Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

6. Februar 2008

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	20	20	30	30	100
Note:	Ist:					

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Wie bezeichnet man „Steuerung“ in englischer Sprache?
- ☐ Closed-loop control.
- ☐ Feedforward control.
- ☐ Feedback control.

b) Was gilt für Polstellen einer Übertragungsfunktion?
- ☐ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System phasenminimal ist.
- ☐ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System schwingungsfähig ist.
- ☐ Die Lage der Polstellen ist entscheidend für die Stabilität der Übertragungsfunktion.

c) Warum wird der Amplitudenverlauf im Bodediagramm doppelt logarithmisch aufgetragen?
- ☐ Weil der Verlauf dann näherungsweise mit linearen Asymptoten dargestellt werden kann.
- ☐ Weil die Parallelschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.
- ☐ Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.

d) Bei dem Entwurf eines Kompensationsreglers muss ein gewünschtes Führungsverhalten $G_W(s)$ des geschlossenen Regelkreises vorgegeben werden. Welche Übertragungsfunktionen sind für die reale Anwendung sinnvoll?

- ☐ $G_w(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$.
- ☐ $G_w(s) = 1$.
- ☐ $G_w(s) = \frac{1}{(s+a)^n}$.

e) Welche Eigenschaften hat die Wurzelortskurve?

- ☐ Sie ist immer symmetrisch zur imaginären Achse.
- ☐ Sie ist immer symmetrisch zur reellen Achse.
- ☐ Nullstellen wirken „anziehend“ auf die Äste der WOK.

f) Wann ist ein System stabil?

- ☐ Wenn alle Pole einen positiven Realteil haben.
- ☐ Wenn die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.
- ☐ Wenn die Sprungantwort für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.

g) Was sind Merkmale einer Steuerung?

- ☐ Bei einer Steuerung werden nie Messeinrichtungen verwendet.
- ☐ Es ist keine Rückkopplung vorhanden.
- ☐ Nicht messbare Störungen und Modellungenauigkeiten werden nicht kompensiert.

h) Was versteht man unter einem zeitvarianten System?

- ☐ Die Eigenschaften des Systems bleiben über der Zeit unverändert.
- ☐ Die Systemeigenschaften ändern sich mit der Zeit, z.B. durch Verschleiß.
- ☐ Zeitvariant bedeutet, dass das System dynamisch ist, d.h. es wird durch eine Differenzialgleichung beschrieben.

i) Woran erkennt man, ob ein System globales P-, I- oder D-Verhalten hat?

- ☐ Am Verlauf der Sprungantwort für $t \to \infty$.
- ☐ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to \infty$.
- ☐ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to 0$.

j) Welche Systeme sind nicht phasenminimal?

- ☐ Systeme die eine Totzeit enthalten.
- ☐ Systeme die negative Nullstellen aufweisen.
- ☐ Systeme die positive Nullstellen aufweisen.

k) Welche Überlegungen sind beim Reglerentwurf zu beachten?

- ☐ Der Regler sollte möglichst hohe Ordnung haben (viele Pole und Nullstellen).
- ☐ Systeme mit Allpassverhalten sind generell nicht regelbar.
- ☐ Es dürfen niemals instabile Streckenpole mit Reglernullstellen gekürzt werden.

l) Für die Anwendung des **vereinfachten** Nyquist-Kriteriums ist Folgendes zu beachten:
- ☐ Man benötigt die Ortskurve des offenen Regelkreises.
- ☐ Das Kriterium kann auch bei instabilen Systemen angewendet werden.
- ☐ Man benötigt die Ortskurve des geschlossenen Regelkreises.

m) Ein System bestehend aus einer Masse und einer Feder wird beschrieben durch:
- ☐ Eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung.
- ☐ Eine homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung.
- ☐ Eine lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung.

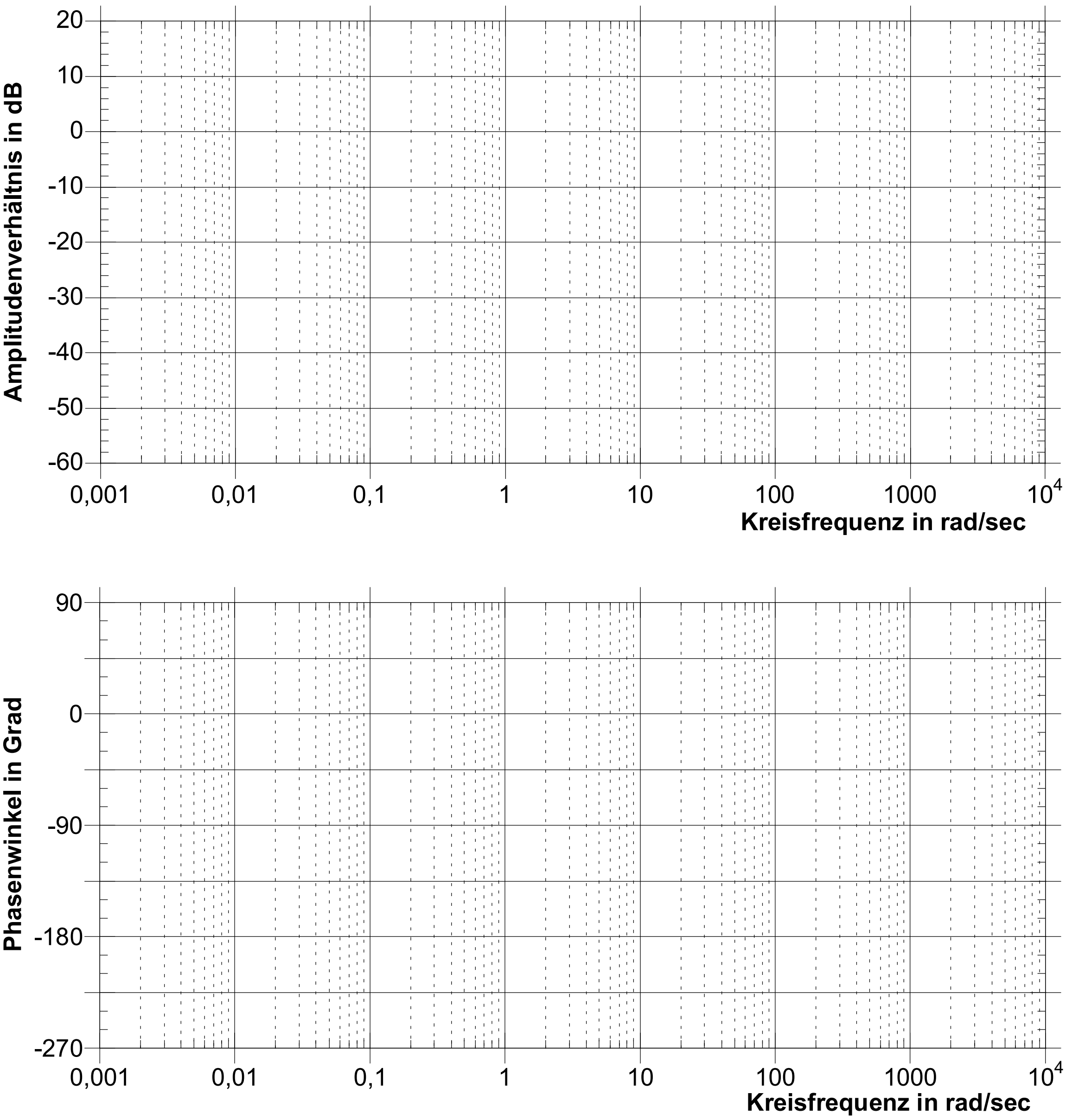
n) Welche Aussagen zur Rückkopplung sind richtig?
- ☐ Eine Störgrößenaufschaltung ist eine Rückkopplung.
- ☐ Die Rückwirkung der Regelgröße auf die Stellgröße bezeichnet man als Rückkopplung.
- ☐ Rückkopplung führt stets zur Instabilität.

Aufgabe 2: Frequenzgang

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises:

$$G_0(s) = \frac{0{,}1 \cdot (1 + 100s)}{(1 + 10s)\left(1 + \frac{1}{20}s\right)^2}$$

Zeichnen Sie die asymptotischen Amplituden- und Phasengänge in das unten abgebildete Diagramm. Kennzeichnen Sie dabei die Eckfrequenzen und geben Sie die Asymptotensteigungen an.



Aufgabe 3: Modellbildung und inverse Laplace-Transformation

Es soll die Drehzahl $\omega(t)$ eines fremderregten Gleichstrommotors in Abhängigkeit der Ankerspannung $u(t)$ (Stellgröße) sowie des Lastmomentes $d(t)$ (Störgröße) berechnet werden.

Für das mechanische Teilsystem gilt:

$$\theta \cdot \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = M(t) - d(t), \qquad \text{mit: } \theta \text{ Trägheitsmoment des Ankers, } M(t) \text{ Motormoment}$$

Das Motormoment $M(t)$ ist abhängig vom Motorstrom $i(t)$ und der Motorkonstanten k. Die Ankerspannung $u(t)$ hängt wiederum vom Motorstrom $i(t)$ und der Motordrehzahl $\omega(t)$ ab:

$$M(t) = k \cdot i(t), \qquad u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + k \cdot \omega(t)$$

Die Parameter R und L sind der ohmsche Widerstand und die Induktivität der Ankerwicklung.

Hinweis: Die Aufgabenteile b) und c) können unabhängig von a) gelöst werden.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktionen $G_u(s)$ und $G_d(s)$, die den Zusammenhang zwischen der Drehzahl $\Omega(s)$ und der Ankerspannung $U(s)$, bzw. dem Lastmoment $D(s)$ beschreiben:

$$\Omega(s) = G_u(s) \cdot U(s) + G_d(s) \cdot D(s)$$

Transformieren Sie hierzu die oben angegebenen Gleichungen in den Frequenzbereich und eliminieren Sie die Stromstärke $I(s)$.

b) Nach Einsetzen von Zahlenwerten für die physikalischen Parameter des Motors ergibt sich folgende Gleichung im Frequenzbereich:

$$\Omega(s) = \frac{200}{(s+4)^2} \cdot U(s) - \frac{10s + 240}{(s+4)^2} \cdot D(s)$$

Berechnen Sie durch Partialbruchzerlegung und inverse Laplace-Transformation den Zeitverlauf $\omega(t)$, wenn für die Stellgröße und die Störgröße gleichzeitig folgende Signale auftreten: $u(t) = 2 \cdot \sigma(t),\ d(t) = \sigma(t)$. Sie benötigen folgende Korrespondenzen:

$$\frac{1}{s} \quad 1 \cdot \sigma(t), \qquad \frac{1}{s+a} \quad e^{-at} \cdot \sigma(t), \qquad \frac{1}{(s+a)^2} \quad t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)$$

c) Zeichnen Sie qualitativ den Zeitverlauf auf. Berechnen Sie dazu als Hilfe die Drehzahlen $\omega(t=0)$, $\omega(t \to \infty)$ und $\omega(t = 0{,}05)$ (an dieser Stelle hat die Drehzahl einen Minimalwert). Für letztere Berechnung benötigen Sie den Zusammenhang: $e^{-0{,}2} \approx 0{,}82$.

Erklären Sie kurz, was mit der Drehzahl unmittelbar zu Beginn des Zeitverlaufs passiert und warum!

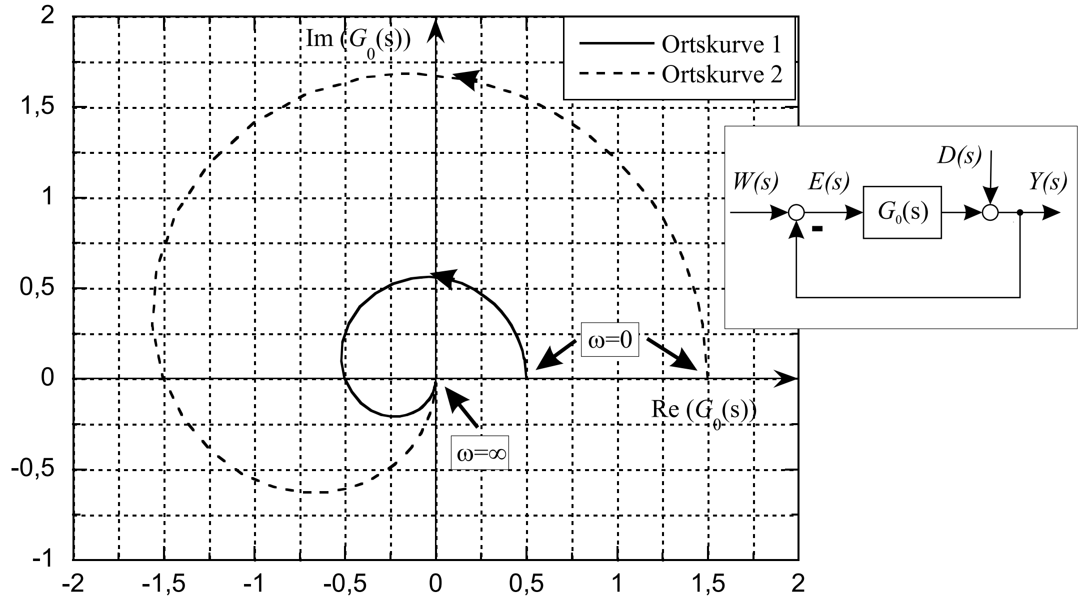
Aufgabe 4: Regelung eines instabilen Systems

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises $G_0(s)$ bestehend aus einem instabilen System und einem P-Regler $G_R(s) = K_R$:

$$G_0(s) = \frac{K_R(s+1)}{(s-2)^2}$$

a) Warum darf bei diesem $G_0(s)$ nicht das **vereinfachte** Nyquistkriterium zur Stabilitätsuntersuchung verwendet werden?

b) Nachfolgend sind die Ortskurven von $G_0(i\omega)$ für die Reglerverstärkungen $K_R = 6$ und $K_R = 2$ abgebildet. Ordnen Sie die Ortskurven der jeweiligen Verstärkung zu (kurze Begründung) und zeigen Sie mit Hilfe des **allgemeinen** Nyquistkriteriums in welchem der Fälle der geschlossene Regelkreis stabil ist.



c) Berechnen Sie die Führungs- und die Störübertragungsfunktion $G_w(s)$, $G_d(s)$ des geschlossenen Regelkreises:

$$Y(s) = G_w(s) \cdot W(s) + G_d(s) \cdot D(s)$$

Die Störung wirke direkt auf die Regelgröße (Streckenausgang).

d) Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitzkriteriums, für welche Werte von K_R der geschlossene Regelkreis stabil ist. Wie kann der Wert aus der Frequenzgangsortskurve abgelesen werden?

e) Berechnen Sie für ein beliebiges K_R mit Hilfe des Endwertsatzes die bleibende Regelabweichung $e(t \to \infty)$ bei einem Führungssprung $W(s) = \frac{1}{s}$. Wie groß muss K_R mindestens gewählt werden, damit der Regelfehler weniger als 0,4 beträgt.

f) Zeigen Sie, dass die Regelabweichung bei einem Führungssprung bei Verwendung eines PI-Reglers $G_R(s) = \frac{K_R(1+T_I s)}{T_I s}$ verschwindet, unabhängig von der Wahl der Reglerparameter (Stabilität des geschlossenen Regelkreises vorausgesetzt).

Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Wie bezeichnet man „Steuerung“ in englischer Sprache?

- ☐ Closed-loop control.
- ■ Feedforward control.
- ☐ Feedback control.

b) Was gilt für Polstellen einer Übertragungsfunktion?

- ☐ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System phasenminimal ist.
- ■ Die Lage der Polstellen bestimmt, ob ein System schwingungsfähig ist.
- ■ Die Lage der Polstellen ist entscheidend für die Stabilität der Übertragungsfunktion.

c) Warum wird der Amplitudenverlauf im Bodediagramm doppelt logarithmisch aufgetragen?

- ■ Weil der Verlauf dann näherungsweise mit linearen Asymptoten dargestellt werden kann.
- ☐ Weil die Parallelschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.
- ■ Weil die Reihenschaltung mehrerer Übertragungsglieder einer einfachen Addition der Amplitudengänge entspricht.

d) Bei dem Entwurf eines Kompensationsreglers muss ein gewünschtes Führungsverhalten $G_W(s)$ des geschlossenen Regelkreises vorgegeben werden. Welche Übertragungsfunktionen sind sinnvoll?

- ■ $G_w(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$.
- ☐ $G_w(s) = 1$.
- ☐ $G_w(s) = \frac{1}{(s+a)^n}$.

e) Welche Eigenschaften hat die Wurzelortskurve?

- ☐ Sie ist immer symmetrisch zur imaginären Achse.
- ■ Sie ist immer symmetrisch zur reellen Achse.
- ■ Nullstellen wirken „anziehend“ auf die Äste der WOK.

f) Wann ist ein System stabil?:

- ☐ Wenn alle Pole einen positiven Realteil haben.
- ☐ Wenn die Impulsantwort (Gewichtsfunktion) für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.
- ■ Wenn die Sprungantwort für $t \to \infty$ auf einem endlichen Wert verharrt.

g) Was sind Merkmale einer Steuerung?

- ☐ Bei einer Steuerung werden nie Messeinrichtungen verwendet.

■ Es ist keine Rückkopplung vorhanden.

■ Nicht messbare Störungen und Modellungenauigkeiten werden nicht kompensiert.

h) Was versteht man unter einem zeitvarianten System?

□ Die Eigenschaften des Systems bleiben über der Zeit unverändert.

■ Die Systemeigenschaften ändern sich mit der Zeit, z.B. durch Verschleiß.

□ Zeitvariant bedeutet, dass das System dynamisch ist, d.h. es wird durch eine Differenzialgleichung beschrieben.

i) Woran erkennt man, ob ein System P-, I- oder D-Verhalten hat?

■ Am Verlauf der Sprungantwort für $t \to \infty$.

□ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to \infty$.

■ Am Verlauf des Frequenzgangs für $\omega \to 0$.

j) Welche Systeme sind nicht phasenminimal?

■ Systeme die eine Totzeit enthalten.

□ Systeme die negative Nullstellen aufweisen.

■ Systeme die positive Nullstellen aufweisen.

k) Welche Überlegungen sind beim Reglerentwurf zu beachten?

□ Der Regler sollte möglichst hohe Ordnung haben (viele Pole und Nullstellen).

□ Systeme mit Allpassverhalten sind generell nicht regelbar.

■ Es dürfen niemals instabile Streckenpole mit Reglernullstellen gekürzt werden.

l) Für die Anwendung des **vereinfachten** Nyquist-Kriteriums ist Folgendes zu beachten:

■ Man benötigt die Ortskurve des offenen Regelkreises.

□ Das Kriterium kann auch bei instabilen Systemen angewendet werden.

□ Man benötigt die Ortskurve des geschlossenen Regelkreises.

m) Ein System bestehend aus einer Masse und einer Feder wird beschrieben durch:

□ Eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung.

□ Eine homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung.

■ Eine lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung.

n) Welche Aussagen zur Rückkopplung sind richtig?

□ Eine Störgrößenaufschaltung ist eine Rückkopplung.

■ Die Rückwirkung der Regelgröße auf die Stellgröße bezeichnet man als Rückkopplung.

□ Rückkopplung führt stets zur Instabilität.

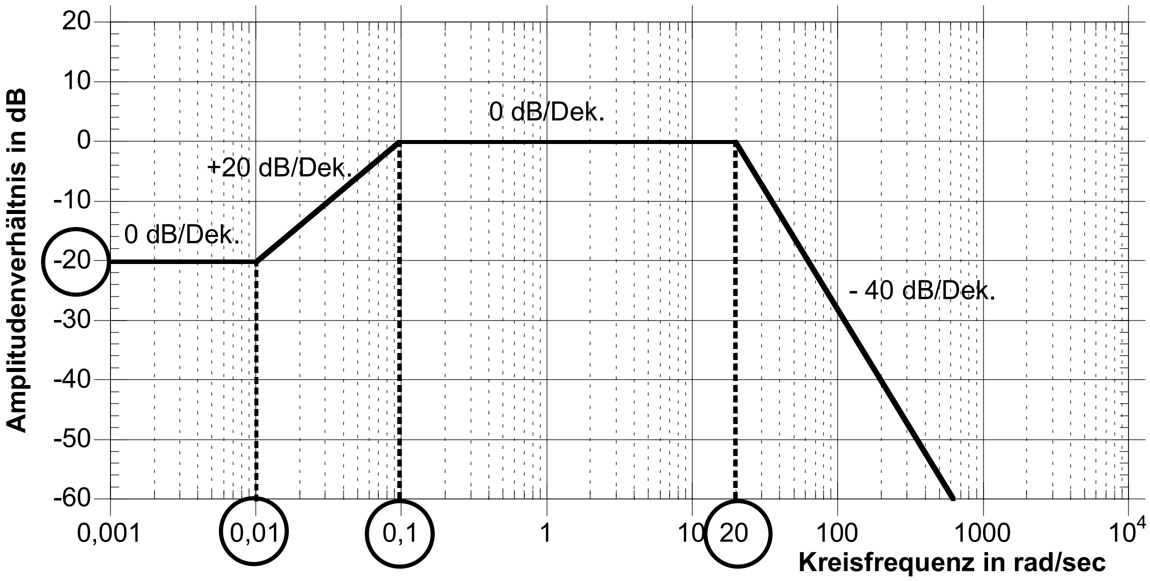
$\sum$ 20

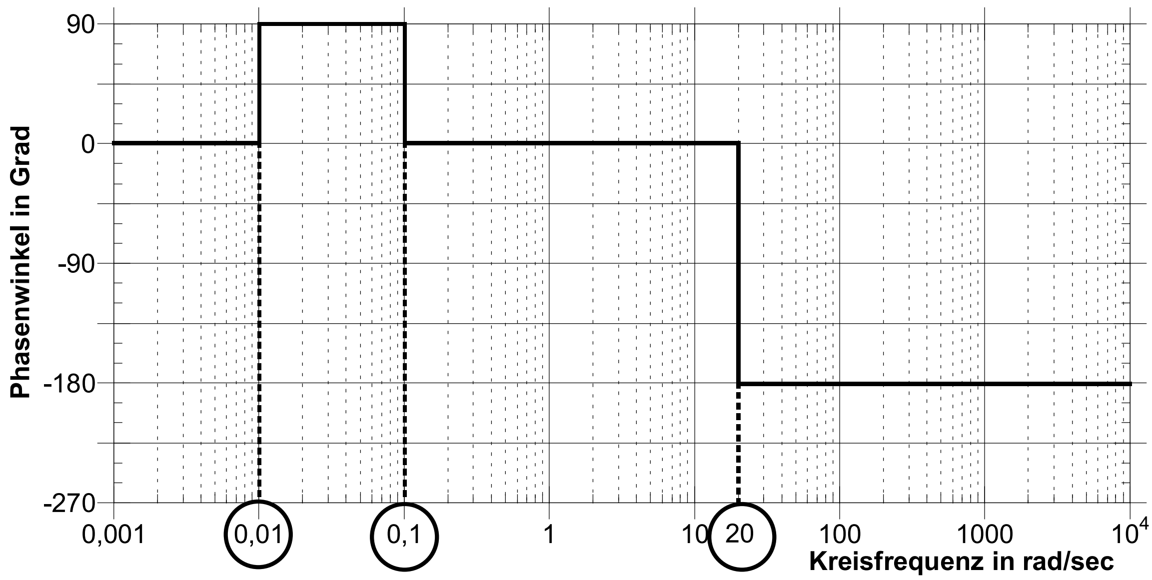
Aufgabe 2: Frequenzgang

Da die Übertragungsfunktion globales P-Verhalten hat, trägt man die Verstärkung 0,1 (entspricht -20 dB) für die Konstruktion des Amplitudengangs bei $\omega = 0{,}001\,sec^{-1}$ (linker Rand) ein. Das Amplitudenverhältnis beginnt mit 0 dB/Dek. und das Phasenverhältnis bei 0° Die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion lauten (sortiert nach steigender Eckfrequenz ω_e):

$\omega_{e1} = 0{,}01\,\mathrm{sec}^{-1}$	PD-Glied	Nullstelle bei s=-0,01	+20 dB/Dek.	+90°
$\omega_{e2} = 0{,}1\,\mathrm{sec}^{-1}$	PT_1-Glied	Pol bei s=-0,1	0 dB/Dek.	0°
$\omega_{e3,4} = 20\,\mathrm{sec}^{-1}$	PT_2-Glied	Doppelpol bei s=-20	-40 dB/Dek.	-180°

$$G_0(s) = \frac{0{,}1 \cdot (1+100s)}{(1+10s)\left(1+\frac{1}{20}s\right)^2}$$





$\boxed{\sum 20}$

Aufgabe 3: Modellbildung und inverse Laplace-Transformation

a) Einsetzen von M und Laplacetransformation ergeben:

$$\theta s \cdot \Omega(s) = k \cdot I(s) - D(s), \qquad U(s) = R \cdot I(s) + Ls \cdot I(s) + k \cdot \Omega(s)$$ 2

Die zweite Gleichung umgestellt nach $I(s)$ lautet:

$$I(s) = \frac{U(s) - k \cdot \Omega(s)}{Ls + R}$$ 1

Einsetzen in die erste Gleichung eliminiert $I(s)$:

$$\theta s \cdot \Omega(s) = k \cdot \frac{U(s) - k \cdot \Omega(s)}{Ls + R} - D(s)$$

$$\Leftrightarrow (\theta L s^2 + \theta R s) \cdot \Omega(s) = k \cdot U(s) - k^2 \cdot \Omega(s) - (Ls + R) \cdot D(s)$$

$$\Leftrightarrow \Omega(s) = \frac{k}{\theta L s^2 + \theta R s + k^2} \cdot U(s) - \frac{Ls + R}{\theta L s^2 + \theta R s + k^2} \cdot D(s)$$ 2

$$\Leftrightarrow \boxed{\Omega(s) = \frac{\frac{k}{\theta L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{\theta L}} \cdot U(s) - \frac{\frac{1}{\theta}s + \frac{R}{\theta L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{\theta L}} \cdot D(s)}$$

b) Einsetzen der Eingangssignale führt auf:

$$\Omega(s) = \frac{400}{s(s+4)^2} - \frac{10s + 240}{s(s+4)^2} = \frac{160 - 10s}{s(s+4)^2} = \frac{B_1}{s} + \frac{B_{11}}{s+4} + \frac{B_{12}}{(s+4)^2}$$ 4

Die Partialbruchzerlegung ergibt:

$$B_1 = \left[\frac{160 - 10s}{s(s+4)^2} \cdot s\right]_{s=0} = \frac{160}{16} \Leftrightarrow \boxed{B_1 = 10}$$ 2

$$B_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{160 - 10s}{s(s+4)^2} \cdot (s+4)^2\right]_{s=-4} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{160}{s} - 10\right]_{s=-4}$$

$$\Leftrightarrow B_{11} = \left[\frac{-160}{s^2}\right]_{s=-4} \Leftrightarrow \boxed{B_{11} = -10}$$ 4

$$B_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \cdot \left[\frac{160 - 10s}{s(s+4)^2} \cdot (s+4)^2\right]_{s=-4} = \frac{160 + 40}{-4} \Leftrightarrow \boxed{B_{12} = -50}$$ 2

Daraus folgt das Gesamtergebnis:

$$\boxed{\Omega(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+4} - \frac{50}{(s+4)^2}}$$

Mit folgende Korrespondenzen

$$\frac{1}{s} \quad 1 \cdot \sigma(t), \qquad \frac{1}{s+a} \quad e^{-at} \cdot \sigma(t), \qquad \frac{1}{(s+a)^2} \quad t \cdot e^{-at} \cdot \sigma(t)$$

ergibt sich der Zeitverlauf:

$$\boxed{\omega(t) = \left[10\left(1 - e^{-4t}\right) - 50te^{-4t}\right] \cdot \sigma(t)}$$ 3

c) Für $t = 0$ ergibt sich:

$$\omega(t=0) = 10\left(1 - e^0\right) - 50 \cdot 0 \cdot e^0 = 10(1-1) + 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega(t=0) = 0}$$ 2

Für $t \to \infty$ erhält man:

$$\omega(t \to \infty) = \lim_{t\to\infty}\left(10\left(1 - e^{-4t}\right)\right) - \lim_{t\to\infty}\left(50\frac{t}{e^{4t}}\right)$$

Da $\lim_{s\to\infty} e^{-4t} = 0$ und $\lim_{s\to\infty} e^{4t} = \infty$ ist, ergibt sich nur für den ersten Summanden ein Grenzwert. Der zweite Summand ist ein unbestimmter Ausdruck $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Deshalb ist zunächst die getrennte Ableitung von Zähler und Nenner nach t nötig (Regel von L'Hospital):

$$\omega(t \to \infty) = 10(1-0) - \lim_{t\to\infty}\left(50\frac{1}{4e^{4t}}\right) = 1 - 50 \cdot 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega(t \to \infty) = 10}$$ 3

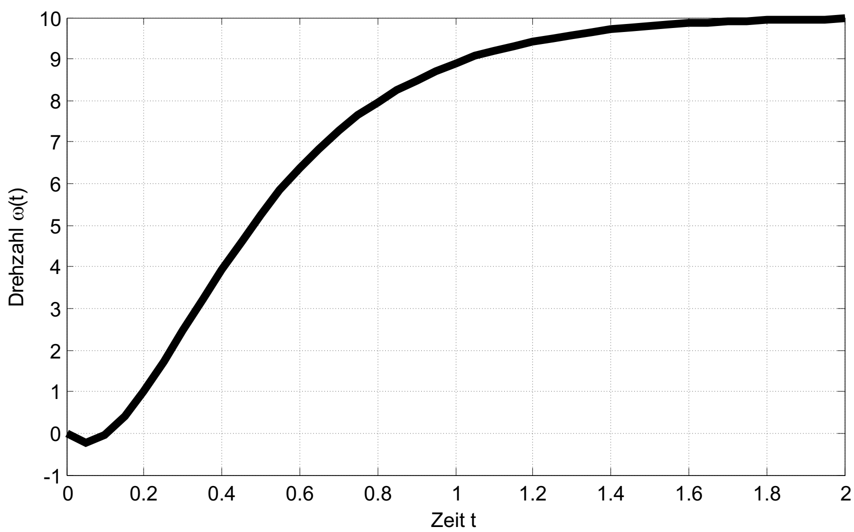
Zum Zeitpunkt $t = 0{,}05$ folgt:

$$\omega(t = 0{,}05) = 10\left(1 - e^{-0{,}2}\right) - 50 \cdot 0{,}05 \cdot e^{-0{,}2}$$

Mit $e^{-0{,}2} \approx 0{,}82$:

$$\omega(t = 0{,}05) \approx 10 \cdot 0{,}18 - 2{,}5 \cdot 0{,}82 \approx 1{,}8 - 2,05 \Leftrightarrow \boxed{\omega(t = 0{,}05) \approx -0{,}25}$$ 2

Der Drehzahlverlauf beginnt also bei 0, fällt vorübergehend ins Negative ab und nähert sich asymptotisch dem Wert 10 (siehe Abbildung). Dies wird dadurch verursacht, dass nach dem sprungförmigen Anstieg der Ankerspannung das Motormoment nur verzögert aufgebaut wird, während das Lastmoment direkt an an der Motorwelle wirkt und den Motor sofort in die andere Richtung bewegt. 1



2

$\sum 30$

Aufgabe 4: Regelung eines instabilen Systems

a) Der offene Regelkreis hat zwei instabile Pole ($s_{1,2} = +2$). Das vereinfachte Nyquist-Kriterium darf jedoch nur angewendet werden, wenn der offene Regelkreis ausschließlich stabile Pole hat (und maximal einen Pol im Ursprung). 2

b) Der Verstärkungsfaktor skaliert die Ortskurve, so dass diese bei $K_p = 6$ dreimal so groß ist, wie im Fall $K_p = 2$. Aus diesem Grund ist Ortskurve 1 für die Reglerverstärkung $K_p = 2$ gültig und Ortskurve 2 für $K_p = 6$. 1

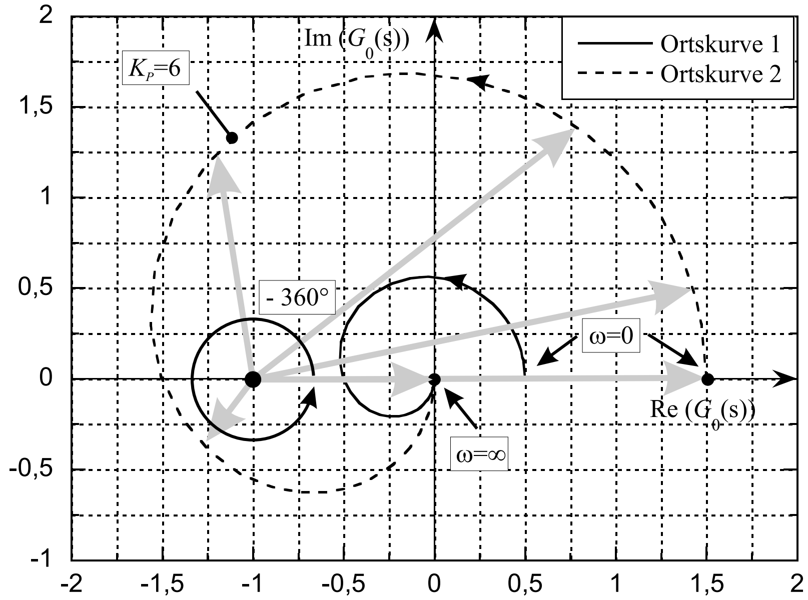
Für die Stabilitätsprüfung muss gezeigt werden, dass der Zeiger vom Punkt (-1,0) auf die Ortskurve von $\omega = 0$ bis $\omega \to \infty$ einen bestimmte Winkeländerung durchläuft:

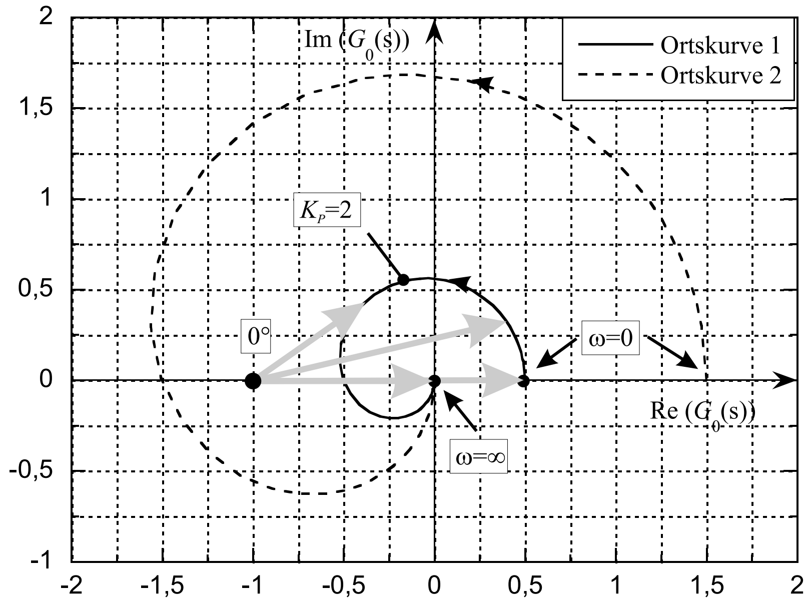
$$\angle \left(1 + G_0(i\omega)|_{\omega=0\ldots\infty}\right) = -180° \cdot n_0^+ - 90° \cdot n_0^i$$

Mit der Anzahl der instabilen Pole $n_0^+ = 2$ und Anzahl der Pole auf der imaginären Achse $n_0^i = 0$ erhält man:

2

$$\boxed{\angle \left(1 + G_0(i\omega)|_{\omega=0\ldots\infty}\right) = -360°}$$





Aus den Ortskurven erkennt man, dass die obige Bedingung nur für den Fall $K_p = 6$ erfüllt ist (das negative Vorzeichen ergibt sich aus der Dehung gegen den Uhrzeigersinn). Im anderen Fall ist die Winkeländerung 0°. 4

c) Für die Führungsübertragungsfunktion $G_w(s)$ (auch komplementäre Empfindlichkeitsfunktion $T(s)$) und die Störübertragungsfunktion $G_d(s)$ (auch Empfindlichkeitsfunktion $S(s)$) gilt im Standardregelkreis:

$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \Rightarrow \boxed{G_w(s) = \frac{K_R(s+1)}{s^2+(K_R-4)s+4+K_R}}$$ 3

$$G_d(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} \Rightarrow \boxed{G_d(s) = \frac{(s-2)^2}{s^2+(K_R-4)s+4+K_R}}$$ 3

d) Für die Stabilität gilt nach Hurwitz für ein System 2. Ordnung mit den Koeffzienten des Nennerpolynoms c_i die Bedingung alle $c_i > 0$:

$$\Rightarrow K_R - 4 > 0 \Leftrightarrow \boxed{K_R > 4} \quad (4 + K_R > 0 \Leftrightarrow K_R > -4 \text{ , schwächere Bedingung})$$ 2

Dieser Wert kann auch anhand der Ortskurve ermittelt werden. Die Winkeländerung beträgt -360° sobald die Ortskurve die reelle Achse links des Punktes (-1;0) schneidet. Bei $K_R = 2$ liegt der Schnittpunkt bei (-0,5;0). Vergrößert man K_R um den Faktor 2 auf $K_R = 4$ liegt der Schnittpunkt genau auf dem Punkt (-1;0). Wählt man $K_P > 4$, liegt der Schnittpunkt links von (-1;0) und Stabilität ist gewährleistet. 2

e) Für die Regelabweichung $E(s)$ gilt folgende Übertragungsfunktion:

$$E(s) = G_d(s) \cdot W(s)$$

Für einen Führungssprung $W(s) = \frac{1}{s}$ ergibt sich:

$$e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} [s \cdot G_d(s) \cdot W(s)] = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot \frac{(s-2)^2}{s^2+(K_R-4)s+4+K_R} \cdot \frac{1}{s} \right]$$ 3

$$\Rightarrow e(t \to \infty) = \frac{(0-2)^2}{0+(K_R-4)\cdot 0+4+K_R} \Leftrightarrow \boxed{e(t \to \infty) = \frac{4}{4+K_R}}$$ 1

Gefordert ist ein Regelfehler $e(t \to \infty) < 0{,}4$:

$$0{,}4 > \frac{4}{4+K_R} \Leftrightarrow 1{,}6 + 0{,}4K_R > 4 \Leftrightarrow K_R > \frac{2{,}4}{0{,}4} \Leftrightarrow \boxed{K_R > 6}$$ 2

f) Die Übertragungsfunktion des PI-Reglers und $G_0(s)$ lauten:

$$G_R(s) = \frac{K_R(1+T_I s)}{T_I s} \Rightarrow G_0(s) = \frac{K_R(1+T_I s)(s+1)}{T_I s(s-2)^2}$$

Damit ergibt sich für $G_d(s)$:

$$G_d(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} \Rightarrow G_d(s) = \frac{T_I s(s-2)^2}{T_I s(s-2)^2 + K_R(1+T_I s)(s+1)}$$ 3

Für den Regelfehler $e(t \to \infty)$ ergibt sich:

$$e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} \left[s \cdot G_d(s) \cdot \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \to 0} \left[\frac{T_I s(s-2)^2}{T_I s(s-2)^2 + K_R(1+T_I s)(s+1)} \right]$$

$$e(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} \left[\frac{0}{0+K_R} \right] \Rightarrow \boxed{e(t \to \infty) = 0}$$ 2

$\boxed{\sum 30}$