Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

7. Februar 2007

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	25	15	30	30	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Berechnen einer Sprungantwort

Gegeben ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines dynamischen Systems:

$$G(s) = \frac{5(s+2)}{(s-4)^2}$$

a) Berechnen Sie die Sprungantwort des Systems im Zeitbereich $h(t)$ durch Rücktransformation der Sprungantwort im Bildbereich $H(s)$:

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow H(s) = \frac{5(s+2)}{s(s-4)^2}$$

Führen Sie hierzu eine Partialbruchzerlegung durch, um die Korrespondenztabelle verwenden zu können.

b) Berechnen Sie den Endwert der Sprungantwort $h(t \to \infty)$ sowohl mit Hilfe des Endwertsatzes aus $H(s)$, als auch direkt aus der Lösung für $h(t)$ aus a).

c) In Teilaufgabe b) erhalten Sie mit den beiden Methoden unterschiedliche Ergebnisse. Was ist der Grund dafür? Welche Lösung ist richtig?

Aufgabe 2: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Unter welchen Voraussetzungen ist sichergestellt, dass der Regelfehler bei einem Führungssprung für $t \to \infty$ gegen Null strebt (stabiler Reglerentwurf vorausgesetzt)?

- ☐ Wenn die Regelstrecke einen I-Anteil aufweist (globales I-Verhalten).
- ☐ Wenn ein PD-Regler verwendet wird.
- ☐ Wenn der Regler einen I-Anteil aufweist (z.B. PI- oder PID-Regler).

b) Welche Systeme sind nicht phasenminimal?

- ☐ Systeme, die positive Nullstellen aufweisen.
- ☐ Systeme, die eine Totzeit enthalten.
- ☐ Systeme, die eine minimale Phasenverschiebung von weniger als -360° haben.

c) Warum wird der Amplitudenverlauf im Bodediagramm doppelt logarithmisch aufgetragen?

- ☐ Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Multiplikation der Amplitudengänge entspricht.
- ☐ Weil der Verlauf dann näherungsweise mit linearen Asymptoten dargestellt werden kann.
- ☐ Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.

d) Wie beeinflusst die Pollage eines Systems dessen dynamisches Verhalten?

- ☐ Systeme mit reellen Doppelpolen sind schwingungsfähig.
- ☐ Je weiter links die Pole des Systems liegen, um so langsamer ist es.
- ☐ Bei konjugiert komplexen Polen kann das System schwingen, die Dämpfung der Schwingung wird durch den Winkel zwischen einem der Pole und dem Koordinatenursprung bestimmt.

e) Welche Überlegungen sind beim Reglerentwurf zu beachten?

- ☐ Der Regler sollte möglichst hohe Ordnung haben (viele Pole und Nullstellen).
- ☐ Systeme mit Allpassverhalten sind generell nicht regelbar.
- ☐ Es dürfen niemals instabile Streckenpole mit Reglernullstellen gekürzt werden.

f) Für die Anwendung des **vereinfachten** Nyquist-Kriteriums ist Folgendes zu beachten:

- ☐ Man benötigt den Frequenzgang des offenen Regelkreises.
- ☐ Das Kriterium kann auch bei instabilen Systemen angewendet werden.
- ☐ Man benötigt den Frequenzgang des geschlossenen Regelkreises.

g) Was versteht man unter einem zeitvarianten System?

- ☐ Die Eigenschaften des Systems (z.B. die Verstärkung) ändern sich mit der Zeit.
- ☐ Ein solches System kann mit einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden.
- ☐ Zeitvariant bedeutet, dass das System schwingungsfähig ist.

h) Welche Eigenschaften hat die Wurzelortskurve?

- ☐ Sie ist immer symmetrisch zur reellen Achse.
- ☐ Sie beginnt stets in den Nullstellen und endet in den Polen des offenen Regelkreises.
- ☐ Alle Äste, die nicht in Nullstellen enden, streben gegen unendlich.

i) Welche Aussagen zur Rückkopplung sind richtig?

- ☐ Eine Störgrößenaufschaltung ist eine Rückkopplung.
- ☐ Die Rückwirkung der Regelgröße auf die Stellgröße bezeichnet man als Rückkopplung.
- ☐ Rückkopplung führt stets zur Instabilität.

j) Woran erkennt man, ob ein System globales P-, I- oder D-Verhalten hat?

- ☐ Am Verlauf der Sprungantwort für $t \to 0$.
- ☐ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to 0$.
- ☐ Daran, ob sich s^n bzw. s^{-n} Terme aus der Übertragungsfunktion ausklammern lassen, oder nicht.

Aufgabe 3: Stabilitätsdiagramm

Gegeben ist ein Standardregelkreis mit der Regelstrecke $G_S(s)$ und dem Regler $G_R(s)$:

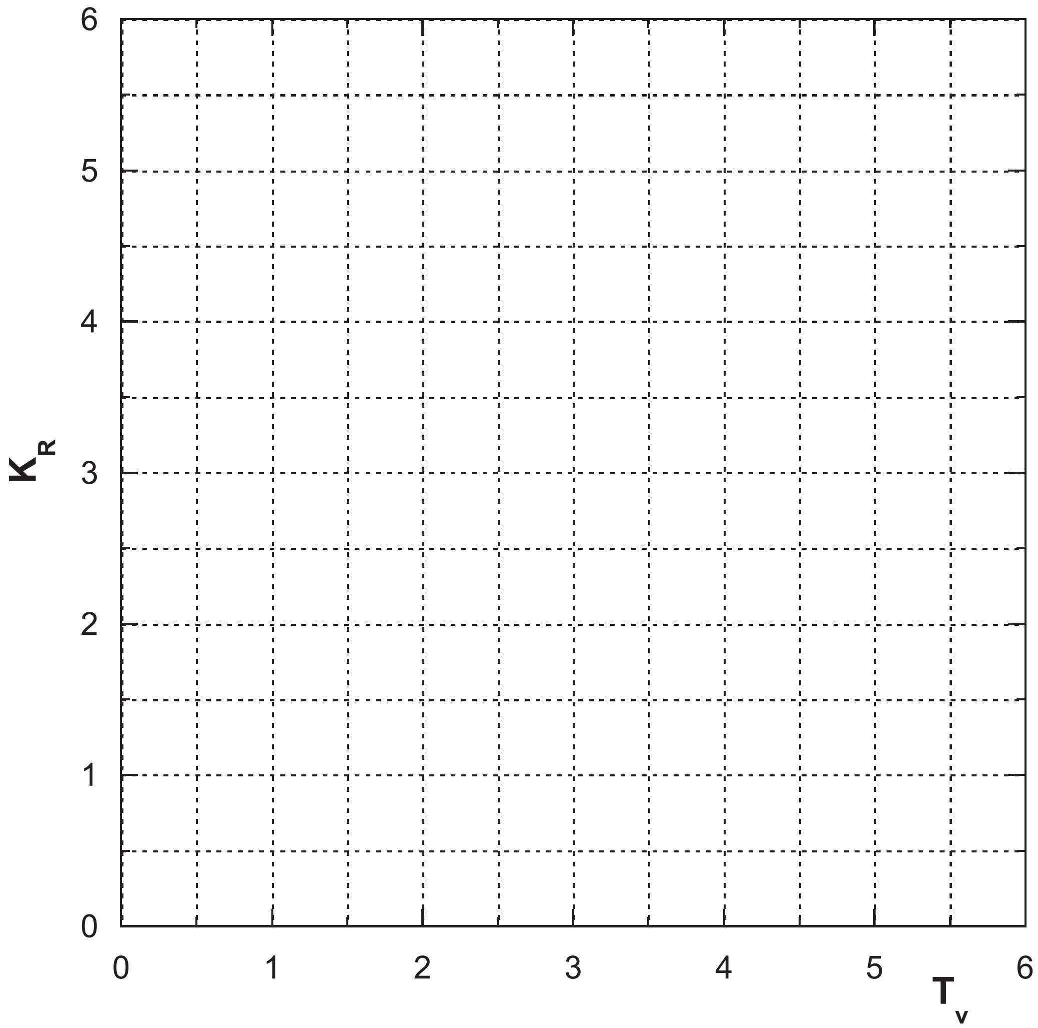
$$G_S(s) = \frac{2(s-\frac{1}{4})}{(s-2)(s-1)}, \qquad G_R(s) = K_R(1+T_v s) \ \text{ mit: } K_R > 0,\ T_v > 0$$

a) Welcher Reglertyp wird hier verwendet? Ist die Strecke stabil und minimalphasig?

b) Warum ist bei dieser Regelungsaufgabe zu erwarten, dass sowohl eine sehr kleine, als auch eine sehr große Reglerverstärkung K_R zur Instabilität des Regelkreises führen? Berücksichtigen Sie bei Ihren Überlegungen, wo die Äste einer Wurzelortskurve immer beginnen und wo sie enden.

c) Ermitteln Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums die Stabilitätsbedingungen des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von K_R und T_v. Hierzu können Sie annehmen, das sowohl K_R als auch T_v größer als Null sind. Zeichnen Sie die Bedingungen in das vorbereitete Diagramm ein und kennzeichnen Sie den stabilen Bereich.

d) Wie groß darf T_v höchstens gewählt werden, damit das geregelte System durch die geeignete Wahl von K_R überhaupt noch stabilisiert werden kann? Markieren Sie diesen grenzstabilen Fall im Stabilitätsdiagramm.

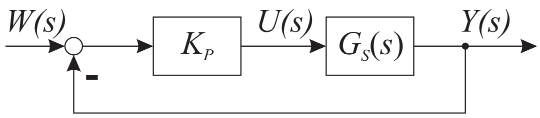


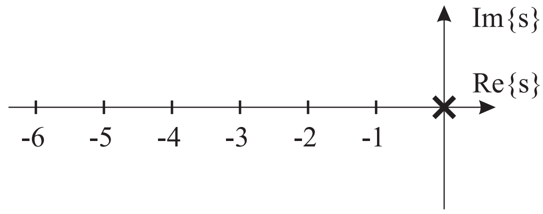
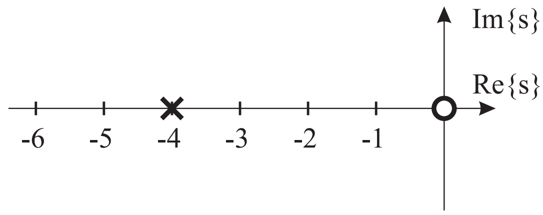
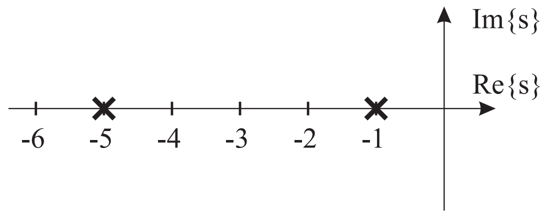
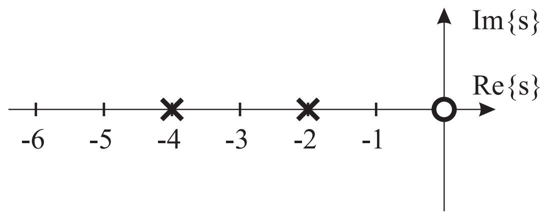
Aufgabe 4: Systemidentifikation

Für den Standardregelkreis mit Proportionalregler sind die vier dargestellten Pol-/Nullstellenverteilungen des **offenen** Regelkreises bekannt.

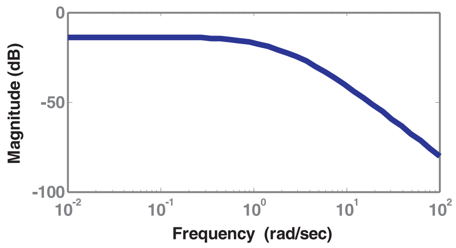
a) Ermitteln Sie die zugehörigen Übertragungsfunktionen der Regelstrecken (die Streckenverstärkungen können Sie beliebig annehmen).

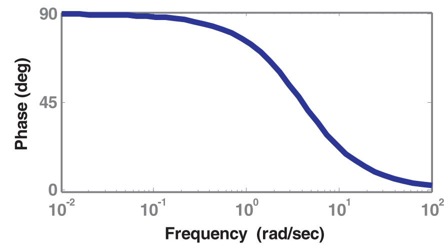
b) Zeichnen Sie die Wurzelortskurven in die Diagramme ein.

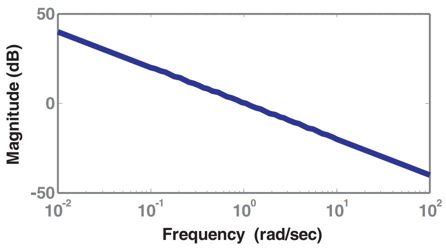


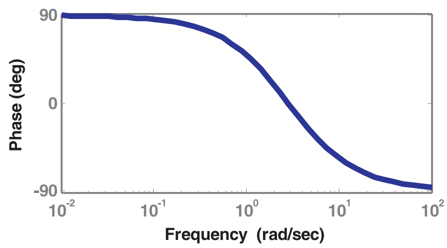
a) 	$G_S(s)$=
b) 	$G_S(s)$=
c) 	$G_S(s)$=
d) 	$G_S(s)$=

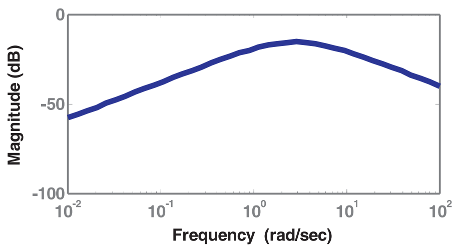
c) Ordnen Sie jeden Amplituden- **und** Phasenverlauf den Übertragungsfunktionen zu und tragen Sie jeweils das globale Verhalten in die nachfolgende Tabelle ein.

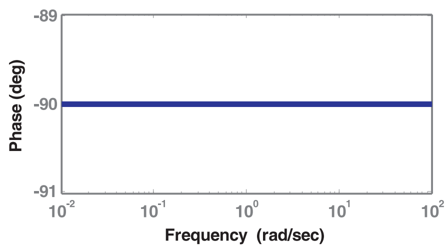


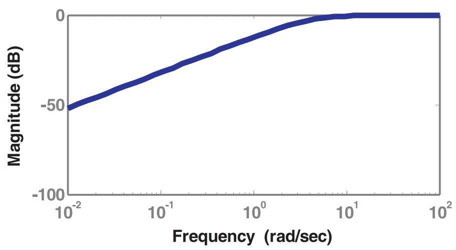


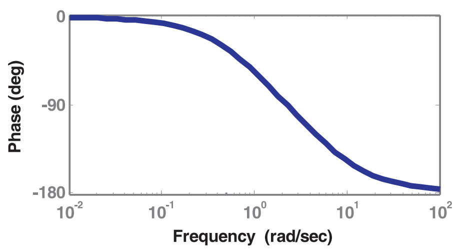












	globales Verhalten (P, I oder D)
a)	
b)	
c)	
d)	

Lösungen:

Aufgabe 1: Berechnen einer Sprungantwort

a) Partialbruchzerlegung von $H(s)$:

$$H(s) = \frac{5(s+2)}{s(s-4)^2} = \frac{B_{11}}{s-4} + \frac{B_{12}}{(s-4)^2} + \frac{B_2}{s}$$ 2

$$B_{1i} = \frac{1}{(p-i)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{p-i}}{\mathrm{d}s^{p-i}} \left[H(s) \cdot (s-p_1)^p\right]_{s=p_1}, \quad B_i = \left[H(s) \cdot (s-p_i)\right]_{s=p_i}$$

Mit $p = 2$ (Doppelpol) und $p_1 = -4$ ergibt sich für $i = 1$ und $i = 2$:

$$B_{11} = \frac{1}{1!} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[\frac{5(s+2)(s-4)^2}{s(s-4)^2}\right]_{s=4} = 5 \left[\frac{1 \cdot s - (s+2) \cdot 1}{s^2}\right]_{s=4}$$

$$B_{11} = 5 \left[\frac{1 \cdot 4 - 4 - 2}{4^2}\right] \Leftrightarrow \boxed{B_{11} = -\frac{5}{8}}$$ 4

$$B_{12} = \frac{1}{0!} \cdot \left[\frac{5(s+2)(s-4)^2}{s(s-4)^2}\right]_{s=4} = \frac{5 \cdot 6}{4} \Leftrightarrow \boxed{B_{12} = \frac{15}{2}}$$ 4

Für den verbliebenen Einzelpol $p_2 = 0$ ergibt sich:

$$B_2 = \left[\frac{5(s+2)s}{s(s-4)^2}\right]_{s=0} = \frac{5 \cdot 2}{(-4)^2} \Leftrightarrow \boxed{B_2 = \frac{5}{8}}$$ 2

Damit ergibt sich:

$$H(s) = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{s-4} + \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{(s-4)^2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{s}$$ 1

Mit Hilfe der Korrespondenztabelle erhält man (für t>0):

$$\boxed{h(t) = -\frac{5}{8}e^{4t} + \frac{15}{2}te^{4t} + \frac{5}{8} = \left(\frac{15}{2}t - \frac{5}{8}\right) e^{4t} + \frac{5}{8}}$$ 6

b) Aus dem Endwertsatz ergibt sich:

$$h(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot H(s) = \frac{5(0+2)}{(0-4)^2} \Leftrightarrow \boxed{h(t \to \infty) = \frac{5}{8}}$$ 2

Aus dem Ergebnis von a) erhält man aber:

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{t \to \infty} \left[\left(\frac{15}{2}t - \frac{5}{8}\right) e^{4t} + \frac{5}{8}\right] = \infty + \frac{5}{8} \Leftrightarrow \boxed{h(t \to \infty) = \infty}$$ 2

c) Der Endwertsatz gilt nur wenn der Endwert tatsächlich existiert, d.h. er kann bei der Sprungantwort nur angewendet werden, wenn das Übertragungssystem stabil ist! Das Ergebnis $h(t \to \infty) = \infty$ ist also korrekt. Die Sprungantwort strebt aufgrund des instabilen Doppelpoles bei +4 gegen unendlich. 2

$\sum 25$

Aufgabe 2: Verständnisfragen

a) Unter welchen Voraussetzungen ist sichergestellt, dass der Regelfehler bei einem Führungssprung für $t \to \infty$ gegen Null strebt (stabiler Reglerentwurf vorausgesetzt)?

- [x] Wenn die Regelstrecke einen I-Anteil aufweist (globales I-Verhalten).
- [ ] Wenn ein PD-Regler verwendet wird.
- [x] Wenn der Regler einen I-Anteil aufweist (z.B. PI- oder PID-Regler).

b) Welche Systeme sind nicht phasenminimal?

- [x] Systeme, die positive Nullstellen aufweisen.
- [x] Systeme, die eine Totzeit enthalten.
- [ ] Systeme, die eine minimale Phasenverschiebung von weniger als -360° haben.

c) Warum wird der Amplitudenverlauf im Bodediagramm doppelt logarithmisch aufgetragen?

- [ ] Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Multiplikation der Amplitudengänge entspricht.
- [x] Weil der Verlauf dann näherungsweise mit linearen Asymptoten dargestellt werden kann.
- [x] Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.

d) Wie beeinflusst die Pollage eines Systems dessen dynamisches Verhalten?

- [ ] Systeme mit reellen Doppelpolen sind schwingungsfähig.
- [ ] Je weiter links die Pole des Systems liegen, um so langsamer ist es.
- [x] Bei konjugiert komplexen Polen kann das System schwingen, die Dämpfung der Schwingung wird durch den Winkel zwischen einem der Pole und dem Koordinatenursprung bestimmt.

e) Welche Überlegungen sind beim Reglerentwurf zu beachten?

- [ ] Der Regler sollte möglichst hohe Ordnung haben (viele Pole und Nullstellen).
- [ ] Systeme mit Allpassverhalten sind generell nicht regelbar.
- [x] Es dürfen niemals instabile Streckenpole mit Reglernullstellen gekürzt werden.

f) Für die Anwendung des **vereinfachten** Nyquist-Kriteriums ist Folgendes zu beachten:

- [x] Man benötigt den Frequenzgang des offenen Regelkreises.
- [ ] Das Kriterium kann auch bei instabilen Systemen angewendet werden.
- [ ] Man benötigt den Frequenzgang des geschlossenen Regelkreises.

g) Was versteht man unter einem zeitvarianten System?

- [x] Die Eigenschaften des Systems (z.B. die Verstärkung) ändern sich mit der Zeit.
- [ ] Ein solches System kann mit einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden.
- [ ] Zeitvariant bedeutet, dass das System schwingungsfähig ist.

h) Welche Eigenschaften hat die Wurzelortskurve?

■ Sie ist immer symmetrisch zur reellen Achse.

☐ Sie beginnt stets in den Nullstellen und endet in den Polen des offenen Regelkreises.

■ Alle Äste, die nicht in Nullstellen enden, streben gegen unendlich.

i) Welche Aussagen zur Rückkopplung sind richtig?

☐ Eine Störgrößenaufschaltung ist eine Rückkopplung.

■ Die Rückwirkung der Regelgröße auf die Stellgröße bezeichnet man als Rückkopplung.

☐ Rückkopplung führt stets zur Instabilität.

j) Woran erkennt man, ob ein System globales P-, I- oder D-Verhalten hat?

☐ Am Verlauf der Sprungantwort für $t \to 0$.

■ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to 0$.

■ Daran, ob sich s^n bzw. s^{-n} Terme aus der Übertragungsfunktion ausklammern lassen, oder nicht. $\boxed{\sum 15}$

Aufgabe 3: Stabilitätsdiagramm

a) Der Regler ist ein **PD-Regler**. Die Strecke hat Pole in der rechten Halbebene (+1,+2) und ist daher **instabil**. Darüber hinaus liegt eine Nullstelle in der rechten Halbebene (+0,25), d.h. das System hat einen Allpassanteil und ist **nicht minimalphasig**. $\boxed{3}$

b) Die Wurzelortskurve beginnt immer in den Polen des offenen Regelkreises, hier also in der rechten Halbebene, da das System **instabil** ist. Erst ab einer bestimmten Mindestverstärkung wandern die Pole in die linke Halbebene hinüber. Durch die **positive Nullstelle** wandert ein Pol für große K_R jedoch wieder in die rechte Halbebene hinein, denn in jeder Nullstelle endet ein Ast der Wurzelortskurve. Das geregelte System wird in diesem Fall wieder instabil. $\boxed{6}$

c) Berechnung der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises:

$$1 + G_0(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + G_R(s)G_S(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{2K_R(s - \frac{1}{4})(1 + T_v s)}{(s-2)(s-1)} = 0 \qquad \boxed{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 + 2K_R T_v)}_{c_2} s^2 + \underbrace{(2K_R - 3 - \frac{1}{2}K_R T_v)}_{c_1} s + \underbrace{2 - \frac{1}{2}K_R}_{c_0} = 0 \qquad \boxed{4}$$

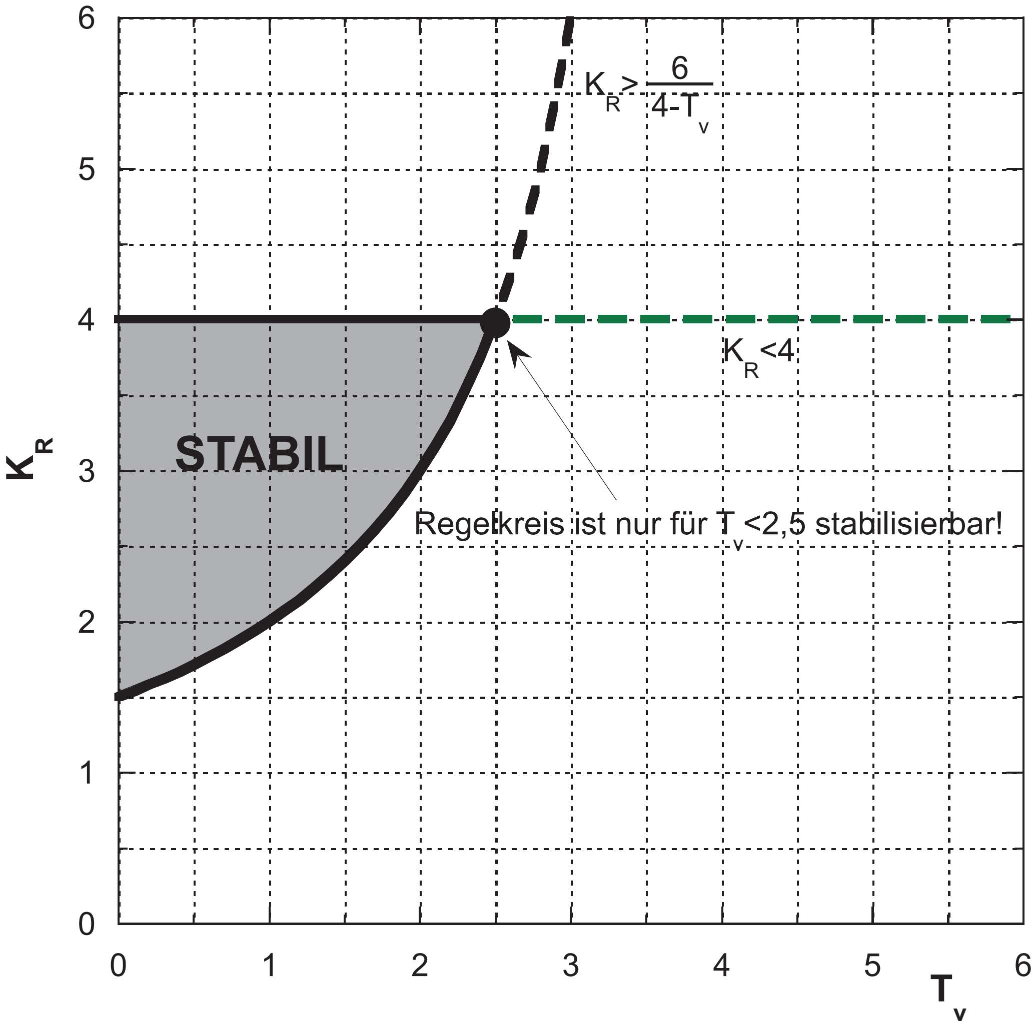
Für Polynome 2. Grades muss für Stabilität nach dem Hurwitz-Kriterium nur die Bedingung $c_i > 0$ erfüllt sein:

$$c_2 > 0: \; 1 + 2K_R T_v > 0 \Leftrightarrow K_R > -\frac{1}{2T_v} \text{ für } T_v > 0, \text{ Bed. entfällt, da } K_R > 0. \qquad \boxed{2}$$

$$c_1 > 0: \; \frac{1}{2} \cdot K_R(4 - T_v) > 3 \Leftrightarrow \boxed{K_R > \frac{6}{4 - T_v}} \text{ für } T_v < 4 \qquad \boxed{2}$$

Die Bedingung für $T_v > 4$ $\left(K_R < \frac{6}{4-T_v}\right)$ entfällt, da $K_R > 0$ angenommen wurde.

$$c_0 > 0: \; 2 - \frac{1}{2}K_R > 0 \Leftrightarrow \boxed{K_R < 4}$$ 2



6

d) Das System ist stabilisierbar, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$K_R = 4 > \frac{6}{4 - T_v} \Leftrightarrow \boxed{T_v < 2{,}5}$$ 3

Bei $T_v = 2{,}5$ ist der geschlossene Regelkreis für $K_R = 4$ an der Stabilitätsgrenze, für alle anderen K_R ist er instabil. $\sum 30$

Aufgabe 4: Systemidentifikation

a) Übertragungsfunktionen:

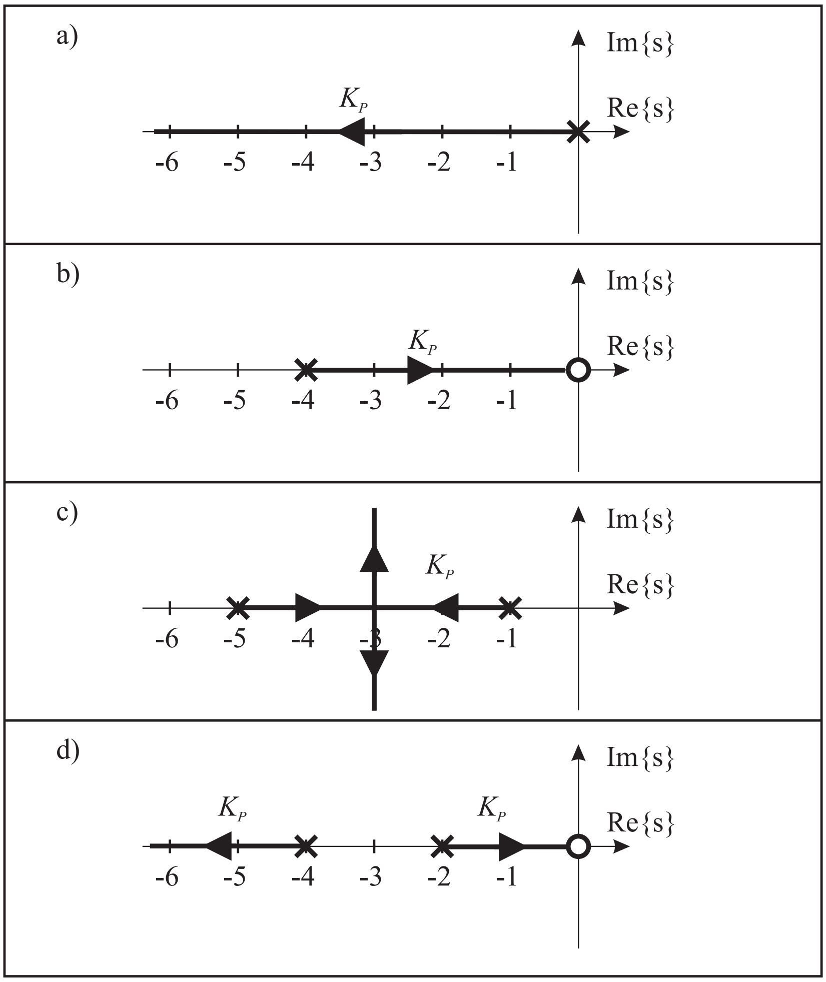
a) $G_0(s) = \frac{K_I}{s} = K_P \cdot G(s) \Rightarrow \boxed{G_S(s) = \frac{1}{s}}$ für $K_I = K_P$ 1

b) $G_0(s) = \dfrac{K_D s}{s+4} = K_P \cdot G(s) \Rightarrow \boxed{G_S(s) = \dfrac{s}{s+4}}$ für $K_D = K_P$ 1

c) $G_0(s) = \dfrac{K}{(s+5)(s+1)} = K_P \cdot G(s) \Rightarrow \boxed{G_S(s) = \dfrac{1}{(s+5)(s+1)}}$ für $K = K_P$ 2

d) $G_0(s) = \dfrac{K_D s}{(s+4)(s+2)} = K_P \cdot G(s) \Rightarrow \boxed{G_S(s) = \dfrac{s}{(s+4)(s+2)}}$ für $K_D = K_P$ 2

b) WOK für K_P:



1

1

2

2

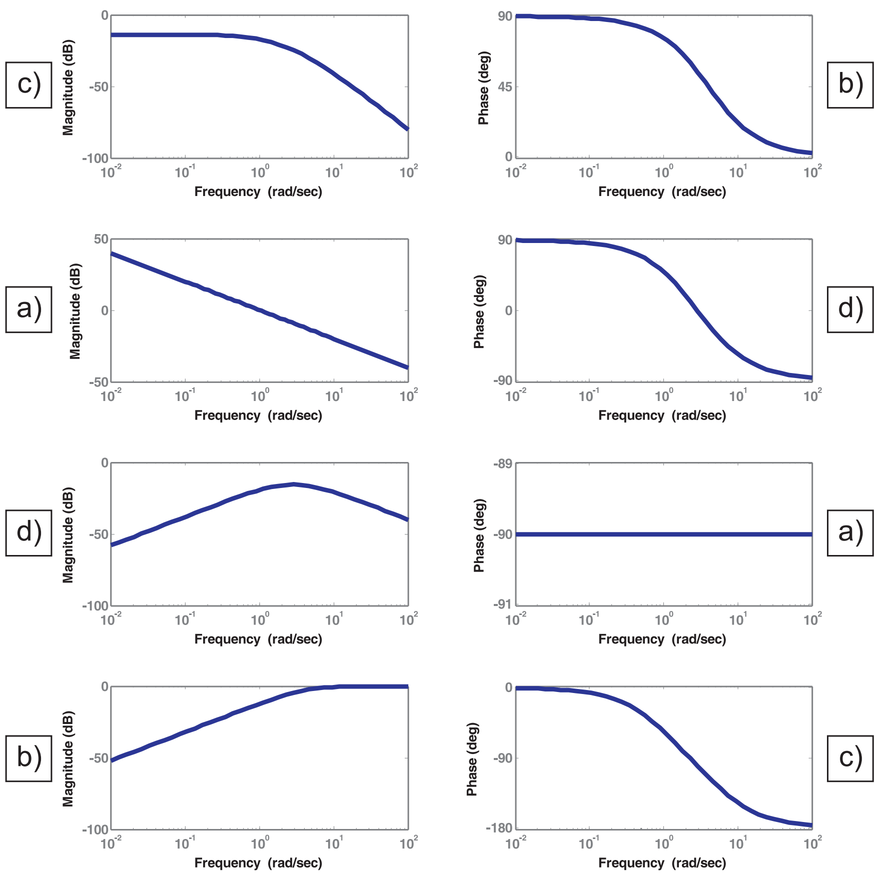
c) Amplituden- und Phasenverlauf:

a) Die Strecke besteht aus einem reinem I-Glied (Polstelle bei $s_{p1} = 0$). Durch dieses globale I-Verhalten fällt das Amplitudenverhältnis mit -20 dB/Dek über dem gesamten Frequenzbereich. Die dazugehörige Phasenverschiebung liegt bei konstant -90°.

b) Bei dieser Strecke handelt es sich um ein DT_1-Glied (Nullstelle bei $s_{n1} = 0$ und stabile Polstelle bei $s_{p1} = -4$), wobei das Amplitudenverhältnis aufgrund des globalen D-Verhaltens bis zur Eckfrequenz mit +20 dB/Dek steigt und ab der Eckfrequenz konstant bleibt (0 dB/Dek). Die dazugehörige Phasenverschiebung verläuft von +90° auf 0°.

c) Diese Strecke besteht aus einem PT_2-Glied (stabile Polstellen bei $s_{p1} = -1$ und $s_{p2} = -5$). Daher verläuft das Amplitudenverhältnis zunächst kostant bei einer bestimmten Verstärkung. Nach den beiden Eckfrequenzen ($\omega > 5 rad/sec$) fällt das Amplitudenverhältnis mit -40 dB/Dek. Aufgrund des globalen P-Verhaltens beginnt der Phasenverlauf bei 0° und strebt asymptotisch nach -180°.

d) Bei dieser Strecke handelt es sich um ein DT_2-Glied (Nullstelle bei $s_{n1} = 0$ sowie stabile Polstellen bei $s_{p1} = -2$ und $s_{p2} = -4$). Dieses globale D-Verhalten führt zu einem Amplitudenverlauf, der mit +20 dB/Dek zunächst steigt. Ab der ersten Eckfrequenz bei $\omega = 2 rad/sec$ verläuft der asymptotische Amplitudenverlauf kurzzeitig bis zur zweiten Eckfrequenz bei $\omega = 4 rad/sec$ mit 0 dB/Dek. Der wahre Verlauf glättet dieses asymptotische Verhalten. Nach der zweiten Eckfrequenz bei $\omega = 4 rad/sec$ erhält man aufgrund der zweiten Polstelle ein fallendes Verhalten im Amplitudenverhältnis mit -20 dB/Dek. Wegen des globalen D-Verhaltens beginnt der Phasenverlauf bei +90° und strebt asymtotisch aufgrund der beiden Polstellen nach -90°.



2+2

2+2

2+2

2+2

	globales Verhalten (P, I oder D)
a)	I (Pol bei s = 0)
b)	D (Nullstelle bei s = 0)
c)	P (weder Nullstelle noch Pol bei s = 0)
d)	D (Nullstelle bei s = 0)

0.5

0.5

0.5

0.5

$\sum 30$