Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

01. April 2006

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	16	30	30	24	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Was ist der Entwurf auf ein symmetrisches Optimum?

- ☐ Ein Reglerentwurfsverfahren, bei dem durch ein numerisches Verfahren ein optimaler Regler gesucht wird.
- ☐ Ein Reglerentwurfsverfahren, das zum Ziel hat, eine möglichst hohe Phasenreserve zu erreichen.
- ☐ Ein Reglerentwurfsverfahren, das nur bei bestimmten Strecken- und Reglertypen angewendet werden kann.

b) Warum wird der Amplitudenverlauf im Bodediagramm doppelt logarithmisch aufgetragen?

- ☐ Weil der Verlauf dann näherungsweise mit linearen Asymptoten dargestellt werden kann.
- ☐ Weil die Parallelschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.
- ☐ Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.

c) Was ist ein Lead-Glied?

- ☐ Ein phasenabsenkendes Übertragungsglied.
- ☐ Ein PD-T_1 Glied.
- ☐ Ein Übertragungsglied, das zur Vergrößerung der Phasenreserve verwendet wird.

d) Bei dem Entwurf eines Kompensationsreglers muss ein gewünschtes Führungsverhalten $G_W(s)$ des geschlossenen Regelkreises vorgegeben werden. Welche Übertragungsfunktionen sind für die reale Anwendung sinnvoll?

- ☐ $G_w(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$.
- ☐ $G_w(s) = 1$.
- ☐ $G_w(s) = \frac{1}{(s+T)^n}$.

e) Welche Überlegungen sind beim Reglerentwurf zu beachten?

- ☐ Der Regler sollte möglichst einfach sein (wenige Pole und Nullstellen).
- ☐ Um Stabilität zu gewährleisten, sollten instabile Streckenpole stets mit Reglernullstellen gekürzt werden.
- ☐ Um unerwünschtes Allpassverhalten zu eliminieren, sollten positive Streckennullstellen stets mit instabilen Reglerpolen gekürzt werden.

f) Welche Eigenschaften hat die Wurzelortskurve?

- ☐ Sie ist immer symmetrisch zur imaginären Achse.
- ☐ Sie ist immer symmetrisch zur reellen Achse.
- ☐ Nullstellen wirken „anziehend“ auf die Äste der WOK.

g) Welche Eigenschaften hat ein Totzeitglied?

- ☐ Ein Totzeitglied ist ein nichtminimalphasiges Glied.
- ☐ Vereinfacht den Reglerentwurf, weil es die Phase anhebt und damit die Phasenreserve vergrößert.
- ☐ Erschwert den Reglerentwurf. Die Totzeit wirkt destabilisierend und begrenzt die Schnelligkeit des geschlossenen Regelkreises.

h) Wofür ist die Frequenzgangsortskurve besonders geeignet?

- ☐ Zur Ermittlung von Amplitude und Phasenverschiebung bei einer bestimmten Kreisfrequenz.
- ☐ Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu analysieren.
- ☐ Um die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises abzulesen.

i) Wann ist ein System asymptotisch stabil?

- ☐ Wenn alle Pole einen positiven Realteil haben.
- ☐ Wenn die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.
- ☐ Wenn die Sprungantwort für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.

j) Was gilt für Nullstellen einer Übertragungsfunktion?

- ☐ Nullstellen sorgen dafür, dass das System auf bestimmte Eingangssignale überhaupt nicht reagiert.
- ☐ Nullstellen entstehen in der Regel durch die Zusammenfassung von Parallelschaltungen zu einer einzigen Übertragungsfunktion.
- ☐ Die Lage der Nullstellen ist entscheidend für die Stabilität der Übertragungsfunktion.

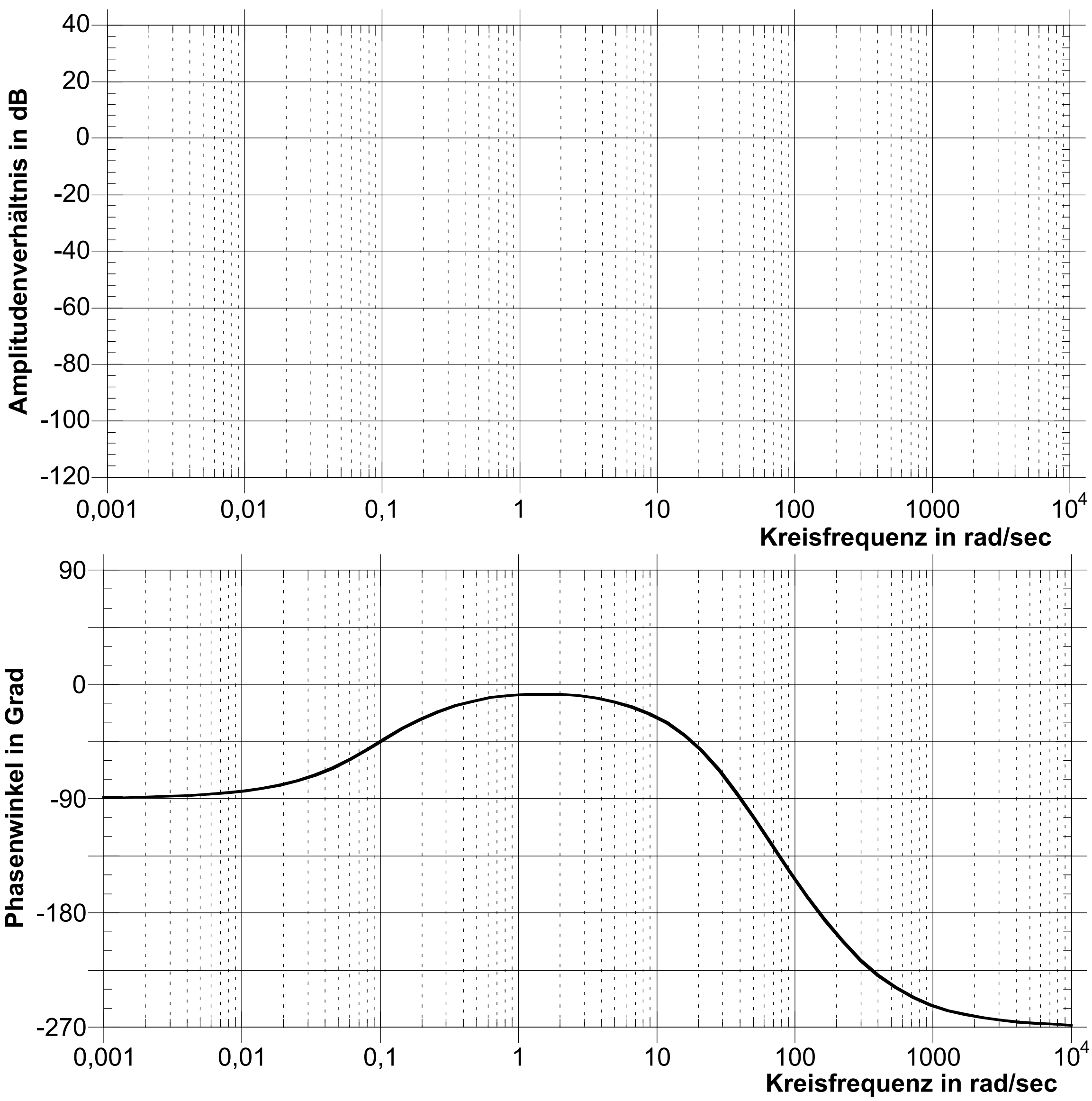
Aufgabe 2: Frequenzgänge und Stabilität

Diese Aufgabe zum Thema Frequenzgang ist in drei Teilaufgaben untergliedert, die jeweils **unabhängig voneinander** gelöst werden können! Um Aufgabenteil c) eigenständig lösen zu können, ist der exakte Phasengang (siehe unten) in Aufgabenteil a) bereits eingezeichnet.

a) Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises:

$$G_0(s) = \frac{0{,}1 \cdot (1 + 10s)}{s\left(1 + \frac{1}{50}s\right)^2 \left(1 + \frac{1}{200}s\right)}$$

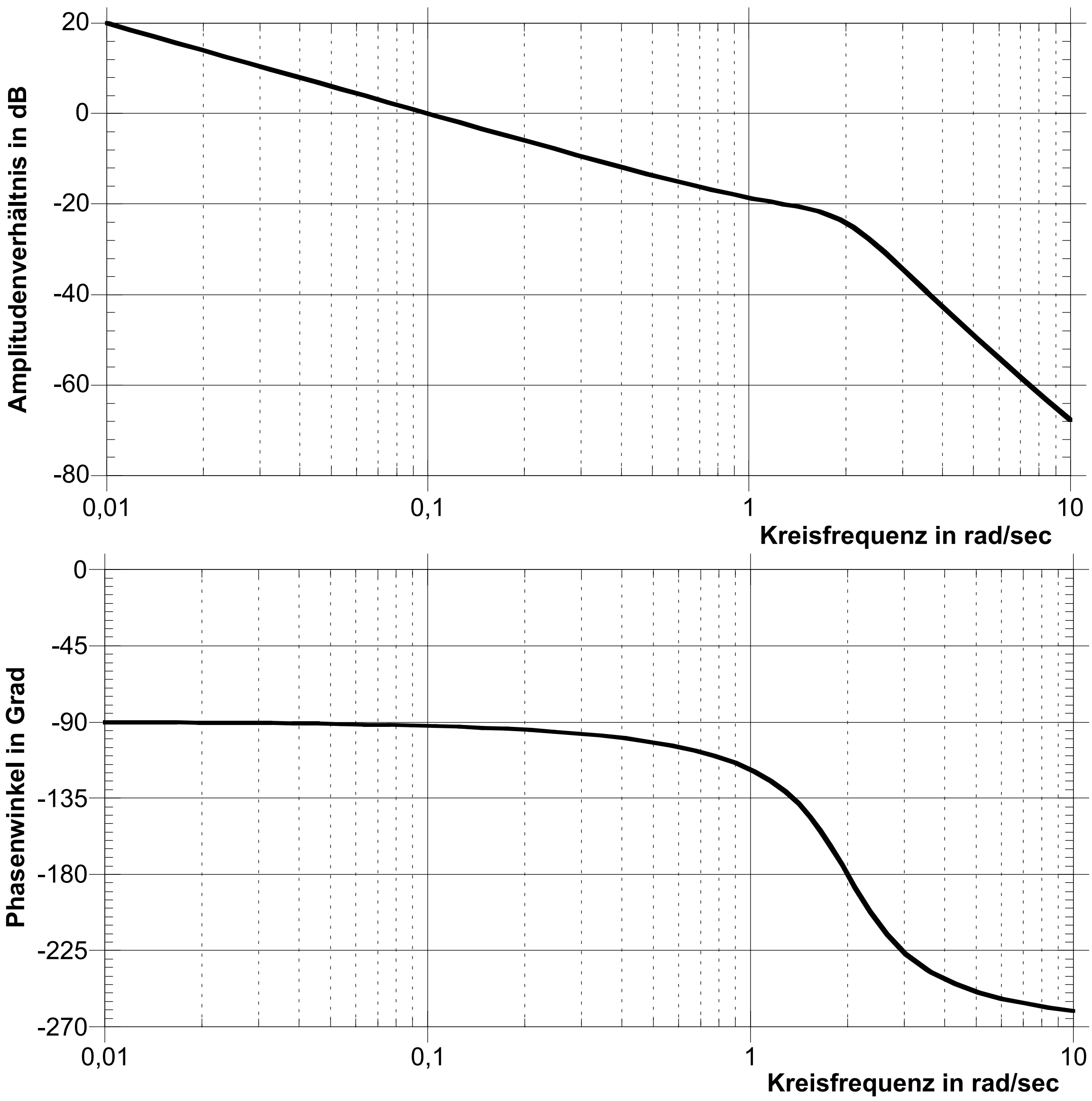
Zeichnen Sie die asymptotischen Amplituden- und Phasengänge in das unten abgebildete Diagramm. Kennzeichnen Sie dabei die Eckfrequenzen und geben Sie die Asymptotensteigungen an.



b) Für den offenen Regelkreis mit der Übertragungsfunktion

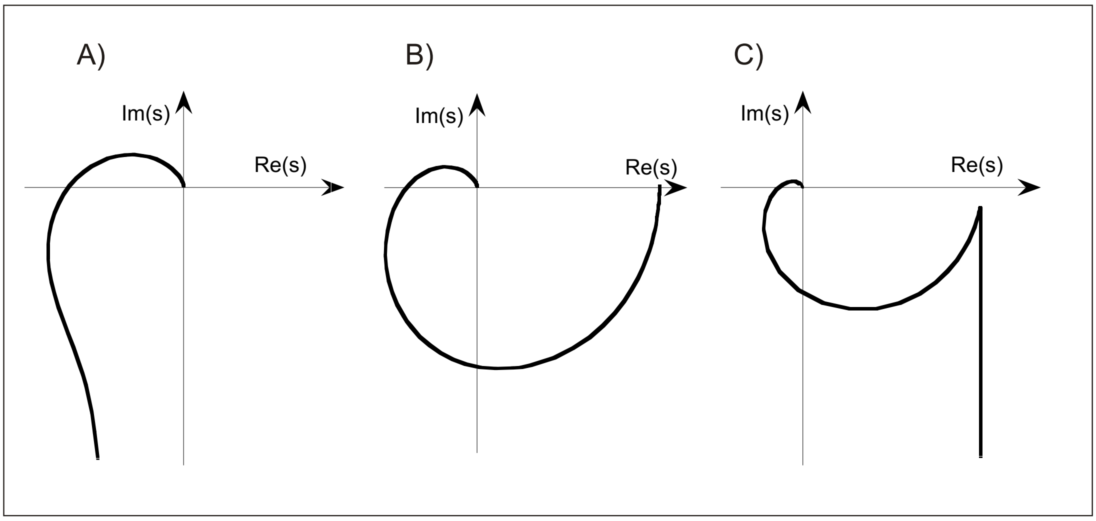
$$G_0(s) = K_R \cdot \frac{1}{s(s^2 + 1{,}6s + 4)}$$

wurde mit einer Reglerverstärkung $K_R = 0{,}4$ der unten abgebildete Frequenzgang gemessen.



1) Ermitteln Sie die Amplitudenreserve (in dB) und die Phasenreserve des Regelkreises. Begründen Sie, warum der geschlossene Regelkreis stabil ist.
2) Der Regelkreis ist für die gewünschte Anwendung zu langsam. Auf welchen Wert darf K_R maximal erhöht werden, wenn gefordert ist, dass die Phasenreserve nicht kleiner als 45° werden darf?

c) Ordnen Sie die unten abgebildeten Ortskurven den offenen Regelkreisen aus Aufgabenteil a) und b) zu. Begründen Sie ihre Wahl und erklären Sie auch, warum eine der Ortskurven zu keinem der Systeme gehören kann.



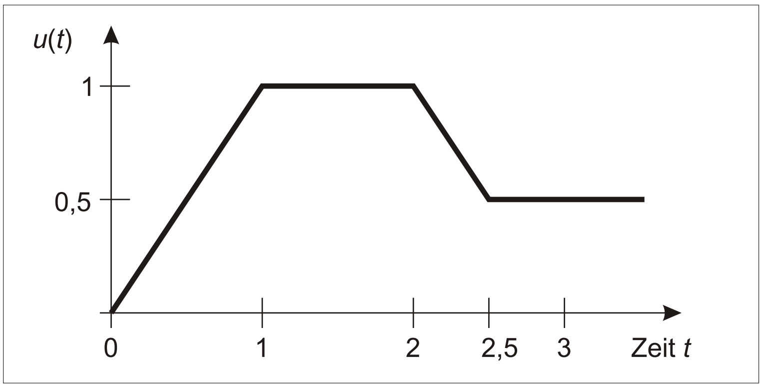
Aufgabe 3: Laplace-Transformation

Ein Verzögerungsglied mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ wird mit einer rampenförmigen Eingangsgrößen $U(s)$ angeregt.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0{,}5}{s + 0{,}5}\,, \qquad U(s) = \frac{1}{s^2}$$

a) Berechnen Sie den Zeitverlauf $y(t)$, indem Sie eine Partialbruchzerlegung durchführen und mit Hilfe bekannter Korrespondenzen in den Zeitbereich zurücktransformieren (alternativ kann auch der Integrationssatz verwendet werden, bestimmen Sie in diesem Falle die Integrationskonstante so, dass $y(t = 0) = 0$ gilt).

b) Das oben dargestellte Verzögerungsglied soll nun mit der unten abgebildeten Zeitfunktion als Eingangssignal angeregt werden.

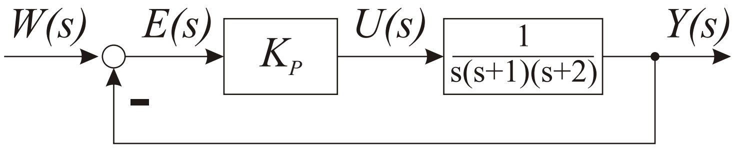


Zeigen Sie, dass dieses Eingangssignal mit Hilfe von zeitlich verschobenen Rampenfunktionen dargestellt werden kann. Geben Sie die Gleichung für $u(t)$ und $U(s)$ an. **Anmerkung:** Dieser Aufgabenteil kann unabhängig von a) gelöst werden.

c) Bestimmen Sie für den Zeitraum $1 \leq t < 2$ den Zeitverlauf $y(t)$, wenn das Verzögerungsglied mit dem Eingangssignal aus b) angeregt wird. **Hinweis:** Hierzu können Sie Ihr Ergebnis aus a) wiederverwenden.

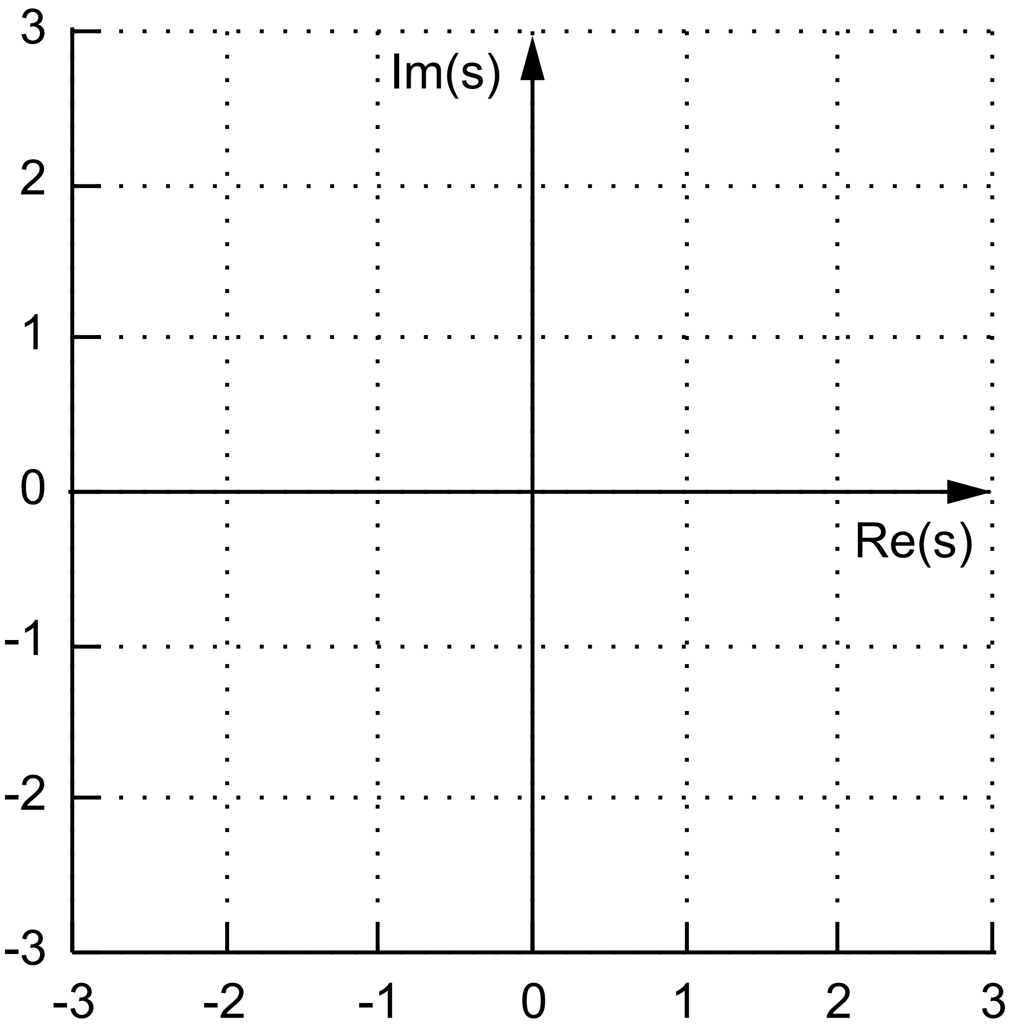
Aufgabe 4: Wurzelortskurve

Ein Standardregelkreis mit einem P-Regler und Regelstrecke soll im Hinblick auf sein Stabilitätsverhalten untersucht werden.



a) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve für den geschlossenen Regelkreis bei Variation der Reglerverstärkung K_P. Ermitteln Sie dazu die Anzahl der Äste, die im Unendlichen enden, den Schnittpunkt s_A der Asymptoten mit der reellen Achse sowie die Asymptotenwinkel Ψ_l.
Zeichnen Sie den Verzweigungspunkt s_V auf der reellen Achse qualitativ richtig ein. **Eine genaue Berechnung ist nicht erforderlich!**

b) Markieren Sie in der Wurzelortskurve die Punkte, bei denen eine kritische Reglerverstärkung K_{krit} vorliegt. **Eine genaue Berechnung ist nicht erforderlich!**



Lösungen Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

01. April 2006

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Was ist der Entwurf auf ein symmetrisches Optimum?

- [ ] Ein Reglerentwurfsverfahren, bei dem durch ein numerisches Verfahren ein optimaler Regler gesucht wird.
- [x] Ein Reglerentwurfsverfahren, das zum Ziel hat, eine möglichst hohe Phasenreserve zu erreichen.
- [x] Ein Reglerentwurfsverfahren, das nur bei bestimmten Strecken- und Reglertypen angewendet werden kann.

b) Warum wird der Amplitudenverlauf im Bodediagramm doppelt logarithmisch aufgetragen?

- [x] Weil der Verlauf dann näherungsweise mit linearen Asymptoten dargestellt werden kann.
- [ ] Weil die Parallelschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.
- [x] Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.

c) Was ist ein Lead-Glied?

- [ ] Ein phasenabsenkendes Übertragungsglied.
- [x] Ein PD-T_1 Glied.
- [x] Ein Übertragungsglied, das zur Vergrößerung der Phasenreserve verwendet wird.

d) Bei dem Entwurf eines Kompensationsreglers muss ein gewünschtes Führungsverhalten $G_W(s)$ des geschlossenen Regelkreises vorgegeben werden. Welche Übertragungsfunktionen sind sinnvoll?

- [x] $G_w(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$.
- [ ] $G_w(s) = 1$.
- [ ] $G_w(s) = \frac{1}{(s+T)^n}$.

e) Welche Überlegungen sind beim Reglerentwurf zu beachten?

■ Der Regler sollte möglichst einfach sein (wenige Pole und Nullstellen).

□ Um Stabilität zu gewährleisten, sollten instabile Streckenpole stets mit Reglernullstellen gekürzt werden.

□ Um unerwünschtes Allpassverhalten zu eliminieren, sollten positive Streckennullstellen stets mit instabilen Reglerpolen gekürzt werden.

f) Welche Eigenschaften hat die Wurzelortskurve?

□ Sie ist immer symmetrisch zur imaginären Achse.

■ Sie ist immer symmetrisch zur reellen Achse.

■ Nullstellen wirken „anziehend“ auf die Äste der WOK.

g) Welche Eigenschaften hat ein Totzeitglied?

■ Ein Totzeitglied ist ein nichtminimalphasiges Glied.

□ Vereinfacht den Reglerentwurf, weil es die Phase anhebt und damit die Phasenreserve vergrößert.

■ Erschwert den Reglerentwurf. Die Totzeit wirkt destabilisierend und begrenzt die Schnelligkeit des geschlossenen Regelkreises.

h) Wofür ist die Frequenzgangsortskurve besonders geeignet?

□ Zur Ermittlung von Amplitude und Phasenverschiebung bei einer bestimmten Kreisfrequenz.

■ Um die Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu analysieren.

□ Um die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises abzulesen.

i) Wann ist ein System asymptotisch stabil?:

□ Wenn alle Pole einen positiven Realteil haben.

□ Wenn die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.

■ Wenn die Sprungantwort für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.

j) Was gilt für Nullstellen einer Übertragungsfunktion?

■ Nullstellen sorgen dafür, dass das System auf bestimmte Eingangssignale überhaupt nicht reagiert.

■ Nullstellen entstehen in der Regel durch die Zusammenfassung von Parallelschaltungen zu einer einzigen Übertragungsfunktion.

□ Die Lage der Nullstellen ist entscheidend für die Stabilität der Übertragungsfunktion.

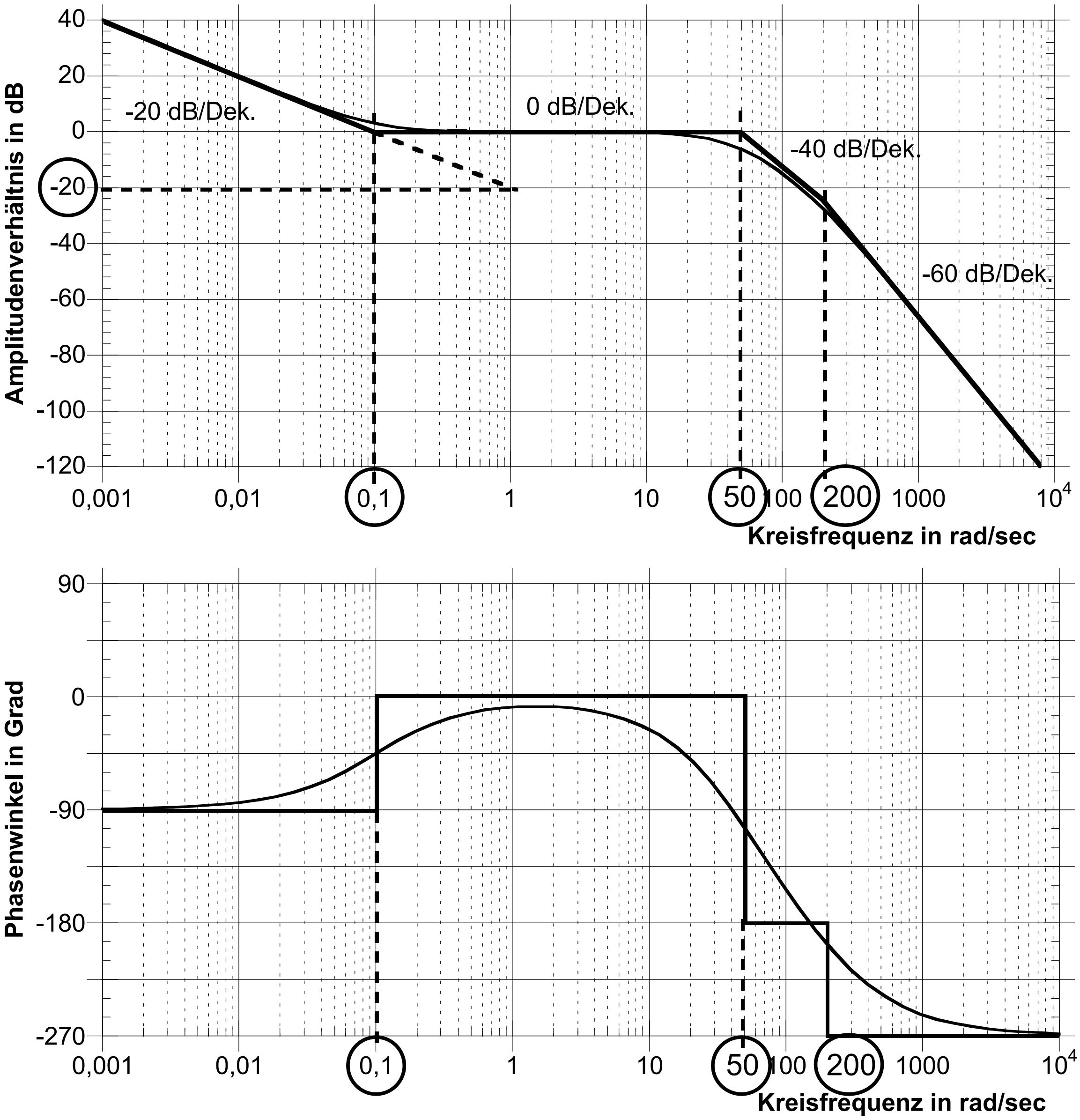
$\boxed{\sum 16}$

Aufgabe 2: Frequenzgänge und Stabilität

a) Asymptotischer Amplituden- und Phasengang, siehe Abbildung weiter unten. Da die Übertragungsfunktion globales I-Verhalten hat, trägt man die Verstärkung 0,1 (entspricht -20 dB) für die Konstruktion des Amplitudengangs bei $\omega = 1\,sec^{-1}$ ein.

Die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion lauten (sortiert nach steigender Eckfrequenz ω_e):

$\omega_{e1} = 0\,\text{sec}^{-1}$	I-Glied	Pol bei s=0	-20 dB/Dek.	-90°
$\omega_{e2,3} = 0,1\,\text{sec}^{-1}$	PD-Glied	Nullstelle bei s=-0,1	0 dB/Dek.	0°
$\omega_{e4} = 50\,\text{sec}^{-1}$	PT_2-Glied	Doppelpol bei s=-50	-40 dB/Dek.	-180°
$\omega_{e5} = 200\,\text{sec}^{-1}$	PT_1-Glied	Pol bei s=-200	-60 dB/Dek.	-270°



14

b)

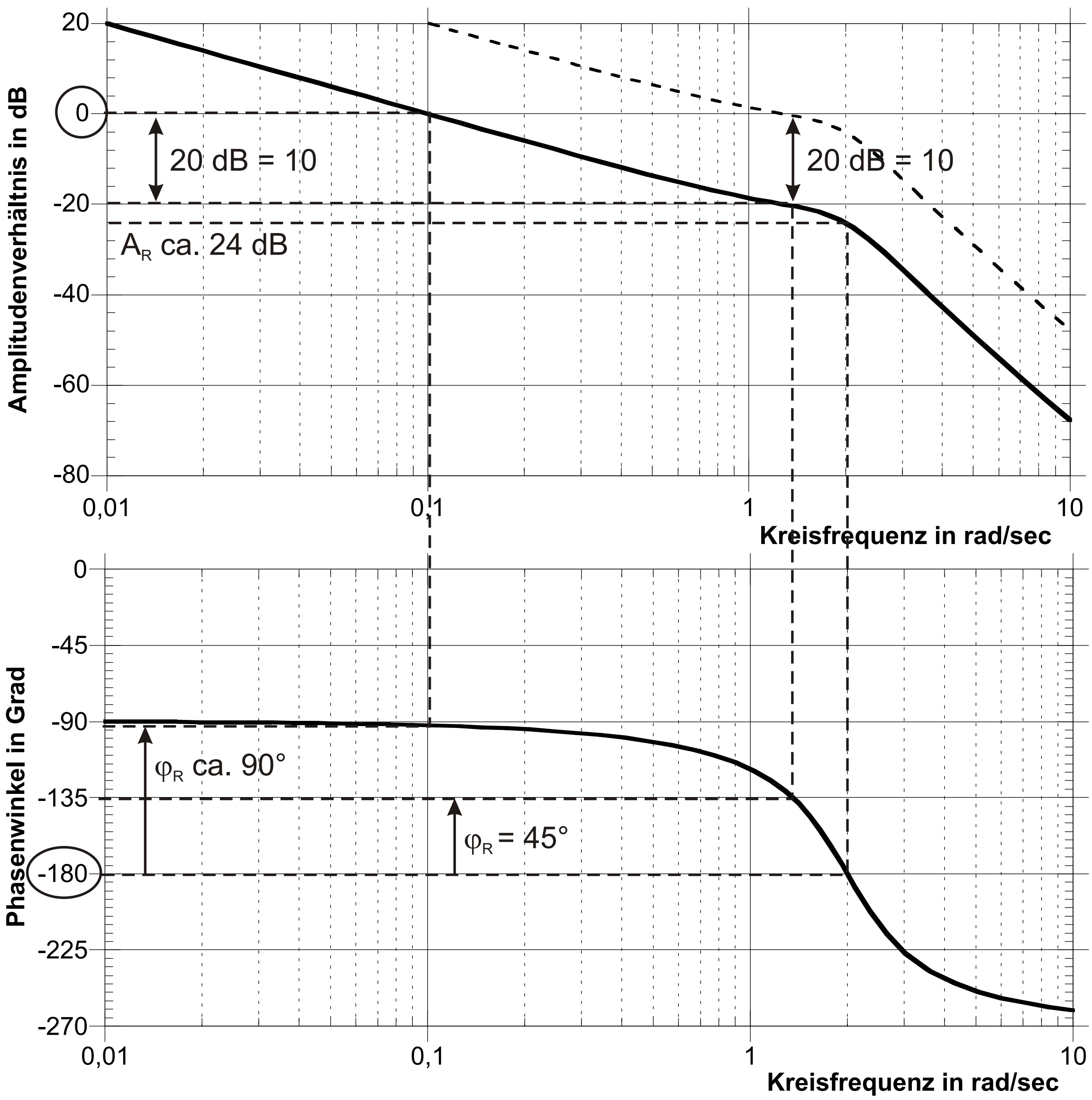
1) Bei der Phasenverschiebung $\varphi = 180°$ liest man eine Amplitude $A_{-180°} \approx -24\,\text{dB}$ ab. Daraus folgt die Amplitudenreserve:

$$A_R = -A_{-180°} \approx 24\,\text{dB} > 0\,\text{dB} \Rightarrow \text{stabil.}$$

6

Bei der Amplitude $A = 0\,\text{dB}$ liest man die Phase $\varphi(\omega_D) \approx -90°$ ab. Daraus ergibt sich die Phasenreserve:

$$\varphi_R = 180° - |\varphi_D| \approx 180° - 90° \approx 90° > 0° \Rightarrow \text{stabil.}$$



2) Bei einer Phasenreserve von $\varphi_R = 45°$ beträgt die Phase $\varphi = -135°$. Bei dieser Phasenverschiebung liest man eine Amplitude von $A = -20\,\mathrm{dB}$. Wenn man den Amplitudengang um 20 dB nach oben verschiebt (Multiplikation mit 10), schneidet er bei $\varphi = -135°$ die 0 dB Linie und man erhält die gewünschte Phasenreserve. Die Reglerverstärkung darf also maximal verzehnfacht werden:

$$K_R = 0,4 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{K_R = 4}.$$

$\boxed{4}$

c) Beide offenen Regelkreise haben globales I-Verhalten ($\varphi(\omega = 0) = -90°$), deshalb entfällt Ortskurve B) (globales P-Verhalten, $\varphi(\omega = 0) = 0°$)

$\boxed{6}$

Der Phasengang in Aufgabenteil a) wird in einem Bereich größer als -90° (nimmt sogar fast bis auf 0° zu), deshalb ist C) die zugehörige Ortskurve. Die Phase der Ortskurve A) ist stets kleiner als -90° und gehört daher zu Aufgabenteil b).

$\boxed{\sum 30}$

Aufgabe 3: Laplace-Transformation

a) Das Ausgangssignal im Bildbereich lautet:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{0,5}{s^2(s+0,5)}$$

Weil ein Doppelpol bei $s = 0$ vorliegt, berechnet sich die Partialbruchzerlegung wie folgt:

$$Y(s) = \frac{B_{11}}{s} + \frac{B_{12}}{s^2} + \frac{B_1}{s+0,5}$$ 5

$$B_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{d}s^{2-1}} \left[Y(s) \cdot s^2\right]_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{0,5}{s+0,5}\right]_{s=0} = -\left.\frac{0,5}{(s+0,5)^2}\right|_{s=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{11} = -2}$$ 3

$$B_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{2-2}}{\mathrm{d}s^{2-2}} \left[Y(s) \cdot s^2\right]_{s=0} = \left.\frac{0,5}{s+0,5}\right|_{s=0} \Rightarrow \boxed{B_{12}(s) = 1}$$ 3

$$B_1 = \left[Y(s) \cdot (s+0,5)\right]_{s=-0,5} = \left.\frac{0,5}{s^2}\right|_{s=-0,5} \Rightarrow \boxed{B_1 = 2}$$ 2

Folgende Korrespondenzen werden benötigt:

$$\frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \sigma(t)\ , \qquad \frac{1}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\ t \cdot \sigma(t)\ , \qquad \frac{1}{s+a} \bullet\!\!-\!\!\circ\ e^{-at} \cdot \sigma(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = (t - 2 + 2e^{-0,5t}) \cdot \sigma(t)}$$ 3

Alternativ: Integration folgender Korrespondenz:

$$\frac{1}{s(s+a)} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right) \Longleftrightarrow \frac{1}{s^2(s+a)} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{1}{a}\int \left(1 - e^{-at}\right) \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow y(t) = 0,5 \cdot \frac{1}{0,5} \int \left(1 - e^{-0,5t}\right) = t + 2e^{-0,5t} + c$$

Mit $y(0) = 0 \Rightarrow 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = t - 2 + 2e^{-0,5t}} \text{ für } t \geq 0 \text{ und } y(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

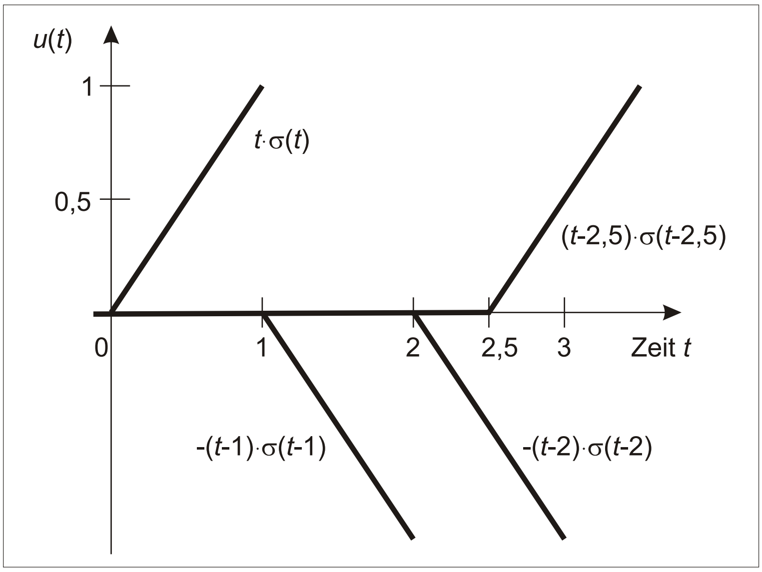
Oder:

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = (t - 2 + 2e^{-0,5t}) \cdot \sigma(t)}$$

b) Wie die nachfolgende Abbildung zeigt, lässt sich der Zeitverlauf durch die Addition bzw. Subtraktion von vier zeitverschobenen rampenförmigen Zeitverläufen (mit der Steigung 1) erzeugen. Man erhält im im Bild- bzw Zeitbereich:

$$U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot e^{-s} - \frac{1}{s^2} \cdot e^{-2s} + \frac{1}{s^2} \cdot e^{-2,5s}$$ 4

$$u(t) = t \cdot \sigma(t) - (t-1) \cdot \sigma(t-1) - (t-2) \cdot \sigma(t-2) + (t-2,5) \cdot \sigma(t-2,5)$$ 4



c) Für den Zeitbereich $1 \leq t < 2$ sind nur die ersten beiden Summanden von $u(t)$ wirksam ($\neq 0$):

$$u(t) = t \cdot \sigma(t) - (t-1) \cdot \sigma(t-1) \quad \text{bzw.} \quad U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot e^{-s}$$ 2

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{0,5}{s^2(s+0,5)} - \frac{0,5}{s^2(s+0,5)} \cdot e^{-s}$$

Mit der Lösung aus a) und dem Zeitverschiebungssatz $f(t-a) \bullet\!\!-\!\!\circ\, F(s) \cdot e^{-as}$ folgt:

$$y(t) = (t - 2 + 2e^{-0,5t})\sigma(t) - ((t-1) - 2 + 2e^{-0,5(t-1)})\sigma(t-1)$$ 2

Für $1 \leq t < 2$ gilt $\sigma(t) = \sigma(t-1) = 1$:

$$\boxed{y(t) = 1 + 2e^{-0,5t} - 2e^{-0,5(t-1)} = 1 + 2e^{-0,5t}\left(1 - e^{0,5}\right)} \quad \text{für } 1 \leq t < 2$$ 2

$\sum 30$

Aufgabe 4: Wurzelortskurve

a) WOK für veränderliche Reglerverstärkung K_P:

- offener Regelkreis: $G_0(s) = \dfrac{K_P}{s(s+1)(s+2)}$
- Pole / Nullstellen ($m = 0,\ n = 3$):

  $p_1 = 0,\ p_2 = -1,\ p_3 = -2$ 3

- Anzahl der Äste, die im Unendlichen enden:

  $n - m = \underline{3}$ Äste der WOK enden für $K_P \to \infty$ im Unendlichen 1

- Schnittpunkt s_A der Asymptoten mit der reellen Achse: 2

$$s_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n - m} = \frac{1}{3}(0 - 1 - 2) = \underline{-1}$$

- Asymptotenwinkel Ψ_l:

$$\Psi_l = (1 + 2 \cdot l) \cdot \frac{180^\circ}{n-m} \qquad \underline{\text{mit:}}\ l = 0, 1, \ldots, n-m-1$$

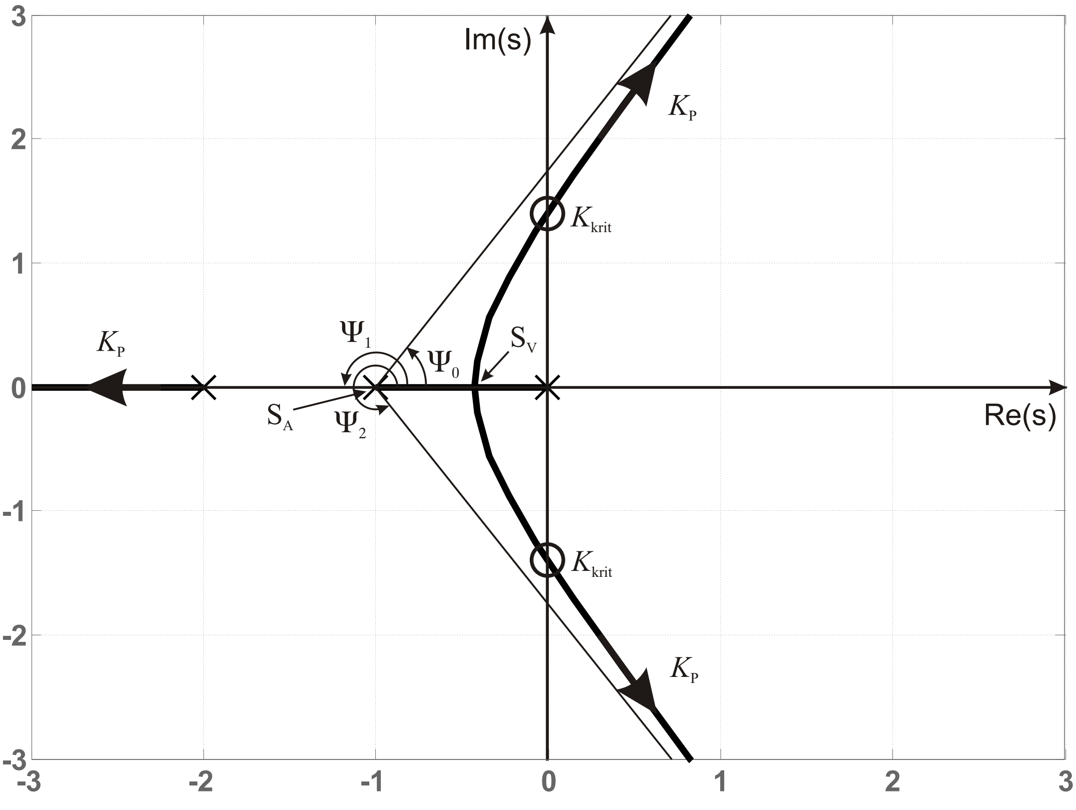
$$\Psi_0 = (1 + 2 \cdot 0) \cdot \frac{180^\circ}{3} = \underline{60^\circ}$$ 2

$$\Psi_1 = (1 + 2 \cdot 1) \cdot \frac{180^\circ}{3} = \underline{180^\circ}$$ 2

$$\Psi_2 = (1 + 2 \cdot 2) \cdot \frac{180^\circ}{3} = \underline{300^\circ}$$ 2

- Verzweigungspunkt s_V auf der reellen Achse:
  Da der Bereich auf der reellen Achse zwischen dem Pol bei -1 und bei 0 Teil der WOK ist, muss zwischen den beiden Polen ein Verzweigungspunkt liegen, damit die Äste im Unendlichen enden können. 2

- Skizze der WOK:



6

b) Bei Variation der Reglerverstärkung K_P von $0 \rightarrow \infty$ beginnt man in den Polen der WOK und läuft entlang der Äste. Im Schnittpunkt der WOK-Äste mit der imaginären Achse liegt eine kritische Verstärkung K_{krit} vor, da sich in diesem Punkt der Regelkreis mittels eines P-Regler grenzstabil betreiben lässt. Bei Überschreitung dieses Punktes, d.h. bei weiterer Erhöhung der Reglerverstärkung K_P, lägen die Pole des geschlossenen Regelkreises in der rechten Hälfte der s-Ebene. Der Regelkreis lässt sich dann nicht mehr mittles eines P-Reglers stabil betreiben. 4

$\sum 24$