Prüfungsklausur Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

23.02.2022

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Ges.
Punkte:	20	19	21	20	23	17	120
Erreicht:							

Dauer der Klausur: 2 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Kurzaufgaben (20 Punkte)

a) Untersuchung des Endwerts von Impulsantworten von Systemen **0. bis maximal 2. Ordnung** (4 Punkte):

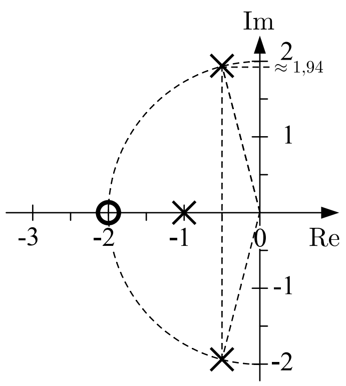
1) Geben Sie 3 Übertragungsfunktionen mit unterschiedlicher Nennerordnung an deren Impulsantwort für $t \to \infty$ auf Null abfällt.
2) Geben Sie 2 Übertragungsfunktionen mit unterschiedlicher Nennerordnung an deren Impulsantwort $t \to \infty$ auf einem Endwert von 2 verbleibt.
3) Geben Sie 2 Übertragungsfunktionen mit unterschiedlicher Nennerordnung an deren Impulsantwort $t \to \infty$ gegen Unendlich strebt.

b) Für den Standardregelkreis gilt zwischen der Führungsgröße w und der Stellgröße u folgender Zusammenhang (3 Punkte):

$$U(s) = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \cdot W(s)$$

Begründen Sie kurz anhand dieser Gleichung, warum es nicht sinnvoll ist, den Regler $G_R(s)$ dazu zu nutzen, nichtphasenminimale Nullstellen der Regelstrecke $G_S(s)$ zu kürzen, selbst wenn diese exakt bekannt wären.

c) Im nachfolgenden Bild ist das Pol-Nullstellendigramm eines Systems dargestellt. Bearbeiten Sie dazu folgende Aufgaben (10 Punkte):



1) Geben Sie alle Pole und Nullstellen an.
2) Ist das System stabil und realisierbar (kurze Begründungen)?
3) Hat die Übertragungsfunktion globales P-, I-, oder D-Verhalten (kurze Begründung)?
4) Ermitteln Sie für das konjugiert komplexe Polpaar folgende Größen: Eckfrequenz ω_0, Dämpfungsmaß D und (näherungsweise) Eigenfrequenz ω_e.
5) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems unter der Annahme, dass dessen Verstärkung 5 beträgt?

d) Folgende Systeme sollen gesteuert werden (3 Punkte):

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2} \cdot e^{-5s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s-2} \cdot e^{-5s}$$

1) Welches der Systeme kann gar nicht gesteuert werden und warum?
2) Geben Sie für das andere System die ideale und eine realisierbare Steuerung an?

Aufgabe 2: Vorfilter und Vorsteuerung (19 Punkte)

Im Folgenden soll die Erweiterung eines Regelkreises um einen weiteren Freiheitsgrad untersucht werden. Dazu soll der Regelkreis jeweils mit einer Vorsteuerung und Vorfilterung erweitert werden.
Der Regelkreis besteht aus der Strecke $G_S(s)$, dem Regler $G_R(s)$ sowie einem Sensor $G_M(s)$. Des weiteren beeinflusst eine Ausgangsstörung $d(t)$ den Regelkreis. Die Störung wird durch eine weitere Übertragungsfunktion $G_D(s)$ beeinflusst. Der Sensor wird benötigt, um die Regelgröße zu messen. Es handelt sich um einen nicht idealen Sensor mit einer zunächst beliebigen Übertragungsfunktion $G_M(s) \neq 1$.

a) Zeichnen Sie das Blockschaubild des beschriebenen Regelkreises erweitert um eine Vorsteuerung.

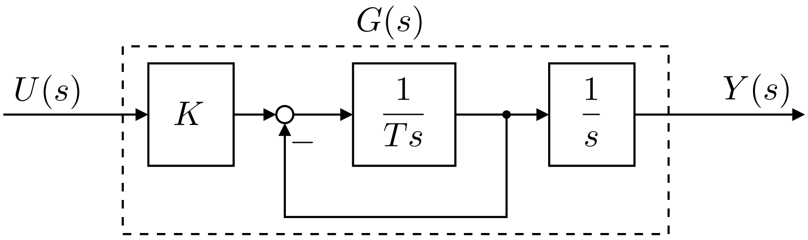
b) Zeichnen Sie das Blockschaubild des beschriebenen Regelkreises erweitert um eine Vorfilterung.

c) Prüfen Sie, ob für diese beiden Regelkreise weiterhin die Äquivalenz zwischen Vorsteuerung und Vorfilterung gilt. Berechnen Sie dazu zunächst die Führungsübertragungsfunktion der Ansätze. Bei der Berechnung darf auf das Argument der Funktionen verzichtet werden.

d) Die Übertragungsfunktionen seien nun definiert als $G_S(s) = \frac{2}{s(s+4)^2}$,
$G_R(s) = K_R(s+3)$, $G_M(s) = \frac{1}{s+1}$ sowie $G_D(s) = \frac{s}{s^2+1}$.
Legen Sie nun einen Vorfilter $\tilde{G}_V(s)$ für diesen erweiterten Regelkreis aus. Dieser soll mögliche Nullstellen in der Führungsübertragungsfunktion kompensieren und dabei die Gesamtverstärkung unbeeinflusst lassen.

Aufgabe 3: Laplace Transformation (21 Punkte)

Gegeben ist ein System $G(s)$ (siehe Bild).



a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.

b) Welche Bezeichnung passt zu $G(s)$? Wählen Sie eine der sechs Antwortmöglichkeiten und notieren Sie diese auf Ihrem Klausurbogen.

- P_2T_1-Glied
- IT_1-Glied
- DT_1-Glied
- PT_2-Glied
- P_2T_2-Glied
- I-Glied

c) Welches globales Verhalten hat das System? Wählen Sie eine der sechs Antwortmöglichkeiten und notieren Sie diese auf Ihrem Klausurbogen.

- T-Verhalten
- PT_2-Verhalten
- D-Verhalten
- P-Verhalten
- NP-Verhalten
- I-Verhalten

Das System $G(s)$ wird nun mit einem Impuls $u(t) = \delta(t)$ angeregt. Ziel ist es, das Ausgangssignal $y(t)$ in Abhängigkeit von K und T zu berechnen. Führen Sie dazu folgende Schritte durch:

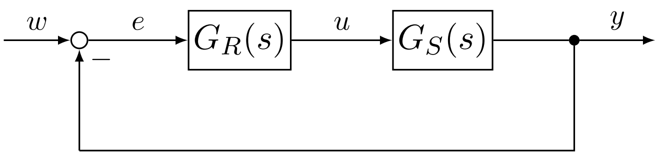
d) Berechnen Sie das Laplace-transformierte Ausgangssignal $Y(s)$ und führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

e) Berechnen Sie das Ausgangssignal mithilfe der inversen Lapalce-Transformierten $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

f) Berechnen Sie den Endwert von $y(t)$.

Aufgabe 4: Kompensationsreglerentwurf (20 Punkte)

Folgender Regelkreis wird in dieser Aufgabe betrachtet:



Die Strecke $G_S(s)$ besitzt folgende Übertragungsfunktion.

$$G_S(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

a) Berechnen Sie die Pole der Regelstrecke. Besitzt die gegebene Regelstrecke stabiles oder instabiles Verhalten? Ist die Regelstrecke phasenminimal oder nicht phasenminimal?

b) Der Regler $G_R(s)$ soll nach dem Kompensationsverfahren ausgelegt werden. Geben sie die allgemeine Formel für den Regler $G_R(s)$ an wenn das Führungsverhalten $G_w(s)$ gefordert ist.

c) Welches Führungsverhalten wird für einen perfekten Regler gefordert? Warum ist diese Regelung nicht umsetzbar?

d) Jetzt werden konkrete gewünschte Führungsverhalten vorgegeben. Berechnen Sie den Regler $G_R(s)$ für folgende Führungsverhalten:

$$G_{w,1}(s) = \frac{1}{2s+1} \qquad G_{w,2}(s) = \frac{1}{\frac{1}{4}s^2 + s + 1} \qquad G_{w,3}(s) = \frac{1}{\frac{1}{8}s^3 + \frac{6}{8}s^2 + \frac{12}{8}s + 1}$$

e) Welche der berechneten Regler sind realisierbar? Welche der berechneten Regler besitzen sprungfähiges Verhalten? Welche der berechneten Regler besitzen globales I-Verhalten? Erklären Sie, warum sich die Einträge für das globale I-Verhalten ergeben. (Hinweis: erstellen Sie dazu eine Tabelle mit den 3 Reglern und den 3 Eigenschaften. Vgl. Tabelle 1.)

	realisierbar	sprungfähig	I-Anteil
$G_{R,1}(s)$			
$G_{R,2}(s)$			
$G_{R,3}(s)$			

Tabelle 1: Tabelle für Aufgabenteil e)

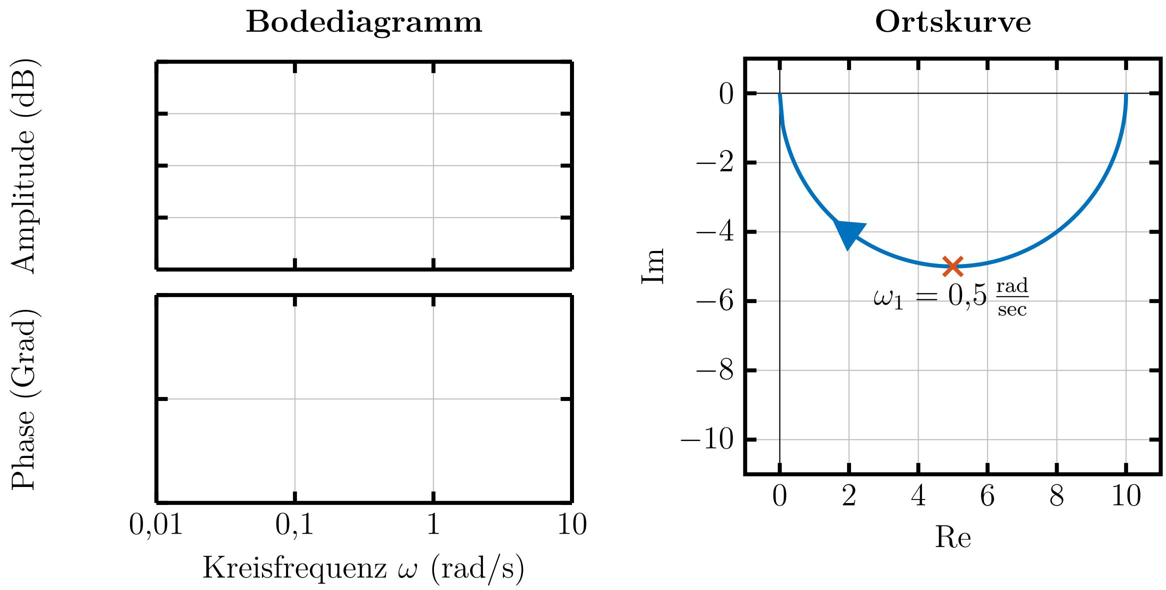
f) Die Regelstrecke wird nun geändert. Sie besitzt folgende Übertragungsfunktion:

$$\tilde{G}_S(s) = \frac{1-2s}{1+2s}$$

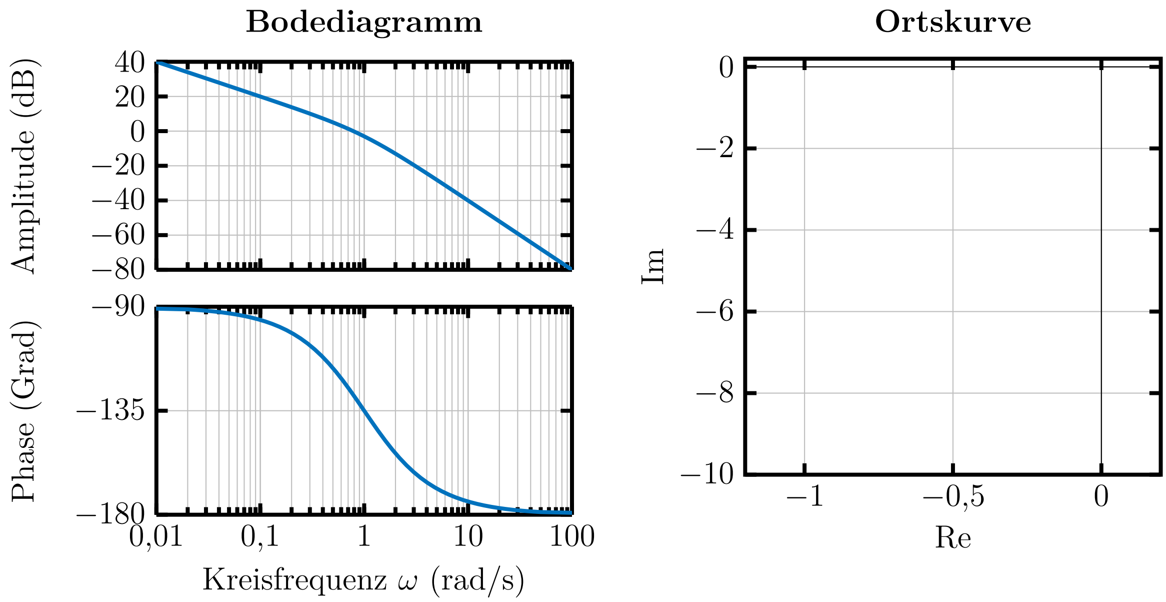
Was muss bei dieser Regelstrecke bei der Vorgabe eines gewünschten Führungsverhaltens beachtet werden? Geben sie ein mögliches Führungsverhalten vor.

Aufgabe 5: Bodediagramme und Ortskurven (23 Punkte)

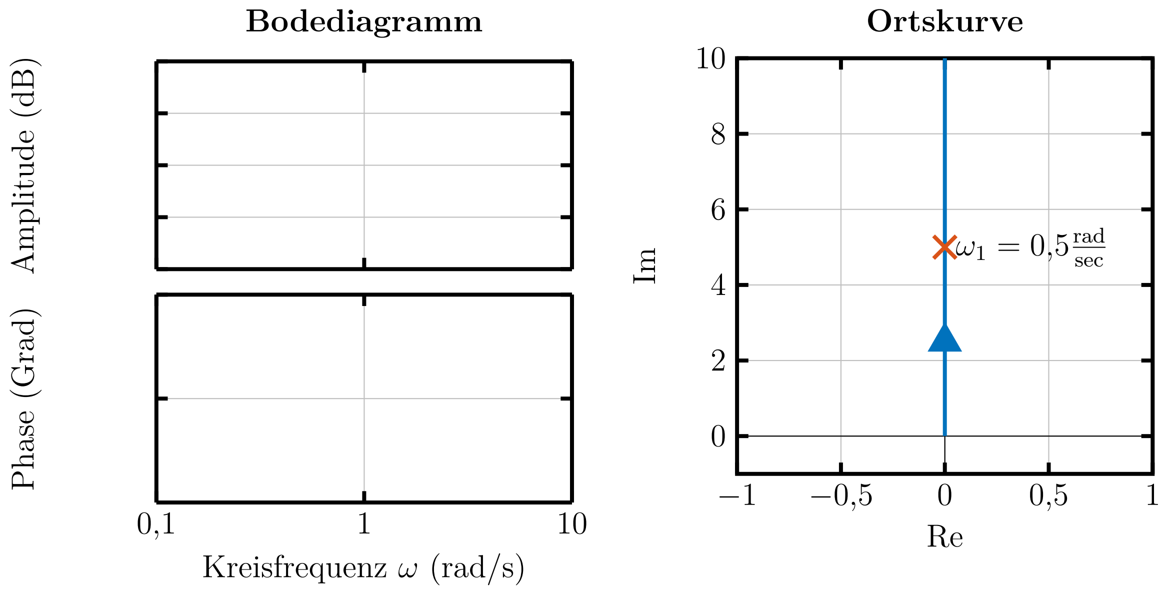
a) Gegeben ist die Ortskurve eines Systems. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems? Stellen Sie die Übetragungsfunktion des Systems auf. Bestimmen Sie hierfür auch alle Zeitkonstanten und Verstärkungen. **Skizzieren Sie grob** das Bodediagramm zwischen den Frequenzen $\omega = 0{,}01\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ und $\omega = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ der vorliegenden Ortskurve. Die Hauptmerkmale müssen dabei erkennbar sein!



b) Skizzieren Sie grob die Ortskurve aus dem vorliegenden Bodediagramm. Bestimmen Sie hierfür zuerst die drei Punkte auf der Ortskurve mit den Frequenzen $\omega = 0{,}1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}, 1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}, 10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems?



c) Gegeben ist die Ortskurve eines Systems. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems? Stellen Sie die Übetragungsfunktion des Systems auf. Bestimmen Sie hierfür auch alle nötigen Zeitkonstanten und Verstärkungen. **Skizzieren Sie grob** das Bodediagramm zwischen den Frequenzen $\omega = 0{,}1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ und $\omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ der vorliegenden Ortskurve. Die Hauptmerkmale müssen dabei erkennbar sein!



Aufgabe 6: Wurzelortskurve (17 Punkte)

Mit Hilfe der Wurzelortskurve soll ein geschlossener Regelkreises bezüglich Stabilität und Schwingungsfähigkeit für verschiedene Reglerverstärkungen K_R untersucht werden. Dazu sind die Übertragungsfunktionen einer Regelstrecke $G_S(s)$ und eines Reglers $G_R(s)$ gegeben:

$$G_S(s) = \frac{(s+2)}{(s+a)(s+b)(s+5)}, \quad G_R(s) = K_R$$

a) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve für $a = 0$ und $b = -1$ möglichst genau. Berechnen Sie dazu die Asymptotenwinkel ψ_i und den Asymptotenschnittpunkt s_A. Für eventuelle Verzweigungspunkte dürfen Sie vereinfachend annehmen, dass sie in der Mitte zwischen den entsprechenden Polen liegen.

b) Erklären Sie anhand der unter a) gezeichneten Wurzelortskurve, wie sich die Pole des geschlossenen Regelkreises bei Vergrößerung der Reglerverstärkung K_R bewegen und wie sich der geschlossene Regelkreis bezüglich Stabilität und Schwingungsfähigkeit bei kleinen und großen Verstärkungen verhält. Hierbei soll stets $K_R > 0$ gelten.

c) Machen Sie eine qualitative Aussage (es sind keine Berechnungen erforderlich!) dazu, wie sich die Stabilität des geschlossenen Regelkreises bei gleichbleibendem a und veränderlichem b verhält.

   Fall 1: $b = -1, ..., \infty$; Fall 2: $b = -1, ..., -\infty$.

d) Skizzieren Sie grob die WOK für den Fall, dass $a = 4.5$ und $b = -1$ gewählt wird.

Lösung:

Aufgabe 1: Kurzaufgaben (20 Punkte)

a) Untersuchung des Endwerts von Impulsantworten von Systemen **0. bis maximal 2. Ordnung** (4 Punkte):

1) Geben Sie 3 Übertragungsfunktionen mit unterschiedlicher Nennerordnung an deren Impulsantwort für $t \to \infty$ auf Null abfällt.
2) Geben Sie 2 Übertragungsfunktionen mit unterschiedlicher Nennerordnung an deren Impulsantwort $t \to \infty$ auf einem Endwert von 2 verbleibt.
3) Geben Sie 2 Übertragungsfunktionen mit unterschiedlicher Nennerordnung an deren Impulsantwort $t \to \infty$ gegen Unendlich strebt.

Antwort:

1) z.B. $G(s) = k$ (beliebige Konstante), $G(s) = \frac{1}{s+1}$, $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$
2) z.B. $G(s) = \frac{2}{s}$, $G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$
3) z.B. $G(s) = \frac{1}{s^2}$, $G(s) = \frac{1}{(s-1)}$

4

b) Für den Standardregelkreis gilt zwischen der Führungsgröße w und der Stellgröße u folgender Zusammenhang (3 Punkte):

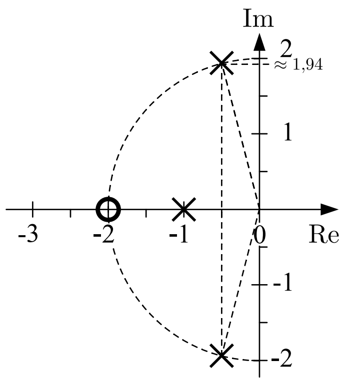
$$U(s) = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \cdot W(s)$$

Begründen Sie kurz anhand dieser Gleichung, warum es nicht sinnvoll ist, den Regler $G_R(s)$ dazu zu nutzen, nichtphasenminimale Nullstellen der Regelstrecke $G_S(s)$ zu kürzen, selbst wenn diese exakt bekannt wären.

Antwort:
Zur Kürzung müsste $G_R(s)$ instabile Pole haben. Selbst wenn sich im Produkt $G_R(s) \cdot G_S(s)$ die instabilen Pole und Nullstellen exakt kürzen würden (im Nenner der obigen Gleichung), bleiben die instabilen Pole im Faktor $G_R(s)$ (im Zähler der obigen Gleichung) erhalten. D.h. die Stellgröße würde exponentiell anwachsen bis die Stellgrößenbeschränkung erreicht ist und dann würde die Regelung versagen. 3

c) Im nachfolgenden Bild ist das Pol-Nullstellendigramm eines Systems dargestellt. Bearbeiten Sie dazu folgende Aufgaben (10 Punkte):

1) Geben Sie alle Pole und Nullstellen an.
2) Ist das System stabil und realisierbar (kurze Begründungen)?
3) Hat die Übertragungsfunktion globales P-, I-, oder D-Verhalten (kurze Begründung)?
4) Ermitteln Sie für das konjugiert komplexe Polpaar folgende Größen: Eckfrequenz ω_0, Dämpfungsmaß D und (näherungsweise) Eigenfrequenz ω_e.
5) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems unter der Annahme, dass dessen Verstärkung 5 beträgt?



Antwort:

1) Nullstelle: $n_1 = -2$. Pole: $p_{1,2} = -0{,}5 \pm 1,94i$, $p_3 = -1$.
2) Es ist stabil (keine Pole in der rechten Halbebene) und realisierbar (Anzahl Pole > Anzahl Nullstellen).
3) Es liegen keine Pole oder Nullstellen im Ursprung, daher liegt P-Verhalten vor.
4) Allgemein gilt: $p_{1,2} = -D\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-D^2}$. Die Eigenfrequenz ω_0 entspricht dem Radius eines Kreises durch die Pole:

$$\sqrt{\mathrm{Re}(p_{1,2})^2 + \mathrm{Im}(p_{1,2})^2} = \sqrt{D^2\omega_0^2 + \omega_0^2(1-D^2)} = \boxed{\omega_0 = 2} \text{ (aus Diagramm).}$$

Das Dämpfungsmaß wird aus dem Realteil berechnet. Für den Realteil gilt:

$$-D \cdot \omega_0 = -0{,}5 \text{ (aus Diagramm), d.h. mit } \omega_0 = 2 \Rightarrow \boxed{D = 0{,}25}$$

Die Eigenfrequenz entspricht dem Imaginärteil der Pole $\omega_e = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ und kann kann aus ω_0 und D berechnet oder aber auch im Diagramm abgelesen werden: $\boxed{\omega_0 \approx 1{,}94}$

5) Wegen $(s-p_1)(s-p_2) = s^2 + 2D\omega_0 + \omega_0^2$ lautet die Übertragungsfunktion (aufgrund der Verstärkung von 5 muss ein Faktor 10 hinzugefügt werden):

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s^2+s+4)} = \frac{10s+20}{s^3+2s^2+5s+4}$$

10

d) Folgende Systeme sollen gesteuert werden (3 Punkte):

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2} \cdot e^{-5s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s-2} \cdot e^{-5s}$$

1) Welches der Systeme kann gar nicht gesteuert werden und warum?
2) Geben Sie für das andere System die ideale und eine realisierbare Steuerung an?

Antwort:

1) System G_2 hat einen instabilen Pol, daher ist eine Steuerung nicht möglich (Pol kann nicht exakt gekürzt werden, zudem führen Anfangsbedingungen $\neq 0$ zu instabilem Verhalten unabhängig von der Steuerung).

2) Die ideale Steuerung invertiert G_1 exakt und ist nicht realisierbar ($m > n$) und zudem akausal (positive Totzeit):

$$U(s) = (s+2) \cdot e^{5s} \cdot W(s)$$

Die realisierbare Steuerung ignoriert die Totzeit, kürzt den Pol des Systems und wird realisierbar durch einen schnellen zusätzlichen Pol bei $1/T$:

$$U(s) = \frac{s+2}{1+Ts} \cdot W(s), \quad T \to 0$$

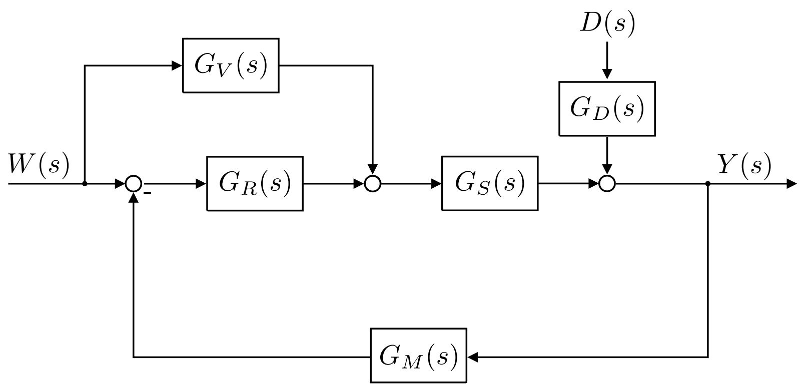
$\boxed{3}$

Aufgabe 2: Vorfilter und Vorsteuerung (19 Punkte)

Im Folgenden soll die Erweiterung eines Regelkreises um einen weiteren Freiheitsgrad untersucht werden. Dazu soll der Regelkreis jeweils mit einer Vorsteuerung und Vorfilterung erweitert werden.
Der Regelkreis besteht aus der Strecke $G_S(s)$, dem Regler $G_R(s)$ sowie einem Sensor $G_M(s)$. Des weiteren beeinflusst eine Ausgangsstörung $d(t)$ den Regelkreis. Die Störung wird durch eine weitere Übertragungsfunktion $G_D(s)$ beeinflusst. Der Sensor wird benötigt, um die Regelgröße zu messen. Es handelt sich um einen nicht idealen Sensor mit einer zunächst beliebigen Übertragungsfunktion $G_M(s) \neq 1$.

a) Zeichnen Sie das Blockschaubild des beschriebenen Regelkreises erweitert um eine Vorsteuerung.

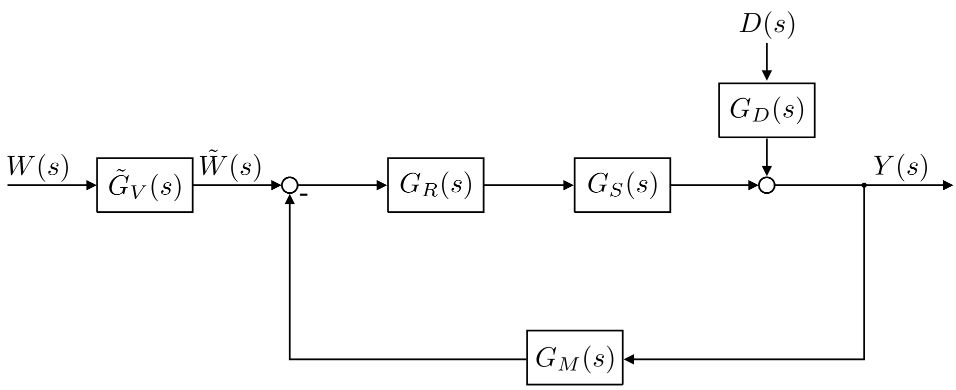
Antwort:



2

b) Zeichnen Sie das Blockschaubild des beschriebenen Regelkreises erweitert um eine Vorfilterung.

Antwort:



2

c) Prüfen Sie, ob für diese beiden Regelkreise weiterhin die Äquivalenz zwischen Vorsteuerung und Vorfilterung gilt. Berechnen Sie dazu zunächst die Führungsübertragungsfunktion der Ansätze. Bei der Berechnung darf auf das Argument der Funktionen verzichtet werden.

Antwort:
Zur besseren Übersicht wird im Folgenden das Argument (s) nicht notiert.

- Vorsteuerung:

$$Y = G_D D + G_S\left[G_V W + G_R\left(W - G_M Y\right)\right]$$
$$Y = G_D D + G_S G_V W + G_S G_R W - G_S G_R G_M Y$$
$$Y\left(1 + G_S G_R G_M\right) = G_D D + \left(G_S G_V + G_S G_R\right) W$$
$$Y = \frac{G_S G_V + G_S G_R}{1 + G_S G_R G_M} W + \frac{G_D}{1 + G_S G_R G_M} D$$
$$\boxed{G_W = \frac{G_S G_V + G_S G_R}{1 + G_S G_R G_M}}$$

- Vorfilterung:

$$Y = G_D D + G_S G_R\left[\tilde{G}_V W - G_M Y\right]$$
$$Y\left(1 + G_S G_R G_M\right) = G_S G_R \tilde{G}_V W + G_D D$$
$$Y = \frac{G_S G_R \tilde{G}_V}{1 + G_S G_R G_M} W + \frac{G_D}{1 + G_S G_R G_M} D$$
$$\boxed{G_W = \frac{G_S G_R \tilde{G}_V}{1 + G_S G_R G_M}}$$

- Gleichsetzen:

$$\frac{G_S G_R \tilde{G}_V}{1 + G_S G_R G_M} = \frac{G_S G_V + G_S G_R}{1 + G_S G_R G_M}$$
$$G_S G_R \tilde{G}_V = G_S G_V + G_S G_R$$
$$\boxed{G_V = G_R\left(\tilde{G}_V - 1\right)}$$
$$\boxed{\tilde{G}_V = 1 + \frac{G_V}{G_R}}$$

Da ein Ansatz in den Anderen umgerechnet werden kann, sind beide Ansätze äquivalent. 9

d) Die Übertragungsfunktionen seien nun definiert als $G_S(s) = \frac{2}{s(s+4)^2}$, $G_R(s) = K_R(s+3)$, $G_M(s) = \frac{1}{s+1}$ sowie $G_D(s) = \frac{s}{s^2+1}$.
Legen Sie nun einen Vorfilter $\tilde{G}_V(s)$ für diesen erweiterten Regelkreis aus. Dieser soll mögliche Nullstellen in der Führungsübertragungsfunktion kompensieren und dabei die Gesamtverstärkung unbeeinflusst lassen.

Antwort:

- Führungsverhalten $G_{\tilde{W}}(s)$ berechnen:

$$
\begin{aligned}
G_{\tilde{W}}(s) &= \frac{G_S(s)G_R(s)}{1+G_S(s)G_R(s)G_M(s)} \\
&= \frac{\frac{2K_R(s+3)}{s(s+4)^2}}{1+\frac{2K_R(s+3)}{s(s+4)^2}\frac{1}{(s+1)}} \\
&= \frac{\frac{2K_R(s+3)}{s(s+4)^2}}{\frac{s(s+4)^2(s+1)+2K_R(s+3)}{s(s+4)^2(s+1)}} \\
&= \frac{2K_R(s+3)s(s+4)^2(s+1)}{s(s+4)^2\left[s(s+4)^2(s+1)+2K_R(s+3)\right]} \\
&= \frac{2K_R(s+3)(s+1)}{s^4+9s^3+24s^2+(2K_R+16)s+6K_R}
\end{aligned}
$$

- Vorfilter auslegen:
  Nullstellen durch Filter wegkürzen sowie Verstärkung Filter $\tilde{G}_V(0) = 1$

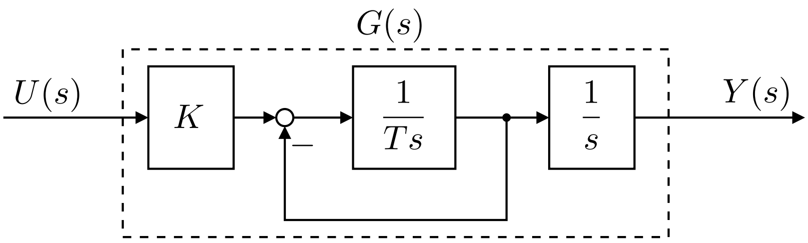
$$\boxed{\tilde{G}_V = \frac{3}{(s+3)(s+1)}}$$

$\boxed{6}$

$\boxed{\sum 19}$

Aufgabe 3: Laplace Transformation (21 Punkte)

Gegeben ist ein System $G(s)$ (siehe Bild).



a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.

Antwort:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{Vorwärtszweig}}{1 + \text{offener Regelkreis}} = \frac{K \cdot \frac{1}{Ts} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{Ts}} = \boxed{\frac{K}{1+Ts} \cdot \frac{1}{s}}$$ 3

b) Welche Bezeichnung passt zu $G(s)$? Wählen Sie eine der sechs Antwortmöglichkeiten und notieren Sie diese auf Ihrem Klausurbogen.

- P_2T_1-Glied
- IT_1-Glied
- DT_1-Glied
- PT_2-Glied
- P_2T_2-Glied
- I-Glied

Antwort: Es handelt sich um ein IT_1-Glied. 2

c) Welches globales Verhalten hat das System? Wählen Sie eine der sechs Antwortmöglichkeiten und notieren Sie diese auf Ihrem Klausurbogen.

- T-Verhalten
- PT_2-Verhalten
- D-Verhalten
- P-Verhalten
- NP-Verhalten
- I-Verhalten 1

Antwort:Ein IT_1-Glied hat globales I-Verhalten.

Das System $G(s)$ wird nun mit einem Impuls $u(t) = \delta(t)$ angeregt. Ziel ist es, das Ausgangssignal $y(t)$ in Abhängigkeit von K und T zu berechnen. Führen Sie dazu folgende Schritte durch:

d) Berechnen Sie das Laplace-transformierte Ausgangssignal $Y(s)$ und führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

Antwort:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \qquad \text{mit} \quad u(t) = \delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(s) = 1$$

$$Y(s) = G(s) \cdot 1 = \boxed{\frac{K}{1+Ts} \cdot \frac{1}{s}}$$ 1

Umstellen liefert (für die Weiterberechnung einfacher):

$$\boxed{Y(s) = \frac{\frac{K}{T}}{s+\frac{1}{T}} \cdot \frac{1}{s}} \tag{1}$$

mit den Polen $p_1 = -\frac{1}{T}$ und $p_2 = 0$.

Ansatz:

$$Y(s) = \frac{B_1}{s-p_1} + \frac{B_2}{s-p_2} = \frac{B_1}{s+\frac{1}{T}} + \frac{B_2}{s} \tag{2}$$ 2

Entweder: Bestimmung von B_1 und B_2 mittels Koeffizientenvergleich. Gleichsetzen von (1) und (2) liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{K}{T}}{s+\frac{1}{T}} \cdot \frac{1}{s} &= \frac{B_1}{s+\frac{1}{T}} + \frac{B_2}{s} \quad \Big| \cdot (s+\frac{1}{T}) \cdot s \\ \frac{K}{T} &= B_1 s + B_2(s+\frac{1}{T}) \quad \Big| \text{ umstellen} \\ \frac{K}{T} &= \frac{B_2}{T} + (B_1+B_2)s \end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten liefert:

$$\frac{K}{T} = \frac{B_2}{T} \qquad \Rightarrow \boxed{B_2 = K}$$

2

$$0 = B_1 + B_2 \;\Rightarrow \boxed{B_1 = -K}$$

2

Oder: Bestimmung von B_1 und B_2 durch Trick

$$B_i = [Y(s)(s-p_i)]\big|_{s=p_i} \quad \text{für } i = 1, 2$$

$$B_1 = \left[\frac{K}{T} \cdot \frac{1}{s}\right]\Bigg|_{s=-\frac{1}{T}} \Rightarrow \boxed{B_1 = -K}$$

(2)

$$B_2 = \left[\frac{K}{T} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]\Bigg|_{s=0} \Rightarrow \boxed{B_2 = K}$$

(2)

Einsetzen von B_1 und B_2 in (2) liefert

$$\boxed{Y(s) = -\frac{K}{s+\frac{1}{T}} + \frac{K}{s}}$$

2

e) Berechnen Sie das Ausgangssignal mithilfe der inversen Lapalce-Transformierten $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$

Antwort:

Nun kann die inverse Laplace Transformation durchgeführt werden

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = -K\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right\} + K\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$ $\boxed{1}$

Mit Hilfe der eigenen Formelsammlung mit Transformationstabelle ergibt sich folgende Lösung für $y(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right\} = e^{-\frac{t}{T}}$$

$\boxed{1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$\boxed{1}$

$$\boxed{y(t) = \sigma(t)\left(-K \cdot e^{-\frac{t}{T}} + K\right)} \tag{3}$$ $\boxed{1}$

$\sigma(t)$ ist hier nötig, da $y(t) = 0$ für $t < 0$

f) Berechnen Sie den Endwert von $y(t)$.

Antwort: Entweder über Endwertsatz

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{1+Ts} = \boxed{K}$$

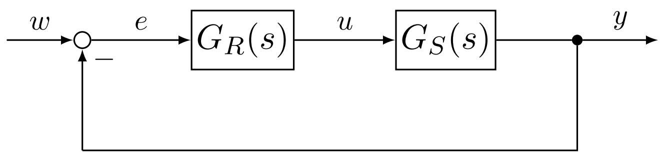
Oder Ablesen von (3): Die e-Funktion klingt für $t \to \infty$ ab, somit bleibt K als Endwert übrig.

$\boxed{2}$

$\boxed{\sum 21}$

Aufgabe 4: Kompensationsreglerentwurf (20 Punkte)

Folgender Regelkreis wird in dieser Aufgabe betrachtet:



Die Strecke $G_S(s)$ besitzt folgende Übertragungsfunktion.

$$G_S(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

a) Berechnen Sie die Pole der Regelstrecke. Besitzt die gegebene Regelstrecke stabiles oder instabiles Verhalten? Ist die Regelstrecke phasenminimal oder nicht phasenminimal?
Antwort:
Die Pole der Regelstrecke lassen sich anhand des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion berechnen. Für die Pole muss gelten:

$$s^2 + 2s + 1 \overset{!}{=} 0$$

Die Pole lassen sich mit der binomischen Formel berechnen. Es ergibt sich ein Doppelpol bei:

$$s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = -1$$

Beide Pole besitzen einen negativen Realteil. Damit besitzt die Regelstrecke **stabiles Verhalten** .

Da die Übertragungsfunktion der Regelstrecke keine Nullstellen besitzt ist die Regelstrecke **phasenminimal**. 2

b) Der Regler $G_R(s)$ soll nach dem Kompensationsverfahren ausgelegt werden. Geben sie die allgemeine Formel für den Regler $G_R(s)$ an wenn das Führungsverhalten $G_w(s)$ gefordert ist.
Antwort:
Das Führungsverhalten wird durch den geschlossenen Regelkreis vorgegeben. Dieses lässt sich wie folgt berechnen:

$$G_w(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}$$

Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich die Übertragungsfunktion des Regler in Abhängigkeit der Regelstrecke sowie des gewünschten Führungsverhaltens:

$$G_R(s) = \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))}$$

1

c) Welches Führungsverhalten wird für einen perfekten Regler gefordert? Warum ist diese Regelung nicht umsetzbar?
Antwort:
Für eine perfekte Regelung wird $G_w(s) = 1$ gefordert. Es bedeute, dass sich die Führungsgröße direkt auf die Ausgangsgröße überträgt.

Die Regelung ist nicht umsetzbar, weil diese einen Regler $G_R(s) \to \infty$ benötigen würde.

$$G_R(s) = \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))} \overset{G_w(s)=1}{=} \frac{1}{G_S(s)\,(1-1)} \to \infty$$

2

d) Jetzt werden konkrete gewünschte Führungsverhalten vorgegeben. Berechnen Sie den Regler $G_R(s)$ für folgende Führungsverhalten:

$$G_{w,1}(s) = \frac{1}{2s+1} \qquad G_{w,2}(s) = \frac{1}{\frac{1}{4}s^2 + s + 1} \qquad G_{w,3}(s) = \frac{1}{\frac{1}{8}s^3 + \frac{6}{8}s^2 + \frac{12}{8}s + 1}$$

Antwort:
Mit der allgemeinen Formel aus Aufgabenteil b) lassen sich die Regler wie folgt berechnen:

$$G_{R,1}(s) = \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))} = \frac{\frac{1}{2s+1}}{\frac{1}{s^2+2s+1}\left(1 - \frac{1}{2s+1}\right)}$$
$$= \frac{s^2+2s+1}{2s+1-1} = \boxed{\frac{s^2+2s+1}{2s}}$$

$$G_{R,2}(s) = \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{4}s^2+s+1}}{\frac{1}{s^2+2s+1}\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{4}s^2+s+1}\right)}$$
$$= \frac{s^2+2s+1}{\frac{1}{4}s^2+s+1-1} = \boxed{\frac{s^2+2s+1}{\frac{1}{4}s^2+s}}$$

$$G_{R,3}(s) = \frac{G_w(s)}{G_S(s)\,(1 - G_w(s))} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{8}s^3+\frac{6}{8}s^2+\frac{12}{8}s+1}}{\frac{1}{s^2+2s+1}\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{8}s^3+\frac{6}{8}s^2+\frac{12}{8}s+1}\right)}$$
$$= \frac{s^2+2s+1}{\frac{1}{8}s^3+\frac{6}{8}s^2+\frac{12}{8}s+1-1} = \boxed{\frac{s^2+2s+1}{\frac{1}{8}s^3+\frac{6}{8}s^2+\frac{12}{8}s}}$$

7

e) Welche der berechneten Regler sind realisierbar? Welche der berechneten Regler besitzen sprungfähiges Verhalten? Welche der berechneten Regler besitzen globales I-Verhalten? Erklären Sie, warum sich die Einträge für das globale I-Verhalten ergeben. (Hinweis: erstellen Sie dazu eine Tabelle mit den 3 Reglern und den 3 Eigenschaften. Vgl. Tabelle 1.)

	realisierbar	sprungfähig	I-Anteil
$G_{R,1}(s)$	nein	ja	ja
$G_{R,2}(s)$	ja	ja	ja
$G_{R,3}(s)$	ja	nein	ja

Antwort:
Alle berechneten Regler besitzen ein globales I-Verhalten. Dies liegt daran, dass alle gewünschten Führungsverhalten die Verstärkung $K = 1$ besitzen. Dies bedeutet, dass keine bleibende Regelabweichung vorhanden sein soll. Um dieses Ziel zu erreichen, muss ein der offene Regelkreis einen I-Anteil besitzen. Da die Strecke keinen I-Anteil besitzt, muss dieser durch den Regler eingeführt werden. 6

f) Die Regelstrecke wird nun geändert. Sie besitzt folgende Übertragungsfunktion:

$$\tilde{G}_S(s) = \frac{1-2s}{1+2s}$$

Was muss bei dieser Regelstrecke bei der Vorgabe eines gewünschten Führungsverhaltens beachtet werden? Geben sie ein mögliches Führungsverhalten vor.
Antwort:
Die Regelstrecke ist nicht phasenminimal. Sie besitzt eine instabile Nullstelle. Diese darf nicht durch den Regler gekürzt werden, da der Regler ansonsten einen instabilen Pol besitzen würde. Dieser kann zu unendlich großen Stellgrößen führen. Deswegen muss dieses Verhalten beim Reglerentwurf hingenommen werden.

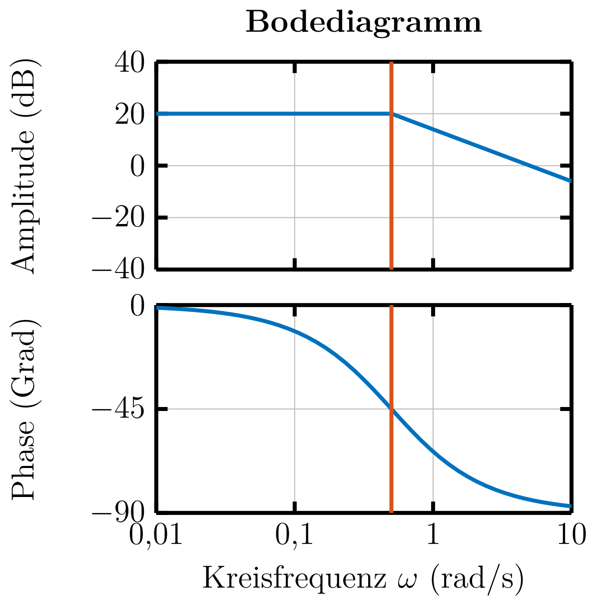
Um dies beim Regler zu berücksichtigen, wird im gewünschten Führungsverhalten ebenfalls die instabile Nullstelle gefordert. Eine mögliches gewünschtes Führungsverhalten sieht wie folgt aus:

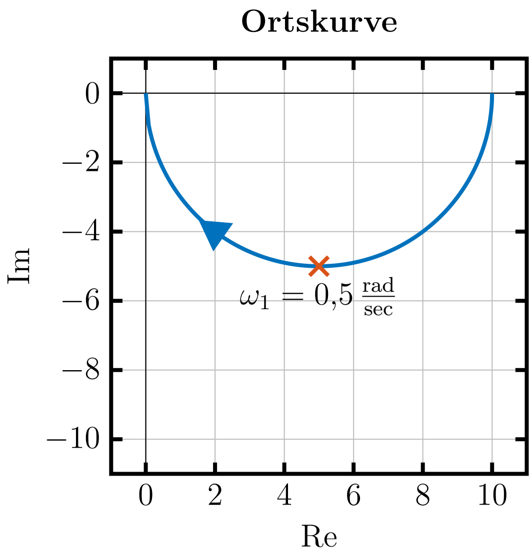
$$\tilde{G}_w(s) = G_{w,1} \cdot (1-2s) = \frac{1-2s}{2s+1}$$

2

Aufgabe 5: Bodediagramme und Ortskurven (23 Punkte)

a) Gegeben ist die Ortskurve eines Systems. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems? Stellen Sie die Übetragungsfunktion des Systems auf. Bestimmen Sie hierfür auch alle Zeitkonstanten und Verstärkungen. **Skizzieren Sie grob** das Bodediagramm zwischen den Frequenzen $\omega = 0{,}01\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ und $\omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ der vorliegenden Ortskurve. Die Hauptmerkmale müssen dabei erkennbar sein!





4

Antwort:

Bei dem System handelt es sich um ein PT_1 System. 1

Die Übertragungsfunktion des Systems lautet:

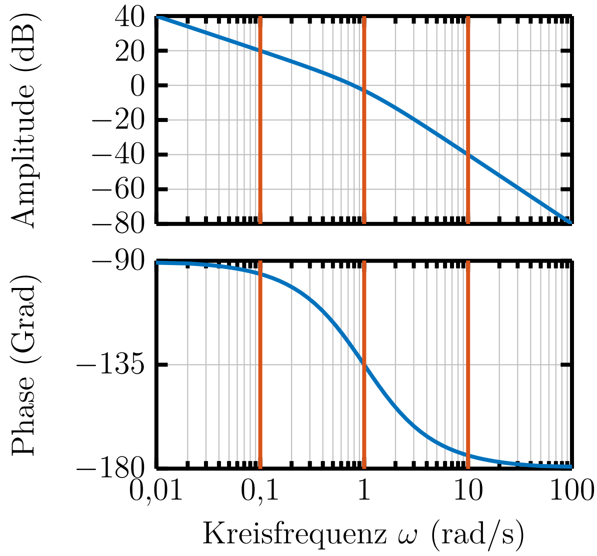
$$G(s) = \frac{10}{(1 + 2s)}.$$ 1

$K = 10$, da die Ortskurve für $s \to 0$ bei 10 beginnt.

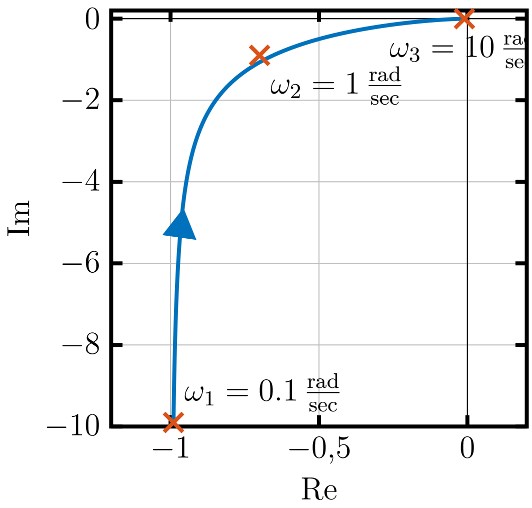
$T = 2$, da Eckfrequenzen bei $\omega = 0{,}5\frac{\text{rad}}{\text{sec}} = \frac{1}{T}$. 2

b) Skizzieren Sie grob die Ortskurve aus dem vorliegenden Bodediagramm. Bestimmen Sie hierfür zuerst die drei Punkte auf der Ortskurve mit den Frequenzen $\omega = 0{,}1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}, 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}, 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems?

Bodediagramm



Ortskurve



2

__**Antwort**__:

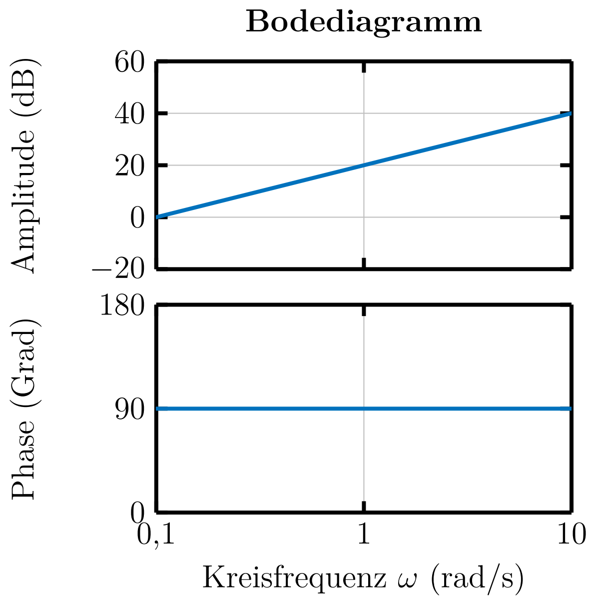
$\omega_1 = 0{,}1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$:
$\text{A} \approx 20\,\text{dB} \hat{=} 10$
$\varphi \approx -95° \hat{=} \frac{-90}{360} \cdot 2 \cdot \pi = -1.65$
$\rightarrow 10 \cdot e^{-1.65 \cdot i} \approx -1 - 10 \cdot i$

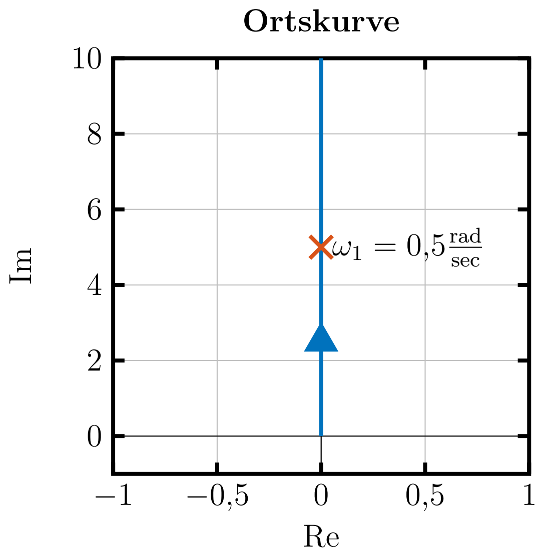
$\omega_2 = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$:
$\text{A} \approx 0\,\text{dB} \hat{=} 1$
$\varphi \approx -135° \hat{=} \frac{-135}{360} \cdot 2 \cdot \pi = -2.36$ 6
$\rightarrow 1 \cdot e^{-2.36 \cdot i} \approx -0.7 - 0.7 \cdot i$

$\omega_3 = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$:
$\text{A} \approx -40\,\text{dB} \hat{=} 0.01$
$\varphi \approx -175° \hat{=} \frac{-175}{360} \cdot 2 \cdot \pi = -3.05$
$\rightarrow 0.01 \cdot e^{-3.05 \cdot i} \approx 0 + 0 \cdot i$

Es handelt sich um ein IT_1 System. 1

c) Gegeben ist die Ortskurve eines Systems. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems? Stellen Sie die Übetragungsfunktion des Systems auf. Bestimmen Sie hierfür auch alle nötigen Zeitkonstanten und Verstärkungen. **Skizzieren Sie grob** das Bodediagramm zwischen den Frequenzen $\omega = 0{,}1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ und $\omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ der vorliegenden Ortskurve. Die Hauptmerkmale müssen dabei erkennbar sein!





3

Antwort:

Bei dem System handelt es sich um ein D-System. 1

Die Übertragungsfunktion des Systems lautet:

$$G(s) = 10 \cdot s.$$ 1

$K = 10$, da bei $\omega_1 = 0{,}5\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$:

$5 \cdot i \hat{=} K \cdot i \cdot 0{,}5$

$\rightarrow K = 10$ 1

$\sum 23$

Aufgabe 6: Wurzelortskurve (17 Punkte)

Mit Hilfe der Wurzelortskurve soll ein geschlossener Regelkreises bezüglich Stabilität und Schwingungsfähigkeit für verschiedene Reglerverstärkungen K_R untersucht werden. Dazu sind die Übertragungsfunktionen einer Regelstrecke $G_S(s)$ und eines Reglers $G_R(s)$ gegeben:

$$G_S(s) = \frac{(s+2)}{(s+a)(s+b)(s+5)}, \quad G_R(s) = K_R$$

a) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve für $a = 0$ und $b = -1$ möglichst genau. Berechnen Sie dazu die Asymptotenwinkel ψ_i und den Asymptotenschnittpunkt s_A. Für eventuelle Verzweigungspunkte dürfen Sie vereinfachend annehmen, dass sie in der Mitte zwischen den entsprechenden Polen liegen.

Antwort:
Asymptotenwinkel:

$$G_0 = \frac{K_R(s+2)}{s(s-1)(s+5)} \Rightarrow n = 3, m = 1: \ n_1 = -2, p_1 = 0, p_2 = +1, p_3 = -5$$

$$\psi_l = (1+2l) \cdot \frac{180°}{n-m} \Rightarrow \psi_l = (1+2l) \cdot \frac{180°}{3-1} = (1+2l) \cdot 90°$$

mit: $l = 0, 1 \Rightarrow \boxed{\psi_0 = 90°, \ \psi_1 = 270°}$

Asymptotenschnittpunkt:

$$s_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m} \Rightarrow s_A = \frac{1-5+0-(-2)}{3-1} \Leftrightarrow \boxed{s_A = -1}$$

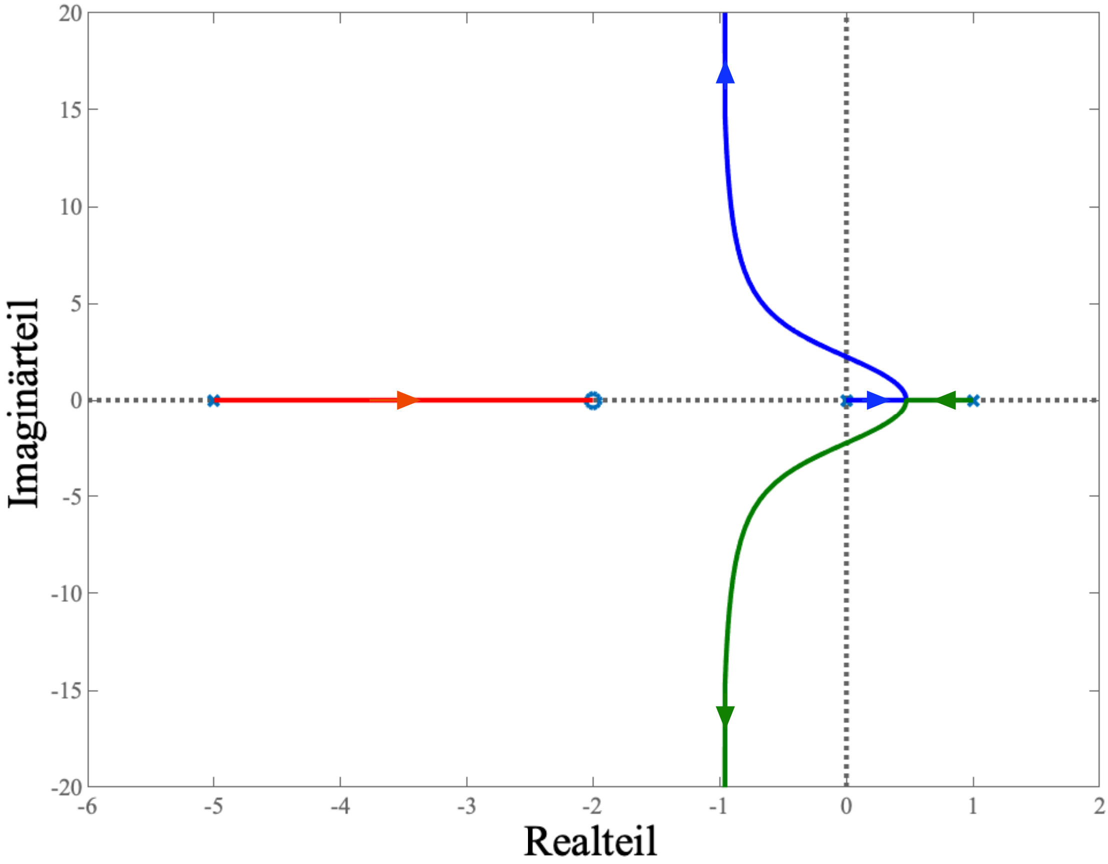
8

b) Erklären Sie anhand der unter a) gezeichneten Wurzelortskurve, wie sich die Pole des geschlossenen Regelkreises bei Vergrößerung der Reglerverstärkung K_R bewegen und wie sich der geschlossene Regelkreis bezüglich Stabilität und Schwingungsfähigkeit bei kleinen und großen Verstärkungen verhält. Hierbei soll stets $K_R > 0$ gelten.

Antwort:
Für kleine Verstärkungen ist der Regelkreis instabil (Pol bei +1 ist noch nicht in die linke Halbebene gewandert) und nicht schwingungsfähig (alle Pole liegen auf der reellen Achse). Für größere Verstärkungen verlassen die Pole der Regelstecke bei 0 und +1 die reelle Achse, der Regelkreis wird schwingungsfähig. Wenn die Verstärkung noch weiter aufgedreht wird, wird der Regelkreis stabil (der instabile und der grenzsstabile Pol der Strecke sind in der linken Halbebene und gehen bei -1 gegen unendlich). Obwohl die Dämpfung für große K_R beliebig klein werden kann (Imaginärteile beliebig groß), bleibt der Regelkreis stabil, da der Realteil der Pole nicht größer als -1 werden kann. 5

c) Machen Sie eine qualitative Aussage (es sind keine Berechnungen erforderlich!) dazu, wie sich die Stabilität des geschlossenen Regelkreises bei gleichbleibendem a und veränderlichem b verhält.

Fall 1: $b = -1, ..., \infty$; Fall 2: $b = -1, ..., -\infty$.



Antwort:
Fall 1: Bei größer werdendem b wird der geschlossene Regelkreis bei kleineren Werten von K_R stabil. Ab dem Fall von $b > 0$ ist der geschlossene Regelkreis für jeden Wert von $K_R > 0$ stabil.

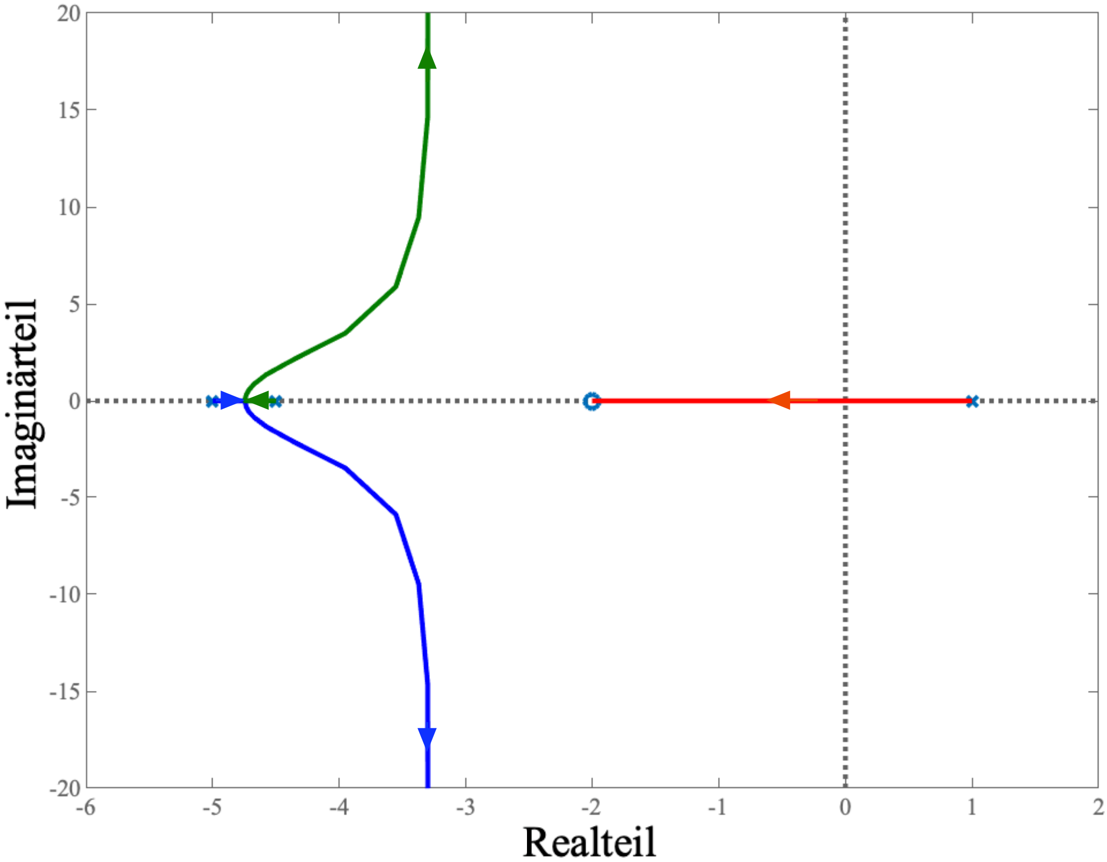
Fall 2: Bei kleiner werdendem b wird der geschlossene Regelkreis erst bei größeren Werten von K_R stabil, bis zu dem Fall ab dem der geschlossene Regelkreis für beliebige Werte von K_R instabil bleibt. 2

d) Skizzieren Sie grob die WOK für den Fall, dass $a = 4.5$ und $b = -1$ gewählt wird.

Antwort:

2

$\sum$ 17


20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
Imaginärteil
Realteil