Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

27. März 2012

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	20	26	14	14	26	100
Note:	Ist:						

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Was trifft zu?
- ☐ Hat ein Signal die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s}$, dann entspricht dies einem Sprung $\sigma(t)$ im Zeitbereich.
- ☐ Eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s}$ ist ein Integrator.
- ☐ Wird die Regelstrecke mit $G_S(s) = \frac{1}{s}$ mit einem Signal $U(s) = \frac{1}{s}$ beaufschlagt, ergibt sich im Zeitbereich ein Sprung $\sigma(t)$ als Ausgangsgröße.

b) Wodurch ist sichergestellt, dass die Regelgröße $y(t)$ der Führungsgröße $w(t)$ möglichst gut folgt?
- ☐ Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst einen I-Anteil aufweisen.
- ☐ Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst einen D-Anteil aufweisen.
- ☐ Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst gleich Eins sein.

c) Was gilt für Polstellen einer Übertragungsfunktion?
- ☐ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System phasenminimal ist.
- ☐ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System schwingungsfähig ist.
- ☐ Die Lage der Polstellen ist entscheidend für die Stabilität der Übertragungsfunktion.

d) Welche Entsprechung hat die Multiplikation $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ im Zeitbereich?

☐ $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$.

☐ $y(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$, wenn $G(s) = \frac{1}{s}$.

☐ $y(t) = g(t)u(t)$.

e) Ein System mit der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y = u \ldots$

☐ ... entspricht einer gedämpften Schwingung.

☐ ... entspricht einer ungedämpften Schwingung.

☐ ... ist sprungfähig.

f) Was ist bezüglich des D-Anteils im PID Regler zu beachten?

☐ Der D-Anteil in einem PID-Regler wirkt sich destabilisierend auf die Regelung aus.

☐ Der D-Anteil verstärkt das Messrauschen. Je nach Stärke des Messrauschen ist daher eine geeignete Filterung des Messsignales notwendig, um eine verrauschte Stellgröße zu vermeiden.

☐ Bei sprungartig veränderlichen Führungsgrößen ist es sinnvoll, das D-Glied nicht auf den Regelfehler sondern nur auf die Regelgröße anzuwenden, um starke Stöße in der Stellgröße zu vermeiden.

g) Wofür ist die Frequenzgangsortskurve besonders geeignet?

☐ Zur Ermittlung von Amplitude und Phasenverschiebung bei einer bestimmten Kreisfrequenz.

☐ Um die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises abzulesen.

☐ Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu analysieren.

h) Woran erkennt man, ob ein System globales P-, I- oder D-Verhalten hat?

☐ Am Verlauf der Sprungantwort für $t \to \infty$.

☐ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to 0$.

☐ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to \infty$.

i) Was möchte man beim Entwurf eines Kompensationsreglers erreichen?

☐ Dass sowohl die Pole als auch die Nullstellen des geschlossenen Regelkreises vorgegebene Werte annehmen.

☐ Dass nur die Pole des geschlossenen Regelkreises an die gewünschte Stelle verschoben werden.

☐ Dass der Regler den Störgrößeneinfluss kompensiert.

j) Wie beeinflusst die Pollage eines Systems dessen dynamisches Verhalten?

- ☐ Je weiter links die Pole des Systems liegen, um so schneller ist es.
- ☐ Systeme mit reellen Doppelpolen sind schwingungsfähig.
- ☐ Bei konjugiert komplexen Polen kann das System schwingen. Die Dämpfung der Schwingung wird durch den Winkel zwischen einem der Pole und dem Koordinatenursprung bestimmt.

k) Welches System ist bzw. welche Systeme sind sprungfähig?

- ☐ $\dot{y}(t) = u(t)$
- ☐ $\ddot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t)$
- ☐ $\ddot{y}(t) + y(t) = \ddot{u}(t)$

l) Welches System ist nicht bzw. welche Systeme sind nicht sprungfähig?

- ☐ $G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$
- ☐ $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$
- ☐ $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_0}$

m) Was ist richtig?

- ☐ Frequenzgangs-Ortskurve und Bode-Diagramm sind gleichbedeutend.
- ☐ Frequenzgangs-Ortskurve und Wurzelortskurve sind gleichbedeutend.
- ☐ Bode-Diagramm und Wurzelortskurve sind gleichbedeutend.

Aufgabe 2: Analyse einer Regelstrecke

Gegeben sind die Übertragungsfunktionen von zwei Regelstecken:

$$G_1(s) = \frac{K(1+T_D s)}{1+T_1 s}, \quad G_2(s) = \frac{K(1+T_D s)}{1+T_1 s} \cdot e^{-sT_t}$$

a) Geben Sie die Bezeichnungen der beiden Übertragungsfunktionen an.

b) Von welchem der Parameter K, T_D, T_1 und T_t ist die Stabilität der Regelstrecken $G_1(s)$ und $G_2(s)$ abhängig (kurze Begründung) und für welchen Wertebereich des Parameters sind die Regelstrecken stabil.

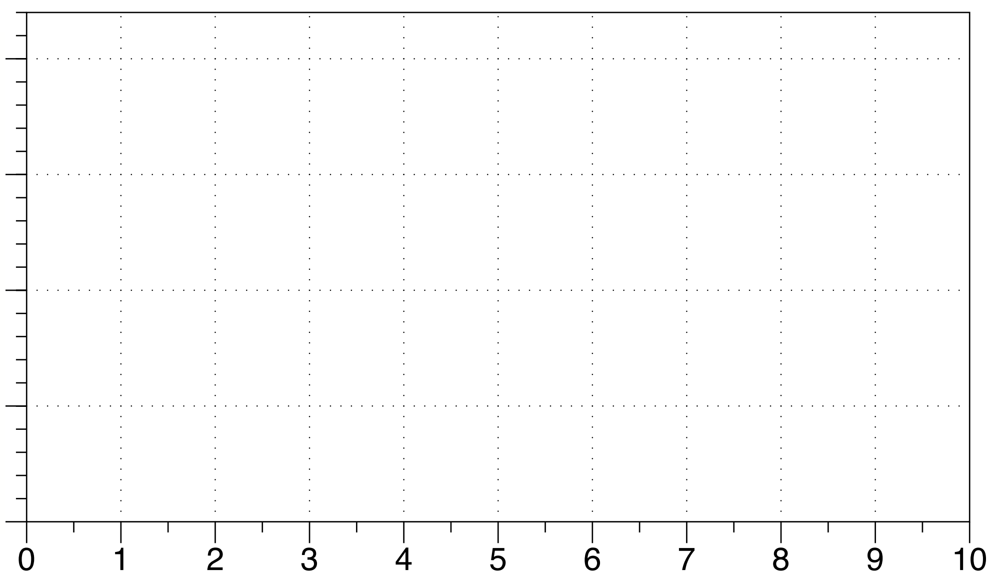
c) Berechnen Sie den Anfangs- und Endwert der Sprungantwort der Regelstrecke $G_1(s)$. Ist die Regelstrecke sprungfähig, wenn $T_D = 0$ gewählt wird (Begründung).

d) Berechnen Sie den Anfangs- und Endwert der Sprungantwort der Regelstrecke $G_2(s)$. Zeigen Sie, dass sich der Endwert gegenüber $G_1(s)$ nicht geändert hat und die Regelstrecke unabhängig von den Parametern K, T_D und T_1 **nicht** sprungfähig ist.

e) Nehmen Sie folgende Zahlenwerte an:

$$K = 2,\ T_D = 0\,\text{sec},\ T_1 = 1\,\text{sec},\ T_t = 2\,\text{sec}$$

Skizzieren Sie die Sprungantworten von beiden Übertragungsfunktionen in das unten dargestellte Diagramm. Kennzeichen Sie jeweils den Zeitpunkt bei dem die Sprungantworten 95% des Endwertes erreicht haben.



Aufgabe 3: Frequenzgangortskurve (Teil 1)

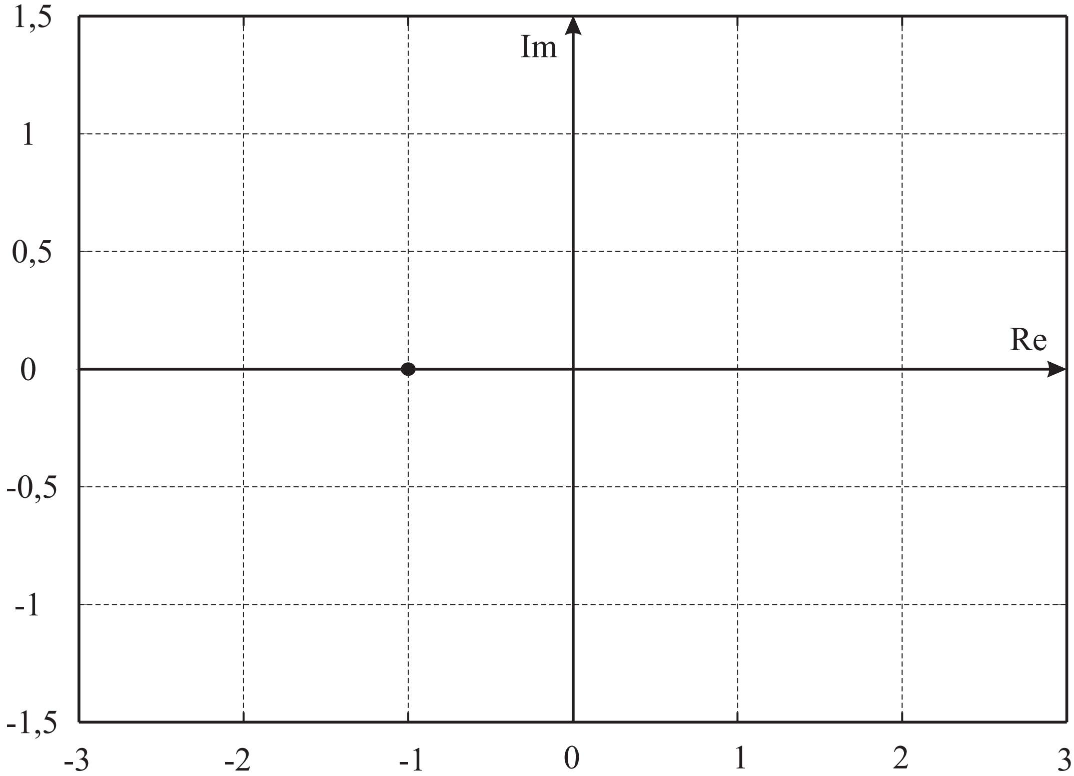
Hinweis:

Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Regelstrecke mit:

$$G_S(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$

a) Kennzeichnen Sie den Start- und Endpunkt der Ortskurve in der unten gegebenen komplexen Ebene? **Tipp:** Betrachten sie dazu den Anfangs- und Endwert der Sprungantwort.

b) Zeichnen Sie qualitativ (in die **richtigen** Quadranten) die Ortskurve der Strecke G_S in die gegebene komplexe Ebene.



c) Wann darf man das einfache Nyquistkriterium anwenden? Welche Bedingung muss nach dem einfachen Nyquistkriterium erfüllt sein, damit das System stabil ist.

d) Die Strecke soll mit einem P-Regler mit der Verstärkung K geregelt werden. Wie lautet die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises G_0?

e) Leiten Sie die Gleichung für die Amplitude $A(\omega)$ des offenen Regelkreises G_0 her.

f) Berechnen Sie die Phasendurchtrittsfrequenz ω_D in Abhängigkeit der Verstärkung K.

g) Es soll gelten: $K = 8$. Wie lautet die dazugehörige Phasendurchtrittsfrequenz?

Aufgabe 4: Frequenzgangortskurve (Teil 2)

Gegeben ist die Übertragungsfunktion des offnen Regelkreises G_0:

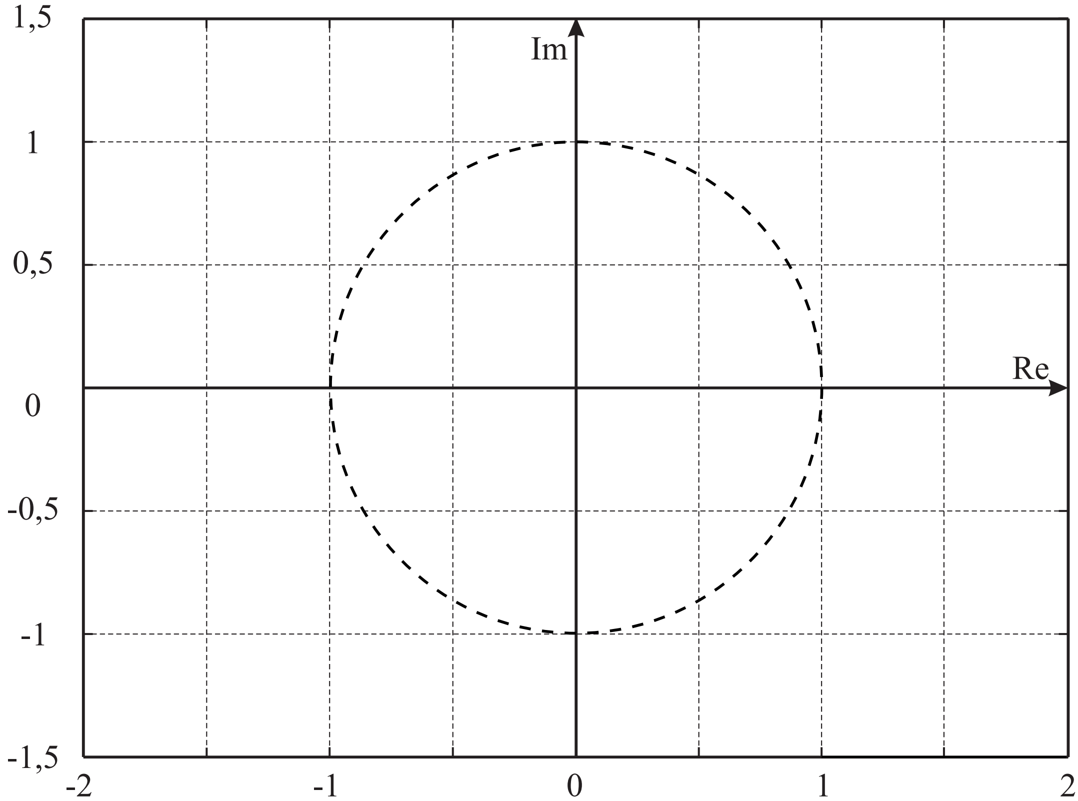
$$G_0(s) = \frac{K}{s+1} \text{ ,mit der Regelstrecke } G_s(s) = \frac{1}{s+1}.$$

a) Leiten Sie aus der Übertragungsfunktion der Strecke $G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ die Differentialgleichung im Zeitbereich her und zeichnen Sie das dazugehörige Blockschaltbild.

b) Wie lautet die Gleichung des Phasenganges $\varphi(\omega)$ der gegebenen Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $G_0(s)$?

c) Setzen Sie den Phasengang $\varphi(\omega)$ in die allgemeine Formel zur Berechnung des Phasenrandes ein und berechnen Sie die Phasenreserve $\varphi_R(\omega_D)$ für eine Phasendurchtrittsfrequenz $\omega_D = \sqrt{3}$, die sich für eine Verstärkung $K = 2$ ergibt.
Hinweis: $\arctan\sqrt{3} = 60°$!

d) Zeichnen Sie qualitativ die Ortskurve in das gegebene Diagramm, welche sich für den in b) betrachteten Fall ergibt.
Wichtig: Die Lage der Anfangs- und Endpunkte, sowie des Phasenrandes sind eindeutig zu kennzeichnen!



Aufgabe 5: Wurzelortskurve

a) Wo beginnen die Äste einer Wurzelortskurve (WOK)? Wo enden die Äste einer WOK? Was ist die WOK, bzw. zeigen die Äste einer WOK?

b) Gegeben ist ein Standardregelkreis bestehend aus einem idealen PI-Regler G_R und einer PT$_1$-Strecke G_S.

$$G_R = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s}\right) \qquad G_S = \frac{1}{s+1}$$

Wie lautet die Übertragungsfunktion, die zum Skizzieren der Wurzelortskurve des Regelkreises benötigt wird? Wie lauten die dazugehörigen Pole p_i und Nullstellen n_i?

c) Für den oben genannten Regelkreis sind vier Fälle zu unterscheiden:

A) $T_I > 1$
B) $T_I = 1$
C) $0 < T_I < 1$
D) $T_I < 0$

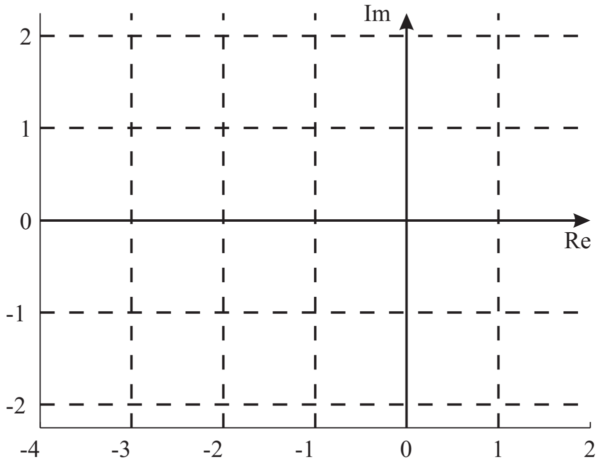
Wählen sie jeweils einen beispielhaften Wert für T_I. Tragen sie für jeden Fall die Lage der Pol- und Nullstellen ein und skizzieren sie jeweils qualitativ den Verlauf der WOK für positive Verstärkungen. Benutzen sie dazu die vorbereiteten Diagramme. Eine Berechnung von Asymptoten, Verzweigungspunkten o.ä. ist nicht notwendig.

d) Welche Bedingung muss allgemein erfüllt sein, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist? Für welche der vier Fälle trifft diese Bedingung zu?

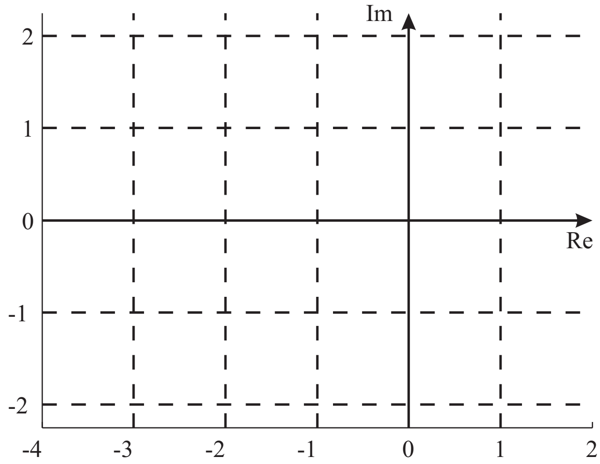
e) Welche Bedingung muss allgemein erfüllt sein, damit der geschlossene Regelkreis schwingungsfähig ist? Für welche der vier Fälle trifft diese Bedingung zu?

f) Welche Bedingung muss allgemein erfüllt sein, damit der geschlossene Regelkreis phasenminimal ist? Für welche der vier Fälle trifft diese Bedingung zu?

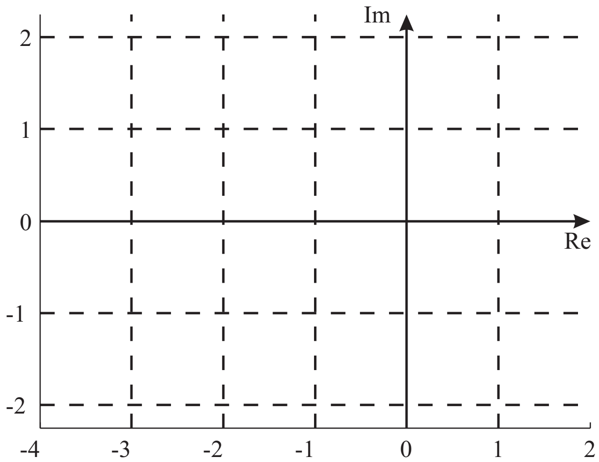
Fall: A



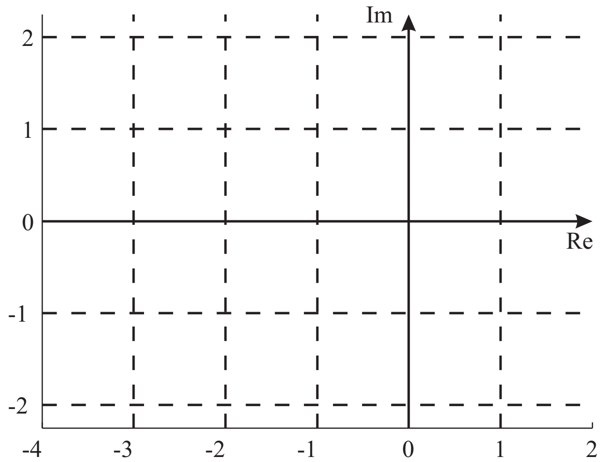
Fall: B



Fall: C



Fall: D



Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Was trifft zu?

- ■ Hat ein Signal die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s}$, dann entspricht dies einem Sprung $\sigma(t)$ im Zeitbereich.
- ■ Eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{1}{s}$ ist ein Integrator.
- □ Wird die Regelstrecke mit $G_S(s) = \frac{1}{s}$ mit einem Signal $U(s) = \frac{1}{s}$ beaufschlagt, ergibt sich im Zeitbereich ein Sprung $\sigma(t)$ als Ausgangsgröße.

b) Wodurch ist sichergestellt, dass die Regelgröße $y(t)$ der Führungsgröße $w(t)$ möglichst gut folgt?

- □ Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst einen I-Anteil aufweisen.
- □ Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst einen D-Anteil aufweisen.
- ■ Die Führungsübertragungsfunktion sollte möglichst gleich Eins sein.

c) Was gilt für Polstellen einer Übertragungsfunktion?

- □ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System phasenminimal ist.
- ■ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System schwingungsfähig ist.
- ■ Die Lage der Polstellen ist entscheidend für die Stabilität der Übertragungsfunktion.

d) Welche Entsprechung hat die Multiplikation $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ im Zeitbereich?

- ■ $y(t) = \int\limits_0^t g(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$.
- ■ $y(t) = \int\limits_0^t u(\tau)\, d\tau$, wenn $G(s) = \frac{1}{s}$.
- □ $y(t) = g(t)u(t)$.

e) Ein System mit der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y = u \ldots$

- ■ … entspricht einer gedämpften Schwingung.
- □ … entspricht einer ungedämpften Schwingung.
- □ … ist sprungfähig.

f) Was ist bezüglich des D-Anteils im PID Regler zu beachten?

- □ Der D-Anteil in einem PID-Regler wirkt sich destabilisierend auf die Regelung aus.
- ■ Der D-Anteil verstärkt das Messrauschen. Je nach Stärke des Messrauschen ist daher eine geeignete Filterung des Messsignales notwendig, um eine verrauschte Stellgröße zu vermeiden.
- ■ Bei sprungartig veränderlichen Führungsgrößen ist es sinnvoll, das D-Glied nicht auf den Regelfehler sondern nur auf die Regelgröße anzuwenden, um starke Stöße in der Stellgröße zu vermeiden.

g) Wofür ist die Frequenzgangsortskurve besonders geeignet?

- ☐ Zur Ermittlung von Amplitude und Phasenverschiebung bei einer bestimmten Kreisfrequenz.
- ☐ Um die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises abzulesen.
- ■ Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu analysieren.

h) Woran erkennt man, ob ein System globales P-, I- oder D-Verhalten hat?

- ■ Am Verlauf der Sprungantwort für $t \to \infty$.
- ■ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to 0$.
- ☐ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to \infty$.

i) Was möchte man beim Entwurf eines Kompensationsreglers erreichen?

- ■ Dass sowohl die Pole als auch die Nullstellen des geschlossenen Regelkreises vorgegebene Werte annehmen.
- ☐ Dass nur die Pole des geschlossenen Regelkreises an die gewünschte Stelle verschoben werden.
- ☐ Dass der Regler den Störgrößeneinfluss kompensiert.

j) Wie beeinflusst die Pollage eines Systems dessen dynamisches Verhalten?

- ■ Je weiter links die Pole des Systems liegen, um so schneller ist es.
- ☐ Systeme mit reellen Doppelpolen sind schwingungsfähig.
- ■ Bei konjugiert komplexen Polen kann das System schwingen. Die Dämpfung der Schwingung wird durch den Winkel zwischen einem der Pole und dem Koordinatenursprung bestimmt.

k) Welches System ist bzw. welche Systeme sind sprungfähig?

- ☐ $\dot{y}(t) = u(t)$
- ☐ $\ddot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t)$
- ■ $\ddot{y}(t) + y(t) = \ddot{u}(t)$

l) Welches System ist nicht bzw. welche Systeme sind nicht sprungfähig?

- ☐ $G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$
- ■ $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$
- ■ $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_0}$

m) Was ist richtig?

- ■ Frequenzgangs-Ortskurve und Bode-Diagramm sind gleichbedeutend.
- ☐ Frequenzgangs-Ortskurve und Wurzelortskurve sind gleichbedeutend.
- ☐ Bode-Diagramm und Wurzelortskurve sind gleichbedeutend.

$\boxed{\sum 20}$

Aufgabe 2: Analyse einer Regelstrecke

a) $G_1(s)$: PD-T_1, $G_2(s)$: PD-T_1-T_t 2

b) Für die Stabilität einer Übertragungsfunktion sind die Pole (Nullstellen des Nenners) von Bedeutung, daher gilt für beide Regelstrecken:

$$1 + T_1 s = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{T_1}$$ 2

Für eine stabile Übertragungsfunktion müssen alle Pole einen negativen Realteil haben: Die Regelstrecken sind deshalb für alle $T_1 > 0$ stabil. 1

c) Endwert der Sprungantwort:

$$y(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot G_1(s) \cdot \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{K(1 + T_D s)}{1 + T_1 s} \right) = K$$ 2

Anfangswert der Sprungantwort:

$$y(t \to 0) = \lim_{s \to \infty} \left(\frac{K(1 + T_D s)}{1 + T_1 s} \right) = \lim_{s \to \infty} \left(\frac{K(\frac{1}{s} + T_D)}{\frac{1}{s} + T_1} \right) = \frac{K T_D}{T_1}$$ 2

Wenn $T_D = 0$ gewählt wird ist $y(t \to 0) = 0$. Für ein sprungfähiges System gilt jedoch $y(t \to 0) \neq 0$. Daher wäre das System mit $T_D = 0$ nicht sprungfähig. 1

d) Endwert der Sprungantwort:

$$y(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot G_2(s) \cdot \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{K(1 + T_D s)}{1 + T_1 s} \cdot e^{-sT_t} \right) = K \cdot e^0 = K \cdot 1 = K$$ 2

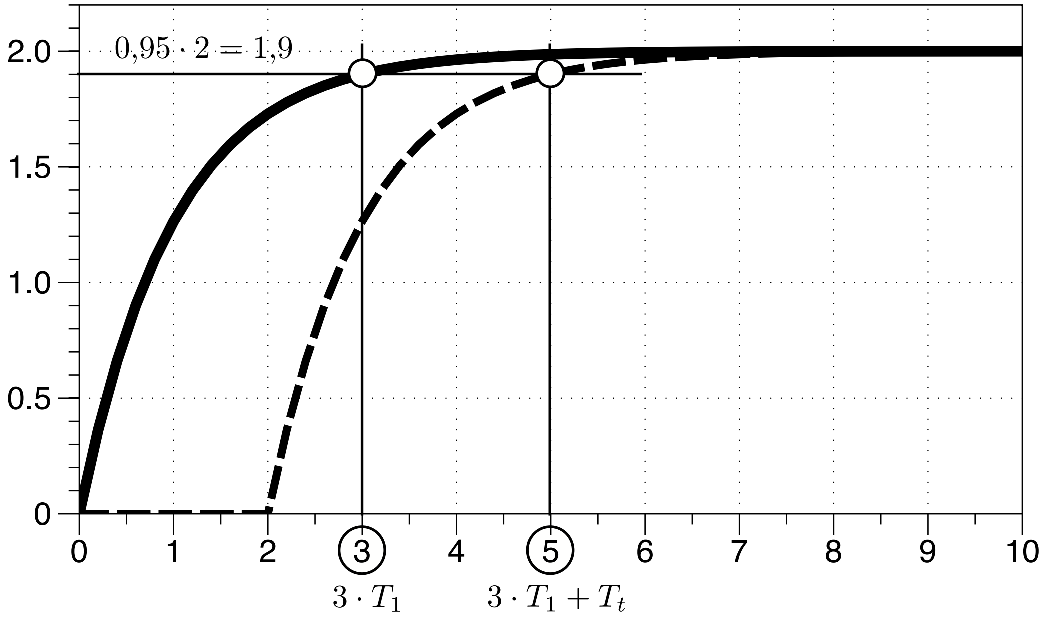
Anfangswert der Sprungantwort:

$$y(t \to 0) = \lim_{s \to \infty} \left(\frac{K(1 + T_D s)}{1 + T_1 s} \cdot e^{-sT_t} \right) = \frac{K T_D}{T_1} \cdot e^{-\infty} = \frac{K T_D}{T_1} \cdot 0 = 0$$ 2

Unabhängig von der Wahl der Parameter ist wegen der Totzeit $y(t \to 0) = 0$. Die Totzeit beeinflusst die Verstärkung nicht, daher bleibt der Endwert unverändert $y(t \to \infty) = K$ 2

e) Mit den Parametern $K = 2$, $T_D = 0\,\mathrm{sec}$, $T_1 = 1\,\mathrm{sec}$ und $T_t = 2\,\mathrm{sec}$ ergeben sich die im Diagramm dargestellten Sprungantworten. Wegen $T_D = 0\,\mathrm{sec}$ starten die Sprungantworten für $t = 0\,\mathrm{sec}$ bei Null. Für $t \to \infty$ streben die Sprungantworten gegen $K = 2$. Die Sprungantwort für $G_2(s)$ entspricht der für $G_1(s)$, ist wegen der Totzeit aber um $T_t = 2\,\mathrm{sec}$ verschoben. 8

Da es sich hier um Verzögerungsglieder 1. Ordnung handelt, gilt die Regel, dass die Sprungantwort 95% des Endwertes nach $t_{95\%} = 3 \cdot T_1 = 3\,\mathrm{sec}$ erreicht haben muss. Für $G_2(s)$ muss noch die Totzeit hinzuaddiert werden $t_{95\%} = 3 \cdot T_1 + T_t = 5\,\mathrm{sec}$. 2



$\boxed{\sum 26}$

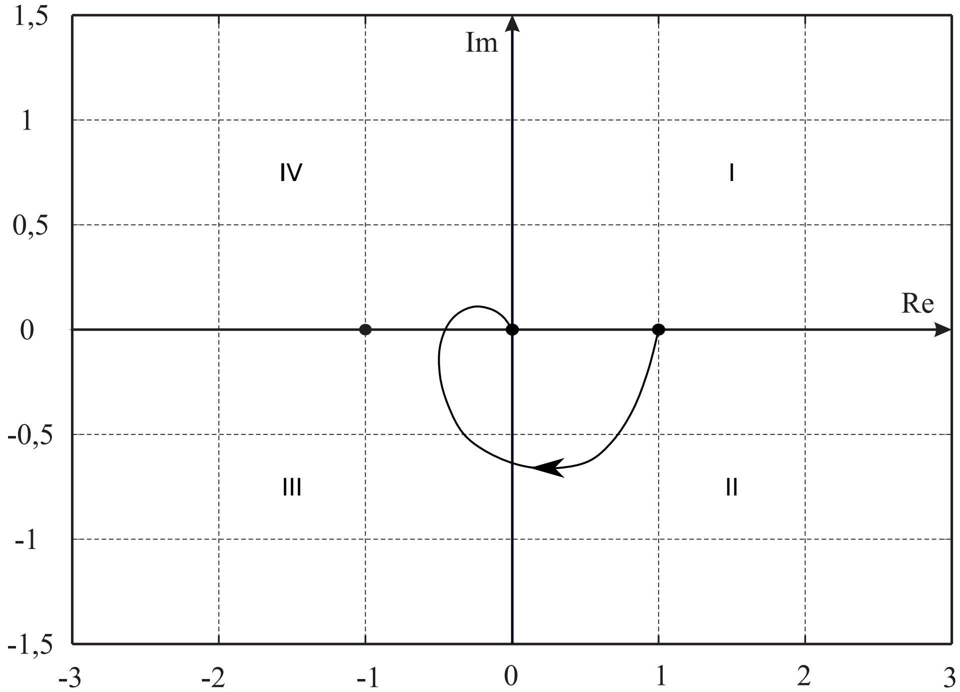
Aufgabe 3: Frequenzgangortskurve (Teil 1)

Gegebene Übertragungsfunktion:

$$G_S(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$

a) Anfangspunkt: $\omega = 0 \Rightarrow \frac{1}{(1+j\omega)^3} \rightarrow \frac{1}{(1+0)^3} = 1$
Endpunkt: $\omega = \infty \Rightarrow \frac{1}{(1+j\omega)^3} \rightarrow \frac{1}{(1+\infty)^3} = 0$ $\boxed{2}$

b) Die Ortskurve durchläuft den zweiten, dritten und vierten Quadranten (in dieser Reihenfolge), da es sich um ein PT_3-System handelt. Das entspricht einer Winkeländerung von $-270°$. Es ergibt sich somit folgendes Bild:



$\boxed{2}$

c) Das einfache Nyquistkriterium darf angewendet werden, wenn der offene Regelkreis stabil ist. Ist er nicht stabil, muss das allgemeine Nyquistkriterium benutzt werden. $\boxed{1}$
Umschlingt der offene Regelkreis den Punkt [-1,0] der komplexen Ebene **nicht**, so ist der geschlossene Regelkreis stabil. $\boxed{1}$

d) $G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = K \cdot \frac{1}{(1+s)^3} = \frac{K}{(1+s)^3}$. $\boxed{1}$

e) $A(\omega) = \|G_0(s)\| = \|\frac{K}{(1+s)^3}\| = \|\frac{K}{(1+j\omega)^3}\| = \frac{K}{(\|1+j\omega\|)^3} = \frac{K}{\left(\sqrt{1+\omega^2}\right)^3}$. $\boxed{3}$

f) Die Phasendurchtrittsfrequenz ist die Frequenz, bei der die Amplitude gleich eins ist:

$$A(\omega_D) = 1 \Rightarrow \frac{K}{\left(\sqrt{1+\omega_D(K)^2}\right)^3} = 1 \Rightarrow K^{\frac{1}{3}} = \sqrt{1+\omega_D(K)^2}$$

$\Rightarrow K^{\frac{2}{3}} = 1 + \omega_D(K)^2 \Rightarrow \sqrt{K^{\frac{2}{3}} - 1} = \omega_D(K)$ $\boxed{3}$

g) $\omega_D(K = 8) = \sqrt{8^{\frac{2}{3}} - 1} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 14}$

Aufgabe 4: Frequenzgangortskurve (Teil 2)

Gegebene Übertragungsfunktion:

$$G_0(s) = \frac{K}{s+1} \text{ ,mit der Strecke } G_s(s) = \frac{1}{s+1}.$$

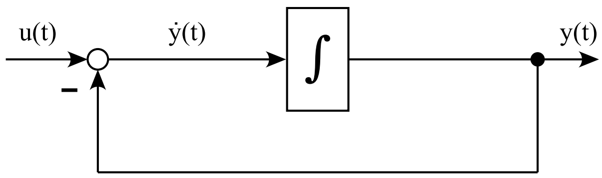
a) Es gilt $G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s}$. Somit folgt:

$$G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow Y(s) \cdot (s+1) = U(s)$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$ $\boxed{2}$

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \Rightarrow \dot{y}(t) = u(t) - y(t)$$

Das dazugehörige Blockschaltbild:



$\boxed{2}$

b) Allgemein gilt: $\varphi(\omega) = \arctan \frac{Im\{G_0\}}{Re\{G_0\}}$.

$$G_0 = \frac{K}{s+1} = \frac{K}{j\omega+1} = \frac{K}{j\omega+1} \cdot \frac{j\omega-1}{j\omega-1} = \frac{K\cdot(j\omega-1)}{-\omega^2-1} = \frac{K\cdot(1-j\omega)}{1+\omega^2} = \underbrace{\frac{K}{\omega^2+1}}_{Re\{G_0\}} + j \cdot \underbrace{\frac{-K\omega}{\omega^2+1}}_{Im\{G_0\}}$$

Eingesetzt ergibt sich:
$\varphi(\omega) = \arctan \frac{-K\omega}{K} = \arctan(-\omega) = -\arctan(\omega)$.

Oder schneller:
$G_0 = \frac{G_Z}{G_N}$, wobei G_Z das Zählerpolynom und G_N das Nennerpolynom ist. Somit ergibt sich für den Phasengang:

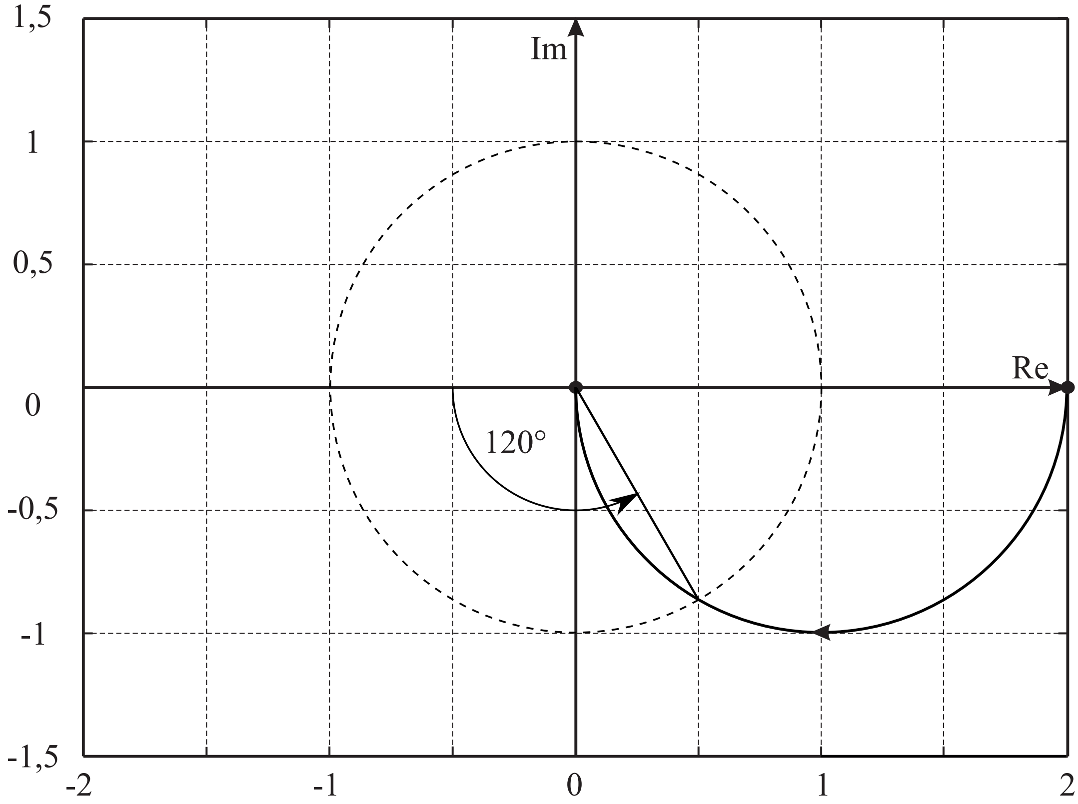
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Im\{G_Z\}}{Re\{G_Z\}} - \arctan \frac{Im\{G_N\}}{Re\{G_N\}} = \underbrace{\arctan \frac{0}{K}}_{\equiv 0} - \arctan \frac{\omega}{1} = -\arctan \omega$$

$\boxed{4}$

(Vergleiche Skript Seite 180)

c) $\varphi_R(\omega_D) = 180° - \|\varphi(\omega_D)\| = 180° - \|-\arctan(\omega_D)\| = 180° - \|\arctan(\omega_D)\|$.
$\varphi_R(\omega_D = \sqrt{3}) = 180° - \|\arctan(\sqrt{3})\| = 180° - \|60°\| = 120°$. $\boxed{2}$

d) Zeichnen Sie qualitativ die Ortskurve in das gegebene Diagramm. **Wichtig: Die Lage der Anfangs- und Endpunkte, sowie des Phasenrandes sind eindeutig zu kennzeichnen!**



4

$\sum$ 14

Aufgabe 5: Wurzelortskurve

a)
- Die n Äste der WOK beginnen in den **Polen** des **offenen** Regelkreises.
- m Äste der WOK enden in den **Nullstellen** des **offenen** Regelkreises. $n - m$ Äste der WOK enden im Unendlichen.
- Die WOK sind die Orte in der s-Ebene, wo die Pole des **geschlossenen** Regelkreises (in Abhängigkeit der Verstärkung) liegen können. $\boxed{3}$

b) Die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises wird zum skizzieren der Wurzelortskurve benötigt:

$$G_0 = K \cdot \frac{T_I s + 1}{T_I s \cdot (s+1)} \qquad \boxed{1}$$

Daraus ergeben sich die Null- undPolstellen

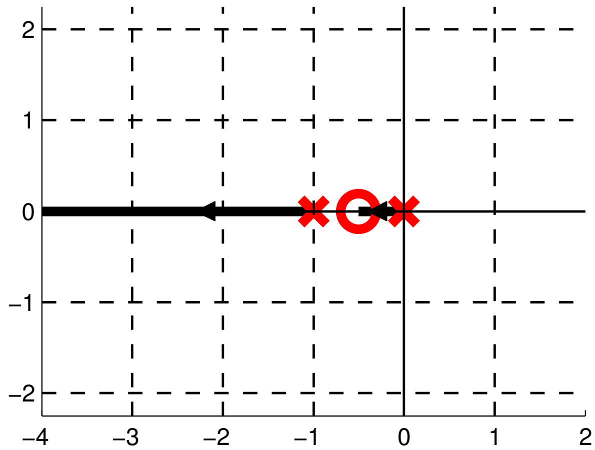
$$n_i: \quad T_I s + 1 \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \quad n_1 : s = \frac{-1}{T_I}$$

$$p_i: \quad T_I s \cdot (s+1) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \quad p_1 : s = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_2 : s = -1$$

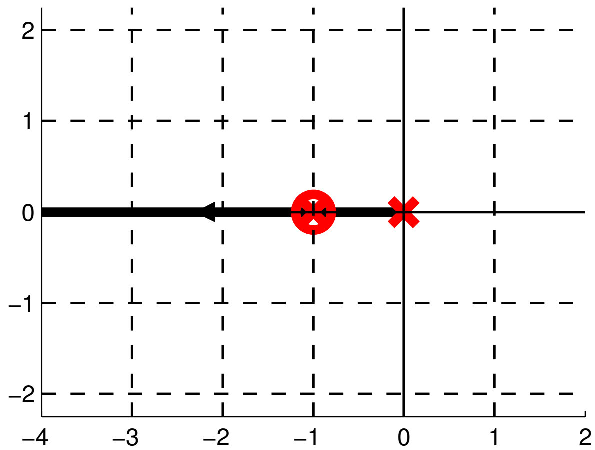
$\boxed{2}$

c) Fall A: Bsp. $T_I = 2 \quad \Rightarrow \quad n_1 = -0.5 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = -1$



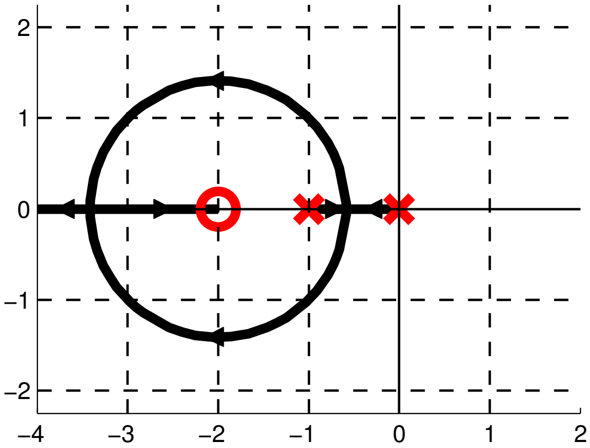
$\boxed{2}$

Fall B: $T_I = 1 \quad \Rightarrow \quad n_1 = -1 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = -1$



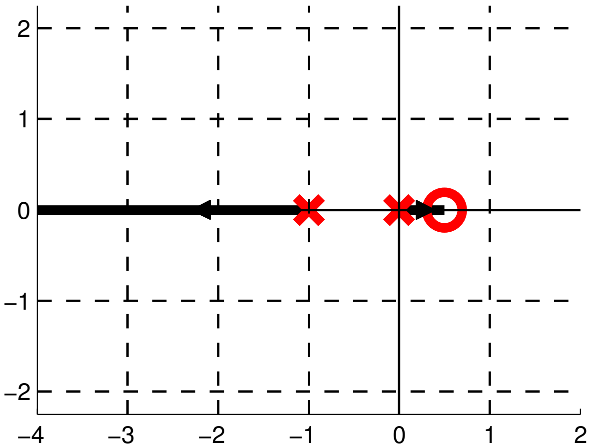
$\boxed{2}$

Fall C: Bsp. $T_I = 0.5 \quad \Rightarrow \quad n_1 = -2 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = -1$



2

Fall D: Bsp. $T_I = -2 \quad \Rightarrow \quad n_1 = 0.5 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = -1$



2

d) Stabilität: Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn die Pole des **geschlossenen** Regelkreises ausschließlich in der linken Halbebene liegen. 2

- Fall A: Aus der WOK lässt sich ablesen, das der geschlossene Regelkreis für alle Verstärkungen K $>$ 0 stabil ist.
- Fall B: Der geschlossene Regelkreis ist für alle Verstärkungen K $>$ 0 stabil.
- Fall C: Aus der WOK lässt sich ablesen, das der geschlossene Regelkreis für alle Verstärkungen K $>$ 0 stabil ist.
- Fall D: Der geschlossene Regelkreis ist für alle Verstärkungen K $>$ 0 instabil, da ein Pole des geschlossenen Regelkreises dann in der rechten Halbebene liegt. 2

e) Schwingungsfähigkeit: Das System ist nur dann schwingungsfähig, wenn die Pole des **geschlossenen** Regelkreises einen Imaginärteil besitzen. Daher ist 2

- Fall A: Nicht schwingungsfähig.
- Fall B: Nicht schwingungsfähig.
- Fall C: Schwingungsfähig.
- Fall D: Nicht schwingungsfähig. 2

f) Phasenminimalität: Ein lineares System ist nicht-phasenminimal, wenn die Nullstellen des offenen Regelkreises in der rechten s-Halbebene liegen oder es eine Totzeit aufweist. Daher ist: 2

- Fall A phasenminimal
- Fall B phasenminimal
- Fall C phasenminimal
- Fall D nicht phasenminimal 2

$\sum 26$