Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 2 (MRT2)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

26. Juli 2010

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	20	30	30	20	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Warum kann ein **ideales** PD-Glied $G(s) = K_P + K_D s$ nicht realisiert werden?

- ☐ Bei der Übertragungsfunktion ist die Zählerordnung größer als die Nennerordnung.
- ☐ Das ideale PD-Glied besitzt eine instabile Polstelle.
- ☐ Die Sprungantwort des idealen PD-Gliedes beinhaltet eine Dirac-Funktion, die nicht realisiert werden kann.

b) Kann die Inverse der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s-1}{s+1}$ in der Praxis zur Vorsteuerung verwendet werden?

- ☐ Ja, denn Zähler- und Nennerordnung sind gleich groß.
- ☐ Nein, denn die resultierende Vorsteuerung wäre instabil.
- ☐ Nein, die Inverse muss, um realisiert werden zu können, um einen schnellen Pol ergänzt werden.

c) Welche Aussagen zur Störgrößenaufschaltung sind richtig?

- ☐ Bei der Störgrößenaufschaltung wird die Summe aus gemessener Störgröße und Regelgröße von der Führungsgröße abgezogen.
- ☐ Bei der Störgrößenaufschaltung wird die gemessene Störgröße auf den Reglerausgang negativ aufgeschaltet.
- ☐ Die Stabilität des Regelkreises wird durch die Störgrößenaufschaltung nicht beeinflusst, da es sich um eine Steuerung handelt.

d) Welche Aussagen zur Verwendung eines Hilfsreglers sind richtig?

- ☐ Der Hilfsregler misst die Störgröße am Ausgang der Strecke und verbessert dadurch das dynamische Verhalten.
- ☐ Der Hilfsregler benötigt einen zusätzlichen Sensor.
- ☐ Der Hilfsregler greift in den geschlossenen Regelkreis ein, wodurch die Stabilität beeinflusst wird.

e) Was ist der Zweck der Entkopplung eines Mehrgrößenregelkreises?

- ☐ Die Umwandlung des gekoppelten Regelkreises in mehrere voneinander unabhängige Regelkreise.
- ☐ Die Verwendung der bekannten Reglerentwurfsmethoden für einschleifige Regelkreise zu ermöglichen.
- ☐ Die Entkopplung verhindert, dass sich Störungen auf die Regelgröße auswirken.

f) Wozu dienen Anti-Windup Methoden?

- ☐ Verbesserung des Verhaltens eines P-Reglers bei Auftreten von Stellgrößenbeschränkungen.
- ☐ Beschränkung des D-Anteils eines Reglers bei sprungförmigen Änderungen der Führungsgröße.
- ☐ Beschränkung des I-Anteils eines Reglers bei Auftreten von Stellgrößenbeschränkungen.

g) Welche Aussagen zu Internal Model Control (IMC) sind richtig?

- ☐ IMC wird nur bei nichtlinearen Regelstrecken verwendet.
- ☐ Sind die Regelstrecke und der IMC-Regler stabil, dann ist auch der geschlossene Regelkreis stabil.
- ☐ Sind Modell und Strecke identisch, wird die Regelung zur Steuerung. Die Rückführung wird nur noch zur Ausregelung von Störgrößen aktiv.

h) Welche Eigenschaften besitzt die Zustandsraummethode?

- ☐ Eine Differentialgleichung n. Ordnung wird auf ein System aus n Differentialgleichungen jeweils 1. Ordnung gebracht.
- ☐ Man benötigt kein Modell der Strecke, da die Regelung mit Hilfe von Zuständen entworfen wird.
- ☐ Eine Erweiterung der Zustandsraummethode auf Mehrgrößensysteme ist möglich.

i) Ein durch Zustandsgleichungen beschriebenes dynamisches System ist genau dann stabil, ...

- ☐ wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms einen negativen Realteil haben.
- ☐ wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ einen negativen Realteil haben.
- ☐ wenn alle Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$ einen negativen Realteil haben.

j) Regt man ein nichtlineares System mit Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz an ...

- ☐ ist das Amplitudenverhältnis stets nur von der Frequenz abhängig.
- ☐ kann die Dämpfung von der Amplitude abhängig sein.
- ☐ kann sich die Frequenz und die Signalform der Schwingung ändern.

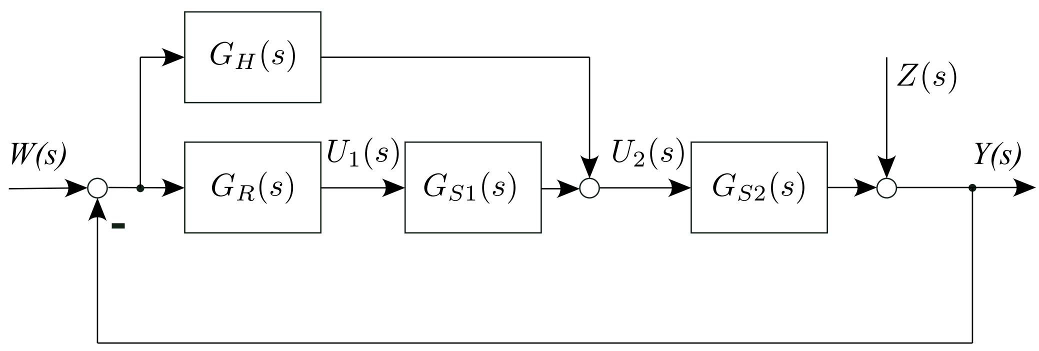
k) Die Zustandsebene ...

- ☐ behandelt nichtlineare dynamische Systeme 2. Ordnung.
- ☐ behandelt nichtlineare statische Systeme 2. Ordnung.
- ☐ stellt einen zweidimensionalen Zustandsraum grafisch dar.

Aufgabe 2: Hilfstellgröße

Gegeben ist ein Regelkreis mit einem Regler $G_R(s)$, einem Hilfsstellglied $G_H(s)$ und einer zweiteiligen Regelstrecke $G_{S1}(s)$ und $G_{S2}(s)$ (siehe Abbildung). Auf den Ausgang der Regelstrecke $G_{S2}(s)$ wirkt die Störgröße $Z(s)$, für die Führungsgröße soll angenommen werden, dass $W(s) = 0$ gilt.

Hinweis: Alle Aufgabenteile können unabhängig voneinander gelöst werden.



$$G_{S1}(s) = \frac{1}{s} \qquad G_{S2}(s) = \frac{1}{1+10s}$$

a) Zeigen Sie für den dargestellten Regelkreis, dass bei verschwindender Führungsgröße $W(s) = 0$ folgender Zusammenhang zwischen der Regelgröße $Y(s)$ und der Störgröße $Z(s)$ gilt:

$$Y(s) = G_Z(s) \cdot Z(s) = \frac{1}{1 + (G_H + G_R \cdot G_{S1}) \cdot G_{S2}} \cdot Z(s)$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus a), dass bei Verwendung eines idealen PD-Reglers $G_R(s) = K_P + K_D s$, einem P-Hilfstellglied $G_H(s) = K_H$ und den im Blockschaltbild angegebenen Übertragungsfunktionen für $G_{S1}(s)$ und $G_{S2}(s)$ folgender Zusammenhang zwischen der Regelgröße $Y(s)$ und der Störgröße $Z(s)$ gilt:

$$Y(s) = G_Z(s) \cdot Z(s) = \frac{s(s+0{,}1)}{s^2 + 0{,}1(1 + K_H + K_D)s + 0{,}1K_P} \cdot Z(s)$$

c) Das gewünschte Störverhalten für den Regelkreis soll folgendermaßen lauten:

$$Y(s) = G_Z(s) \cdot Z(s) = \frac{s}{s+10} \cdot Z(s)$$

Leiten Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus b) her, welche Reglerparameter für K_P und K_D gewählt werden müssen, um das gewünschte Verhalten zu erreichen, wenn keine Hilfsstellgröße verwendet wird ($K_H(s) = 0$).

Hinweis: Hierzu muss eine Nullstelle gegen einen Pol gekürzt werden.

d) Das gleiche Störverhalten wie unter c) kann auch mit einem P-Regler (also $K_D = 0$) erreicht werden, wenn zusätzlich das Hilfstellglied verwendet wird (also $K_H \neq 0$). Berechnen Sie für diesen Fall die Reglerparameter K_P und K_H.

e) Die Stellgrößen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ sollen abschließend für die verschiedenen Reglervarianten genauer untersucht werden. Wenn man annimmt, dass die Störgröße ein zeitlich verzögertes Verhalten ($T = 1\,\text{sec}$) hat, ergeben sich mit den zuvor bestimmten Reglerparametern folgende Signale für die Stellgrößen im Bildbereich:

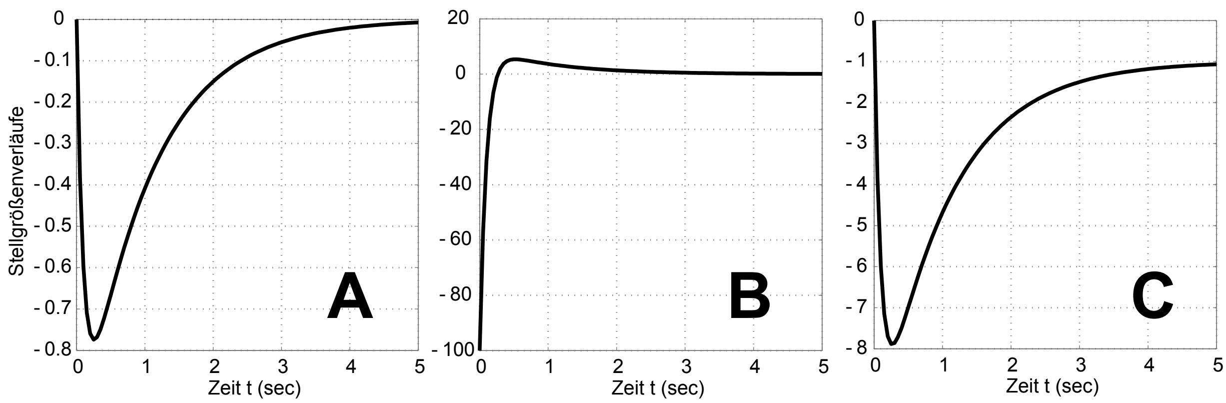
PD-Regler ohne Hilfsstellgröße: $U_1(s) = \dfrac{-100(s+0{,}1)}{(s+10)(s+1)}$

P-Regler und Hilfsstellgröße: $U_1(s) = \dfrac{-10}{(s+10)(s+1)}$ $\quad U_2(s) = \dfrac{-100(s+0{,}1)}{s(s+10)(s+1)}$

Ordnen Sie die unten abgebildeten Stellgrößenverläufe $u(t)$ den obigen drei Signalen im Bildbereich zu. Begründen Sie ihre Wahl mit Hilfe des Anfangs- oder Endwertsatzes. Beginnen Sie mit dem Fall PD-Regler ohne Hilfsstellgröße und dem Anfangswertsatz.

Hinweis: Sie müssen nicht für alle Fälle Anfangs- **und** Endwertsatz anwenden, sondern nur den Satz, der nötig ist, um die Zeitverläufe zuordnen zu können. Bitte achten Sie auch auf die unterschiedliche Skalierung der y-Achsen.

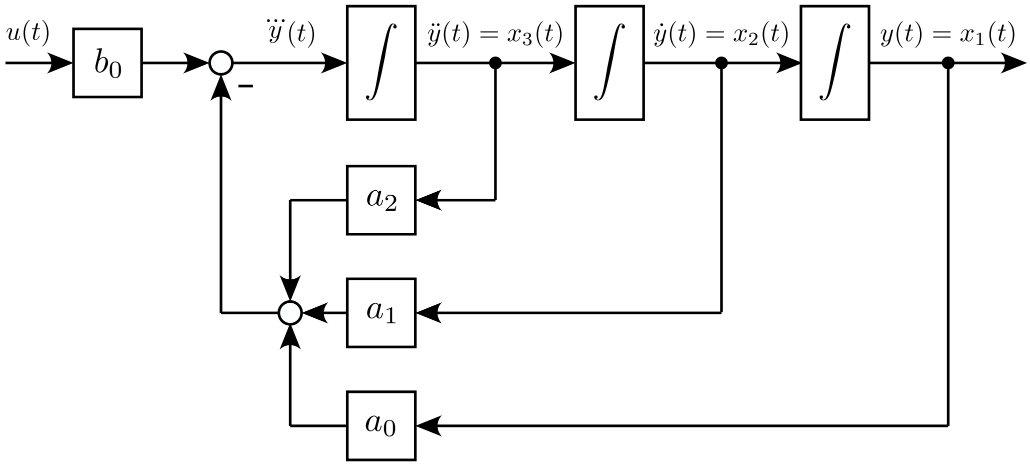
Begründen Sie warum die Variante mit P-Regler und Hilfsstellgröße gegenüber der Variante PD-Regler ohne Hilfsstellgröße zu bevorzugen ist.



Aufgabe 3: Zustandsraum

Gegeben ist das Signalflussbild eines dynamischen Systems 3. Ordnung im Zeitbereich. Die Ausgangsgröße $y(t)$ des Systems wird von der Eingangsgröße $u(t)$ beeinflusst. Die Faktoren b_0, a_0, a_1 und a_2 entsprechen den Koeffizienten der zugrunde liegenden Differentialgleichung des modellierten Prozesses.

Hinweis: Die Aufgabenteile c) bis g) können unabhängig voneinander gelöst werden.



a) Lesen Sie anhand des Signalflussbildes im Zeitbereich die Differentialgleichung ab, welcher das System folgt.

b) Überführen Sie die Differentialgleichung in die Zustandsraumdarstellung und ermitteln Sie $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}^T$. Benutzen Sie dazu folgende Zustände: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$ und $x_3(t) = \ddot{y}(t)$.

c) Ergänzen Sie das oben gezeigte System um einen Zustandsregler mit den Parametern $\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$, so dass die Stellgröße mit $u(t) = w(t) - \mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)$ berechnet wird. Zeichnen Sie den Zustandsregler in das obige Signalflussbild ein.

Gehen Sie nun von den folgenden Zustandsgleichungen aus:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u(t)\,.$$

d) Berechnen Sie die Pole des Systems. Zeigen Sie, dass das System instabil ist.

e) Das System kann mit Hilfe eines Zustandsreglers stabilisiert werden. Allerdings können nicht alle Pole des geschlossenen Regelkreises vom Zustandsregler beeinflusst werden. Stellen Sie die charakteristische Gleichung für das geregelte System auf und begründen Sie, warum der Pol bei $s = -2$ nicht steuerbar ist. Verwenden Sie dazu zunächst den allgemeinen Ansatz mit $\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$.

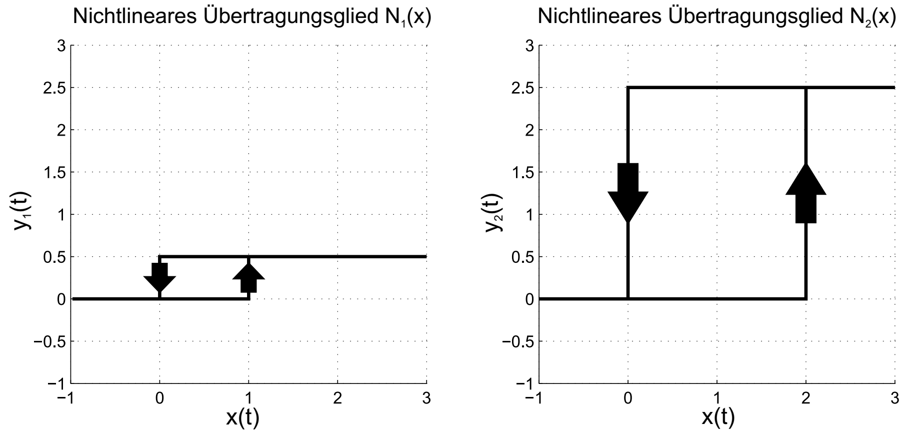
f) Da nur zwei Pole vom Zustandsregler beeinflusst werden können, lässt sich der Zustandsregler reduzieren zu $\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 \end{bmatrix}$. Ermitteln Sie die Parameter des Zustandsreglers derart, dass der geschlossene Regelkreis neben dem existierenden Pol bei $s = -2$ einen Doppelpol bei $s = -4$ hat.

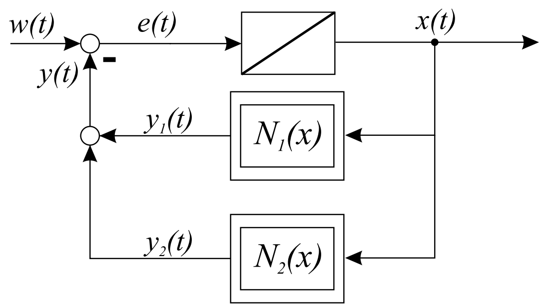
g) Für die praktische Umsetzung soll nur ein einziger Sensor zum Einsatz kommen. Somit ist ein Zustandsbeobachter nötig, welcher die übrigen zwei (nicht gemessenen) Zustände berechnet. Zeigen Sie, dass sich bei Messung von Zustand $x_1(t)$ die Zustände $x_2(t)$ und $x_3(t)$ beobachten lassen.

Aufgabe 4: Nichtlineare Systeme

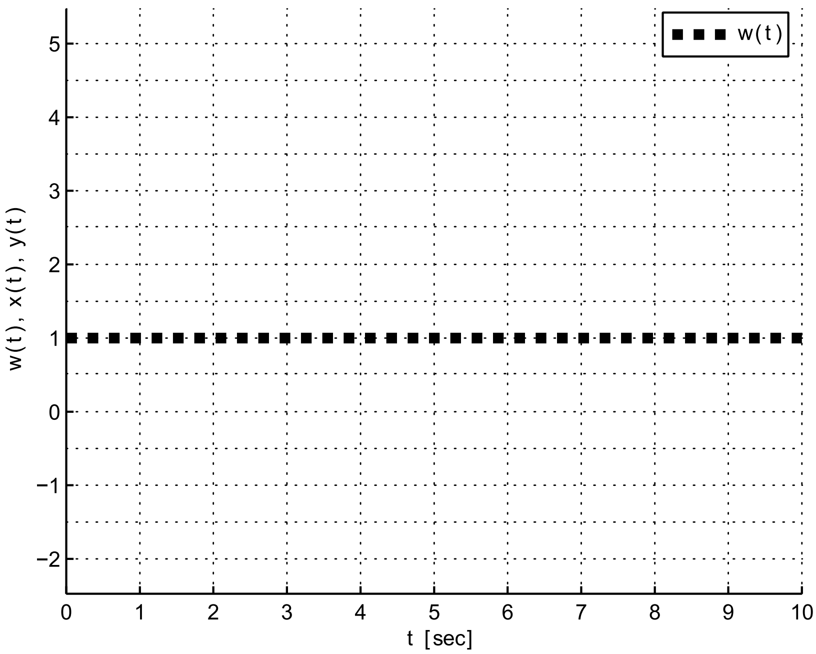
Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden!

a) Gegeben sind die nichtlinearen Übertragungsglieder $N_1(x)$, $N_2(x)$ und der im Folgenden dargestellte Regelkreis.

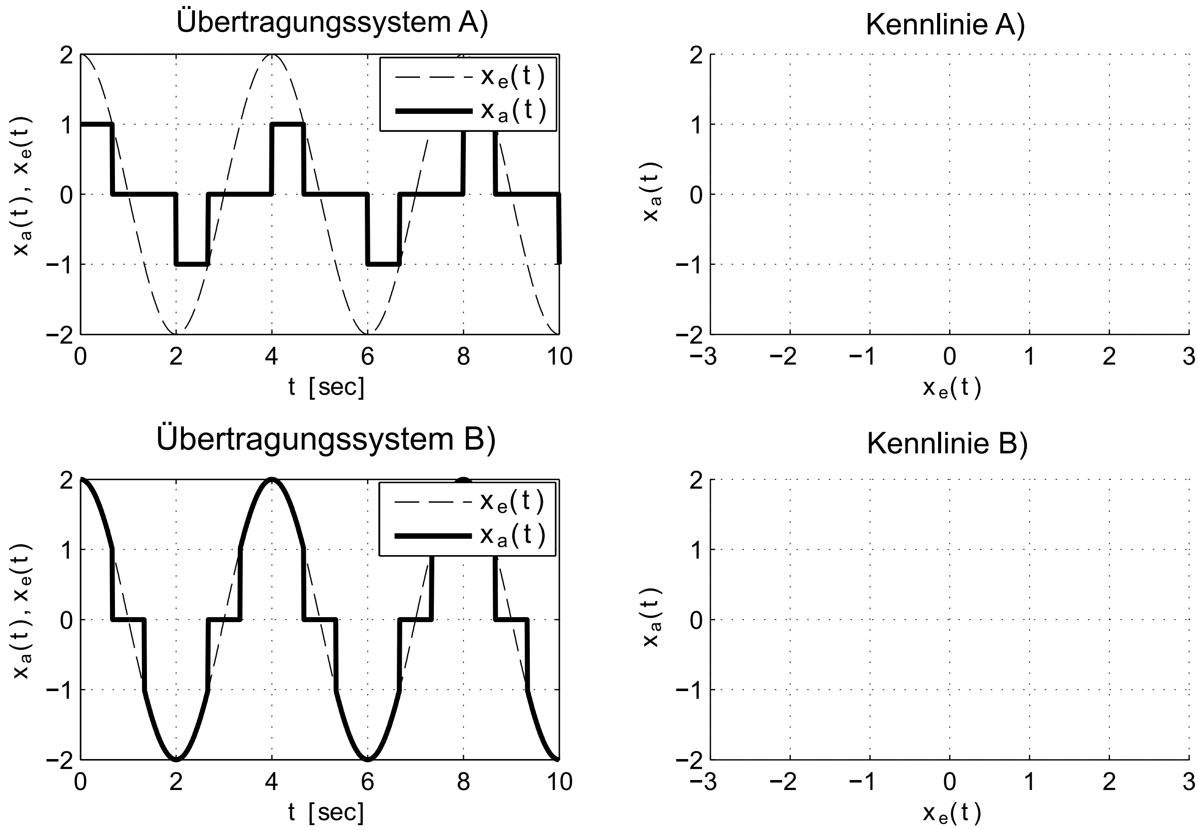




Zeichnen Sie den Verlauf der Regelgröße $x(t)$ und Messgröße $y(t)$ in das vorbereitete Diagramm. Die Führungsgröße beträgt $w(t) = 1$. Beachten Sie die Anfangsbedingung des Integrators $x(0) = 0$ und der Messgrößen $y_1(t = 0) = y_2(t = 0) = 0$.



b) Gegeben sind die Systemantworten $x_a(t)$ nichtlinearer Regelkreiselemente auf ein gegebenes Eingangssignal $x_e(t)$. Zeichnen Sie die Kennlinien der nichtlinearen Übertragungssysteme A) und B) in die vorbereiteten Diagramme. Geben Sie an ob es sich jeweils um eine **eindeutige** oder **mehrdeutige** Kennlinie handelt.



Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Warum kann ein **ideales** PD-Glied $G(s) = K_P + K_D s$ nicht realisiert werden?

- ■ Bei der Übertragungsfunktion ist die Zählerordnung größer als die Nennerordnung.
- ☐ Das ideale PD-Glied besitzt eine instabile Polstelle.
- ■ Die Sprungantwort des idealen PD-Gliedes beinhaltet eine Dirac-Funktion, die nicht realisiert werden kann.

b) Kann die Inverse der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s-1}{s+1}$ in der Praxis zur Vorsteuerung verwendet werden?

- ☐ Ja, denn Zähler- und Nennerordnung sind gleich groß.
- ■ Nein, denn die resultierende Vorsteuerung wäre instabil.
- ☐ Nein, die Inverse muss, um realisiert werden zu können, um einen schnellen Pol ergänzt werden.

c) Welche Aussagen zur Störgrößenaufschaltung sind richtig?

- ☐ Bei der Störgrößenaufschaltung wird die Summe aus gemessener Störgröße und Regelgröße von der Führungsgröße abgezogen.
- ■ Bei der Störgrößenaufschaltung wird die gemessene Störgröße auf den Reglerausgang negativ aufgeschaltet.
- ■ Die Stabilität des Regelkreises wird durch die Störgrößenaufschaltung nicht beeinflusst, da es sich um eine Steuerung handelt.

d) Welche Aussagen zur Verwendung eines Hilfsreglers sind richtig?

- [ ] Der Hilfsregler misst die Störgröße am Ausgang der Strecke und verbessert dadurch das dynamische Verhalten.
- [x] Der Hilfsregler benötigt einen zusätzlichen Sensor.
- [x] Der Hilfsregler greift in den geschlossenen Regelkreis ein, wodurch die Stabilität beeinflusst wird.

e) Was ist der Zweck der Entkopplung eines Mehrgrößenregelkreises?

- [x] Die Umwandlung des gekoppelten Regelkreises in mehrere voneinander unabhängige Regelkreise.
- [x] Die Verwendung der bekannten Reglerentwurfsmethoden für einschleifige Regelkreise zu ermöglichen.
- [ ] Die Entkopplung verhindert, dass sich Störungen auf die Regelgröße auswirken.

f) Wozu dienen Anti-Windup Methoden?

- [ ] Verbesserung des Verhaltens eines P-Reglers bei Auftreten von Stellgrößenbeschränkungen.
- [ ] Beschränkung des D-Anteils eines Reglers bei sprungförmigen Änderungen der Führungsgröße.
- [x] Beschränkung des I-Anteils eines Reglers bei Auftreten von Stellgrößenbeschränkungen.

g) Welche Aussagen zu Internal Model Control (IMC) sind richtig?

- [ ] IMC wird nur bei nichtlinearen Regelstrecken verwendet.
- [x] Sind die Regelstrecke und der IMC-Regler stabil, dann ist auch der geschlossene Regelkreis stabil.
- [x] Sind Modell und Strecke identisch, wird die Regelung zur Steuerung. Die Rückführung wird nur noch zur Ausregelung von Störgrößen aktiv.

h) Welche Eigenschaften besitzt die Zustandsraummethode?

- [x] Eine Differentialgleichung n. Ordnung wird auf ein System aus n Differentialgleichungen jeweils 1. Ordnung gebracht.
- [ ] Man benötigt kein Modell der Strecke, da die Regelung mit Hilfe von Zuständen entworfen wird.
- [x] Eine Erweiterung der Zustandsraummethode auf Mehrgrößensysteme ist möglich.

i) Ein durch Zustandsgleichungen beschriebenes dynamisches System ist genau dann stabil, ...

- [x] wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms einen negativen Realteil haben.
- [x] wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$ einen negativen Realteil haben.
- [ ] wenn alle Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$ einen negativen Realteil haben.

j) Regt man ein nichtlineares System mit Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz an ...

☐ ist das Amplitudenverhältnis stets nur von der Frequenz abhängig.

■ kann die Dämpfung von der Amplitude abhängig sein.

■ kann sich die Frequenz und die Signalform der Schwingung ändern.

k) Die Zustandsebene ...

■ behandelt nichtlineare dynamische Systeme 2. Ordnung.

☐ behandelt nichtlineare statische Systeme 2. Ordnung.

■ stellt einen zweidimensionalen Zustandsraum grafisch dar.

$\boxed{\sum 20}$

Aufgabe 2: Hilfstellgröße

a) Aus dem Blockschaltbild liest man ab:

$$(W-Y)\cdot(G_H+G_R\cdot G_{S1})\cdot G_{S2}+Z=Y$$

Mit $W=0$:

$$Z=Y+Y((G_H+G_R\cdot G_{S1})\cdot G_{S2})\Leftrightarrow \boxed{Y=\frac{1}{1+(G_H+G_R\cdot G_{S1})\cdot G_{S2}}\cdot Z}$$ 6

b) Mit $G_R=K_P+K_Ds$, $G_H=K_H$, $G_{S1}=\frac{1}{s}$ und $G_{S2}=\frac{1}{1+10s}$ ergibt sich mit dem Ergebnis aus a):

$$Y(s)=\frac{1}{1+\left(K_H+(K_P+K_Ds)\cdot\frac{1}{s}\right)\cdot\frac{1}{1+10s}}\cdot Z(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s)=\frac{s(1+10s)}{s(1+10s)+(K_Hs+K_P+K_Ds)}\cdot Z(s)$$

$$\Leftrightarrow Y(s)=\frac{s(1+10s)}{10s^2+(1+K_H+K_D)s+K_P}\cdot Z(s)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y(s)=\frac{s(s+0{,}1)}{s^2+0{,}1(1+K_H+K_D)s+0{,}1K_P}\cdot Z(s)}$$ 5

c) Ermittlung der Reglerparameter durch Koeffizientenvergleich. Das Sollpolynom ergibt sich aus dem Produkt des gewünschten Pols $(s+10)$ und dem Pol $(s+0{,}1)$ zum Kürzen der Nullstelle:

$$(s+0{,}1)\cdot(s+10)=s^2+10{,}1s+1=s^2+0{,}1(1+K_H+K_D)s+0{,}1K_P$$

Mit $K_H=0$:

$$10{,}1=0{,}1(1+K_D)\Leftrightarrow\boxed{K_D=100}\quad 1=0{,}1K_P\Leftrightarrow\boxed{K_P=10}$$ 5

d) Für den P-Regler ($K_D=0$) mit Hilfsstellgröße gilt der Zusammenhang wie zuvor:

$$s^2+10{,}1s+1=s^2+0{,}1(1+K_H+K_D)s+0{,}1K_P$$

Mit $K_D=0$:

$$10{,}1=0{,}1(1+K_H)\Leftrightarrow\boxed{K_H=100}\quad 1=0{,}1K_P\Leftrightarrow\boxed{K_P=10}$$ 3

e) Mit Hilfe der Grenzwertsätze

$$u(t=0)=\lim_{s\to\infty}(s\cdot U(s))\qquad u(t\to\infty)=\lim_{s\to 0}(s\cdot U(s))$$ 2

ergibt sich für $u_1(t)$ und $u_2(t)$:

PD-Regler ohne Hilfsstellgröße

$$u_1(t=0)=\lim_{s\to\infty}\left(s\cdot\frac{-100(s+0{,}1)}{(s+10)(s+1)}\right)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{-100-\frac{10}{s}}{1+\frac{11}{s}+\frac{10}{s^2}}\right)$$

$$\Rightarrow u_1(t) = \frac{-100 - 0}{1 + 0 + 0} \Rightarrow \boxed{u_1(t = 0) = -100}$$

Dies kann eindeutig dem Zeitverlauf in Abbildung **B** zugeordnet werden, die Berechnung des Endwertes ist damit unnötig! 2

P-Regler mit Hilfsstellgröße. Da sich die verbleibenden Zeitverläufe nur an ihrem Endwert unterscheiden, ist nur die Verwendung des Endwertsatzes nötig:

$$u_1(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{-10}{(s + 10)(s + 1)} \right) = 0 \cdot \frac{-10}{(0 + 10)(0 + 1)} \Rightarrow \boxed{u_1(t \to \infty) = 0}$$

Dies entspricht dem Stellgößenverlauf in Abbildung **A**! 2

$$u_2(\to \infty) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{-100(s + 0{,}1)}{s(s + 10)(s + 1)} \right) = \frac{-100(0 + 0{,}1)}{(0 + 10)(0 + 1)} \Rightarrow \boxed{u_2(t \to \infty) = -1}$$

2

Dies entspricht dem Stellgößenverlauf in Abbildung **C**!

Der PD-Regler verursacht eine sehr hohe und sprungförmige Stellgröße. Verwendet man einen P-Regler und die zusätzliche Hilfstellgröße, kommt man mit viel geringeren Stellgrößen aus, die zudem nicht springen, sondern leicht verzögert ansteigen. Aus diesem Grund empfiehlt es sich hier die letztere Variante zu wählen. 3

$\sum$ 30

Aufgabe 3: Zustandsraum

a) Aus dem Blockschaltbild liest man ab:

$$\dddot{y}(t) = b_0 u(t) - a_2 \ddot{y}(t) - a_1 \dot{y}(t) - a_0 y(t)$$

$\boxed{2}$

b) Mit Hilfe der eingeführten Zustände x_1, x_2 und x_3 lässt sich die System-DGL dritter Ordnung in drei DGL erster Ordnung überführen. Folgende Zustandsdifferentialgleichungen ergeben sich:

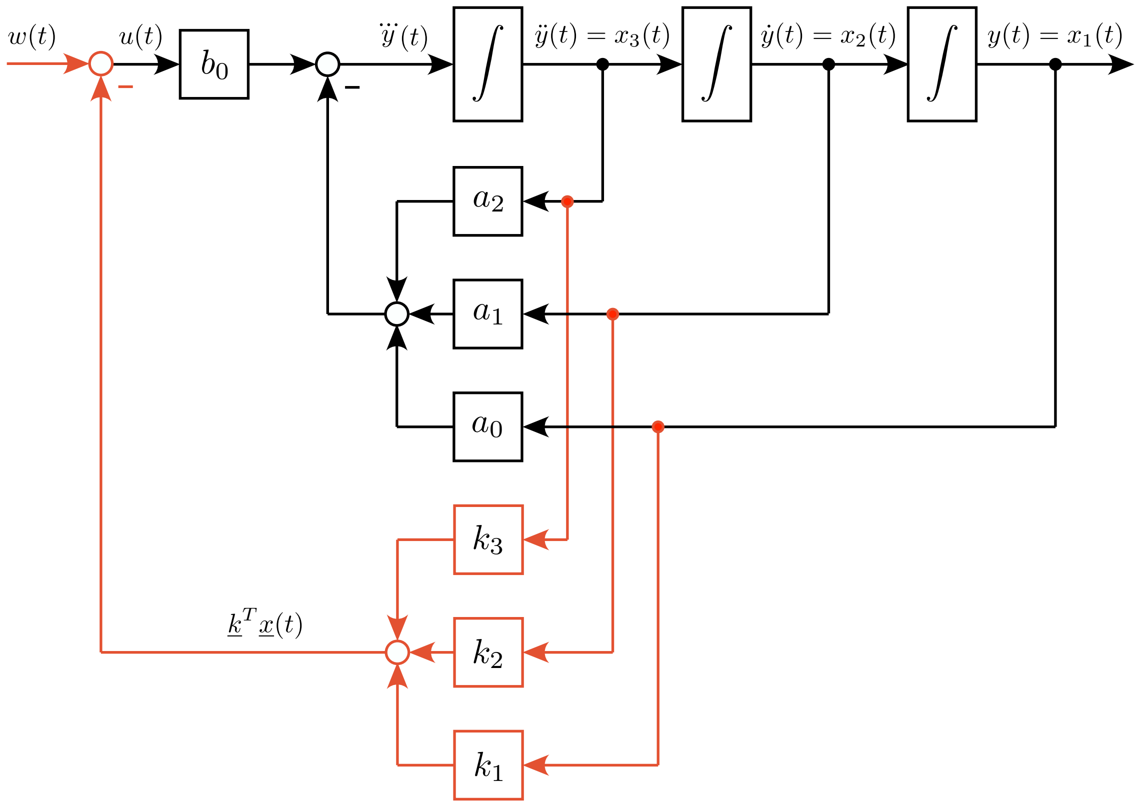
$$\begin{aligned}
\dot{x_1}(t) &= x_2(t) \\
\dot{x_2}(t) &= x_3(t) \\
\dot{x_3}(t) &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) + b_0 u(t) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t), \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$\boxed{4}$

c) Blockschaltbild mit Zustandsregler:



$\boxed{6}$

d) Stabilität:

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$$

$$\begin{vmatrix} s-1 & -6 & 2 \\ 0 & s+3 & -4 \\ 0 & 0 & s+2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \underline{(s-1)(s+3)(s+2) = 0}$$ 3

Pole: $s_1 = +1; \quad s_2 = -3; \quad s_3 = -2$ 1

Das System ist **instabil**, da der Pol $s_1 = +1$ in der rechten s-Halbebene liegt. 1

e) Die charakteristische Gleichung für den geschlossenen Regelkreis lautet (Determinante nach letzter Zeile entwickelt):

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}^T] = \left| \begin{bmatrix} s-1 & -6 & 2 \\ 0 & s+3 & -4 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} s-1+k_1 & -6+k_2 & 2+k_3 \\ k_1 & s+3+k_2 & -4+k_3 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix} \right| = 0$$ 3

$$\Leftrightarrow (-1)^{(3+3)} \cdot (s+2) \cdot [(s-1+k_1) \cdot (s+3+k_2) - k_1 \cdot (-6+k_2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (s+2) \cdot \left[s^2 + (2+k_1+k_2) \cdot s + 9k_1 - k_2 - 3\right] = 0$$ 1

Der Pol $s_3 = -2$ kann in der charakteristischen Gleichung ausgeklammert und daher nicht durch den Zustandsregler verschoben werden. Dieser nicht steuerbare Pol ist jedoch stabil, deshalb ist das System zumindest stabilisierbar. Weiterhin taucht der Parameter k_3 des Zustandsreglers in der charakteristischen Gleichung nicht auf und ist somit frei wählbar. 2

f) Ermittlung der Parameter des Zustandsreglers:

Vorgabe: alle steuerbaren Pole bei -4 $\Rightarrow (s+4)^2 = s^2 + 8s + 16$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$2 + k_1 + k_2 = 8$ und $9k_1 - k_2 - 3 = 16$

$\Rightarrow \boxed{k_1 = 2.5}$ und $\boxed{k_2 = 3.5}$ 3

g) Ermittlung der Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_B$:

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} \quad \text{mit: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Messung von Zustand x_1: $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [1 \quad 0 \quad 0]$ (erste Zeile aus $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^2$):

$$|\mathbf{S}_B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & -12 & 26 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -12 & 26 \end{vmatrix}$$

4

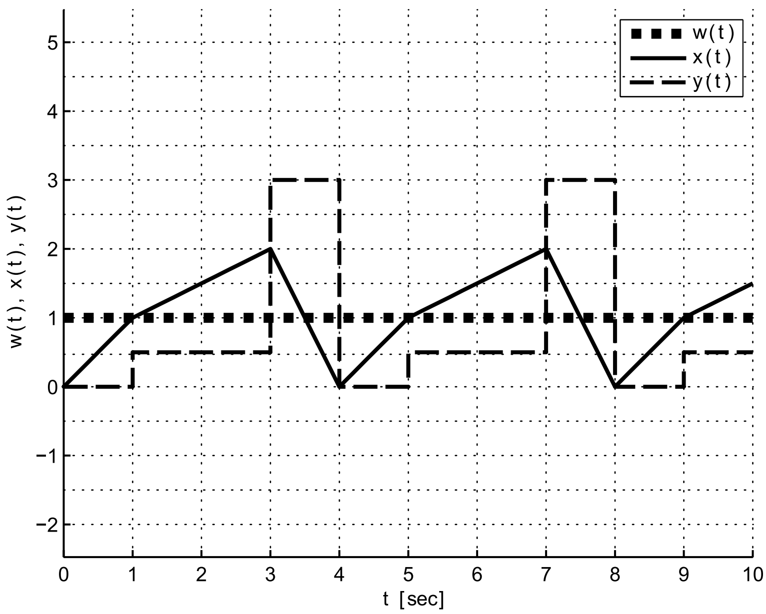
$$= 6 \cdot 26 - (-12) \cdot (-2) = 132 \neq 0 \Rightarrow \textbf{vollst. beobachtbar}$$

Wenn Zustand x_1 gemessen wird, ist somit die Berechnung der anderen Zustände möglich!

$\boxed{\sum 30}$

Aufgabe 4: Nichtlineare Systeme

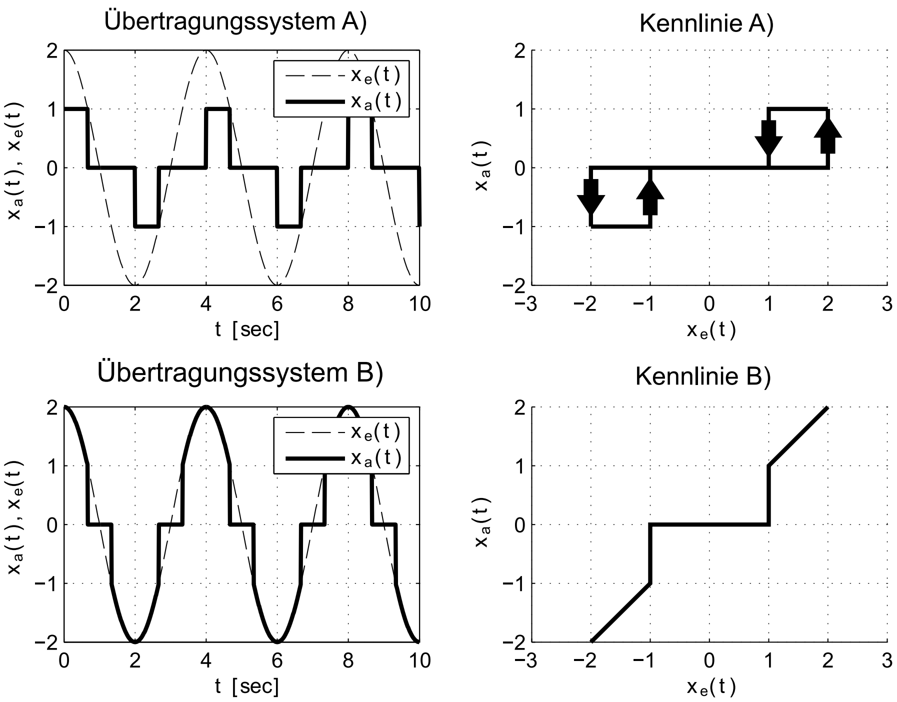
a) Da zu Beginn N_1 und N_2 inaktiv sind ergibt sich $y(t) = 0$ und $e(t) = 1$ für $x(t) < 1$. Im weiteren Verlauf für $1 < x(t) < 2$ wird N_1 aktiv und erzwingt durch $y(t) = 0.5$ $e(t) = 0.5$, die Steigung wird also halbiert. Ab $x(t) = 2$ wird auch N_2 aktiv, also $y(t) = 3$ und erzwingt $e(t) = -2$ bis $x(t) = 0$.



6+6

b) A) mehrdeutige Kennlinie 1

B) eindeutige Kennlinie 1



3

3

$\sum 20$