Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

24. März 2010

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Gesamt
Mat.-Nr.:	Soll:	20	30	24	26	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Was trifft für eine Übertragungsfunktion mit globalem D-Verhalten zu?

- ☐ Die Sprungantwort fällt für $t \to \infty$ auf Null ab.
- ☐ Die asymptotische Amplitudenkennlinie hat für niedrige Frequenzen eine negative Steigung (z.B. -20 dB/Dekade).
- ☐ Die Frequenzgangortskurve beginnt im Urspung des Koordinatensystems.

b) Was trifft für eine Übertragungsfunktion mit globalem P-Verhalten zu?

- ☐ Die asymptotische Amplitudenkennlinie hat für niedrige Frequenzen eine positive Steigung (z.B. +20 dB/Dekade).
- ☐ Die Phasenverschiebung strebt für abnehmende Frequenzen gegen Null.
- ☐ Die Frequenzgangortskurve beginnt auf der reellen Achse des Koordinatensystems.

c) Wie kann die Phasenverschiebung einer Übertragungsfunktion für $\omega \to \infty$ bestimmt werden?

- ☐ Die Phasenverschiebung für $\omega \to \infty$ ergibt sich aus der Differenz von Nenner- und Zählerordnung der Übertragungsfunktion muliplíziert mit -90°.
- ☐ Die Phasenverschiebung für $\omega \to \infty$ hängt von der Reihenfolge der Pole und Nullstellen ab und muss daher für jede Übertragungsfunktion individuell bestimmt werden.
- ☐ Zur Berechnung der Phasenverschiebung für $\omega \to \infty$ wird nur die Nennerordnung der Übertragungsfunktion benötigt.

d) Wann ist ein System nicht phasenminimal?

- ☐ Wenn es eine Totzeit enthält.
- ☐ Wenn es Nullstellen mit positivem Realteil aufweist.
- ☐ Wenn die Phase stets größer als 0° ist.

e) Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ Das automatisierte Einschalten des Abblendlichts eines Fahrzeuges bei Dunkelheit ist eine Regelung.
- ☐ Ein Regler führt in Zusammenhang mit der Rückkopplung im Prinzip zu einer näherungsweisen Inversion der Regelstrecke.
- ☐ Liegt eine stabile Regelstrecke vor, so kann die gesteuerte Regelstrecke nicht instabil werden, wenn das Steuerglied ebenfalls stabil ist.

f) Was gilt für das vereinfachte und das allgemeine Nyquistkriterium?

- ☐ Das vereinfachte Kriterium ist ein Sonderfall des allgemeinen Kriteriums, das nicht bei allen Übertragungsfunktionen angewendet werden darf.
- ☐ Das vereinfachte Kriterium besagt: Wenn die Frequenzgangortskurve von G_0 den Punkt (-1,0) umschlingt, ist der geschlossene Regelkreis stabil.
- ☐ Das Nyquistkriterium dient dazu festzustellen, ob ein System phasenminimal ist.

g) Welche Überlegungen sind beim Reglerentwurf zu beachten?

- ☐ Der Regler sollte möglichst kompliziert sein (viele Pole und Nullstellen).
- ☐ Um Stabilität zu gewährleisten, sollten instabile Streckenpole stets mit Reglernullstellen gekürzt werden.
- ☐ Um eine stabile Regelung zu ermöglichen, dürfen positive Streckennullstellen niemals mit instabilen Reglerpolen gekürzt werden.

h) Warum sind nicht phasenminimale Systeme für die Regelung problematisch?

- ☐ Sie reagieren bei schneller Anregung (z.B. durch einen Sprung) zunächst in die der Eingangsgröße entgegengesetzten Richtung.
- ☐ Bei niedrigen Reglerverstärkungen (langsame Regelung) neigt die Regelung zur Instabilität.
- ☐ Bei hohen Reglerverstärkungen (schnelle Regelung) neigt die Regelung zur Instabilität.

i) Was versteht man unter einem zeitinvarianten System?

- ☐ Der Begriff zeitinvariantes System ist gleichbedeutend mit dem Begriff lineares System.
- ☐ Die Parameter des Systems (z.B. die Koeffizienten der Übertragungsfunktion) sind konstant und ändern sich nicht mit der Zeit.
- ☐ Zeitinvariant ist gleichbedeutend mit nicht schwingungsfähig.

j) Was gilt für die Reihenschaltung?

- ☐ Die Reihenschaltung zweier Systeme kann im Frequenzbereich durch eine einfache Multiplikation ausgedrückt werden.
- ☐ Im Zeitbereich muss für die Berechnung der Reihenschaltung ein Faltungsintegral gelöst werden.
- ☐ Die Reihenschaltung zweier Systeme kann im Frequenzbereich durch eine Addition ausgedrückt werden.

k) Was kann man aus der Pollage eines Übertragungssystems ablesen?

- ☐ Liegen alle Pole in der rechten Halbebene, dann ist das System stabil.
- ☐ Je weiter die konjugiert komplexen Pole von der reellen Achse entfernt sind, um so schneller schwingt das System nach einer Anregung.
- ☐ Ein stabiles System reagiert umso schneller auf eine Anregung, je weiter links die Pole in der linken Halbebene liegen.

l) Woran erkennt man einen stabilen Regelkreis?

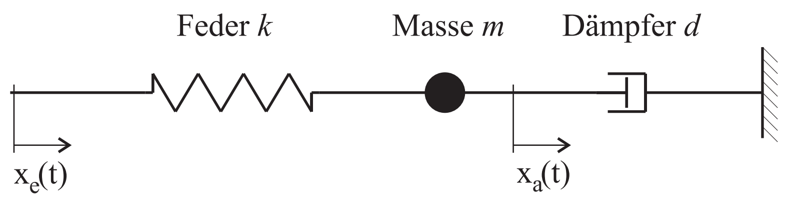
- ☐ Nach einer endlichen Erregung durch eine Führungsgröße nimmt die Regelgröße ebenfalls einen endlichen Endwert ein.
- ☐ Nach einer endlichen Erregung durch eine Führungsgröße klingt die Regelgröße auf Null ab.
- ☐ Bei einem stabilen Regelkreis muss der stationäre Regelfehler immer gleich Null sein.

m) Bei dem Entwurf eines Kompensationsreglers muss ein gewünschtes Führungsverhalten $G_W(s)$ des geschlossenen Regelkreises vorgegeben werden. Was ist dabei zu beachten?

- ☐ Das Verhältnis von Zähler und Nennerordnung von $G_W(s)$ kann beliebig gewählt werden.
- ☐ Die Pole von $G_W(s)$ sollten möglichst nahe bei Null liegen.
- ☐ Die Verstärkung von $G_W(s)$ muss gleich 1 sein, wenn der stationäre Regelfehler verschwinden soll.

Aufgabe 2: Modellierung und Laplace-Transformation

Gegeben ist das abgebildete Feder-Masse-Dämpfer System, bei dem $x_e(t)$ und $x_a(t)$ die Positionen der in der Abbildung gekennzeichneten Punkte bezeichnen.



Federkraft: $F_k = k \cdot (x_a(t) - x_e(t))$

Newtonsche Gesetz: $F_m = m \cdot a_a(t)$

geschwindigkeitsproportionale Dämpfung: $F_d = d \cdot v_a(t)$

a) Stellen Sie die Differentialgleichung auf, in der nur noch die Eingangsgröße $u(t) = x_e(t)$ und die Ausgangsgröße $y(t) = x_a(t)$ sowie deren Ableitungen vorkommen.

Falls Sie die Differentialgleichung nicht aufstellen können, rechnen Sie bitte mit der folgenden, korrekten Differentialgleichung weiter:

$$\frac{m}{k} \cdot \ddot{y}(t) + \frac{d}{k} \cdot \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ mit Hilfe der Laplace-Transformation und folgender Beziehungen.

Anfangsbedingungen: $y(0) = 0\,m \qquad \dot{y}(0) = 0\,m/s$

Systemparameter: $m = 1\,kg \qquad k = 1\,N/m \qquad d = 2\,Ns/m$

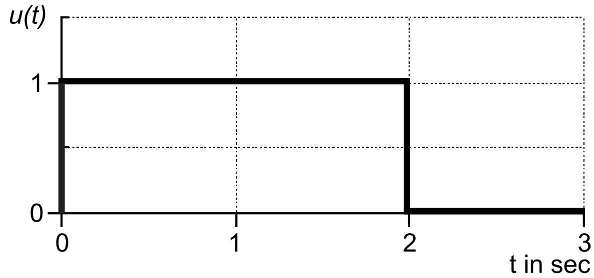
Falls Sie die Übertragungsfunktion nicht aufstellen können, rechnen Sie bitte mit der folgenden, korrekten Übertragungsfunktion weiter:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

c) Wo liegen die Pole der Übertragungsfunktion? Wie nennt man diesen Sonderfall?

d) Das Feder-Masse-Dämpfer System wird am Eingang mit dem Einheitssprung $\sigma(t)$ angeregt. Berechnen Sie die Sprungantwort im Zeitbereich mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und der inversen Laplace-Transformation.

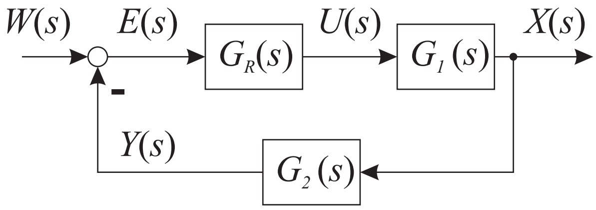
e) Das Feder-Masse-Dämpfer System wird nun am Eingang mit dem unten abgebildeten Signal angeregt. Bestimmen Sie das Eingangssignal U(s) aus dem abgebildeten Zeitverlauf $u(t)$. Beschreiben Sie **kurz und stichwortartig**, wie Sie die Systemantwort im Zeitbereich berechnen können, ohne eine erneute Partialbruchzerlegung durchzuführen. **Es ist keine Berechung der Systemantwort notwendig!**



Anmerkung: Alle Aufgabenteile können unabhängig voneinander gelöst werden.

Aufgabe 3: Reglerentwurf

Gegeben ist der skizzierte Regelkreis mit einem P-Regler.



Die Übertragungsfunktionen lauten:

$$G_R(s) = K \qquad G_1(s) = \frac{s+4}{(s+1)^2}\ , \qquad G_2(s) = \frac{1}{1+2\,s}$$

a) Ermitteln Sie für eine zunächst variable Reglerverstärkung K die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$.

b) Welches Systemverhalten weist die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ auf?

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich zulässiger Verstärkungen, in dem der geschlossene Regelkreis stabil bleibt.

d) Berechnen Sie den stationären Endwert des geschlossenen Regelkreises h(t $\rightarrow \infty$) und die bleibende Regelabweichung, wenn das System mit einem Einheitssprung an der Führungsgröße angeregt wird. Setzen sie dazu die zulässige Verstärkung ein, die zu der geringsten bleibenden Regelabweichung führt.

e) Welcher Eingriff muss am Regler vorgenommen werden, um eine bleibende Regelabweichung aufgrund einer sprungförmigen Führungsgröße zu vermeiden?

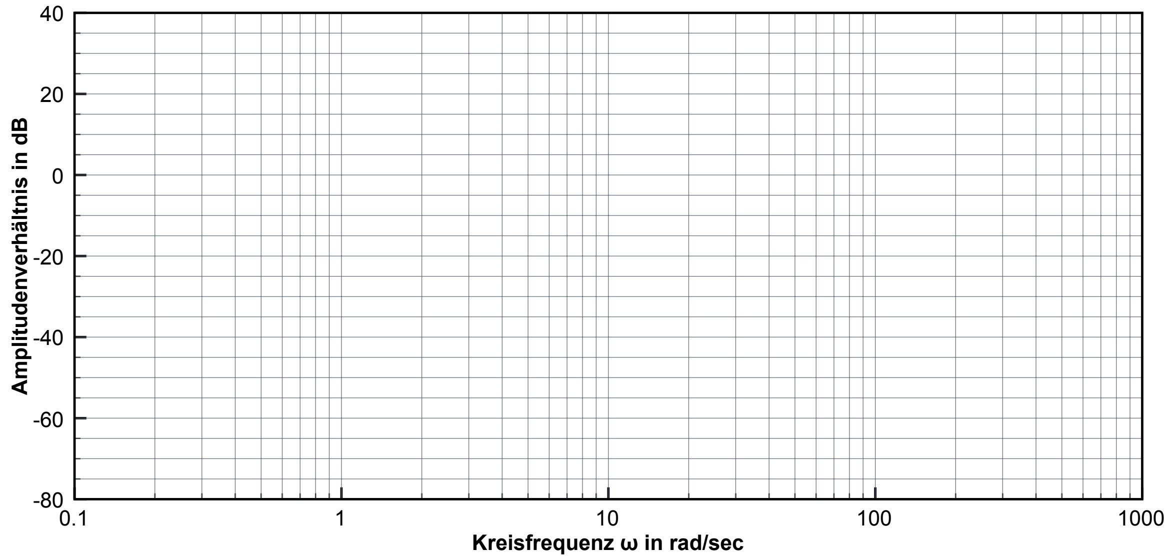
Aufgabe 4: Frequenzgang einer Übertragungsfunktion

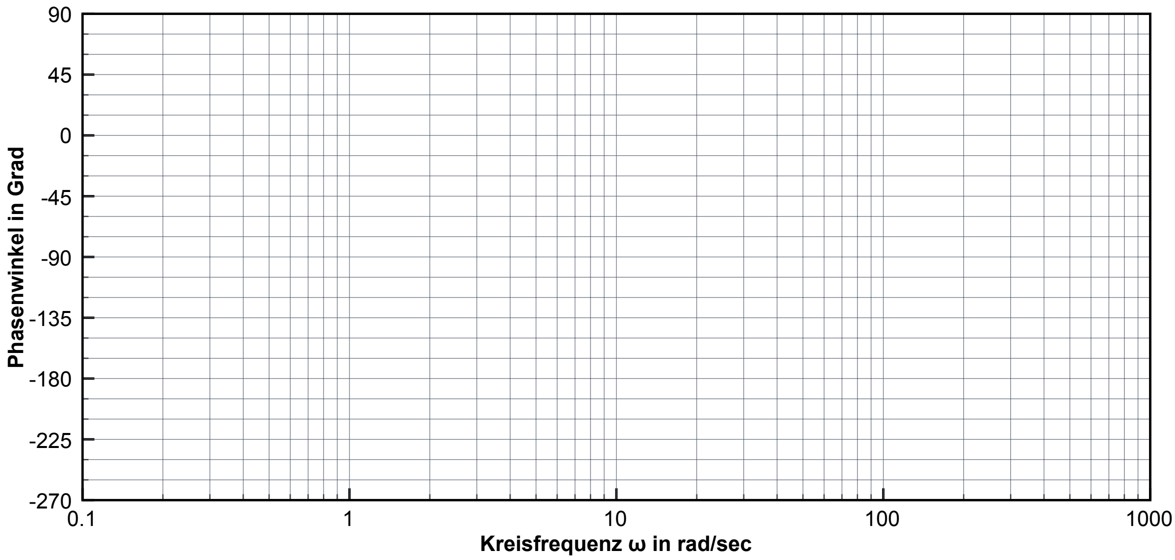
Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises:

$$G_0(s) = \frac{10 \cdot (1 + \frac{1}{10}s)^2}{(1+s)^2 \left(1 + \frac{1}{200}s\right)}$$

a) Ermitteln Sie die Eckfrequenzen, Asymptotensteigungen, Phasenwinkel sowie die Verstärkung des Systems und benennen Sie die Teilglieder der Übertragungsfunktion $G_0(s)$.

b) Zeichnen Sie den asymptotischen Amplituden- und Phasengang in das unten stehende Bodediagramm ein.

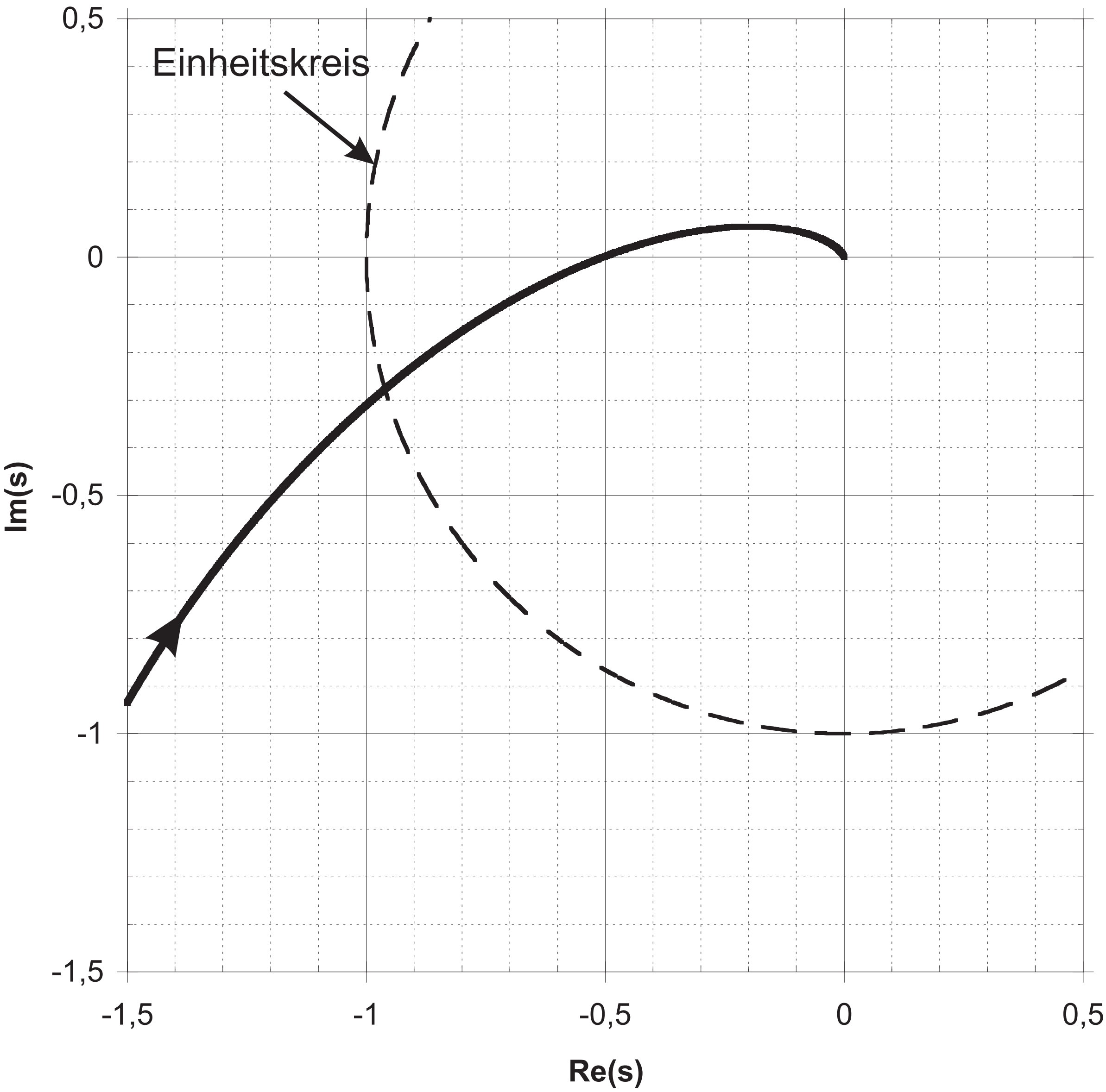




Hinweis: Die folgenden Aufgabenteile c) und d) können unabhängig von den Aufgabenteilen a) und b) bearbeitet werden.

c) Bestimmen Sie in der nachstehenden Frequenzgangsortskurve eines offenen Regelkreises die Amplitudenreserve k_R und die Phasenreserve φ_R. Zeichnen Sie die beiden Größen in das unten stehende Diagramm ein.

d) Erklären Sie kurz, welche Aussagen mit Hilfe der Amplitudenreserve und der Phasenreserve über den geschlossenen Regelkreis getroffen werden können.



Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Was trifft für eine Übertragungsfunktion mit globalem D-Verhalten zu?

- ■ Die Sprungantwort fällt für $t \to \infty$ auf Null ab.
- □ Die asymptotische Amplitudenkennlinie hat für niedrige Frequenzen eine negative Steigung (z.B. -20 dB/Dekade).
- ■ Die Frequenzgangortskurve beginnt im Urspung des Koordinatensystems.

b) Was trifft für eine Übertragungsfunktion mit globalem P-Verhalten zu?

- □ Die asymptotische Amplitudenkennlinie hat für niedrige Frequenzen eine positive Steigung (z.B. +20 dB/Dekade).
- ■ Die Phasenverschiebung strebt für abnehmende Frequenzen gegen Null.
- ■ Die Frequenzgangortskurve beginnt auf der reellen Achse des Koordinatensystems.

c) Wie kann die Phasenverschiebung einer Übertragungsfunktion für $\omega \to \infty$ bestimmt werden?

- ■ Die Phasenverschiebung für $\omega \to \infty$ ergibt sich aus der Differenz von Nenner- und Zählerordnung der Übertragungsfunktion muliplziert mit -90°.
- □ Die Phasenverschiebung für $\omega \to \infty$ hängt von der Reihenfolge der Pole und Nullstellen ab und muss daher für jede Übertragungsfunktion individuell bestimmt werden.
- □ Zur Berechnung der Phasenverschiebung für $\omega \to \infty$ wird nur die Nennerordnung der Übertragungsfunktion benötigt.

d) Wann ist ein System nicht phasenminimal?

■ Wenn es eine Totzeit enthält.

■ Wenn es Nullstellen mit positivem Realteil aufweist.

☐ Wenn die Phase stets größer als 0° ist.

e) Welche Aussagen sind richtig?

☐ Das automatisierte Einschalten des Abblendlichts eines Fahrzeuges bei Dunkelheit ist eine Regelung.

■ Ein Regler führt in Zusammenhang mit der Rückkopplung im Prinzip zu einer näherungsweisen Inversion der Regelstrecke.

■ Liegt eine stabile Regelstrecke vor, so kann die gesteuerte Regelstrecke nicht instabil werden, wenn das Steuerglied ebenfalls stabil ist.

f) Was gilt für das vereinfachte und das allgemeine Nyquistkriterium?

■ Das vereinfachte Kriterium ist ein Sonderfall des allgemeinen Kriteriums, das nicht bei allen Übertragungsfunktionen angewendet werden darf.

☐ Das vereinfachte Kriterium besagt: Wenn die Frequenzgangortskurve von G_0 den Punkt (-1,0) umschlingt, ist der geschlossene Regelkreis stabil.

☐ Das Nyquistkriterium dient dazu festzustellen, ob ein System phasenminimal ist.

g) Welche Überlegungen sind beim Reglerentwurf zu beachten?

☐ Der Regler sollte möglichst kompliziert sein (viele Pole und Nullstellen).

☐ Um Stabilität zu gewährleisten, sollten instabile Streckenpole stets mit Reglernullstellen gekürzt werden.

■ Um eine stabile Regelung zu ermöglichen, dürfen positive Streckennullstellen niemals mit instabilen Reglerpolen gekürzt werden.

h) Warum sind nicht phasenminimale Systeme für die Regelung problematisch?

■ Sie reagieren bei schneller Anregung (z.B. durch einen Sprung) zunächst in die der Eingangsgröße entgegengesetzten Richtung.

☐ Bei niedrigen Reglerverstärkungen (langsame Regelung) neigt die Regelung zur Instabilität.

■ Bei hohen Reglerverstärkungen (schnelle Regelung) neigt die Regelung zur Instabilität.

i) Was versteht man unter einem zeitinvarianten System?

☐ Der Begriff zeitinvariantes System ist gleichbedeutend mit dem Begriff lineares System.

■ Die Parameter des Systems (z.B. die Koeffizienten der Übertragungsfunktion) sind konstant und ändern sich nicht mit der Zeit.

☐ Zeitinvariant ist gleichbedeutend mit nicht schwingungsfähig.

j) Was gilt für die Reihenschaltung?

- [x] Die Reihenschaltung zweier Systeme kann im Frequenzbereich durch eine einfache Multiplikation ausgedrückt werden.
- [x] Im Zeitbereich muss für die Berechnung der Reihenschaltung ein Faltungsintegral gelöst werden.
- [ ] Die Reihenschaltung zweier Systeme kann im Frequenzbereich durch eine Addition ausgedrückt werden.

k) Was kann man aus der Pollage eines Übertragungssystems ablesen?

- [ ] Liegen alle Pole in der rechten Halbebene, dann ist das System stabil.
- [x] Je weiter die konjugiert komplexen Pole von der reellen Achse entfernt sind, um so schneller schwingt das System nach einer Anregung.
- [x] Ein stabiles System reagiert umso schneller auf eine Anregung, je weiter links die Pole in der linken Halbebene liegen.

l) Woran erkennt man einen stabilen Regelkreis?

- [x] Nach einer endlichen Erregung durch eine Führungsgröße nimmt die Regelgröße ebenfalls einen endlichen Endwert ein.
- [ ] Nach einer endlichen Erregung durch eine Führungsgröße klingt die Regelgröße auf Null ab.
- [ ] Bei einem stabilen Regelkreis muss der stationäre Regelfehler immer gleich Null sein.

m) Bei dem Entwurf eines Kompensationsreglers muss ein gewünschtes Führungsverhalten $G_W(s)$ des geschlossenen Regelkreises vorgegeben werden. Was ist dabei zu beachten?

- [ ] Das Verhältnis von Zähler und Nennerordnung von $G_W(s)$ kann beliebig gewählt werden.
- [ ] Die Pole von $G_W(s)$ sollten möglichst nahe bei Null liegen.
- [x] Die Verstärkung von $G_W(s)$ muss gleich 1 sein, wenn der stationäre Regelfehler verschwinden soll.

Aufgabe 2: Modellierung und Laplace-Transformation

a) Aufstellen der Differentialgleichung:

Federkraft: $F_k = k \cdot (x_a(t) - x_e(t))$

Newtonsche Gesetz: $F_m = m \cdot a_a(t) \Rightarrow F_m = m \cdot \ddot{x}_a(t)$

geschwindigkeitsproportionale Dämpfung: $F_d = d \cdot v_a(t) \Rightarrow F_d = d \cdot \dot{x}_a(t)$

$$\sum_{i=1}^{3} F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad F_k + F_m + F_d = 0 \qquad \boxed{2}$$

$$\begin{aligned} k \cdot (x_a(t) - x_e(t)) + m \cdot \ddot{x}_a(t) + d \cdot \dot{x}_a(t) &= 0 \\ m \cdot \ddot{x}_a(t) + d \cdot \dot{x}_a(t) + k \cdot x_a(t) - k \cdot x_e(t) &= 0 \\ m \cdot \ddot{x}_a(t) + d \cdot \dot{x}_a(t) + k \cdot x_a(t) &= k \cdot x_e(t) \\ \frac{m}{k} \cdot \ddot{x}_a(t) + \frac{d}{k} \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) &= x_e(t) \qquad \text{mit: } u(t) = x_e(t),\ y(t) = x_a(t) \ \boxed{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{m}{k} \cdot \ddot{y}(t) + \frac{d}{k} \cdot \dot{y}(t) + y(t) = u(t)} \qquad \boxed{2}$$

b) Aufstellen der Übertragungsfunktion mit $m = 1$, $k = 1$ und $d = 2$:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \qquad \text{mit: } y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0 \qquad \boxed{2}$$

$$\circ\!-\!\bullet$$

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) &= U(s) \qquad \boxed{2} \\ Y(s)(s^2 + 2s + 1) &= U(s) \\ Y(s)(s+1)^2 &= U(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}} \qquad \boxed{2}$$

c) Pole der Übertragungsfunktion und Bezeichnung des Sonderfalls:

- Die Übertragungsfunktion besitzt einen Doppelpol bei $s = -1$. $\boxed{1}$
- Diesen Sonderfall nennt man aperiodischen Grenzfall. $\boxed{1}$

d) Berechnung der Sprungantwort im Zeitbereich:

$$u(t) = \sigma(t)$$

$$\circ\!-\!\bullet$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \qquad \boxed{1}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s}$$ $\boxed{1}$

Rücktransformation mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1} \underbrace{\left[\frac{B_1}{s}\right]}_{\text{einfacher Pol}} \underbrace{+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B_{21}}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B_{22}}{(s+1)^2}\right]}_{\text{mehrfach reelle Pole}}$$ $\boxed{2}$

Für den einfachen Pol $s = 0$ gilt:

$$B_k = [Y(s)(s - s_k)]_{s=s_k} \Rightarrow B_1 = \left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]_{s=0} \Leftrightarrow B_1 = 1$$ $\boxed{2}$

Für den doppelten $(m = 2)$ Pol $s = -1$ gilt mit $1! = 0! = 1$:

$$B_{2i} = \frac{1}{(m-i)!} \cdot \left[\frac{d^{m-i}}{ds^{m-i}}\left\{Y(s)(s-s_k)^m\right\}\right]_{s=s_k}$$

$$\Rightarrow B_{21} = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \left[\frac{d}{ds}\left\{\frac{(s+1)^2}{s(s+1)^2}\right\}\right]_{s=-1} = \left[-\frac{1}{s^2}\right]_{s=-1}$$

$$\Leftrightarrow B_{21} = -1$$ $\boxed{2}$

$$\Rightarrow B_{22} = \frac{1}{(2-2)!} \cdot \left[\frac{1}{s}\right]_{s=-1} = 1 \cdot \frac{1}{-1} \Leftrightarrow B_{22} = -1$$ $\boxed{2}$

$\frac{d^0}{ds^0}$ bedeutet, dass keine Ableitung gebildet wird.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

Mit Hilfe der Korrespondenztabelle ergibt sich:

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] = \left(1 - e^{-t} - te^{-t}\right)\sigma(t)}$$ $\boxed{2}$

e) Bestimmung des Eingangssignals $U(s)$ und Beschreibung der Systemantwortberechnung:

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2)$$ $\boxed{1}$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$U(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{I}} - \underbrace{\frac{1}{s}e^{-2s}}_{\text{II}} = \frac{1}{s}(1 - e^{-2s})$$ $\boxed{1}$

- Anteil des Eingangssignals (I) wie in Aufgabenteil d).
- Anteil des Eingangssignals (II) wie in Aufgabenteil d), jedoch um 2 „verschoben“.
- Übernahme des Ergebnisses der Partialbruchzerlegung aus Aufgabenteil d) und Anwendung der „zeitlichen Verschiebung“ auf den Anteil des Eingangssignals (II) führt direkt zum Ergebnis. $\boxed{1}$
- „zeitliche Verschiebung“: $f(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)e^{-sT}$ $\boxed{1}$

$\boxed{\sum 30}$

Aufgabe 3: Reglerentwurf

a) Ermitteln Sie für eine zunächst variable Reglerverstärkung K die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$:

$$G_w(s) = \frac{X(s)}{W(s)}$$

$$X(s) = (W(s) - G_2(s)\,X)\,G_R(s)\,G_1(s) \qquad \boxed{2}$$

$$G_w(s) = \frac{X}{W} = \frac{G_R(s)\,G_1(s)}{1 + G_R(s)\,G_1(s)\,G_2(s)} \qquad \boxed{2}$$

$$G_w(s) = \frac{K\,\dfrac{s+4}{(s+1)^2}}{1 + K \cdot \dfrac{s+4}{(s+1)^2} \cdot \dfrac{1}{1+2\,s}}$$

$$G_w(s) = \frac{K \cdot (s+4)\,(1+2\,s)}{(s+1)^2\,(1+2s) + K \cdot (s+4)} \qquad \boxed{2}$$

b) Welches Systemverhalten weist die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ auf?

P-D_2-T_3 Verhalten $\boxed{2}$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den Bereich zulässiger Verstärkungen, in dem der geschlossene Regelkreis stabil bleibt.

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$2\,s^3 + 5\,s^2 + (K+4)\,s + 4\,K + 1 = 0 \qquad \boxed{2}$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= 4\,K + 1 & c_0 > 0 &\Rightarrow K > -\frac{1}{4} \qquad \boxed{2}\\
c_1 &= K + 4 & c_1 > 0 &\Rightarrow K > -4 \qquad \boxed{2}\\
c_2 &= 5 & c_2 > 0 &\Rightarrow 5 > 0\\
c_3 &= 2 & c_3 > 0 &\Rightarrow 2 > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1\,c_2 - c_0\,c_3 > 0 \qquad &\Rightarrow \quad 5 \cdot (K+4) - 2 \cdot (4\,K+1) > 0\\
&\Rightarrow \quad K < 6 \qquad \boxed{2}
\end{aligned}$$

Der geschlossene Regelkreis ist für $-\frac{1}{4} < K < 6$ stabil. $\boxed{1}$

d) Berechnen Sie den stationären Endwert des geschlossenen Regelkreises h(t → ∞) und die bleibende Regelabweichung e(t → ∞), wenn das System mit einem Einheitssprung an der Führungsgröße angeregt wird. Setzen sie dazu die zulässige Verstärkung ein, die zu der geringsten bleibenden Regelabweichung führt.

$$\begin{aligned} h(t \to \infty) &= \lim_{s \to 0} (s \cdot W(s) \cdot G_w), \quad \text{mit } W(s) = \frac{1}{s} && \boxed{2} \\ &= \lim_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{2\,K\,s^2 + 9\,K\,s + 4\,K}{2\,s^3 + 5\,s^2 + (K+4)\,s + 4\,K + 1} \right) \\ &= \frac{4\,K}{4\,K+1} \quad \text{mit } K = 6 && \boxed{2} \\ &= \frac{24}{25} && \boxed{1} \end{aligned}$$

$$e(t \to \infty) = 1 - h(t \to \infty) = \frac{1}{25} \qquad \boxed{1}$$

e) Welcher Eingriff muss am Regler vorgenommen werden, um eine bleibende Regelabweichung aufgrund einer sprungförmigen Führungsgröße zu vermeiden?

Der Regler muss um einen I-Anteil ergänzt werden, um eine bleibende Regelabweichung aufgrund einer sprungförmigen Führungsgröße zu vermeiden. $\boxed{1}$

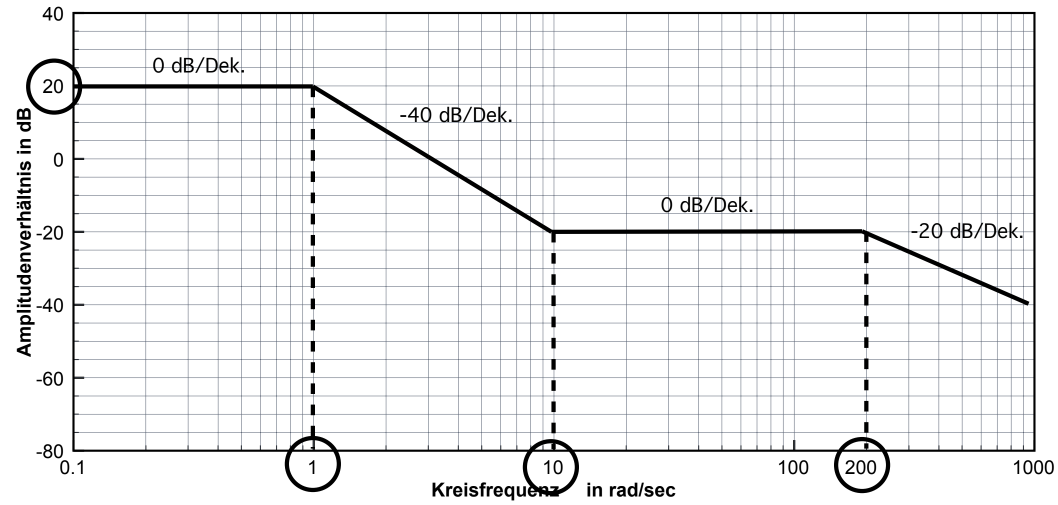
Aufgabe 4: Frequenzgang

a) Da die Übertragungsfunktion globales P-Verhalten hat, trägt man die Verstärkung 10 (entspricht 20 dB) für die Konstruktion des Amplitudengangs bei $\omega = 0{,}1\,\mathrm{sec}^{-1}$ (linker Rand) ein. Das Amplitudenverhältnis beginnt mit 0 dB/Dek. und das Phasenverhältnis bei 0°. Die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion lauten (sortiert nach steigender Eckfrequenz ω_e):

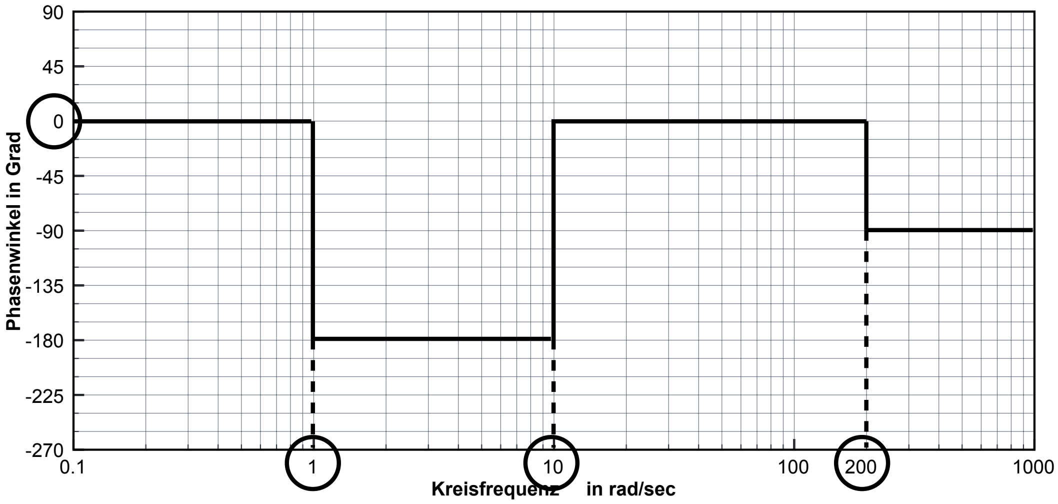
$\omega_{e1} = 1\,\mathrm{sec}^{-1}$	PT_2-Glied	Doppelpol bei s=-1	-40 dB/Dek.	-180°	
$\omega_{e2} = 10\,\mathrm{sec}^{-1}$	PD_2-Glied	Doppelnullstelle bei s=-10	0 dB/Dek.	0°	12
$\omega_{e3} = 200\,\mathrm{sec}^{-1}$	PT_1-Glied	Pol bei s=-200	-20 dB/Dek.	-90°	

b)

$$G_0(s) = \frac{10 \cdot (1 + \frac{1}{10}s)^2}{(1+s)^2 \left(1 + \frac{1}{200}s\right)}$$



4



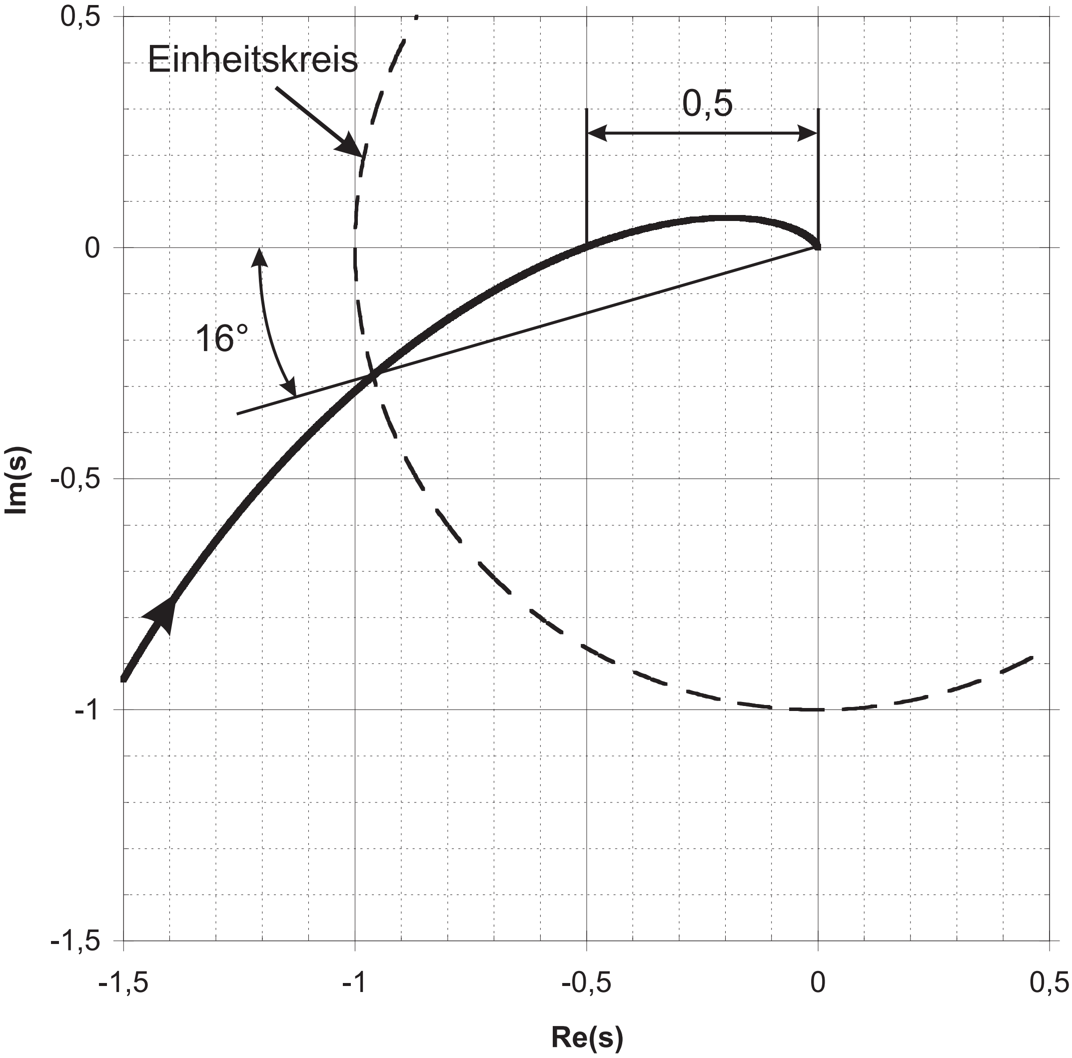
4

c) Die Amplitudenreserve ermittelt sich anhand des Schnittpunkts $|G_0(i\omega_{-180°})| = 0{,}5$ der Ortskurve mit der negativen reellen Achse und lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$k_R = \frac{1}{|G_0(i\omega_{-180°})|} = \frac{1}{0{,}5} = 2 > 1\,.$$ $\boxed{1}$

Die Phasenreserve lässt sich ebenfalls anhand der Ortskurve ablesen und beträgt hier

$$\varphi_R = 180° - |\varphi(\omega_D)| = 16°\,.$$ $\boxed{1}$



$\boxed{2}$

d) Die Amplitudenreserve k_R gibt an, um welchen Faktor die Verstärkung des Systems erhöht werden kann, bis die Stabilitätsgrenze erreicht ist. $\boxed{2}$

Die Phasenreserve φ_R gibt an, um welchen Winkel die Phasenverschiebung erhöht werden kann, bis das System instabil wird.

$\boxed{\sum 26}$