Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

28. März 2007

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	15	30	25	30	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Unter welchen Voraussetzungen ist sichergestellt, dass unter Annahme eines stabilen Reglerentwurfs der Regelfehler bei einer rampenförmigen Führungsgröße für $t \to \infty$ gegen Null strebt?

- ☐ Wenn nur die Regelstrecke einen I-Anteil aufweist (globales I-Verhalten).
- ☐ Wenn sowohl die Regelstrecke als auch der Regler einen I-Anteil aufweisen.
- ☐ Wenn nur der Regler einen I-Anteil aufweist (z.B. PI- oder PID-Regler).

b) Unter welchen möglichen Antworten versteht man einen stabilen Regelkreis?

- ☐ Wenn nach einer endlichen Erregung durch eine Führungsgröße die Regelgröße endlich bleibt.
- ☐ Wenn nach einer endlichen Erregung durch eine Führungsgröße der Regelfehler Null wird.
- ☐ Wenn nach einer endlichen Erregung durch eine Störgröße die Regelgröße endlich bleibt.

c) Welche Aussagen zur Laplace-Transformation sind richtig, um den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ zu berechnen?

- ☐ Anstelle der Faltung im Zeitbereich muss man lediglich eine Multiplikation im Bildbereich durchführen.
- ☐ Anstelle der Faltung im Bildbereich muss man lediglich eine Multiplikation im Zeitbereich durchführen.
- ☐ Die Laplace-Transformation vom Zeit- in den Bildbereich ist eine lineare Transformation.

d) Welche Aussagen zur Wurzelortskurve sind richtig?

- [ ] Die Pole des geschlossenen Regelkreises sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.
- [ ] Die WOK sind die Orte in der s-Ebene, wo die Pole des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit der Reglerparameter liegen können.
- [ ] Die WOK sind die Orte in der s-Ebene, wo die Pole des offenen Regelkreises in Abhängigkeit der Reglerparameter liegen können.

e) Wie bezeichnet man „Steuerung“ in englischer Sprache?

- [ ] Closed-loop control.
- [ ] Feedforward control.
- [ ] Feedback control.

f) Was versteht man unter einem **zeitinvarianten** System?

- [ ] Die Eigenschaften des Systems bleiben über der Zeit unverändert.
- [ ] Die Systemeigenschaften ändern sich mit der Zeit, z.B. durch Verschleiß.
- [ ] Zeitinvariant bedeutet, dass das System dynamisch ist, d.h. es wird durch eine Differenzialgleichung beschrieben.

g) Wodurch ist sichergestellt, dass die Regelgröße $y(t)$ der Führungsgröße $w(t)$ möglichst gut folgt?

- [ ] Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst klein sein.
- [ ] Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst gleich Eins sein.
- [ ] Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst groß sein.

h) Ein System bestehend aus einer Masse und einer Feder wird beschrieben durch:

- [ ] Eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung.
- [ ] Eine homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung.
- [ ] Eine lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung.

i) Was ist ein Lag-Glied?

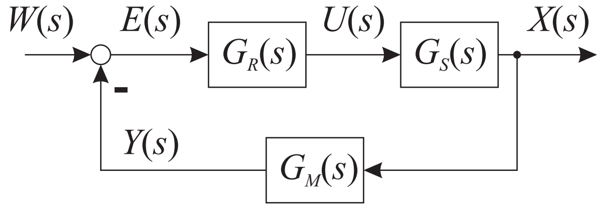
- [ ] Ein phasenabsenkendes Übertragungsglied.
- [ ] Wird verwendet, um den Phasenrand zu vergrößern.
- [ ] Ein Übertragungsglied, welches den Amplitudengang bei niedrigen Frequenzen anhebt.

j) Was gilt für Polstellen einer Übertragungsfunktion?

- [ ] Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System phasenminimal ist.
- [ ] Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System schwingungsfähig ist.
- [ ] Die Lage der Polstellen ist entscheidend für die Stabilität der Übertragungsfunktion.

Aufgabe 2: Reglerentwurf

Der dargestellte Regelkreis besteht aus einem Regler $G_R(s)$, einer Strecke $G_S(s)$ und einem Messglied $G_M(s)$.



Das Übertragungsverhalten der **Strecke** wird durch die folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 3x(t) = 2u(t)\ , \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = 0$$

Das Übertragungsverhalten des **Messglieds** wird durch die folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$\dot{y}(t) + y(t) = x(t)\ , \quad y(0) = 0$$

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen für die Strecke $G_S(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$ und für das Messglied $G_M(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ aus den oben stehenden Vorgaben.

b) Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ für einen P-Regler mit zunächst variabler Reglerverstärkung $G_R(s) = K_P$.

Hinweis: Für den Fall, dass Sie **nicht** in der Lage waren, die Führungsübertragungsfunktion aufzustellen, rechnen Sie bitte mit der folgenden Führungsübertragungsfunktion weiter:

$$\boxed{G_W(s) = \frac{3K_P \cdot (1+s)}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2 + 3K_P}}$$

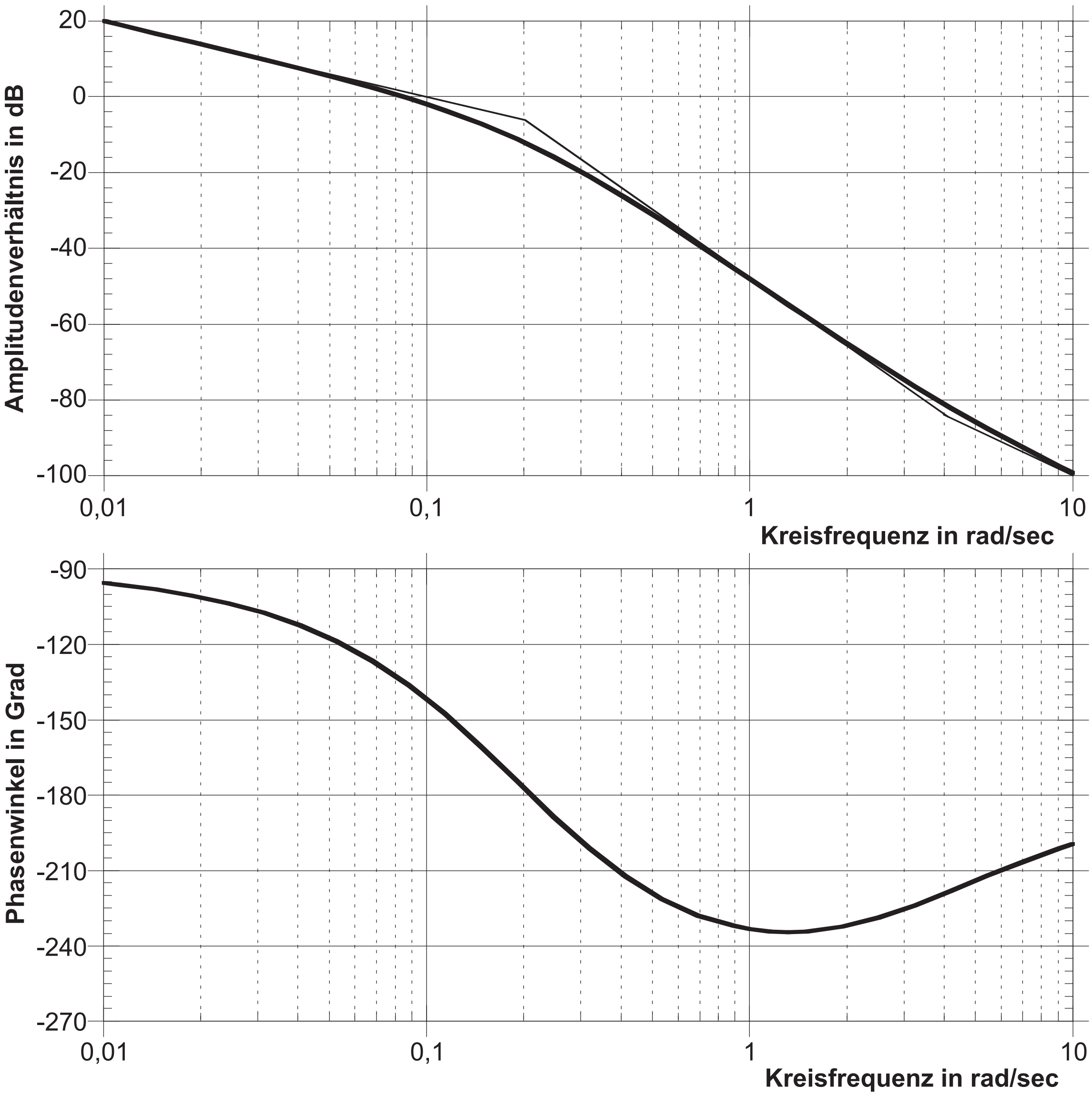
c) Berechnen Sie unter Zuhilfenahme des Hurwitz-Kriteriums den zulässigen Wertebereich der Reglerverstärkung K_P, für den der geschlossene Regelkreis stabil ist.

d) Berechnen Sie den stationären Endwert der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises $h(t \to \infty)$ **und** die bleibende Regeldifferenz bei einer Reglerverstärkung von $K_P = 1$.

e) Begründen Sie, warum eine bleibende Regeldifferenz vorliegt **und** beschreiben Sie, durch welche mögliche Veränderung diese bleibende Regeldifferenz vermieden werden kann. **(Keine Rechnung notwendig!)**

Aufgabe 3: Systemidentifikation und Stabilität (Frequenzgang)

Gegeben ist der nachfolgend dargestellte Frequenzgang einer Regelstrecke $G_S(s)$.



a) Welches Verhalten der Sprungantwort für $h(t \to \infty)$ und $h(t \to 0)$ lässt sich aus dem Frequenzgang ableiten?

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke $G_S(s)$.

c) Ermitteln Sie die Amplitudenreserve A_r in dB und die Phasenreserve unter der Annahme, dass ein P-Regler $G_R(s) = 1$ verwendet wird. Ist der geschlossene Regelkreis mit diesem Regler stabil?

d) Um eine gute Dämpfung zu erhalten, soll die Phasenreserve mindestens 30° betragen. Um wie viel dB darf die Reglerverstärkung höchstens verändert werden, um diese Bedingung einzuhalten?

Aufgabe 4: Konstruktion einer Wurzelortskurve

Für einen gegebenen offenen Regelkreis mit der Übertragungsfunktion:

$$G_0(s) = K \cdot \frac{s}{(s+8)\cdot(s+3)^2}$$

soll die Wurzelortskurve konstruiert werden.

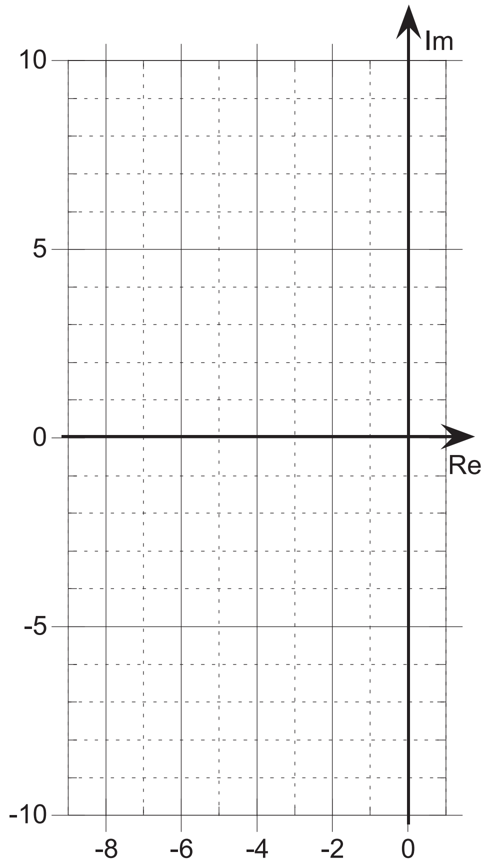
a) Geben Sie die Pole und Nullstellen von $G_0(s)$ an. Ist der offene Regelkreis stabil?

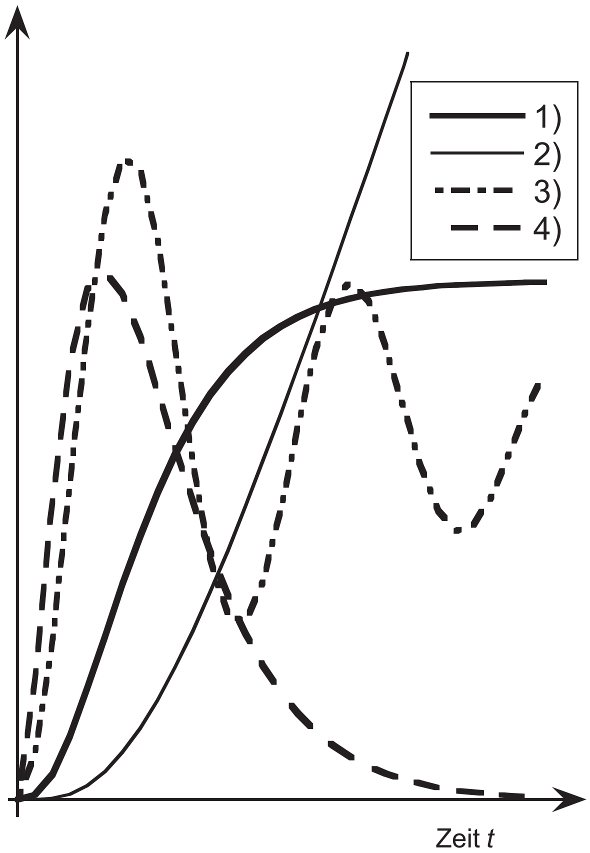
b) Welche der unten dargestellten Zeitverläufe stellen die Sprung- und die Rampenantwort von $G_0(s)$ dar. **Begründen** Sie ihre Wahl!

c) Berechnen Sie die Asymptotenwinkel Ψ_l, den Asymptotenschnittpunkt s_A und die Verzweigungspunkte s_{vi} der Wurzelortskurve.

d) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve in das vorbereitete Diagramm. Tragen Sie alle zuvor berechneten Größen ein. Sind alle berechneten Verzweigungspunkte gültig?

e) Kann der geschlossene Regelkreis durch die Wahl einer Verstärkung $K > 0$ instabil werden? In welchen Bereichen der Wurzelortskurve kann der geschlossene Regelkreis schwingen. Wie verhält sich die Dämpfung der Schwingung mit zunehmendem K?





Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Unter welchen Voraussetzungen ist sichergestellt, dass unter Annahme eines stabilen Reglerentwurfs der Regelfehler bei einer rampenförmigen Führungsgröße für $t \to \infty$ gegen Null strebt?

- [ ] Wenn nur die Regelstrecke einen I-Anteil aufweist (globales I-Verhalten).
- [x] Wenn sowohl die Regelstrecke als auch der Regler einen I-Anteil aufweisen.
- [ ] Wenn nur der Regler einen I-Anteil aufweist (z.B. PI- oder PID-Regler).

b) Unter welchen möglichen Antworten versteht man einen stabilen Regelkreis?

- [x] Wenn nach einer endlichen Erregung durch eine Führungsgröße die Regelgröße endlich bleibt.
- [ ] Wenn nach einer endlichen Erregung durch eine Führungsgröße der Regelfehler Null wird.
- [x] Wenn nach einer endlichen Erregung durch eine Störgröße die Regelgröße endlich bleibt.

c) Welche Aussagen zur Laplace-Transformation sind richtig, um den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ zu berechnen?

- [x] Anstelle der Faltung im Zeitbereich muss man lediglich eine Multiplikation im Bildbereich durchführen.
- [ ] Anstelle der Faltung im Bildbereich muss man lediglich eine Multiplikation im Zeitbereich durchführen.
- [x] Die Laplace-Transformation vom Zeit- in den Bildbereich ist eine lineare Transformation.

d) Welche Aussagen zur Wurzelortskurve sind richtig?

- [x] Die Pole des geschlossenen Regelkreises sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.
- [x] Die WOK sind die Orte in der s-Ebene, wo die Pole des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit der Reglerparameter liegen können.
- [ ] Die WOK sind die Orte in der s-Ebene, wo die Pole des offenen Regelkreises in Abhängigkeit der Reglerparameter liegen können.

e) Wie bezeichnet man „Steuerung“ in englischer Sprache?

- [ ] Closed-loop control.
- [x] Feedforward control.
- [ ] Feedback control.

f) Was versteht man unter einem **zeitinvarianten** System?

■ Die Eigenschaften des Systems bleiben über der Zeit unverändert.

□ Die Systemeigenschaften ändern sich mit der Zeit, z.B. durch Verschleiß.

□ Zeitinvariant bedeutet, dass das System dynamisch ist, d.h. es wird durch eine Differenzialgleichung beschrieben.

g) Wodurch ist sichergestellt, dass die Regelgröße $y(t)$ der Führungsgröße $w(t)$ möglichst gut folgt?

□ Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst klein sein.

■ Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst gleich Eins sein.

□ Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst groß sein.

h) Ein System bestehend aus einer Masse und einer Feder wird beschrieben durch:

□ Eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung.

□ Eine homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung.

■ Eine lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung.

i) Was ist ein Lag-Glied?

■ Ein phasenabsenkendes Übertragungsglied.

□ Wird verwendet, um den Phasenrand zu vergrößern.

■ Ein Übertragungsglied, welches den Amplitudengang bei niedrigen Frequenzen anhebt.

j) Was gilt für Polstellen einer Übertragungsfunktion?

□ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System phasenminimal ist.

■ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System schwingungsfähig ist.

■ Die Lage der Polstellen ist entscheidend für die Stabilität der Übertragungsfunktion.

$\boxed{\sum 15}$

Aufgabe 2: Reglerentwurf

a) **Übertragungsfunktionen** $G_S(s)$ und $G_M(s)$

$$G_S(s): \ \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 3x(t) = 2u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \ s^2X(s) + 2sX(s) + 3X(s) = 2U(s) \qquad \boxed{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_S(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2+2s+3}} \qquad \boxed{2}$$

$$G_M(s): \ \dot{y}(t) + y(t) = x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \ sY(s) + Y(s) = X(s) \qquad \boxed{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_M(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+1}} \qquad \boxed{2}$$

b) **Führungsübertragungsfunktion** $G_W(s)$ für $G_R(s) = K_P$

$$G_W(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_M(s)\cdot G_0(s)} \qquad \text{mit:} \quad G_0 = G_R(s)\cdot G_S(s) \qquad \boxed{2}$$

$$G_W(s) = \frac{\frac{2K_P}{s^2+2s+3}}{1 + \frac{1}{s+1}\cdot\frac{2K_P}{s^2+2s+3}} = \frac{2K_P\cdot(s+1)}{(s+1)\cdot(s^2+2s+3)+2K_P} \qquad \boxed{2+2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_W(s) = \frac{2K_P\cdot(s+1)}{s^3+3s^2+5s+3+2K_P}} \qquad \boxed{2}$$

c) **Wertebereich der Reglerverstärkung** K_P **nach Hurwitz**

Charakteristische Gleichung:

$$C(s) = \underbrace{1}_{c_3} s^3 + \underbrace{3}_{c_2} s^2 + \underbrace{5}_{c_1} s + \underbrace{3+2K_P}_{c_0} \qquad \boxed{1}$$

Bedingung 1: $c_i > 0 \ (i = 0, 1, ..., n)$.

$$3 + 2K_P > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_P > -\frac{3}{2}} \qquad \boxed{2}$$

Bedingung 2: $D_i > 0 \ (i = 0, 1, ..., n)$.

$$c_1\cdot c_2 - c_0\cdot c_3 > 0$$

$$5\cdot 3 - (3 + 2K_P)\cdot 1) > 0$$

$$-2K_P > -12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_P < 6} \qquad \boxed{2}$$

Wertebereich der Reglerverstärkung: $\boxed{-\frac{3}{2} < K_P < 6}$ $\boxed{1}$

d) **Stationärer Endwert und bleibende Regeldifferenz**

Stationärer Endwert:

$$h(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot W(s) \cdot G_W(s) \qquad \text{mit:} \quad W(s) = \frac{1}{s}\ , \quad K_P = 1$$

$$h(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{2K_P \cdot (s+1)}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3 + 2K_P}$$ 1

$$\Rightarrow \quad \boxed{h(t \to \infty) = \frac{2}{5} = 0{,}4}$$ 1

Bleibende Regeldifferenz bei Anregung mit einem Einheitssprung:

$$\Rightarrow \quad \boxed{e(t \to \infty) = 1 - h(t \to \infty) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6}$$ 1+1

e) **Grund für die bleibende Regeldifferenz und mögliche Auswege**

Da weder der Regler noch die Strecke einen I-Anteil besitzen, ist es nicht möglich, die Regeldifferenz zu vermeiden. Mögliche Auswege aus diesem Problem bieten der Einsatz eines Reglers mit I-Anteil (z.B. PI- oder PID-Regler) oder die Verwendung eines statischen Vorfilters. 2 2

$\sum 30$

Aufgabe 3: Systemidentifikation und Stabilität (Frequenzgang)

a) Es gilt $A(\omega \to 0) = \infty$ (globales I-Verhalten), damit strebt die Sprungantwort $h(t)$ für $t \to \infty$ ebenfalls gegen unendlich. 2

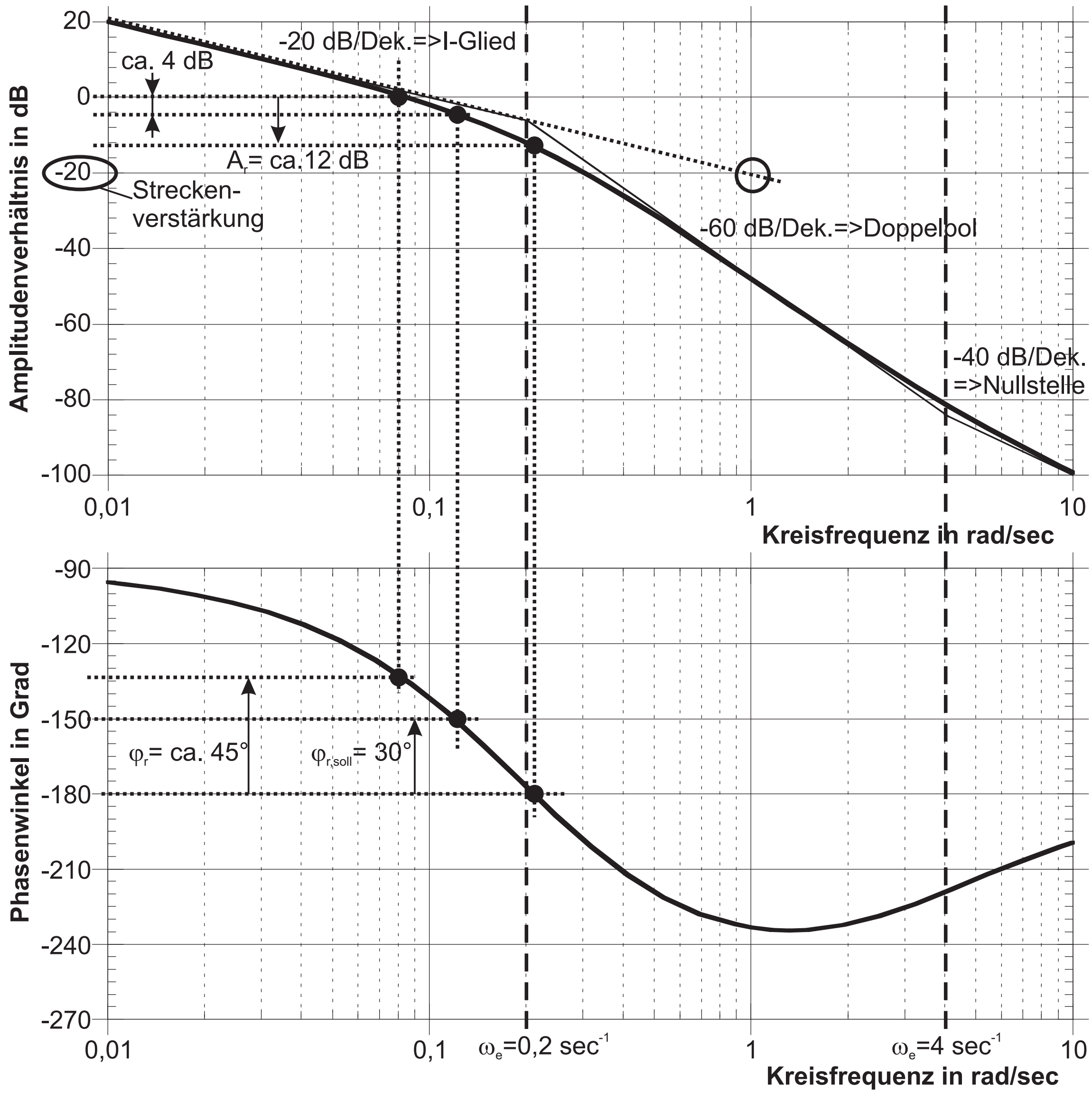
$A(\omega \to \infty) = -\infty\,\text{dB} = 0$, somit gilt $h(t = 0) = 0$, d.h. das System ist nicht sprungfähig. 2

b) Aufgrund der Steigung von -20 dB/Dek. für kleine Frequenzen liegt einfaches globales I-Verhalten vor, d.h. die Strecke hat einen Pol bei $s = 0$. 3

Bei $\omega_e = 0{,}2\,\text{sec}^{-1}$ fällt die Steigung um 40 dB/Dek., also liegt ein Doppelpol bei $s = -0{,}2$ vor. 4

Bei $\omega_e = 4\,\text{sec}^{-1}$ nimmt die Steigung um 20 dB/Dek. zu, bei $s = -4$ liegt also eine Nullstelle. 3

Durch Verlängern der niederfrequenten Asymptote liest man bei $\omega = 1\,\text{sec}^{-1}$ die Streckenverstärkung von -20 dB, also 0,1, ab. 2



Es ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$G_S(s) = 0{,}1 \cdot \frac{1+\frac{1}{4}s}{s\left(1+\frac{1}{0{,}2}s\right)^2} = 0{,}1 \cdot \frac{1+0{,}25s}{s\,(1+5s)^2} \quad \text{oder} \quad G_S(s) = 0{,}001 \cdot \frac{s+4}{s\,(s+0,2)^2}$$

c) Bei einer Reglerverstärkung von 1 (0 dB) ändert sich der Frequenzgang nicht, somit können Amplituden- und Phasenreserve direkt abgelesen werden (siehe auch vorseitige Abbildung):

$$A_r \approx 12\,\mathrm{dB} \qquad \text{und} \qquad \varphi_r \approx 45^\circ$$ 4

Der geschlossene Regelkreis ist **stabil**, weil die Amplitudenreserve $A_r > 0\,\mathrm{dB}$, bzw. die Phasenreserve $\varphi_r > 0^\circ$ ist. 1

d) Bei einer Phasenreserve von 30°, beträgt die zulässige Phasenverschiebung $\varphi = -150^\circ$. Bei dieser Phasenverschiebung beträgt das Amplitudenverhältnis etwa -4 dB. Die Reglerverstärkung kann also um ca. **4 dB** erhöht werden. 4

$\sum$ 25

Aufgabe 4: Konstruktion einer Wurzelortskurve

a) Der offene Regelkreis ist stabil, da alle Pole einen negativen Realteil haben: 1

$n = 3$ Pole: $p_1 = -8$ und $p_{2,3} = -3$

$m = 1$ Nullstelle: $n_1 = 0$ 2

b) Da die Nullstelle im Ursprung liegt, hat der offene Regelkreis globales D-Verhalten (differenzierendes Verhalten). D.h. die **Sprungantwort** klingt für $t \to \infty$ auf Null ab (da sich das Eingangssignal nicht mehr ändert). Also kommt hier nur **Kurve 4)** in Frage. 2

Ein **rampenförmiges Eingangssignal** ändert sich stets mit einer konstanten Geschwindigkeit, daher antwortet ein System mit differenzierendem Verhalten für $t \to \infty$ mit einem konstanten Endwert. Es kommen also nur 1) und 3) in Frage. Da der offene Regelkreis aber nur reelle Pole hat, also nicht schwingungsfähig ist, bleibt nur **Kurve 1)**. 3

c) Die Wurzelortskurve hat $n - m = 2$ Asymptoten:

$$\Psi_l = (1 + 2l) \cdot \frac{180°}{n - m}, \qquad = 0, 1 \ldots n - m - 1$$ 2

$$\Rightarrow \boxed{\Psi_0 = 90°}, \qquad \boxed{\Psi_1 = 270°\ (-90°)}$$

Für den Asymptotenschnittpunkt s_A erhält man:

$$s_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n - m} \Rightarrow s_A = \frac{-8 - 3 - 3 - 0}{3 - 1} \Rightarrow \boxed{s_A = -7}$$ 2

Die Verzweigungspunkte ergeben sich aus:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_v - p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s_v - n_i} = 0 \Rightarrow \frac{1}{s_v + 8} + \frac{1}{s_v + 3} + \frac{1}{s_v + 3} - \frac{1}{s_v} = 0$$

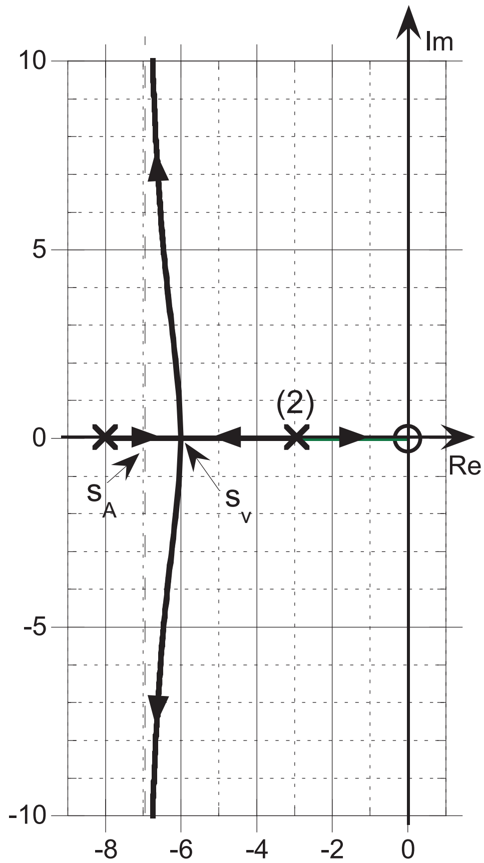
$$\Leftrightarrow \frac{s_v(s_v + 3) + 2s_v(s_v + 8) - (s_v + 3)(s_v + 8)}{s_v(s_v + 8)(s_v + 3)} = 0$$

$$\Rightarrow s_v(s_v + 3) + 2_v s(s_v + 8) - (s_v + 3)(s_v + 8) = 0 \Leftrightarrow s_v^2 + 4s_v - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow s_{v1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 12} \Leftrightarrow \boxed{s_{v1} = -6}, \; s_{v2} = 2$$ 4

d) Die Wurzelortskurve ist im nachfolgenden Diagramm dargestellt. Der Verzweigungspunkt $s_{v2} = 2$ ist nicht gültig, da der positive Teil der reellen Achse nicht Teil der Wurzelortkurve ist.

11



e) Die Äste der Ortskurve verbleiben stets in der linken Halbebene, somit ist immer Stabilität gewährleistet. Sobald die Äste die reelle Achse verlassen, ist der geschlossene Regelkreis schwingungsfähig. Die Dämpfung der Schwingung nimmt mit zunehmendem K ab (Winkel zwischen Polen und Ursprung nimmt zu). $\boxed{3}$

$\boxed{\sum 30}$