# Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 2 (MRT2)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

26. September 2011

| Name: | Punkte | A1 | A2 | A3 | A4 | Ges. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mat.-Nr.: | Soll: | 20 | 30 | 30 | 20 | 100 |
| Note: | Ist: | | | | | |

## Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
**Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!**
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Was gilt für die Empfindlichkeitsfunktion eines Regelkreises?

- ☐ Die Empfindlichkeitsfunktion beschreibt, wie stark sich eine Änderung der Regelstrecke $G_S(s)$ auf den geschlossenen Regelkreis $G_w(s)$ auswirkt.
- ☐ Anhand der Empfindlichkeitsfunktion lässt sich die Bandbreite des geschlossenen Regelkreises bestimmen.
- ☐ Die Empfindlichkeitsfunktion gibt an, wie empfindlich der Regelkreis auf Störungen reagiert.

b) Welche Aussagen gelten für Hilfsstell- und Hilfsregelgrößen?

- ☐ Eine Hilfsstellgröße kann genutzt werden, um als zusätzliches Stellglied die Regelstrecke zu beeinflussen und damit das dynamische Verhalten des Regelkreises zu verbessern.
- ☐ Durch den Einsatz einer Hilfs*stell*größe wird die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht beeinflusst.
- ☐ Durch den Einsatz einer Hilfs*regel*größe wird die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht beeinflusst.

c) Welche Aussagen sind in Bezug auf Mehrgrößenregelungen mit Entkopplung richtig?

- ☐ Es wäre wünschenswert, wenn der Entkopplungsregler unabhängig vom Hauptregler entworfen werden könnte.
- ☐ Selbst wenn eine perfekte Entkopplung gelingt, kann eine Mehrgrößenregelung nicht zu mehreren Eingrößenregelungen vereinfacht werden.
- ☐ Eine rein statische Entkopplung kann eingesetzt werden, sofern sich eine perfekte Entkopplung nicht realisieren lässt.

d) Die Regelung mit innerem Modell (Internal Model Control)...

- ☐ ...basiert auf einem Störgrößenmodell.
- ☐ ...basiert auf einem Modell der Regelstrecke.
- ☐ ...wird als Steuerung entworfen.

e) Der Zustandsvektor...

- ☐ ...muss alle innere Information über das System beinhalten.
- ☐ ...beschreibt den Zustand eines dynamischen Systems.
- ☐ ...beschreibt den Zustand eines statischen Systems.

f) Welche der Aussagen bezüglich der Stabilität der Zustandsgleichungen sind richtig?

- ☐ Die Stabilität des Systems hängt ausschließlich von der Systemmatrix $\mathbf{A}$ ab.
- ☐ Die Stabilität des Systems hängt sowohl von der Systemmatrix $\mathbf{A}$ als auch von der Ausgangsgleichung ab.
- ☐ Die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ sind gleichzeitig die Pole der zugehörigen Übertragungsfunktion (vorausgesetzt es gibt keine Pol-/Nullstellen-Kürzungen).

g) Die Zustandsebene (Phasenebene)...

- ☐ ...ist nur für lineare Systeme relevant.
- ☐ ...ist für den Entwurf zeitoptimaler Regelungen geeignet.
- ☐ ...eignet sich für die Analyse und Reglersynthese bei nichtlinearen Systemen 2. Ordnung.

h) Ein Zustandsregler...

- ☐ ...lässt sich durch Polvorgabe entwerfen.
- ☐ ...kann auch als P-Regler interpretiert werden.
- ☐ ...lässt sich durch Optimierung einer quadratischen Gütefunktion entwerfen.

i) Die Optimierung eines Zustandsreglers (LQ) basiert auf der Matrix-Riccati-Gleichung $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \frac{1}{r}\mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Kleinere Werte von $r$ machen die Regelung schneller, erfordern aber auch größere Stellgrößen.
- ☐ Größere Werte von $r$ machen die Regelung schneller, erfordern aber auch größere Stellgrößen.
- ☐ Für $r \to \infty$ erhält man eine unendlich hohe Stellgrößenbestrafung und der Regler ist inaktiv.

j) Was gilt bei der nichtlinearen Regelung mit inverser Kennlinie?

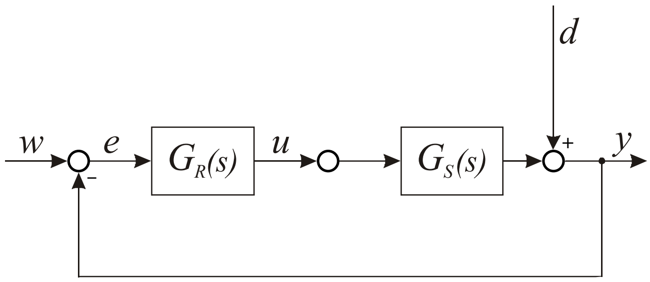
- ☐ Steckt die wesentliche Nichtlinearität der Regelstrecke im Stellglied, kann diese durch eine inverse Kennlinie (zumindest näherungsweise) kompensiert werden.
- ☐ Die Analyse und Synthese des Regelkreises ist wesentlich aufwändiger als im linearen Fall.
- ☐ Es gibt Kennlinien, die nicht eindeutig invertierbar sind.

k) Welche Aussagen sind für einen Zweipunktregler gültig?

- ☐ Das Problem des Chatterings (Ratterns) wird durch die Hysterese im Zweipunktregler verursacht.
- ☐ Um dem Problem des Chatterings zu begegnen, verwendet man in der Regel Zweipunktregler mit Hysterese.
- ☐ Ein Regelkreis mit Zweipunktregler ist linear.

## Aufgabe 2: Störgrößenaufschaltung

In der folgenden Abbildung ist ein Blockschaltbild eines geregelten Systems gegeben, auf dessen Ausgang $y$ eine Störung $d$ wirkt. Durch eine Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ soll dieser Einfluss eliminiert werden.




a) Zeichnen Sie in das gegebene Blockschaltbild eine geeignete Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ ein.

b) Leiten Sie aus den im Blockschaltbild gegebenen Größen die Übertragungsfunktion der Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ her. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

c) Nehmen Sie $G_S(s)$ als $PT_1$-Glied mit Totzeit $T_t$, Verstärkung $K$ und Zeitkonstante $T_1$ an. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_{AU}(s)$ mithilfe von $G_S(s)$.

d) Überprüfen Sie, ob $G_{AU}(s)$ realisierbar ist. Begründen Sie kurz Ihre Antwort. Sollte $G_{AU}(s)$ nicht realisierbar sein, berechnen Sie eine statische Näherungslösung und eine näherungsweise dynamische Lösung durch Hinzufügen eines geeigneten zusätzlichen Pols.

## Aufgabe 3: Zustandsraum

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines dynamischen Systems 3. Ordnung $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

a) Ermitteln Sie durch inverse Laplace-Transformation die zugehörige Differenzialgleichung im Zeitbereich.

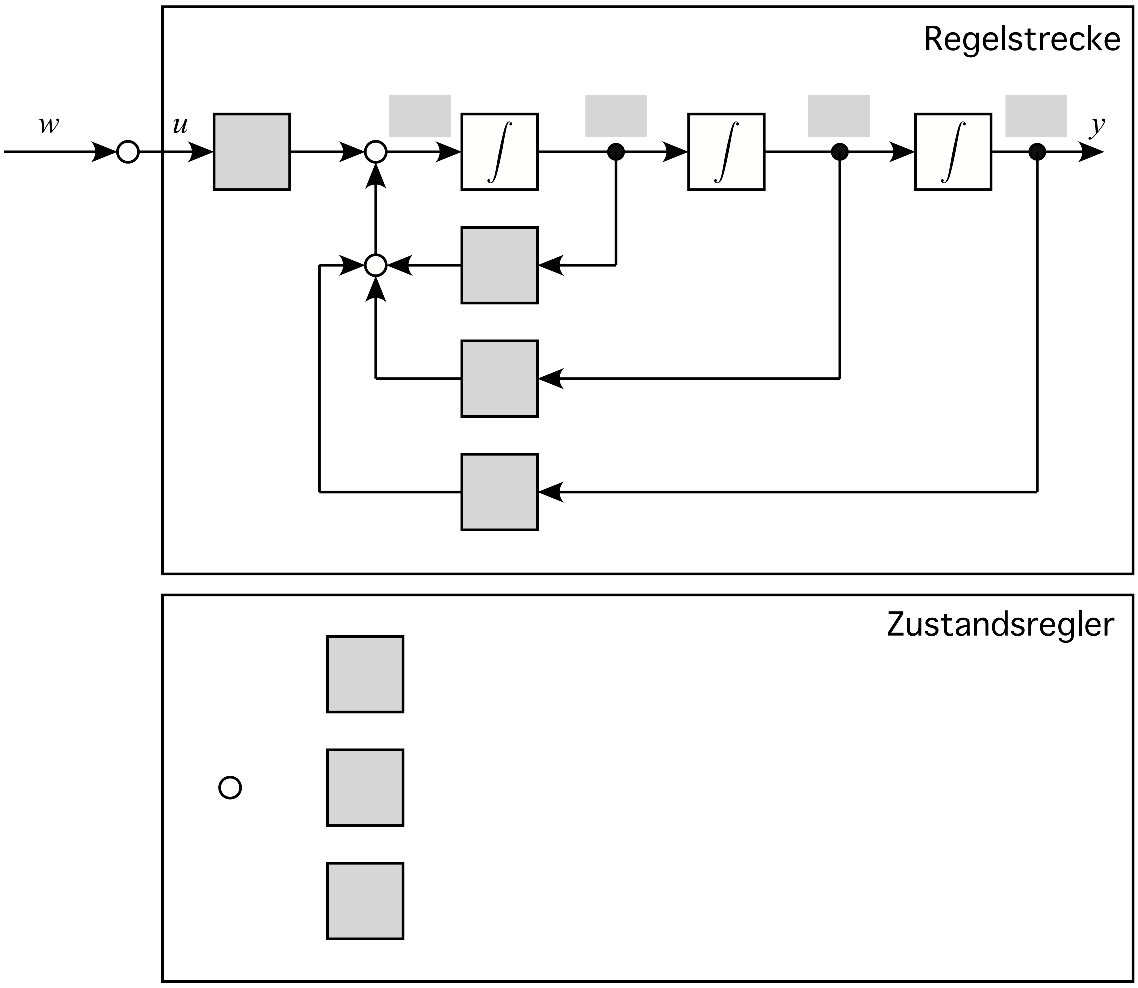
b) Formen Sie die zuvor ermittelte Differenzialgleichung in drei Differenzialgleichungen 1. Ordnung (Zustandsgleichungen) um. Wählen Sie dazu folgende Zustände:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t), \quad x_3(t) = \ddot{y}(t)$$

c) Überführen Sie die Zustandsgleichungen in die Matrix-Vektor-Schreibweise, ermitteln Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$, den Eingangsvektor $\mathbf{b}$ und den Ausgangsvektor $\mathbf{c}^T$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \mathbf{b} \cdot u(t), \quad y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

d) Das System wird mit dem Zustandsregler $\mathbf{k}^T = [k_1\ k_2\ k_3]$ geregelt. Ergänzen Sie im folgenden Blockschaltbild die Parameter, bzw. Signalbezeichnungen in den grau hinterlegten Kästchen für das System (Regelstrecke) und den Zustandsregler. Zeichnen Sie die fehlenden Verbindungslinien zwischen Regelstrecke und Zustandsregler ein.



## Aufgabe 4: Zustandsebene

Ein Satellit folgt der Bewegungsgleichung für eine ungedämpfte beschleunigte Bewegungs $F = m\,\ddot{x}$. Darin sind $x$ der Weg, $m$ die Masse des Satelliten und $F$ die Antriebskraft als Stellgröße.

**Hinweis:** Alle Aufgabenteile sind unabhängig von einander lösbar.

a) Das System kann durch zwei Zustandsgleichungen beschrieben werden. Der erste Zustand $x_1$ entspreche dem Weg, der zweite Zustand $x_2$ entspreche der Geschwindigkeit. Für den ersten Zustand $x_1 = x$ ergibt sich die erste Zustandsgleichung $\dot{x}_1 = x_2$. Wie muss die zweite Zustandsgleichung lauten?

Das oben genannte System soll durch einen Zweipunktregler mit variabler Schaltgeraden geregelt werden. Für den Regelkreis mit der Führungsgröße $w = 0$ und einer variablen Schaltgeraden ergibt sich folgendes Bild:

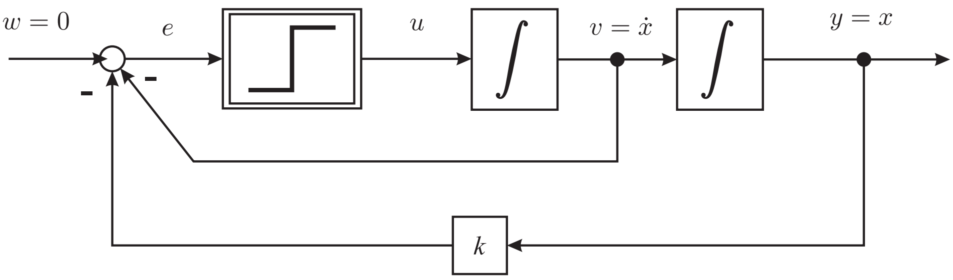



Abbildung 1: Regelkreis

Abbildung 2 zeigt korrekte und falsche Diagramme, für den in Abbildung 1 gezeigten Regelkreis, in der Zustandsebene.

b) Wie lauten die korrekten Beschriftungen der vertikalen Achse für dieses System in der Zustandsebene?

c) Was kennzeichnen die Pfeile an der Kurve im Diagramm der Zustandsebene?

d) In welchem der Bilder ist das jeweils korrekte Diagramm für die Zustandsebenendarstellung folgender Fälle gezeigt?

   1) Eine grenzstabile Dauerschwingung.
   2) Eine Dauerschwingung, die abklingt.
   3) Eine Dauerschwingung, die instabil wird.

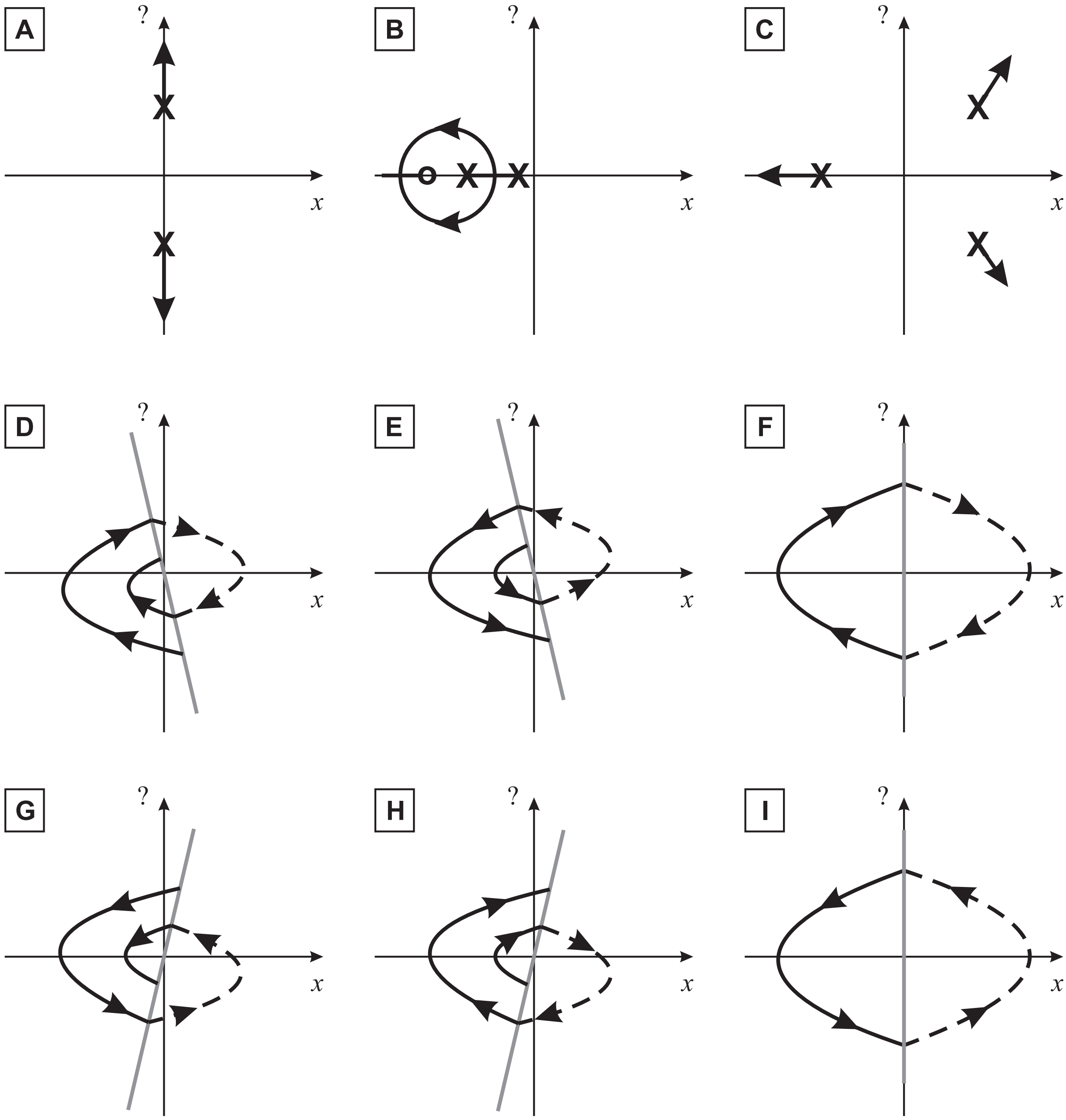



Abbildung 2: Auswahlmöglichkeiten für Aufgabe 4d)

# Lösungen:

## Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Was gilt für die Empfindlichkeitsfunktion eines Regelkreises?

- [x] Die Empfindlichkeitsfunktion beschreibt, wie stark sich eine Änderung der Regelstrecke $G_S(s)$ auf den geschlossenen Regelkreis $G_w(s)$ auswirkt.
- [x] Anhand der Empfindlichkeitsfunktion lässt sich die Bandbreite des geschlossenen Regelkreises bestimmen.
- [ ] Die Empfindlichkeitsfunktion gibt an, wie empfindlich der Regelkreis auf Störungen reagiert.

b) Welche Aussagen gelten für Hilfsstell- und Hilfsregelgrößen?

- [x] Eine Hilfsstellgröße kann genutzt werden, um als zusätzliches Stellglied die Regelstrecke zu beeinflussen und damit das dynamische Verhalten des Regelkreises zu verbessern.
- [ ] Durch den Einsatz einer Hilfs*stell*größe wird die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht beeinflusst.
- [ ] Durch den Einsatz einer Hilfs*regel*größe wird die Stabilität des geschlossenen Regelkreises nicht beeinflusst.

c) Welche Aussagen sind in Bezug auf Mehrgrößenregelungen mit Entkopplung richtig?

- [x] Es wäre wünschenswert, wenn der Entkopplungsregler unabhängig vom Hauptregler entworfen werden könnte.
- [ ] Selbst wenn eine perfekte Entkopplung gelingt, kann eine Mehrgrößenregelung nicht zu mehreren Eingrößenregelungen vereinfacht werden.
- [x] Eine rein statische Entkopplung kann eingesetzt werden, sofern sich eine perfekte Entkopplung nicht realisieren lässt.

d) Die Regelung mit innerem Modell (Internal Model Control)...

- [ ] ...basiert auf einem Störgrößenmodell.
- [x] ...basiert auf einem Modell der Regelstrecke.
- [x] ...wird als Steuerung entworfen.

e) Der Zustandsvektor...

- [x] ...muss alle innere Information über das System beinhalten.
- [x] ...beschreibt den Zustand eines dynamischen Systems.
- [ ] ...beschreibt den Zustand eines statischen Systems.

f) Welche der Aussagen bezüglich der Stabilität der Zustandsgleichungen sind richtig?

- [x] Die Stabilität des Systems hängt ausschließlich von der Systemmatrix $\mathbf{A}$ ab.
- [ ] Die Stabilität des Systems hängt sowohl von der Systemmatrix $\mathbf{A}$ als auch von der Ausgangsgleichung ab.
- [x] Die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ sind gleichzeitig die Pole der zugehörigen Übertragungsfunktion (vorausgesetzt es gibt keine Pol-/Nullstellen-Kürzungen).

g) Die Zustandsebene (Phasenebene)...

- [ ] ...ist nur für lineare Systeme relevant.
- [x] ...ist für den Entwurf zeitoptimaler Regelungen geeignet.
- [x] ...eignet sich für die Analyse und Reglersynthese bei nichtlinearen Systemen 2. Ordnung.

h) Ein Zustandsregler...

- [x] ...lässt sich durch Polvorgabe entwerfen.
- [ ] ...kann auch als P-Regler interpretiert werden.
- [x] ...lässt sich durch Optimierung einer quadratischen Gütefunktion entwerfen.

i) Die Optimierung eines Zustandsreglers (LQ) basiert auf der Matrix-Riccati-Gleichung $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \frac{1}{r}\mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- [x] Kleinere Werte von $r$ machen die Regelung schneller, erfordern aber auch größere Stellgrößen.
- [ ] Größere Werte von $r$ machen die Regelung schneller, erfordern aber auch größere Stellgrößen.
- [x] Für $r \to \infty$ erhält man eine unendlich hohe Stellgrößenbestrafung und der Regler ist inaktiv.

j) Was gilt bei der nichtlinearen Regelung mit inverser Kennlinie?

- [x] Steckt die wesentliche Nichtlinearität der Regelstrecke im Stellglied, kann diese durch eine inverse Kennlinie (zumindest näherungsweise) kompensiert werden.
- [ ] Die Analyse und Synthese des Regelkreises ist wesentlich aufwändiger als im linearen Fall.
- [x] Es gibt Kennlinien, die nicht eindeutig invertierbar sind.

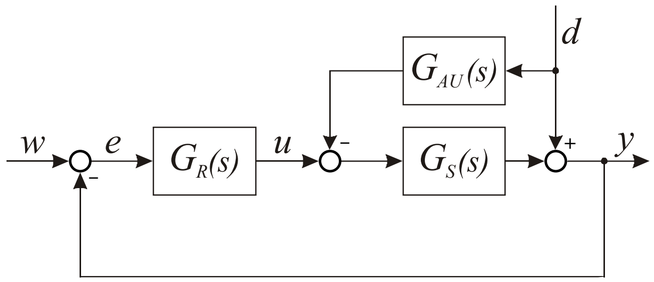
k) Welche Aussagen sind für einen Zweipunktregler gültig?

- [ ] Das Problem des Chatterings (Ratterns) wird durch die Hysterese im Zweipunktregler verursacht.
- [x] Um dem Problem des Chatterings zu begegnen, verwendet man in der Regel Zweipunktregler mit Hysterese.
- [ ] Ein Regelkreis mit Zweipunktregler ist linear.

$\sum$ 20

## Aufgabe 2: Störgrößenaufschaltung

a) Korrekte Darstellung der Störgrößenaufschaltung im gegebenen Blockschaltbild:




5

b) Die Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ ist:

$$G_{AU}(s) = \frac{1}{G_S(s)}$$ 2

Um den Einfluss der Störung auf den Ausgang aufzuheben, müssen die beiden Pfade zur Summationstelle unmittelbar nach der Regelstrecke $G_S(s)$ gleich sein. Da die Störübertragungsfunktion $G_D(s) = 1$ ist, gilt $-G_{AU}(s) \cdot G_S(s) = G_D(s) = 1$. Somit ist ist die Störgrößenaufschaltung die Inverse der Regelstrecke $G_{AU}(s) = \frac{1}{G_S(s)}$. 5

c) Für $G_S(s)$ als $PT_1$-Glied mit Totzeit $T_t$, Verstärkung $K$ und Zeitkonstante $T_1$ ergibt sich:

$$G_S(s) = \frac{K}{1 + T_1 \cdot s} \cdot e^{-s \cdot T_t}$$ 6

Um $G_{AU}(s)$ zu berechnen muss die Inverse der Strecke $G_S(s)$ gebildet werden:

$$G_{AU}(s) = \frac{1}{G_S(s)} = \frac{1}{K} \cdot (1 + T_1 \cdot s) \cdot e^{s \cdot T_t}$$ 3

d) Die Störgrößenaufschaltung $G_{AU}(s)$ ist aus zwei Gründen nicht realisierbar:

Zum einen ist die Ordnung des Zählerpolynoms größer als die Ordnung des Nennerpolynoms (m>n). Die Störgrößenaufschaltung ist instabil. Zum anderen kann eine positive Totzeit in einer Störgrößenaufschaltung nicht ungesetzt werden, da hierfür einen Zugriff auf zukünfige Störungen vonnöten wäre. Um eine Näherungslösung zu erreichen, muss die positive Totzeit ignoriert werden. 5

Die statische Näherungslösung wird erreicht durch Betrachtung des Endwertes:

$$\tilde{G}_{AU,stat}(s) = \lim_{s \to 0} G_{AU}(s) = \lim_{s \to 0} \left( \frac{1}{K} \cdot (1 + T_1 \cdot s) \right) = \frac{1}{K}$$ 2

Die dynamische Näherungslösung wird durch Hinzufügen einer schnellen Polstelle erreicht:

$$\tilde{G}_{AU,dyn}(s) = \frac{1 + T_1 \cdot s}{K \cdot (1 + T \cdot s)} \text{ mit } T \ll 1$$ 2

$\sum 30$

## Aufgabe 3: Zustandsraum

a) Umstellen der Übertragungsfunktion:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \Leftrightarrow (s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s)$$

$$\Leftrightarrow s^3 Y(s) + a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 \cdot U(s)$$

Es gilt für die Rücktransformation:

$$L^{-1}\{sY(s)\} = \dot{y}(t),\ L^{-1}\left\{s^2 Y(s)\right\} = \ddot{y}(t),\ L^{-1}\left\{s^3 Y(s)\right\} = \dddot{y}(t),\ L^{-1}\{U(s)\} = u(t)$$

Damit ergibt sich:

$$\boxed{\dddot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)}$$ 5

b) Mit den gegebenen Zuständen $x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t), x_3(t) = \ddot{y}(t)$ erhält man 3 Zustandsgleichungen:

Für $\dot{y}(t)$: $\boxed{\dot{x}_1(t) = x_2(t)}$, für $\ddot{y}(t)$: $\boxed{\dot{x}_2(t) = x_3(t)}$

Für $\dddot{y}(t)$: $\boxed{\dot{x}_3(t) = b_0 u(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t)}$ 5

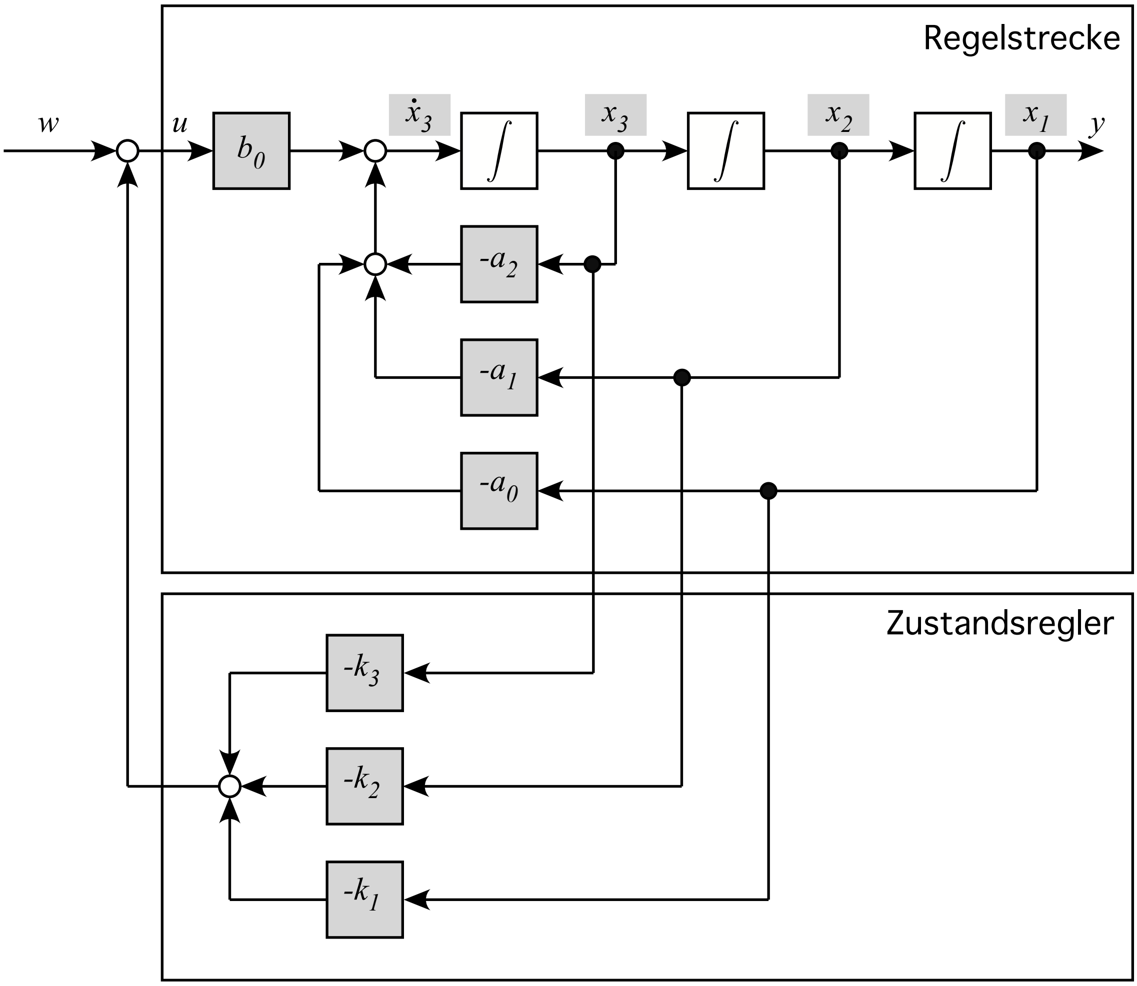
c) Daraus ergibt sich für die Zustandsgleichungen in Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot u(t)$$ 3

Und für die Ausgangsgleichung $y(t) = x_1(t)$:

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$ 1

d) Die Ergänzungen zum Blockschaltbild entnehmen Sie der nachfolgenden Abbildung. Im Blockschaltbild der Stecke müssen die Parameter der Differenzialgleichung $a_0$ bis $a_2$ und $b_0$, sowie die Zustände $x_1$ bis $x_3$ und $\dot{x}_3$ nachgetragen werden. Die Vorzeichen der Parameter können entweder in den Blöcken oder an den entsprechenden Summationsstellen eingetragen werden. Weiterhin sind die Blöcke des Zustandsreglers mit den Zuständen der Regelstrecke zu verbinden. Die Ausgänge der Blöcke des Zustandsreglers müssen summiert und auf den Eingang der Regelstrecke gegeben werden. 16


Regelstrecke
w
u
$b_0$
$\dot{x}_3$
$x_3$
$x_2$
$x_1$
y
$-a_2$
$-a_1$
$-a_0$
Zustandsregler
$-k_3$
$-k_2$
$-k_1$

$\sum 30$

## Aufgabe 4: Zustandsebene

a) Da für den zweiten Zustand gilt

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$$

ist

$$F(x) = m\,\ddot{x} = m\,\ddot{x}_1 = m\,\dot{x}_2.$$

Die zweite Zustandsgleichung lautet daher

$$\dot{x}_2 = \frac{F(x)}{m}$$ $\boxed{3}$

b) Auf der vertikalen Achse ist $\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2$ aufgetragen $\boxed{4}$

c) Die Zeit, bzw. der zeitlichen Verlauf $\boxed{4}$

d) Die Abbildungen A, B und C können ausgeschlossen werden, da sie keine Diagramme der Zustandsebene zeigen. Weiterhin sind die Abbildungen E, G und I auszuschließen, da die Richtung der zeitlichen Verläufe falsch ist. Möglich sind nur Bild D, F und H. Die Zuordnung muss wie folgt lauten:

1) Bild F, da sich die der zeitliche Verlauf der Schwingung um ein stabiles Zentrum bewegt. $\boxed{3}$
2) Bild D, da sich der zeitliche Verlauf der Schwingung dem Ursprung nähert. $\boxed{3}$
3) Bild H, da sich der zeitliche Verlauf vom Ursprung entfernt. $\boxed{3}$

$\boxed{\sum 20}$