Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 2 (MRT2)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

24. Juli 2012

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	20	30	30	20	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Die Optimierung eines Zustandsreglers (LQ) basiert auf der Matrix-Riccati-Gleichung $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \frac{1}{r}\mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Kleinere Werte von r machen die Regelung schneller und reduzieren gleichzeitig die Stellgröße.
- ☐ Größere Werte von r reduzieren die Stellgröße, machen die Regelung aber langsamer.
- ☐ Für $r \to \infty$ erhält man eine unendlich hohe Stellgrößenbestrafung und der Regler ist inaktiv.

b) Welche Aussagen gelten für Hilfsstell- und Hilfsregelgrößen?

- ☐ Eine Hilfsstellgröße kann genutzt werden, um als zusätzliches Stellglied die Regelstrecke zu beeinflussen und damit das dynamische Verhalten des Regelkreises zu verbessern.
- ☐ Der Einsatz einer Hilfs*stell*größe beeinflusst die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.
- ☐ Durch den Einsatz einer Hilfs*regel*größe wird die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht beeinflusst.

c) Was gilt für eine zeitoptimale Regelung?

- ☐ Das Ziel ist es, den Sollwert in kürzest möglicher Zeit zu erreichen.
- ☐ Die Stellgröße $u(t)$ nimmt bis zum Erreichen des Endwertes ausschließlich die Extremwerte u_{max} und u_{min} ein (Pontriagisches Maximumprinzip).
- ☐ Der Satz von Feldbaum besagt: Unabhängig von der Systemordnung muss im optimalen Fall nur zweimal zwischen den Stellgrößenextrema umgeschaltet werden.

d) Welche Aussagen sind in Bezug auf Mehrgrößenregelungen mit Entkopplung richtig?

- ☐ Es wäre wünschenswert, wenn der Entkopplungsregler unabhängig vom Hauptregler entworfen werden könnte.
- ☐ Selbst wenn eine perfekte Entkopplung gelingt, kann eine Mehrgrößenregelung nicht zu mehreren Eingrößenregelungen vereinfacht werden.
- ☐ Wenn sich eine perfekte Entkopplung nicht realisieren lässt, gibt es keine Möglichkeit die Entkopplung zumindest näherungsweise zu realisieren.

e) Der Smith-Prädiktor wird angewendet, um ...

- ☐ zu ermöglichen, dass auch bei Systemen mit Totzeit stets die Regelgröße der Führungsgröße ohne Zeitverschiebung folgt.
- ☐ die Phase im Frequenzgang abzusenken, wenn die Strecke eine Totzeit besitzt.
- ☐ die Totzeit aus dem Nenner der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises zu entfernen.

f) Wie können Nichtlinearitäten kompensiert werden?

- ☐ Eine Kompensation ist grundsätzlich nie (auch nicht näherungsweise) möglich.
- ☐ Wenn eine ansonsten lineare Regelstrecke ein nichtlineares Stellglied hat, kann z.B. der Reglerausgang auf ein inverses Kennfeld des Stellglieds gegeben werden.
- ☐ Kompensation durch eine Parallelschaltung (Feedback Linearization).

g) Welche Eigenschaften hat eine Störgrößenaufschaltung?

- ☐ Je schneller eine Störung auf die Regelgröße einwirkt, um so schwieriger ist es, sie zu kompensieren.
- ☐ Eine Störgrößenaufschaltung ist möglich, auch wenn die Störgröße nicht gemessen werden kann.
- ☐ Eine Störgrößenaufschaltung ist nur möglich, wenn die Störgröße gemessen werden kann.

h) Zu den Eigenschaften des optimalen Zustandsreglers zählen:

- ☐ Der Regler hat P-Verhalten.
- ☐ Wenn kein Beobachter verwendet wird, müssen alle Zustände gemessen werden.
- ☐ Werden die Zustände gemessen, hat die Regelung einen Phasenrand von mindestens $60°$.

i) Beim Umschalten zwischen zwei Reglern wünscht man sich ein stoßfreies Umschalten. Das bedeutet, im Moment des Umschaltens ...

- ☐ soll die Stellgröße möglichst gleich bleiben.
- ☐ soll die Stellgröße stets gleich Null sein.
- ☐ soll die Stellgröße einen Sprung mit einer definierten Höhe machen.

j) Die Zustandsgleichungen eines Systems $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c^T})$ sollen transformiert werden?

- ☐ Es ist immer möglich, die Matrix $\mathbf{A}$ des Systems in Diagonalform (Modalform) zu transformieren.
- ☐ Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ in Diagonalform transformiert werden kann, dann können die Zustände des Systems unabhängig voneinander berechnet werden.
- ☐ Die Matrix $\mathbf{A}$ eines Systems mit konjugiert komplexen Polpaaren, lässt sich in eine Diagonalmatrix mit reellen Elementen transformieren.

k) Welche(s) dieser Systeme sind (ist) linear?

- ☐ $G(s) = e^{-T_t \cdot s}$ (Totzeitglied).
- ☐ $\ddot{y}(t) + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot y(t) = \frac{1}{m} \cdot u(t)$.
- ☐ $\ddot{y}(t) + 5 \cdot \dot{y}(t) + 2 \cdot \sqrt{y(t)} = u(t)$.

l) Welches sind Eigenschaften von nichtlinearen Systemen?

- ☐ Sie können gleichzeitig sowohl stabile als auch instabile Ruhelagen haben.
- ☐ Wird ein nichtlineares System mit einer Schwingung der Frequenz ω angeregt, so ist das Ausgangssignal immer auch eine Schwingung mit der Frequenz ω.
- ☐ Verdoppelt man z.B. das Eingangssignal, so verdoppelt sich immer auch das Ausgangssignal (Verstärkungsprinzip).

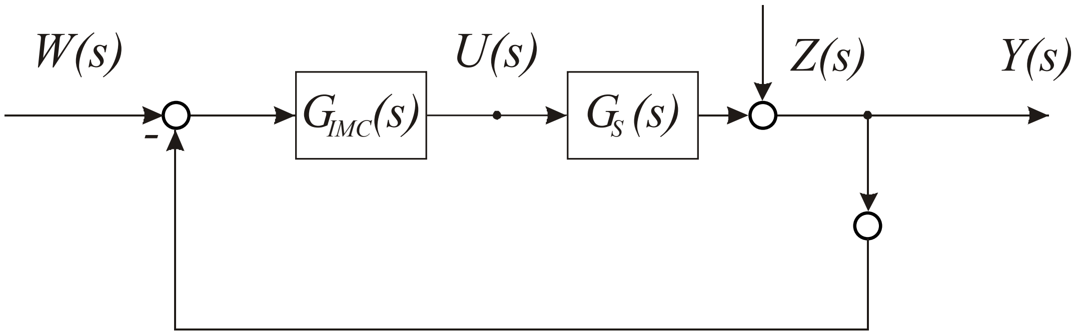
m) Kann die Inverse der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s-1}{s+5}$ in der Praxis zur Vorsteuerung verwendet werden?

- ☐ Ja, denn Zähler- und Nennerordnung sind gleich groß.
- ☐ Nein, denn die resultierende Vorsteuerung wäre instabil.
- ☐ Nein, die Inverse muss, um realisiert werden zu können, um einen schnellen Pol ergänzt werden.

Aufgabe 2: Internal Model Control (IMC)

Hinweis: Aufgabenteile d) und e) können *unabhängig* von a) bis c) bearbeitet werden.

Gegeben ist das unten abgebildete, unvollständige System bestehend aus einer Strecke $G_s(s)$ und einem IMC-Regler $G_{IMC}(s)$.



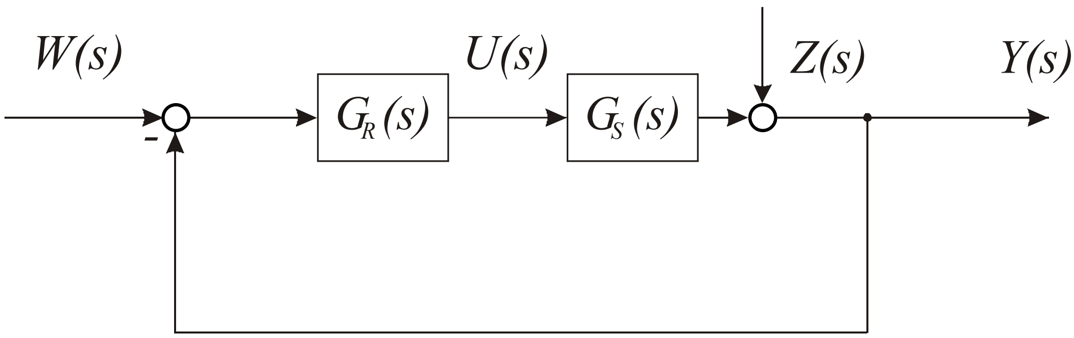
a) Vervollständigen Sie das gegebene Blockschaltbild für eine Regelung nach dem *Internal Model Control* Prinzip (IMC) um den erforderlichen Modellblock $G_M(s)$. Welches Signal wird rückgekoppelt?

b) Leiten Sie die Führungs- und Störübertragungsfunktion $G_W(s)$ bzw. $G_Z(s)$ her.

Tipp: Stellen Sie zunächst $U(s)$ in Abhängigkeit von $W(s)$ und $Y(s)$ dar. Beschreiben Sie anschließend $Y(s)$ durch $U(s)$ und $Z(s)$. Eliminieren Sie nun durch Kombination beider Gleichungen $U(s)$.

c) Formen Sie den IMC-Regler aus der obigen Abbildung in einen Standardregelkreis um und geben Sie die Übertragungsfunktion des Standard Reglers $G_R(s)$ in Abhängigkeit vom $G_{IMC}(s)$ und $G_M(s)$ an.

Tipp: Die Umformung kann anhand des Blockschaltbildes erfolgen oder berechnet werden!



d) Nehmen Sie an, dass das Modell exakt mit der Strecke übereinstimmt. Was für Konsequenzen ergeben sich für die Übertragungsfunktionen $G_W(s)$ und $G_Z(s)$ und somit für den Regelkreis.

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung die gegebenen Führungs- und Störübertragungsfunktionen:

$$G_W(s) = \frac{G_{IMC}(s) \cdot G_S(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot (G_S(s) - G_M(s))} ,$$

und

$$G_Z(s) = \frac{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot (G_S(s) - G_M(s))} .$$

e) Wie lautet allgemein die *ideale* Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ für den in d) vorliegenden Fall? Was ergibt sich daraus für den Reglerentwurf für $G_{IMC}(s)$?

f) Gegeben sind die folgenden Strecken $G_{S,i}(s)$.

$$G_{S,1}(s) = \frac{s+5}{s+2} , \qquad G_{S,2}(s) = \frac{s+5}{s+2} \cdot e^{-4s} , \qquad G_{S,3}(s) = \frac{s-5}{s+2} .$$

Ermitteln Sie jeweils die Regler mit internen Modell $G_{IMC,i}$ für eine ideale Führungsübertragungsfunktion unter Annahme eines exakten Modells. Geben Sie jeweils den realisierbaren Regler mit internen Modell $G_{IMC,i}^{real}$ an.

Aufgabe 3: Zustandsraum

Gegeben sind folgende Zustandsgleichungen

$$\dot{x}_1 + x_1 - 4 \cdot x_2 = 0 \ ,$$

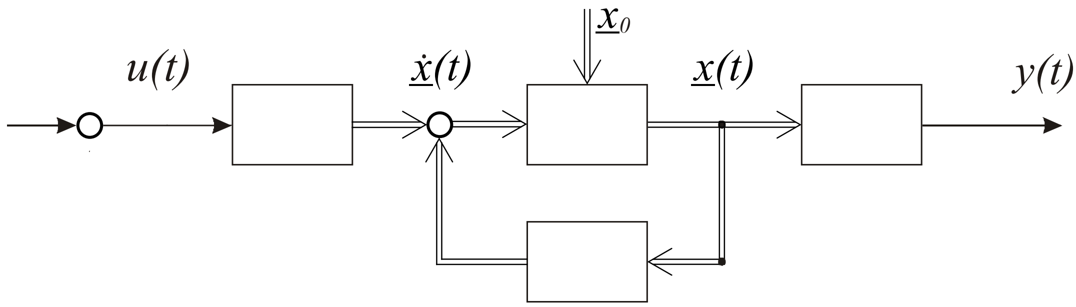
$$\dot{x}_2 + 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 2 \cdot u = 0 \ ,$$

und die Ausgangsgleichung

$$y - x_2 - 3 \cdot u = 0$$

a) Leiten Sie aus den gegebenen Gleichungen die Vektor- / Matrixschreibweise $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$ und $y(t) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t) + du(t)$ her und geben Sie die einzelnen Komponenten $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ und d an.

b) Ergänzen Sie im Blockschaltbild die fehlenden Bezeichnungen der Blöcke und die Zustandsrückführung zur Regelung.



Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben die hier angegebenen Werte:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \ d = 0.$$

c) Berechnen Sie aus den Zustandsgleichungen die Übertragungsfunktion der Strecke $G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.

d) Bestimmen Sie die einzelnen Parameter des Zustandsreglers, wenn alle Pole des geschlossen Regelkreises bei $s = -2$ liegen (Polvorgabe).

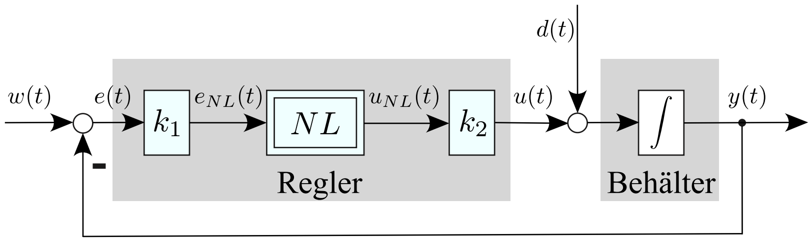
e) Überprüfen Sie, ob mit den berechneten Reglerparametern eine bleibende Reglerabweichung vorhanden ist.

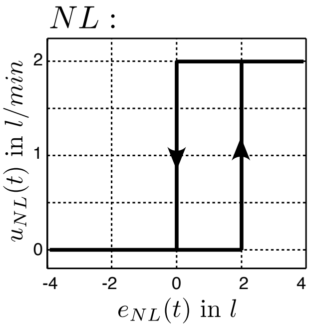
Tipp: Berechnen Sie die Sprungantwort $h(t \to \infty)$.

f) Wie kann eine bleibende Reglerabweichung **ohne** Veränderung der Reglerstruktur erreicht werden? Ergänzen Sie das gegebene Blockschaltbild in b) um die getroffene Maßnahme.

Aufgabe 4: Nichtlineare Regelung

Der Inhalt eines Behälters (Integratorausgang $y(t)$) soll auf einen festen Wert $w(t) = 4\,l$ geregelt werden. Aus dem Behälter fließt ein konstanter Volumenstrom $d(t) = -1\,l/min$ ab (Störgröße). Es wird ein einfacher schaltender Regler (Pumpe an/aus), bestehend aus den Verstärkungsgliedern k_1, k_2 und einer Hysterese (NL), verwendet.



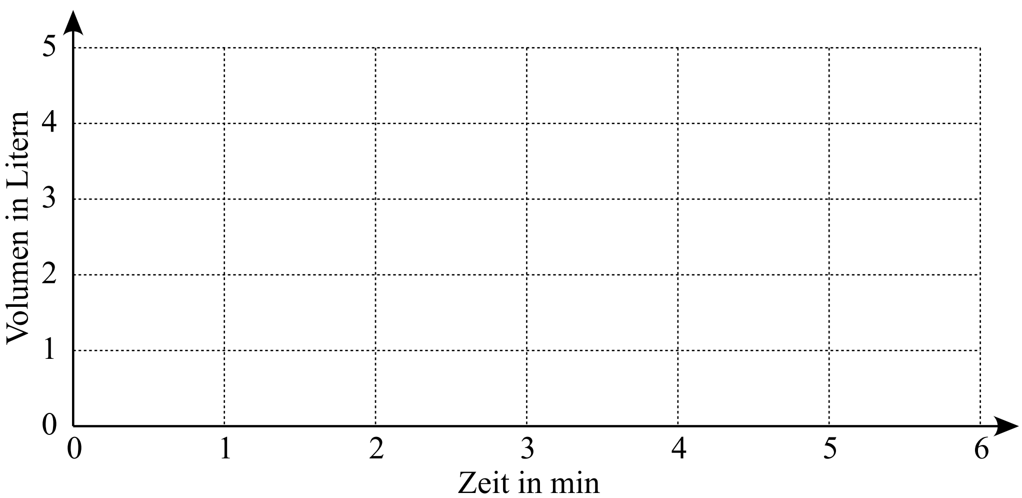


a) Dürfen im Allgemeinen die Verstärkungsglieder k_1 und k_2 im Blockschaltbild ausgetauscht werden, ohne dass sich das Verhalten des Regelkreises verändert (kurze Begründung)?

b) Nehmen Sie folgende Werte an: Reglerparameter $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, Anfangsbedingungen: $u_{NL}(t = 0) = 0\,l/min$, $y(t = 0) = 4\,l$. Skizzieren Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ (Behälterinhalt) in das unten abgebildete Diagramm.

c) Der Regelfehler ist mit den Parametern aus b) relativ groß. Wie muss k_1 geändert werden, damit der maximale Regelfehler nur noch $1\,l$ beträgt. Zeichnen Sie den zugehörigen Verlauf von $y(t)$ in das unten abgebildete Diagramm ein.

d) Wählen Sie nun die Parameter $k_1 = 1$, $k_2 = 1{,}5$. Die Anfangsbedingungen lauten auch hier $u_{NL}(t = 0) = 0$, $y(t = 0) = 4\,l$. Zeichnen Sie $y(t)$ auch für diesen Fall in das Diagramm. Wie hat sich das Regelverhalten im Vergleich zu b) verändert?



endfigure

Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Die Optimierung eines Zustandsreglers (LQ) basiert auf der Matrix-Riccati-Gleichung $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{PA} - \frac{1}{r}\mathbf{Pbb}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- □ Kleinere Werte von r machen die Regelung schneller und reduzieren gleichzeitig die Stellgröße.
- ■ Größere Werte von r reduzieren die Stellgröße, machen die Regelung aber langsamer.
- ■ Für $r \to \infty$ erhält man eine unendlich hohe Stellgrößenbestrafung und der Regler ist inaktiv.

b) Welche Aussagen gelten für Hilfsstell- und Hilfsregelgrößen?

- ■ Eine Hilfsstellgröße kann genutzt werden, um als zusätzliches Stellglied die Regelstrecke zu beeinflussen und damit das dynamische Verhalten des Regelkreises zu verbessern.
- ■ Der Einsatz einer Hilfs*stell*größe beeinflusst die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.
- □ Durch den Einsatz einer Hilfs*regel*größe wird die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht beeinflusst.

c) Was gilt für eine zeitoptimale Regelung?

- ■ Das Ziel ist es, den Sollwert in kürzest möglicher Zeit zu erreichen.
- ■ Die Stellgröße $u(t)$ nimmt bis zum Erreichen des Endwertes ausschließlich die Extremwerte u_{max} und u_{min} ein (Pontriagisches Maximumprinzip).
- □ Der Satz von Feldbaum besagt: Unabhängig von der Systemordnung muss im optimalen Fall nur zweimal zwischen den Stellgrößenextrema umgeschaltet werden.

d) Welche Aussagen sind in Bezug auf Mehrgrößenregelungen mit Entkopplung richtig?

- ■ Es wäre wünschenswert, wenn der Entkopplungsregler unabhängig vom Hauptregler entworfen werden könnte.
- □ Selbst wenn eine perfekte Entkopplung gelingt, kann eine Mehrgrößenregelung nicht zu mehreren Eingrößenregelungen vereinfacht werden.
- □ Wenn sich eine perfekte Entkopplung nicht realisieren lässt, gibt es keine Möglichkeit die Entkopplung zumindest näherungsweise zu realisieren.

e) Der Smith-Prädiktor wird angewendet, um ...

- □ zu ermöglichen, dass auch bei Systemen mit Totzeit stets die Regelgröße der Führungsgröße ohne Zeitverschiebung folgt.
- □ die Phase im Frequenzgang abzusenken, wenn die Strecke eine Totzeit besitzt.

■ die Totzeit aus dem Nenner der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises zu entfernen.

f) Wie können Nichtlinearitäten kompensiert werden?

☐ Eine Kompensation ist grundsätzlich nie (auch nicht näherungsweise) möglich.

■ Wenn eine ansonsten lineare Regelstrecke ein nichtlineares Stellglied hat, kann z.B. der Reglerausgang auf ein inverses Kennfeld des Stellglieds gegeben werden.

■ Kompensation durch eine Parallelschaltung (Feedback Linearization).

g) Welche Eigenschaften hat eine Störgrößenaufschaltung?

■ Je schneller eine Störung auf die Regelgröße einwirkt, um so schwieriger ist es, sie zu kompensieren.

☐ Eine Störgrößenaufschaltung ist möglich, auch wenn die Störgröße nicht gemessen werden kann.

■ Eine Störgrößenaufschaltung ist nur möglich, wenn die Störgröße gemessen werden kann.

h) Zu den Eigenschaften des optimalen Zustandsreglers zählen:

☐ Der Regler hat P-Verhalten.

■ Wenn kein Beobachter verwendet wird, müssen alle Zustände gemessen werden.

■ Werden die Zustände gemessen, hat die Regelung einen Phasenrand von mindestens 60°.

i) Beim Umschalten zwischen zwei Reglern wünscht man sich ein stoßfreies Umschalten. Das bedeutet, im Moment des Umschaltens ...

■ soll die Stellgröße möglichst gleich bleiben.

☐ soll die Stellgröße stets gleich Null sein.

☐ soll die Stellgröße einen Sprung mit einer definierten Höhe machen.

j) Die Zustandsgleichungen eines Systems $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c^T})$ sollen transformiert werden?

☐ Es ist immer möglich, die Matrix $\mathbf{A}$ des Systems in Diagonalform (Modalform) zu transformieren.

■ Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ in Diagonalform transformiert werden kann, dann können die Zustände des Systems unabhängig voneinander berechnet werden.

☐ Die Matrix $\mathbf{A}$ eines Systems mit konjugiert komplexen Polpaaren, lässt sich in eine Diagonalmatrix mit reellen Elementen transformieren.

k) Welche(s) dieser Systeme sind (ist) linear?

■ $G(s) = e^{-T_t \cdot s}$ (Totzeitglied).

■ $\ddot{y}(t) + \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot y(t) = \frac{1}{m} \cdot u(t)$.

☐ $\ddot{y}(t) + 5 \cdot \dot{y}(t) + 2 \cdot \sqrt{y(t)} = u(t)$.

l) Welches sind Eigenschaften von nichtlinearen Systemen?

■ Sie können gleichzeitig sowohl stabile als auch instabile Ruhelagen haben.

- ☐ Wird ein nichtlineares System mit einer Schwingung der Frequenz ω angeregt, so ist das Ausgangssignal immer auch eine Schwingung mit der Frequenz ω.
- ☐ Verdoppelt man z.B. das Eingangssignal, so verdoppelt sich immer auch das Ausgangssignal (Verstärkungsprinzip).

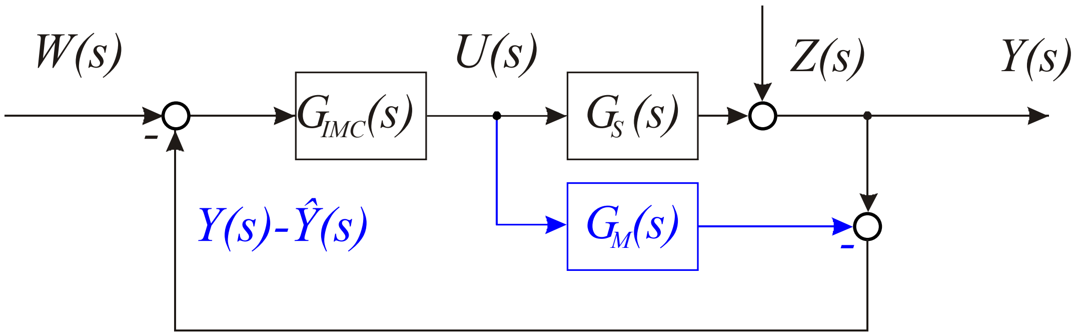
m) Kann die Inverse der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s-1}{s+5}$ in der Praxis zur Vorsteuerung verwendet werden?

- ☐ Ja, denn Zähler- und Nennerordnung sind gleich groß.
- ■ Nein, denn die resultierende Vorsteuerung wäre instabil.
- ☐ Nein, die Inverse muss, um realisiert werden zu können, um einen schnellen Pol ergänzt werden.

$\boxed{\sum 20}$

Aufgabe 2: Mehrgrößenregelung und Entkopplung

a) Der Modellblock greift das Signal der Stellgröße $U(s)$ ab und der Modellausgang $\hat{Y}(s)$ wird anschließend mit der Regelgröße $Y(s)$ verglichen.



3

Das rückgekoppelte Signal ist die Differenz zwischen Regelgröße $Y(s)$ und $\hat{Y}(s)$.

b) Aus dem vollständigen Blockschaltbild ergibt sich für $U(s)$:

$$(W(s) - (Y(s) - G_M(s) \cdot U(s))) \cdot G_{IMC}(s) = U(s) \ ,$$

$$W(s) \cdot G_{IMC} - Y(s) \cdot G_{IMC} + U(s) \cdot G_M(s) \cdot G_{IMC}(s) = U(s) \ ,$$ 3

$$U(s) = \frac{G_{IMC}(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)} \cdot (W(s) - Y(s)) \ .$$

Weiter folgt aus dem Blockschaltbild:

$$U(s) \cdot G_S(s) + Z(s) = Y(s) \ .$$ 1

Ersetzen von $U(s)$:

$$Y(s) = \frac{G_{IMC}(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)} \cdot (W(s) - Y(s)) \cdot G_S(s) + Z(s) \ ,$$

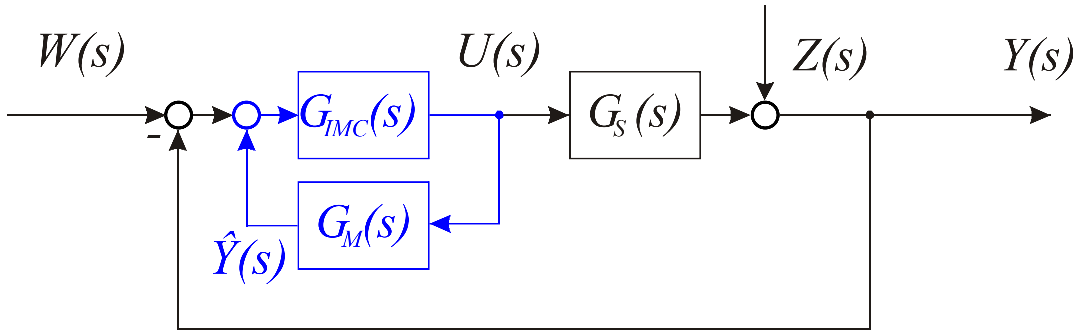
$$Y(s) = \frac{G_{IMC}(s) \cdot G_S(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)} \cdot W(s) - \frac{G_{IMC}(s) \cdot G_S(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)} \cdot Y(s) + Z(s) \ ,$$

$$Y(s) \cdot \left(1 + \frac{G_{IMC}(s) \cdot G_S(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)}\right) = \frac{G_{IMC}(s) \cdot G_S(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)} \cdot W(s) + Z(s) \ ,$$

$$Y(s) \cdot \left(\frac{1 + G_{IMC}(s) \cdot (G_S(s) - G_M(s))}{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)}\right) = \frac{G_{IMC}(s) \cdot G_S(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)} \cdot W(s) + Z(s) \ ,$$ 5

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_{IMC}(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_{IMC}(s) \cdot (G_S(s) - G_M(s))}}_{G_W(s)} \cdot W(s) + \underbrace{\frac{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)}{1 + G_{IMC}(s) \cdot (G_S(s) - G_M(s))}}_{G_Z(s)} \cdot Z(s) \ .$$

c) Durch verschieben der Summationsstelle aus dem rückgeführten Pfad vor den Regler mit internen Modell $G_{IMC}(s)$ ergibt sich:



2

Die Übertragungsfunktion $G_R(s)$ ergibt sich aus:

$$(W(s) - Y(s) + U(s) \cdot G_M(s)) \cdot G_{IMC}(s) = U(s) \ ,$$ 2

$$U(s) = \underbrace{\frac{G_{IMC}(s)}{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_M(s)}}_{G_R(s)} \cdot (W(s) - Y(s)) \ .$$

Vergleiche Aufgabenteil b).

d) Wenn das Modell exakt mit der Strecke übereinstimmt gilt:

$$G_M(s) = G_S(s) \ ,$$

$$\Rightarrow G_W(s) = \frac{G_{IMC}(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_{IMC}(s) \cdot (G_S(s) - G_S(s))} = G_{IMC}(s) \cdot G_S(s) \ .$$ 3

$$\Rightarrow G_Z(s) = \frac{1 - G_{IMC}(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_{IMC}(s) \cdot (G_S(s) - G_S(s))} = 1 - G_{IMC}(s) \cdot G_S(s) \ .$$

Die Rückkopplung fällt weg und die Regelung wird zur Steuerung.

e) Die allgemeine ideale Führungsübertragungsfunktion einer Steuerung lautet:

$$G_W(s) = 1$$ 1

Somit folgt für den Regler mit internen Modell:

$$G_W(s) = G_{IMC}(s) \cdot G_S(s) \ ,$$

$$G_{IMC}(s) = \frac{G_W(s)}{G_S(s)} = \frac{1}{G_S(s)} \ .$$ 1

f) Zunächst die Berechnung der Inversen Strecke ohne Berücksichtigung der Realisierbarkeit:

$$G_{IMC,1} = \frac{s+2}{s+5} \; ,$$

$$G_{IMC,2} = \frac{s+2}{s+5} \cdot e^{4s} \; ,$$ 3

$$G_{IMC,3} = \frac{s+2}{s-5} \; .$$

$G_{IMC,1}$ ist realisierbar $(n \geq m)$, somit folgt:

$$G_{IMC,1}^{real} = G_{IMC,1} = \frac{s+2}{s+5} \; .$$ 2

$G_{IMC,2}$ ist nicht realisierbar, da eine positive Totzeit vorhanden ist. Um die Übertragungsfunktion zu realisieren, muss diese entfernt werden:

$$G_{IMC,2}^{real} = \frac{s+2}{s+5} \; .$$ 2

$G_{IMC,3}$ ist nicht realisierbar, da aufgrund des Nichtphasenminimalität der Strecke eine instabile Polstelle vorliegt. Um die Übertragungsfunktion zu realisieren, muss die äquivalente phasenminimale Strecke invertiert werden:

$$G_{IMC,3}^{real} = \frac{1}{\frac{s+5}{s+2}} = \frac{s+2}{s+5} \; .$$ 2

In allen drei Fälle ergibt sich dieselbe realsisierbare Übertragungsfunktion des Reglers mit internen Modell.

Modell.

$\sum 30$

$\sum 30$

Aufgabe 3: Zustandsraum

a) Zunächst erfolgt die Umstellung der gegebenen Gleichungen:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 4 \cdot x_2 \ ,$$

$$\dot{x}_2 = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot u \ ,$$ 3

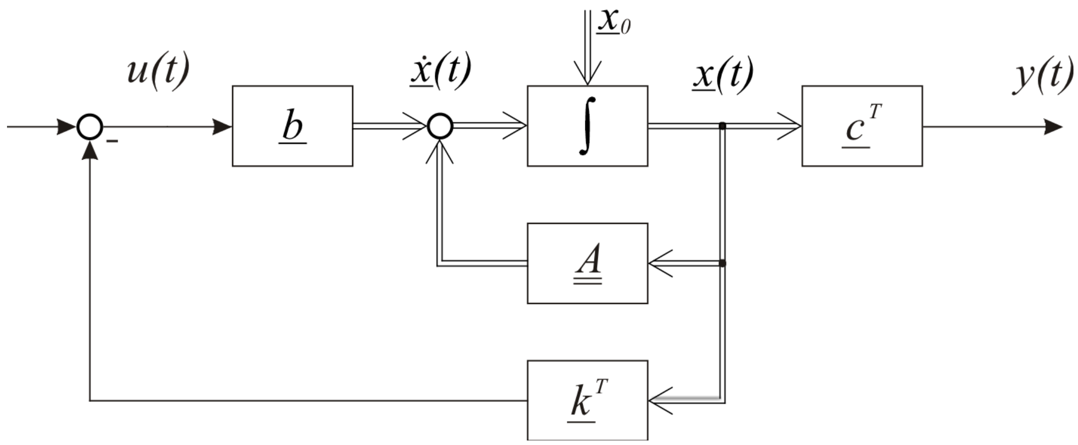
$$y = x_2 + 3 \cdot u \ .$$

Nun kann man die oberen Gleichungen in Matrixschreibweise umformen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u \ ,$$ 2

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}} \cdot \mathbf{x}(t) + \underbrace{3}_{d} \cdot u \ .$$

b) Das ergänzte Blockschaltbild:



7

c) Die Formel zur Berechnung der Übertragungsfunktion $G_S(s)$ lautet:

$$G_S(s) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} \ .$$ 1

Einsetzen der gegebenen Glieder:

$$G_S(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ,$$

$$G_S(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ +3 & s+2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ,$$

$$G_S(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + 3 \cdot s + 5} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ,$$ 4

$$G_S(s) = \frac{1}{s^2 + 3 \cdot s + 5} \cdot \begin{bmatrix} -3 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ,$$

$$G_S(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3 \cdot s + 5} \ .$$

d) Polvorgaberegler mit $s = -2$ Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\det\left(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\right) = 0$$ 1

Es ergibt sich mit $\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} .$$ 1

In Verbindung mit der in c) berechneten Matrix ergibt sich für die charakteristische Gleichung:

$$\det\left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ +3 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3+k_1 & s+2+k_2 \end{bmatrix}\right) = 0 ,$$

$$\Rightarrow (s+1) \cdot (s+2+k_2) + 3 + k_1 = 0 ,$$ 2

$$s^2 + s + 2 \cdot s + 2 + k_2 \cdot s + k_2 + 3 + k_1 = 0 ,$$

$$s^2 + (3+k_2) \cdot s + 5 + k_1 + k_2 = 0 .$$

Laut Vorgabe liegen alle Pole bei $s = -2$:

$$(s+2)^2 = s^2 + 4 \cdot s + 4 .$$ 1

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$3 + k_2 = 4 \Rightarrow \boxed{k_2 = 1} ,$$ 1

und

$$5 + k_1 + k_2 = 4 \Rightarrow \boxed{k_1 = -2}$$ 1

Somit folgt für den Reglervektor $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Zunächst muss die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ hergeleitet werden. Es gilt:

$$G_W(s) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \left(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \cdot \mathbf{b} .$$ 1

Nun können die bekannten Vektoren und die bekannte Matrix, sowie die Reglerparameter eingesetzt werden:

$$G_W(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 + \underbrace{-2}_{k_1} & s+2+\underbrace{1}_{k_2} \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

$$G_W(s) = \frac{1}{s^2 + 4 \cdot s + 4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$ 2

$$G_W(s) = \frac{1}{s^2 + 4 \cdot s + 4} \cdot \begin{bmatrix} -1 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

$$G_W(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4 \cdot s + 4} \,.$$

Mit der Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ ergibt sich für die Sprungantwort:

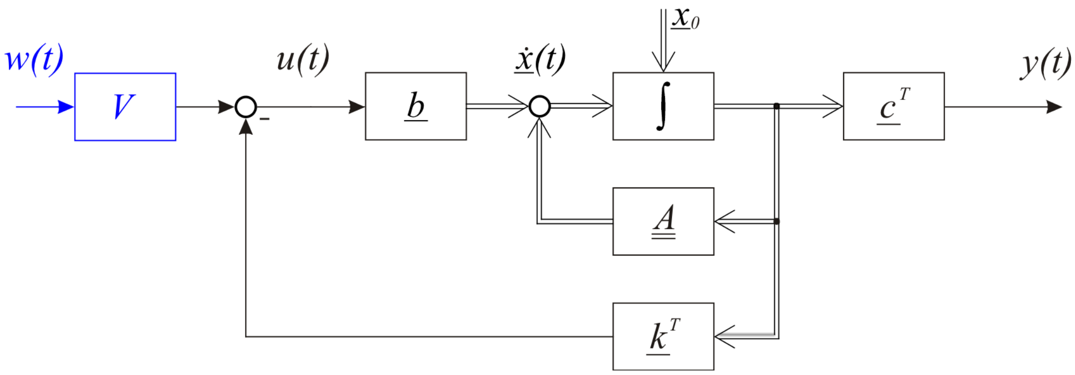
$$h\,(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot G_W(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} G_W(s) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{s+1}{s^2 + 4 \cdot s + 4} \right) = \frac{1}{4} \neq 1$$ 1

Die Sprungantwort strebt asymptotisch gegen $\frac{1}{4}$. Es ist eine bleibende Reglerabweichung vorhanden.

f) Es ist möglich die Reglerabweichung mithilfe eines Vorfilters V zu vermeiden:

$$V = \frac{1}{h\,(t \to \infty)} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \,.$$ 1

Das vollständige Blockschaltbild mit Vorfilter ist:



1

$\sum$ 30

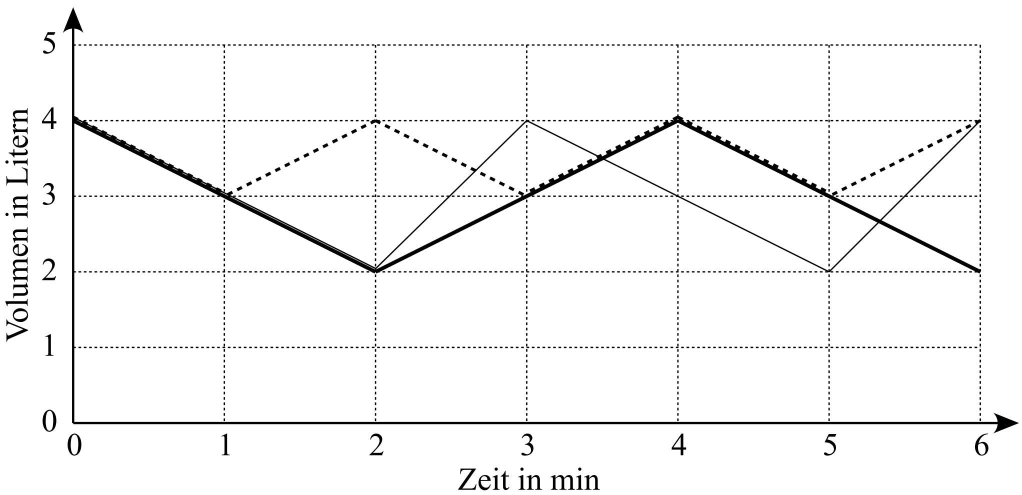
Aufgabe 4: Nichtlineare Regelung

a) Nein, die Reihenfolge von Blöcken darf nur bei **linearen** Systemen vertauscht werden, durch den Regler mit Hyterese ist der Regelkreis jedoch nichtlinear. 2

b) Siehe dicke Linie im Diagramm. 5

c) Siehe gestrichelte im Diagramm. 5
Der Regler schaltet um, wenn $e_{NL}(t) = 2$ ist. Wenn dies bereits bei $e(t) = 1$ der Fall sein soll, muss $e(t)$ mit 2 multipliziert werden, also muss $k_1 = 2$ sein. 2

d) Siehe dünne Linie im Diagramm. 5
Durch die Erhöhung von k_2 erreicht die Regelgröße nach einschalten der Pumpe bei $y = 2\,l$ schneller wieder den Sollwert von $4\,l$. 1



$\sum 20$