgenden Intervall ist $w(t = 7 \ldots 8) = 1$ und $y(t = 7 \ldots 8) = 2$, daher ist $e(t = 7 \ldots 8) = -1$ und $x(t)$ sinkt mit dieser Steigung.

Zum Ende dieses Intervalls, $t = 8$, ist $x(t = 8) = 0$ und $y(t = 8)$ fällt auf den Wert 0. Da $w(0) = w(8)$, $x(0) = x(8)$ und $y(0) = y(8)$ wiederholt sich ab hier der Verlauf der Regelgröße.



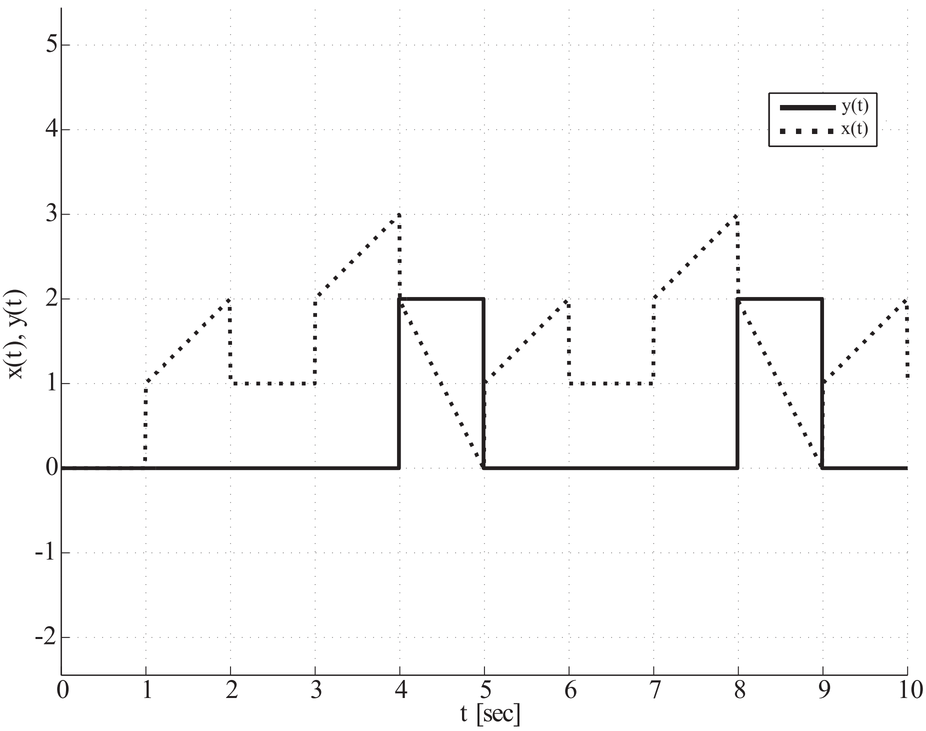
9+3

b) Zu Beginn ist $x(t = 0) = 0$, $y(t = 0) = 0$ und $w(t = 0) = 0$, daher ist $x(t = 0 \ldots 1) = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 1$ springt $w(t)$ auf den Wert 1 und verbleibt auf diesem Wert bis $t = 2$, aufgrund des Durchgriffs springt $x(t = 1)$ auf den Wert 1. Da $e(t = 1 \ldots 2) = 1$ steigt $x(t = 1 \ldots 2)$ bis auf den Wert 2 an.

Zum Zeitpunkt $t = 2$ springt $w(t)$ auf den Wert 0 und verbleibt dort bis $t = 3$, daher ist $e(t = 2 \ldots 3) = 0$ und es gilt $x(t = 2 \ldots 3) = 1$.

Im nächsten Intervall springt $w(t)$ und es gilt $w(t = 3 \ldots 4) = 1$. Aufgrund des Sprungs in der Führungsgröße $w(t)$ springt auch $x(t)$ und es ergibt sich $x(t = 3) = 2$. Da $w(t = 3 \ldots 4) = 1$ ist auch $e(t = 3 \ldots 4) = 1$, $x(t = 3 \ldots 4)$ besitzt in diesem Intervall also die Steigung 1 bis schließlich $x(t = 4) = 3$ ist. Ab diesem Zeitpunkt wird das nichtlineare Übertragungsglied aktiv.

Für $t = 4 \ldots 5$ gilt $w(t = 4 \ldots 5) = 0$, $x(t)$ springt daher wieder um -1 auf den Wert 2. Da $y(t = 4 \ldots 5) = 2$ ist $e(t = 4 \ldots 5) = -2$, $x(t = 4 \ldots 5)$ sinkt also mit einer Steigung von -2 bis $x(5) = 0$. Das nichtlineare Übertragungsglied wird inaktiv und da $x(5) = x(1)$ und $w(5) = w(1)$ wiederholt sich der Verlauf ab diesem Zeitpunkt.



5+3