Prüfungsklausur Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

21.08.2021

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Ges.
Punkte:	23	19	24	16	21	17	120
Erreicht:							

Dauer der Klausur: 2 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Regelungstechnik-Skript und 4-seitige Formelsammlung

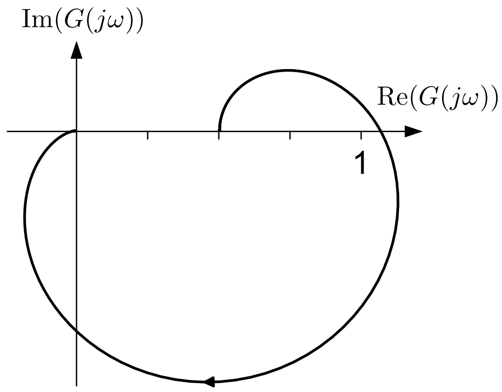
Aufgabe 1: Verständnisfragen (23 Punkte)

a) Schreiben Sie je eine Übertragungsfunktion auf, deren Sprungantwort für $t \to \infty$...

1) gegen Unendlich läuft, ...
2) auf Null abfällt, ...
3) sich asymptotisch einem endlichen Endwert nähert. (3 Punkte)

b) Sie haben zwei Reglerentwurfsverfahren kennengelernt, bei denen Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises vorgegeben und ein passender Regler dazu ausgerechnet wird. Wie heißen diese Verfahren, bzw. die entsprechenden Regler. Eines dieser Verfahren, bzw. einer der Regler, ist auch für instabile Regelstrecken geeignet, der andere nicht, warum ist das so? (4 Punkte)

c) Beantworten Sie folgende Fragen zur folgenden Frequenzgangsortskurve eines minimalphasigen Systems, jeweils mit einer kurzen Begründung: (5 Punkte)



1) Hat die Übertragungsfunktion eine Nullstelle?
2) Welchen Wert hat die Verstärkung der Übertragungsfunktion?
3) Wie groß ist der Polüberschuss $(n - m)$ der Übertragungsfunktion?
4) Ist die Übertragungsfunktion sprungfähig?
5) Hat die Übertragungsfunktion globales P-, I-, oder D-Verhalten?

d) Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion: $G(s) = 5e^{-2s}$ (5 Punkte)

1) Wie bezeichnet man ein solches System?
2) Welche Bedeutung hat die 2 im Exponenten?
3) Wie lauten der Amplituden- und Phasengang?
4) Ist das System minimalphasig (kurze Begründung)?
5) Ist das System linear oder nichtlinear (kurze Begründung)?

e) Ein PID-Regler besteht aus einem proportionalen, einem integralen und einem differenzierenden Anteil. Bitte geben Sie kurze Begründungen zu allen Antworten an: (3 Punkte)

1) Welcher der Anteile wird dazu benutzt, um auch bei einer proportionalen Regelstrecke den bleibenden Regelfehler zu entfernen?
2) Welcher Anteil ist bezüglich der Stabilität eher unbedenklich (wirkt stabilisierend)?
3) Welcher Anteil hat eine destabilisierende Wirkung und muss daher vorsichtig verwendet werden?

f) Gegeben sind die beiden Darstellungsarten eines PT_1 Systems. (3 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{K}{Ts+1}, \quad G_2(s) = \frac{k}{s+a}$$

Berechnen Sie für beide Systeme die Verstärkung, den Pol sowie die Zeitkonstante und geben Sie diese in Abhängigkeit der Variablen an.

Aufgabe 2: Wurzelortskurve (19 Punkte)

Mit Hilfe der Wurzelortskurve soll ein geschlossener Regelkreises bezüglich Stabilität und Schwingungsfähigkeit für verschiedene Reglerverstärkungen K_R untersucht werden. Dazu sind die Übertragungsfunktionen einer Regelstrecke $G_S(s)$ und eines Reglers $G_R(s)$ gegeben:

$$G_S(s) = \frac{(s+2)}{(s-1)(s+4)(s+5)}, \quad G_R(s) = K_R$$

a) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve möglichst genau. Berechnen Sie dazu die Asymptotenwinkel ψ_i und den Asymptotenschnittpunkt s_A. Für eventuelle Verzweigungspunkte dürfen Sie vereinfachend annehmen, dass sie in der Mitte zwischen den entsprechenden Polen liegen.

b) Erklären Sie anhand der unter a) gezeichneten Wurzelortskurve, wie sich die Pole des geschlossenen Regelkreises bei Vergrößerung der Reglerverstärkung K_R bewegen und wie sich der geschlossene Regelkreis bezüglich Stabilität und Schwingungsfähigkeit bei kleinen und großen Verstärkungen verhält. Hierbei soll stets $K_R > 0$ gelten.

c) Ermitteln Sie, ob es eine Reglerverstärkung K_R geben kann, bei der Regelkreis sowohl stabil ist, als auch keine konjugiert komplexen Polpaare hat (nicht schwingungsfähig). Dazu können Sie sich **eine** der folgenden zwei Vorgehensweisen aussuchen:

   1) Berechnen Sie die charakteristische Gleichung und bestimmen Sie K_R so, dass der Steckenpol bei $+1$ gerade auf die Stabilitätsgrenze gewandert ist. Mit diesem K_R berechnen Sie die Lage der übrigen Pole.

   2) Benutzen Sie die sogenannte *Amplitudenbedingung* der Wurzelortskurve

   $$\frac{1}{k} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |s - n_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|}, \quad \text{wobei hier gilt: } k = K_R,$$

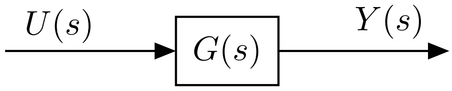
   um zu bestimmen, bei welchen Reglerverstärkungen ein Pol entweder auf der Stabilitätsgrenze oder auf dem Verzweigungspunkt liegt. Dazu muss in der obigen Gleichung für s lediglich der Ort auf der Wurzelortskurve eingesetzt werden, für den die Verstärkung K_R gesucht wird.

Aufgabe 3: Laplace Transformation (24 Punkte)

Ein PT_1-Glied $G(s) = \dfrac{1}{1+Ts}$ wird mit einem sinusförmigen Signal $u(t) = \sin(\omega_0 \cdot t)$ für $t \geq 0$ angeregt. Da das System erst ab dem Zeitpunkt $t = 0$ angeregt wird, schwingt das System zunächst ein, bis es dann im eingeschwungenen Zustand ein rein sinusförmiges Ausgangssignal erzeugt. Das Einschwingverhalten und das resultierende Ausgangssignal soll im Folgenden analysiert werden.

Beachten Sie die Transformationstabelle am Ende der Aufgabe.

Aufgabenteil d)-e) sind mit der gegebenen Zwischenlösung separat bearbeitbar.



a) Berechnen Sie das Laplace-transformierte Ausgangssignal $Y(s)$.

b) Führen Sie für $Y(s)$ eine Partialbruchzerlegung durch und bestimmen Sie die Koeffizienten $B_1, \ldots, B_n$.

Hilfestellung: Sortieren Sie dazu am besten die Terme so, dass die ersten beiden Pole ein konjugiertes Polpaar mit $p_{1/2} = a \pm i\omega$ bilden:

$$Y(s) = \frac{B_1 s + B_2}{(s-p_1)(s-p_2)} + \frac{B_3}{s-p_3} + \ldots + \frac{B_n}{s-p_n}$$

Ermitteln sie die notwendigen Koeffizienten B_1 bis B_n entweder mittels Koeffizientenvergleich oder mit folgenden Formeln (wenn p_1 der Pol mit positivem Imaginärteil ist):

Koeffizienten bei komplexem Polpaar:

$$B_1 = \frac{1}{\omega_0} \mathrm{Im}\left\{ [Y(s)(s-p_1)(s-p_2)]\,|_{s=p_1} \right\}$$

$$B_2 = -B_1 a + \mathrm{Re}\left\{ [Y(s)(s-p_1)(s-p_2)]\,|_{s=p_1} \right\}, \qquad \text{mit } a = \mathrm{Re}\left\{ p_{1/2} \right\}$$

Koeffizienten bei einzelnen Polen (für $i = 3, \ldots, n$):

$$B_i = [Y(s) \cdot (s-p_i)]\,|_{s=p_i}$$

c) Nehmen sie ab nun für das System und das Signal folgende Parameter an: $T = 1\,\mathrm{sec}$ und $\omega_0 = 1\,\frac{1}{\mathrm{sec}}$. Setzen Sie die Werte in $Y(s)$ ein (in der Rechnung kann auf die Einheiten verzichtet werden).

<u>**Zwischenlösung**</u>:

$$Y(s) = \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}}{(s^2+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1}$$

d) Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformierte $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. Nutzen Sie dafür die gegebene Transformationstabelle und folgende Identität $\cos(t) - \sin(t) = -\sqrt{2} \cdot \sin(t - \frac{\pi}{4})$.

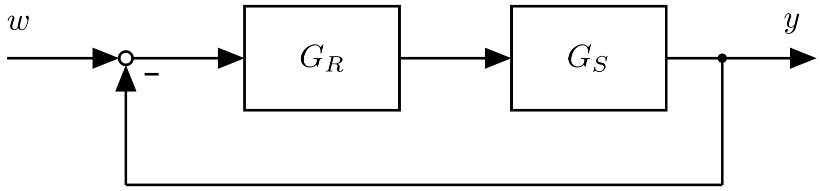
Transformationstabelle:

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

e) Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_e, ab dem der Einschwingprozess abgeschlossen ist. Kriterium hierfür ist, dass die Abweichung der abklingenden e-Funktion weniger als 5% der Amplitude der reinen Sinusschwingung beträgt.

Aufgabe 4: Übertragungsfunktion (16 Punkte)

Ein Standardregelkreis mit $G_{R,1} = K$ und $G_S = \frac{1}{1+Ts}$ ist gegeben.



Hinweis: Für die Bearbeitung der Aufgabe werden keine expliziten Werte (z.B. für K oder T) angenommen.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.

b) Weist der geschlossene Regelkreis eine bleibende Regelabweichung auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie die Zeitkonstante T_1 des geschlossenen Regelkreises.

d) Ist der geschlossene Regelkreis für beliebige K und T stabil (K und T können auch negativ werden)? Geben Sie die Bereiche an, in denen der geschlossene Regelkreis stabil oder instabil ist.

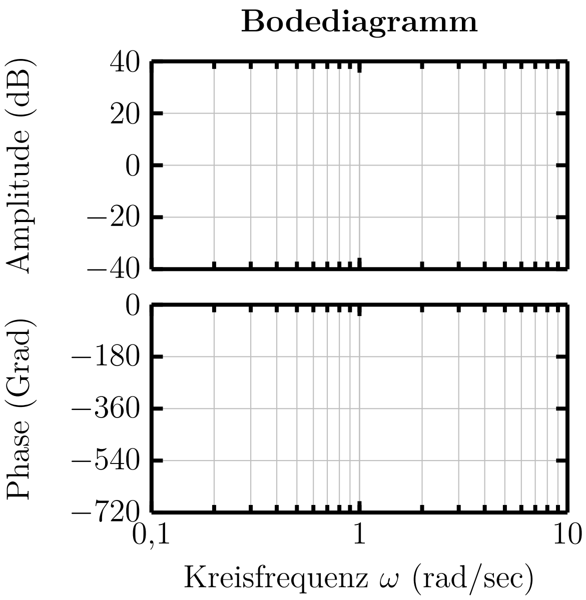
e) Wie muss der Reglerparameter K eingestellt werden, damit die bleibende Regelabweichung gegen 0 geht?

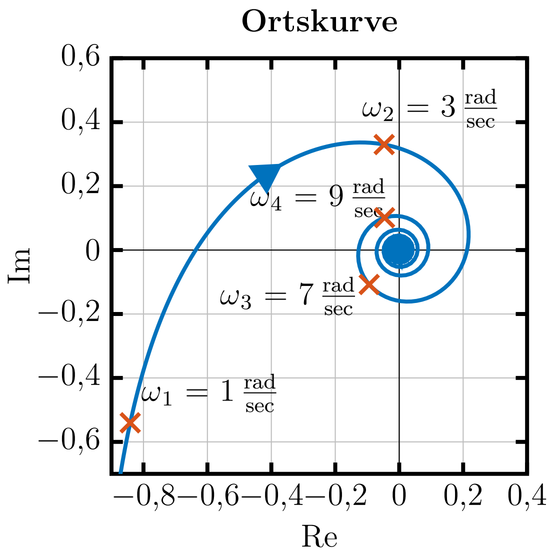
f) Wählen Sie einen Regler $G_{R,2}$ aus, mit dem die bleibende Regelabweichung vermieden wird. Nennen Sie die Bezeichnung und die Übertragungsfunktion des gewählten Reglers.

g) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und die Sprungantwort mit dem neuen Regler $G_{R,2}$. Interpretieren Sie das Ergebnis der Sprungantwort.

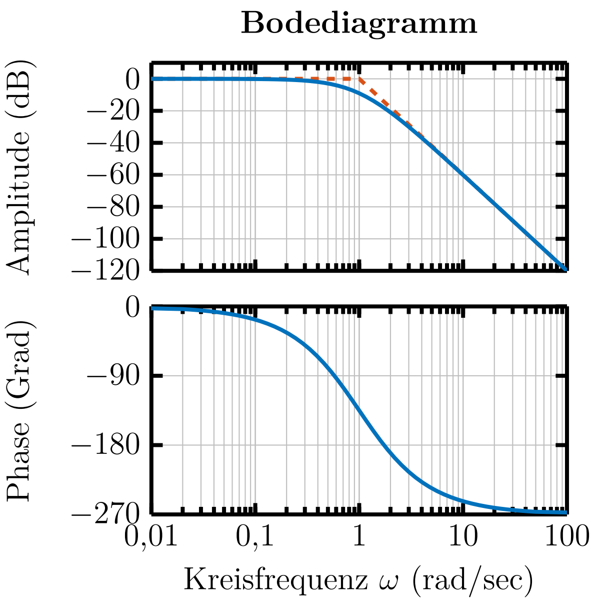
Aufgabe 5: Bodediagramme und Ortskurven (21 Punkte)

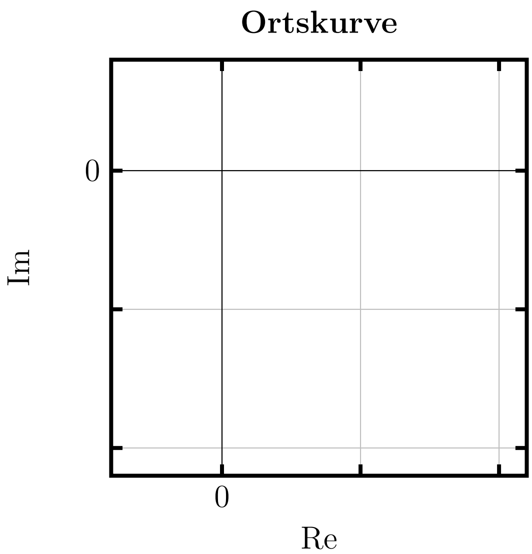
a) Skizzieren Sie das Bodediagramm zwischen den Frequenzen $\omega = 0{,}1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ und $\omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ der vorliegenden Ortskurve. Nutzen Sie hierfür die 4 vorgegeben Frequenzen ω_i mit $i = 1, \ldots, 4$. Achten Sie darauf, dass das asymptotische Verhalten erkennbar ist. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems?
Hinweis: $A(\omega \to 0) \to \infty$





b) Skizzieren Sie die Ortskurve aus dem vorliegenden Bodediagramm. Stellen Sie die Übertragungsfunktion des Systems auf. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems?

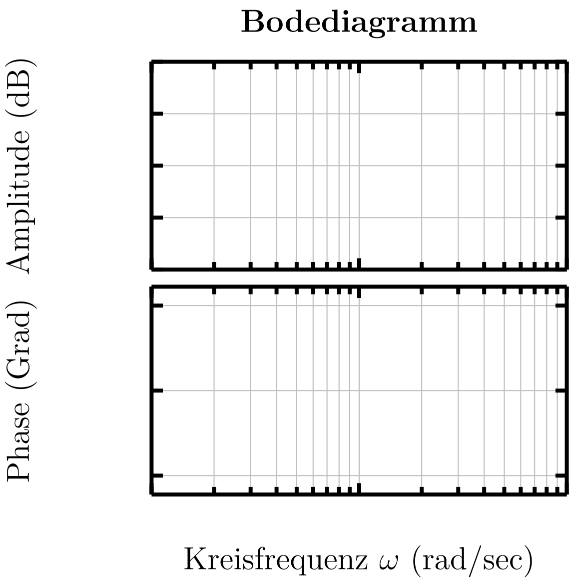


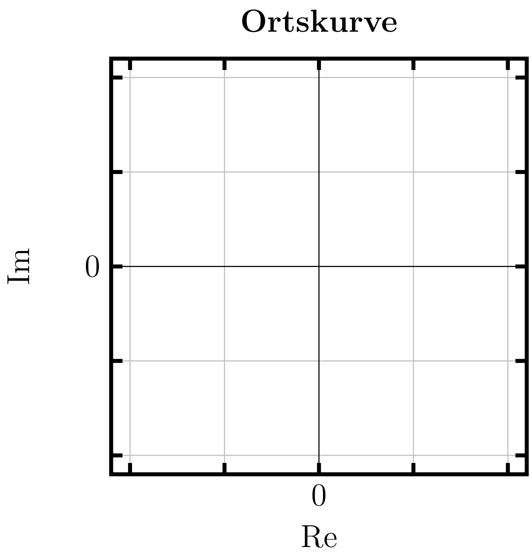


c) Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}.$$

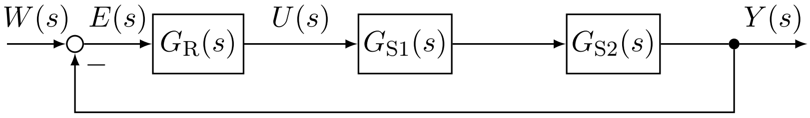
Wie wird dieses System genannt? Skizzieren Sie das asymptotische Bodediagramm und die Ortskurve dieses Systems.





Aufgabe 6: Störgrößenaufschaltung (17 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es eine Störgrößenaufschaltung zu realisieren. Gegeben ist ein System $G_\mathrm{S}(s)$, welches in die beiden Teilübertragungsfunktionen $G_\mathrm{S1}(s)$ und $G_\mathrm{S2}(s)$ unterteilt werden kann. Dieses soll mit einem Regler $G_\mathrm{R}(s)$ in einem geschlossenen Regelkreis geregelt werden.



Im Folgenden wirken zwei unabhängige Störungen auf das System. Die erste Störung $Z_1(s)$ wirkt sich zwischen den Systemen $G_\mathrm{S1}(s)$ und $G_\mathrm{S2}(s)$ additiv auf den Prozess aus. Die zweite Störung $Z_2(s)$ wirkt auf den Prozessausgang.

a) Skizzieren Sie das Blockschaltbild des Regelkreises mit den beiden Störgrößen sowie jeweils einer Störübertragungsfunktion $G_\mathrm{D1}(s)$ (bei $Z_1(s)$) und $G_\mathrm{D2}(s)$ (bei $Z_2(s)$).

Nun soll eine Störgrößenaufschaltung entworfen werden. Vorerst wird angenommen, dass die zweite Störung $Z_2(s)$ null ist.

b) Skizzieren Sie das Blockschaltbild mit einer Störgrößenaufschaltung. Geben Sie zudem die Übertragungsfunktion der Störgrößenaufschaltung an.

Die zweite Störung $Z_2(s)$ ist nun nicht mehr null. Im kommenden sollen nun beide Störungen mit jeweils einer Störgrößenaufschaltung kompensiert werden. Beachten Sie, dass die Größe zwischen $G_\mathrm{S1}(s)$ und $G_\mathrm{S2}(s)$ **nicht** beeinflusst werden kann!

c) Skizzieren Sie das Blockschaltbild mit beiden Störgrößenaufschaltungen. Geben Sie zudem die Übertragungsfunktion der zweiten Störgrößenaufschaltung an, wenn die erste Störgrößenaufschaltung wie in b) verwendet wird.

d) Wie lautet die Übertragungsfunktion des kompletten geschlossenen Regelkreises, falls es sich um zwei ideale Störgrößenaufschaltungen handelt?

Lösung:

Aufgabe 1: Verständnisfragen (23 Punkte)

a) Schreiben Sie je eine Übertragungsfunktion auf, deren Sprungantwort für $t \to \infty \ldots$

1) gegen Unendlich läuft, ...
2) auf Null abfällt, ...
3) sich asymptotisch einem endlichen Endwert nähert. (3 Punkte)

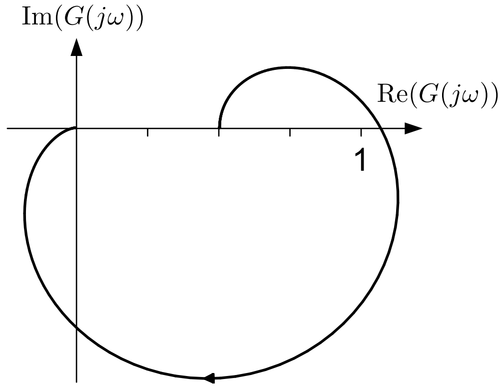
Antwort:

1) z.B. $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s(s+2)}$
2) z.B. $\frac{2s}{s+1}$
3) z.B. $\frac{3}{s^2+2s+1}$ 3

b) Sie haben zwei Reglerentwurfsverfahren kennengelernt, bei denen Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises vorgegeben und ein passender Regler dazu ausgerechnet wird. Wie heißen diese Verfahren, bzw. die entsprechenden Regler. Eines dieser Verfahren, bzw. einer der Regler, ist auch für instabile Regelstrecken geeignet, der andere nicht, warum ist das so? (4 Punkte)

Antwort:
Es handelt sich um den Polvorgabe-, bzw. den Kompensationsregler. Der Kompensationsregler ist bei instabilen Systemen nicht geeignet, da er immer die Pole der Strecke wegkürzt. Dies ist bei instabilen Polen nicht zulässig. Da eine exakte Kürzung bei realen System nicht möglich ist, bleibt die Instabilität im geschlossen Regelkreis erhalten. Der Polvorgaberegler verschiebt die Pole des geschlossenen Regelkreises an die gewünschte (stabile) Stelle, daher tritt das Problem nicht auf. 4

c) Beantworten Sie folgende Fragen zur folgenden Frequenzgangsortskurve eines minimalphasigen Systems, jeweils mit einer kurzen Begründung: (5 Punkte)



1) Hat die Übertragungsfunktion eine Nullstelle?
2) Welchen Wert hat die Verstärkung der Übertragungsfunktion?
3) Wie groß ist der Polüberschuss $(n - m)$ der Übertragungsfunktion?

4) Ist die Übertragungsfunktion sprungfähig?
5) Hat die Übertragungsfunktion globales P-, I-, oder D-Verhalten?

Antwort:

1) Ja, weil die Ortskurve zu Beginn eine positive Phasenverschiebung aufweist.
2) Die Verstärkung liest man am Beginn der Ortskurve ($\omega = 0$) ab: $A(0) = 0{,}5$.
3) Da die Ortskurve für $\omega \to \infty$ bei $-180° = 2 \cdot (-90°)$ Phasenverschiebung endet, beträgt der Polüberschuss 2.
4) Nein, dann müsste die Ortskurve auf der reellen Achse und nicht im Ursprung enden. Oder: Polüberschuss ist nicht gleich Null, siehe 3).
5) Die Ortskurve beginnt auf der reellen Achse, daher liegt P-Verhalten vor. 5

d) Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion: $G(s) = 5e^{-2s}$ (5 Punkte)

1) Wie bezeichnet man ein solches System?
2) Welche Bedeutung hat die 2 im Exponenten?
3) Wie lauten der Amplituden- und Phasengang?
4) Ist das System minimalphasig (kurze Begründung)?
5) Ist das System linear oder nichtlinear (kurze Begründung)?

Antwort:

1) Totzeitglied.
2) Das ist die Totzeit. Das System verschiebt das Eingangssignal um 2 Sekunden.
3) $A(\omega) = 5$ ($\approx 14\,\mathrm{dB}$), $\varphi(\omega) = -2\omega$
4) Nein, bei einem phasenminimalen System folgt aus einem konstanten Amplitudengang eine Phasenverschiebung von 0°. Dies trifft hier nicht zu.
5) Das System ist linear. Wenn man z.B. das Eingangssignal mit einem Faktor multipliziert, verändert sich auch das Ausgangssignal um den selben Faktor. 5

e) Ein PID-Regler besteht aus einem proportionalen, einem integralen und einem differenzierenden Anteil. Bitte geben Sie kurze Begründungen zu allen Antworten an: (3 Punkte)

1) Welcher der Anteile wird dazu benutzt, um auch bei einer proportionalen Regelstrecke den bleibenden Regelfehler zu entfernen?
2) Welcher Anteil ist bezüglich der Stabilität eher unbedenklich (wirkt stabilisierend)?
3) Welcher Anteil hat eine destabilisierende Wirkung und muss daher vorsichtig verwendet werden?

Antwort:

1) Der I-Anteil. Bei einem Regelfehler erhöht sich durch die Integration die Stellgröße immer weiter, bis der Fehler verschwunden ist.

2) Der D-Anteil. Durch den differenzierenden Anteil wie die Phase angehoben, also die Phasenreserve vergrößert.

3) Der I-Anteil ist besonders problematisch. Er senkt die Phase ab und reduziert damit die Phasenreserve. Auch korrekt: Der P-Anteil kann die Amplituden-, bzw. Phasenreserve reduzieren (wenn G_0 einen Polüberschuss > 2 aufweist). 3

f) Gegeben sind die beiden Darstellungsarten eines PT_1 Systems. (3 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{K}{Ts+1}, \quad G_2(s) = \frac{k}{s+a}$$

Berechnen Sie für beide Systeme die Verstärkung, den Pol sowie die Zeitkonstante und geben Sie diese in Abhängigkeit der Variablen an.
Antwort:
Verstärkung:

$$G_1 : K, \quad G_2 : \frac{k}{a}$$

Pol:

$$G_1 : s = -\frac{1}{T}, \quad G_2 : s = -a$$

Zeitkonstante:

$$G_1 : T, \quad G_2 : \frac{1}{a}$$

3

Aufgabe 2: Wurzelortskurve (19 Punkte)

Mit Hilfe der Wurzelortskurve soll ein geschlossener Regelkreises bezüglich Stabilität und Schwingungsfähigkeit für verschiedene Reglerverstärkungen K_R untersucht werden. Dazu sind die Übertragungsfunktionen einer Regelstrecke $G_S(s)$ und eines Reglers $G_R(s)$ gegeben:

$$G_S(s) = \frac{(s+2)}{(s-1)(s+4)(s+5)}, \quad G_R(s) = K_R$$

a) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve möglichst genau. Berechnen Sie dazu die Asymptotenwinkel ψ_i und den Asymptotenschnittpunkt s_A. Für eventuelle Verzweigungspunkte dürfen Sie vereinfachend annehmen, dass sie in der Mitte zwischen den entsprechenden Polen liegen.

Antwort:
Asymptotenwinkel:

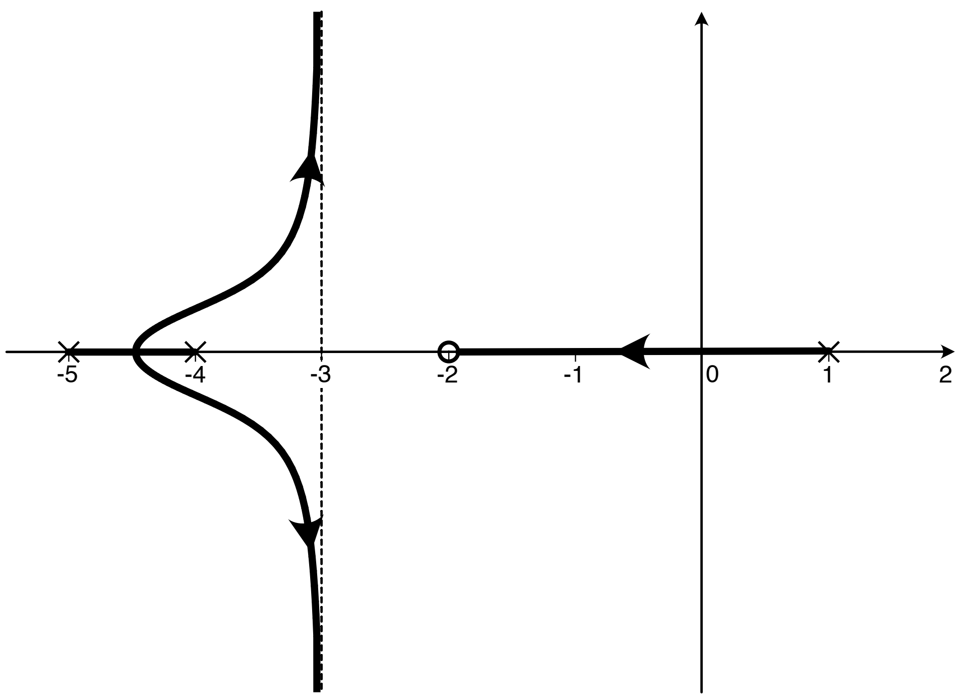
$$G_0 = \frac{K_R(s+2)}{(s-1)(s+4)(s+5)} \Rightarrow n = 3, m = 1: \; n_1 = -2, p_1 = +1, p_2 = -4, p_3 = -5$$

$$\psi_l = (1+2l) \cdot \frac{180°}{n-m} \Rightarrow \psi_l = (1+2l) \cdot \frac{180°}{3-1} = (1+2l) \cdot 90°$$

mit: $l = 0, 1 \Rightarrow \boxed{\psi_0 = 90°, \; \psi_1 = 270°}$

Asymptotenschnittpunkt:

$$s_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} n_i}{n-m} \Rightarrow s_A = \frac{-4-5+1-(-2)}{3-1} \Leftrightarrow \boxed{s_A = -3}$$



8

b) Erklären Sie anhand der unter a) gezeichneten Wurzelortskurve, wie sich die Pole des geschlossenen Regelkreises bei Vergrößerung der Reglerverstärkung K_R bewegen und wie sich der geschlossene Regelkreis bezüglich Stabilität und Schwingungsfähigkeit bei kleinen und großen Verstärkungen verhält. Hierbei soll stets $K_R > 0$ gelten.

Antwort:
Für kleine Verstärkungen ist der Regelkreis instabil (Pol bei +1 ist noch nicht in die linke Halbebene gewandert) und nicht schwingungsfähig (alle Pole liegen auf der reellen Achse). Für große Verstärkungen ist der Regelkreis stabil (der instabile Pol der Strecke ist in der linken Halbebene und wandert schließlich in die Nullstelle bei -2). Allerdings verlassen die Pole der Regelstecke bei -4 und -5 bei hoher Verstärkung die reelle Achse, der Regelkreis wird schwingungsfähig. Obwohl die Dämpfung für große K_R beliebig klein werden kann (Imaginärteile beliebig groß), bleibt der Regelkreis stabil, da der Realteil der Pole nicht größer als -3 werden kann. 5

c) Ermitteln Sie, ob es eine Reglerverstärkung K_R geben kann, bei der Regelkreis sowohl stabil ist, als auch keine konjugiert komplexen Polpaare hat (nicht schwingungsfähig). Dazu können Sie sich **eine** der folgenden zwei Vorgehensweisen aussuchen:

1) Berechnen Sie die charakteristische Gleichung und bestimmen Sie K_R so, dass der Steckenpol bei +1 gerade auf die Stabilitätsgrenze gewandert ist. Mit diesem K_R berechnen Sie die Lage der übrigen Pole.
2) Benutzen Sie die sogenannte *Amplitudenbedingung* der Wurzelortskurve

$$\frac{1}{k} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |s - n_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|}, \quad \text{wobei hier gilt: } k = K_R,$$

um zu bestimmen, bei welchen Reglerverstärkungen ein Pol entweder auf der Stabilitätsgrenze oder auf dem Verzweigungspunkt liegt. Dazu muss in der obigen Gleichung für s lediglich der Ort auf der Wurzelortskurve eingesetzt werden, für den die Verstärkung K_R gesucht wird.

Antwort:

1) Die charakteristische $1 + G_0(s) = 0$ Gleichung lautet hier:

$$(s-1)(s+4)(s+5) + K_R(s+2) = s^3 + 8s^2 + (11 + K_R)s + (2K_R - 20) = 0$$

Für die Grenzstabilität liegt ein Pol im Ursprung ($s = 0$), d.h. ein s in der charakteristischen Gleichung muss ausgeklammert werden können. Das ist der Fall, wenn der letzte Summand Null wird:

$$2K_R - 20 = 0 \Leftrightarrow \boxed{K_R = 10}$$

Mit $K_R = 10$ erhält man für die übrigen Pole:

$$s^2 + 8s + (11 + K_R) = s^2 + 8s + 21 = 0 \Leftrightarrow s_{1,2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 21}$$

$$s_{1,2} = -4 \pm \sqrt{-5} \Leftrightarrow \boxed{s_{1,2} = -4 \pm \sqrt{5} \cdot i}$$

Im Grenzstabilen Fall ist der Regelkreis bereits schwingungsfähig. Der Regelkreis kann nicht stabil sein und zugleich ausschließlich reelle Pole haben!

2) Verstärkung für Grenzstabilität $s = 0$

$$\frac{1}{K_R} = \frac{\prod_{i=1}^{m} |s - n_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|} = \frac{|0 - (-2)|}{|0 - 1| \cdot |0 - (-4)| \cdot |0 - (-5)|} = \frac{2}{1 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2}{20}$$

$\Rightarrow \boxed{K_R = 10}$

Verstärkung im Verzweigungspunkt $s = -4{,}5$ (laut Aufgabenstellung in der Mitte zwischen den Polen):

$$\frac{1}{K_R} = \frac{|-4{,}5 - (-2)|}{|-4{,}5 - 1| \cdot |-4{,}5 - (-4)| \cdot |-4{,}5 - (-5)|} = \frac{2{,}5}{5{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = \frac{10}{5{,}5}$$

$\Rightarrow \boxed{K_R = 0{,}55}$

Der Regelkreis wird bereits bei $K_R = 0{,}55$ schwingungsfähig, aber erst bei $K_R = 10$ stabil. Der Regelkreis kann nicht stabil sein und zugleich ausschließlich reelle Pole haben! $\boxed{6}$

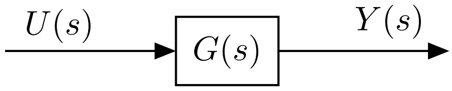
$\boxed{\sum 19}$

<u>Aufgabe 3:</u> Laplace Transformation (24 Punkte)

Ein PT_1-Glied $G(s) = \dfrac{1}{1+Ts}$ wird mit einem sinusförmigen Signal $u(t) = \sin(\omega_0 \cdot t)$ für $t \geq 0$ angeregt. Da das System erst ab dem Zeitpunkt $t = 0$ angeregt wird, schwingt das System zunächst ein, bis es dann im eingeschwungenen Zustand ein rein sinusförmiges Ausgangssignal erzeugt. Das Einschwingverhalten und das resultierende Ausgangssignal soll im Folgenden analysiert werden.

Beachten Sie die Transformationstabelle am Ende der Aufgabe.

Aufgabenteil d)-e) sind mit der gegebenen Zwischenlösung separat bearbeitbar.



a) Berechnen Sie das Laplace-transformierte Ausgangssignal $Y(s)$.

<u>**Antwort**</u>:

$$u(t) = \sin(\omega_0 \cdot t) \quad ○\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad U(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$ $\boxed{1}$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_0}{(1+Ts)(s^2+\omega_0^2)} = \frac{\frac{\omega_0}{T}}{(s-i\omega_0)(s+i\omega_0)(s+\frac{1}{T})}$$ $\boxed{1}$

b) Führen Sie für $Y(s)$ eine Partialbruchzerlegung durch und bestimmen Sie die Koeffizienten $B_1, \ldots, B_n$.

<u>Hilfestellung:</u> Sortieren Sie dazu am besten die Terme so, dass die ersten beiden Pole ein konjugiertes Polpaar mit $p_{1/2} = a \pm i\omega$ bilden:

$$Y(s) = \frac{B_1 s + B_2}{(s-p_1)(s-p_2)} + \frac{B_3}{s-p_3} + \ldots + \frac{B_n}{s-p_n}$$

Ermitteln sie die notwendigen Koeffizienten B_1 bis B_n entweder mittels Koeffizientenvergleich oder mit folgenden Formeln (wenn p_1 der Pol mit positivem Imaginärteil ist):

Koeffizienten bei komplexem Polpaar:

$$B_1 = \frac{1}{\omega_0}\mathrm{Im}\left\{[Y(s)(s-p_1)(s-p_2)]\,|_{s=p_1}\right\}$$

$$B_2 = -B_1 a + \mathrm{Re}\left\{[Y(s)(s-p_1)(s-p_2)]\,|_{s=p_1}\right\}, \qquad \text{mit } a = \mathrm{Re}\left\{p_{1/2}\right\}$$

Koeffizienten bei einzelnen Polen (für $i = 3, \ldots, n$):

$$B_i = [Y(s) \cdot (s-p_i)]\,|_{s=p_i}$$

<u>**Antwort**</u>:

Mittels Koeffizientenvergleich:

$$p_1 = i\omega_0 \qquad p_2 = -i\omega_0 \qquad p_3 = -\frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned}
\frac{B_1 s + B_2}{(s-i\omega_0)(s+i\omega_0)} + \frac{B_3}{s+\frac{1}{T}} &= \frac{\frac{\omega_0}{T}}{(s-i\omega_0)(s+i\omega_0)(s+\frac{1}{T})} \quad \Big| \cdot (s-i\omega_0)(s+i\omega_0)(s+\tfrac{1}{T}) \\
(B_1 s + B_2)(s+\frac{1}{T}) + B_3(s-i\omega_0)(s+i\omega_0) &= \frac{\omega_0}{T} \quad \Big| \text{umsortieren} \\
s^2(B_1+B_3) + s(\frac{B_1}{T} + B_2) + \frac{B_2}{T} + \omega_0^2 B_3 &= \frac{\omega_0}{T}
\end{aligned}$$ 2

Koeffizientenvergleich liefert:

$$B_1 + B_3 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{B_1}{T} + B_2 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{B_2}{T} + \omega_0^2 B_3 = \frac{\omega_0}{T} \tag{3}$$

Berechne (2)$-$(3)$\cdot T$:

$$\frac{B_1}{T} - \omega_0^2 B_3 T = -\omega_0 \tag{4}$$

Berechne (4)$\cdot T-$(1):

$$-\omega_0^2 B_3 T^2 - B_3 = -\omega_0 T \tag{5}$$

$$B_3(-\omega_0^2 T^2 - 1) = -\omega_0 T \tag{6}$$

$$\boxed{B_3 = \frac{\omega_0 T}{\omega_0^2 T^2 + 1} = \frac{\frac{\omega_0}{T}}{\omega_0^2 + \frac{1}{T^2}}} \tag{7}$$ 3

mit (1): $B_1 = -B_3 \Rightarrow \boxed{B_1 = -\frac{\frac{\omega_0}{T}}{\omega_0^2 + \frac{1}{T^2}}}$ 3

mit (2): $B_2 = -\frac{B_1}{T} \Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{\frac{\omega_0}{T^2}}{\omega_0^2 + \frac{1}{T^2}}}$ 3

oder mittels vorgegebenen Formeln:

$$p_1 = i\omega_0 \qquad p_2 = -i\omega_0 \qquad p_3 = -\frac{1}{T}$$

$$Y(s) = \frac{B_1 s + B_2}{(s-i\omega_0)(s+i\omega_0)} + \frac{B_3}{s+\frac{1}{T}}$$

(2)

$$B_1 = \frac{1}{\omega_0}\mathrm{Im}\left\{\left[\frac{\frac{\omega_0}{T}\cancel{(s+i\omega_0)(s-i\omega_0)}}{\cancel{(s+i\omega_0)(s-i\omega_0)}(s+\frac{1}{T})}\right]|_{s=i\omega_0}\right\} = \frac{1}{\omega_0}\mathrm{Im}\left\{\frac{\frac{\omega_0}{T}}{i\omega_0+\frac{1}{T}}\right\} = \frac{1}{\omega_0}\mathrm{Im}\left\{\frac{\frac{\omega_0}{T}(\frac{1}{T}-i\omega_0)}{\omega_0^2+\frac{1}{T^2}}\right\}$$

$$\boxed{=\frac{-\frac{\omega_0}{T}}{\omega_0^2+\frac{1}{T^2}}}$$ (3)

$$B_2 = \cancel{-B_1\cdot 0}+\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{\frac{\omega_0}{T}\cancel{(s+i\omega_0)(s-i\omega_0)}}{\cancel{(s+i\omega_0)(s-i\omega_0)}(s+\frac{1}{T})}\right]|_{s=i\omega_0}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\frac{\omega_0}{T}}{i\omega_0+\frac{1}{T}}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\frac{\omega_0}{T}(\frac{1}{T}-i\omega_0)}{\omega_0^2+\frac{1}{T^2}}\right\}$$

$$\boxed{=\frac{\frac{\omega_0}{T^2}}{\omega_0^2+\frac{1}{T^2}}}\left(=\frac{\omega_0}{\omega_0^2T^2+1}\right)$$ (3)

$$B_3 = [Y(s)(s-p_3)]\,|_{s=p_3}\boxed{=\frac{\frac{\omega_0}{T}}{\omega_0^2+\frac{1}{T^2}}}$$ (3)

Mit den berechneten B_1, B_2 und B_3 Koeffizienten ergibt sich die Lösung dann zu

$$Y(s) = \frac{B_1 s + B_2}{(s-i\omega_0)(s+i\omega_0)} + \frac{B_3}{s+\frac{1}{T}}\,.$$

c) Nehmen sie ab nun für das System und das Signal folgende Parameter an: $T = 1\,\mathrm{sec}$ und $\omega_0 = 1\,\frac{1}{\mathrm{sec}}$. Setzen Sie die Werte in $Y(s)$ ein (in der Rechnung kann auf die Einheiten verzichtet werden).

<u>**Antwort**</u>:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{2}, \qquad B_3 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{(s^2+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1}}$$ 1

<u>**Zwischenlösung**</u>:

$$Y(s) = \frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{(s^2+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1}$$

d) Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformierte $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. Nutzen Sie dafür die gegebene Transformationstabelle und folgende Identität $\cos(t) - \sin(t) = -\sqrt{2}\cdot\sin(t-\frac{\pi}{4})$.

<u>Transformationstabelle</u>:

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Antwort:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{(s^2+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \qquad \boxed{2}$$

$$y(t) = \sigma(t)\left(-\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\right) \qquad \boxed{2}$$

$\sigma(t)$ ist hier nötig, da $y(t) = 0$ für $t < 0$

Mit trigonometrischer Identität $\cos(t) - \sin(t) = -\sqrt{2}\cdot\sin(t - \frac{\pi}{4})$ folgt

$$y(t) = \sigma(t)\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t - \frac{\pi}{4})}_{\text{reine Sinusschwingung} := \text{b(t)}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t}}_{\text{Abklingende e-Funktion durch Sprungfuntkion} := \text{c(t)}}\right) \qquad \boxed{2}$$

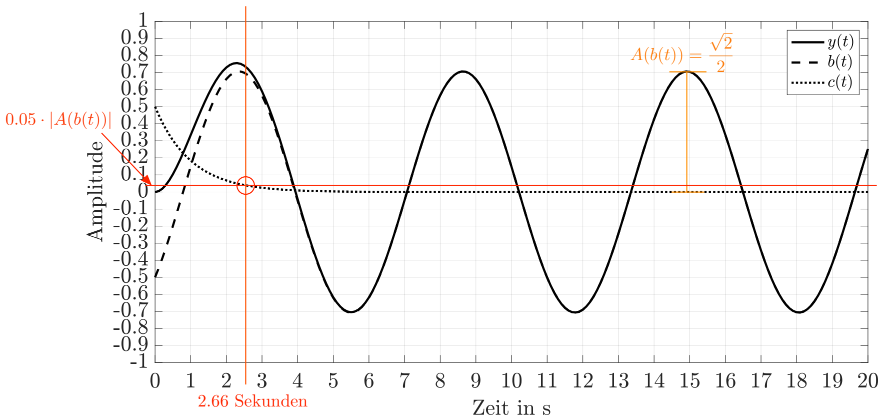
e) Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_e, ab dem der Einschwingprozess abgeschlossen ist. Kriterium hierfür ist, dass die Abweichung der abklingenden e-Funktion weniger als 5% der Amplitude der reinen Sinusschwingung beträgt.

Antwort:

$$\Delta_{\text{max}} = 0.05 \cdot |A(b(t))| = 0.05 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.035$$

$$\frac{1}{2}e^{-t} \leq 0.035 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t \geq 2.66 \text{ Sekunden}} \qquad \boxed{4}$$

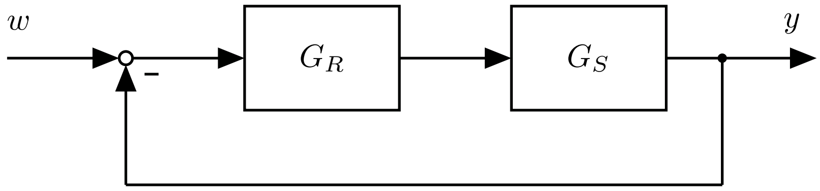
Das System ist nach etwa 2.66 Sekunden eingeschwungen.



$0.05 \cdot |A(b(t))|$
$A(b(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$y(t)$
$b(t)$
$c(t)$
Amplitude
2.66 Sekunden
Zeit in s

Aufgabe 4: Übertragungsfunktion (16 Punkte)

Ein Standardregelkreis mit $G_{R,1} = K$ und $G_S = \frac{1}{1+Ts}$ ist gegeben.



Hinweis: Für die Bearbeitung der Aufgabe werden keine expliziten Werte (z.B. für K oder T) angenommen.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.

Antwort:

Offener Regelkreis: $G_0 = G_{R,1} \cdot G_S = \dfrac{K}{1+Ts}$ 1

Geschlossener Regelkreis: $G_W = \dfrac{G_0}{1+G_0} = \dfrac{K}{1+Ts+K}$ 1

b) Weist der geschlossene Regelkreis eine bleibende Regelabweichung auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort:

$$h(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{K}{(1+Ts)+K} \frac{1}{s} = \frac{K}{1+K}$$

1

Es gibt eine bleibende Regelabweichung, da der Endwert der Sprungantwort ungleich 1 ist. 1

c) Berechnen Sie die Zeitkonstante T_1 des geschlossenen Regelkreises.

Antwort:

$$1 + Ts + K = 0$$

$$s - \left(\frac{-1-K}{T}\right) = 0$$

$$T_1 = -\frac{1}{\text{Polstelle}} = \frac{T}{1+K}$$

3

d) Ist der geschlossene Regelkreis für beliebige K und T stabil (K und T können auch negativ werden)? Geben Sie die Bereiche an, in denen der geschlossene Regelkreis stabil oder instabil ist.

Antwort:

Der geschlossene Regelkreis ist für $K > -1$ und $T > 0$ oder $T < 0$ und $K < -1$ stabil. Für $T > 0$ und $K < -1$ oder $T < 0$ und $K > -1$ wird der Regelkreis instabil.

3

e) Wie muss der Reglerparameter K eingestellt werden, damit die bleibende Regelabweichung gegen 0 geht?

Antwort:

Für $K \to \infty$ geht die bleibende Regelabweichung gegen 0. $\boxed{1}$

f) Wählen Sie einen Regler $G_{R,2}$ aus, mit dem die bleibende Regelabweichung vermieden wird. Nennen Sie die Bezeichnung und die Übertragungsfunktion des gewählten Reglers.

Antwort:

Mit einem PI-Regler kann die bleibende Regelabweichung vermieden werden:
$G_{R,2} = K_P \frac{1+T_I s}{T_I s}$. $\boxed{1}$

g) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und die Sprungantwort mit dem neuen Regler $G_{R,2}$. Interpretieren Sie das Ergebnis der Sprungantwort.

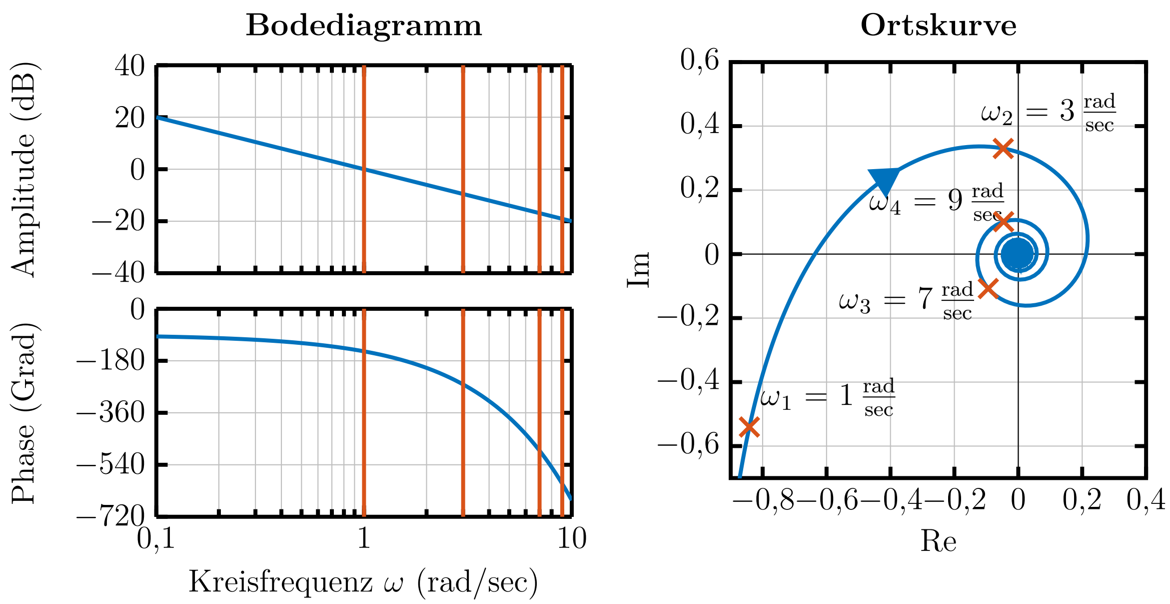
Antwort:

$$\begin{aligned}
G_0 &= G_{R,2} \cdot G_S = \frac{K_P(1+T_I s)}{T_I s(1+Ts)} \\
G_W &= \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{K_P(1+T_I s)}{T_I s(1+Ts) + K_P(1+T_I s)} \\
h(t \to \infty) &= \lim_{s \to 0} s \frac{K_P(1+T_I s)}{T_I s(1+Ts) + K_P(1+T_I s)} \frac{1}{s} = \frac{K_P}{K_P} = 1
\end{aligned}$$

Keine bleibende Regelabweichung! $\boxed{4}$

Aufgabe 5: Bodediagramme und Ortskurven (21 Punkte)

a) Skizzieren Sie das Bodediagramm zwischen den Frequenzen $\omega = 0{,}1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ und $\omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ der vorliegenden Ortskurve. Nutzen Sie hierfür die 4 vorgegeben Frequenzen ω_i mit $i = 1, \ldots, 4$. Achten Sie darauf, dass das asymptotische Verhalten erkennbar ist. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems?
Hinweis: $A(\omega \to 0) \to \infty$



3

Antwort:

Winkel mit Geodreieck abmessen oder berechnen. (Ablesefehler bis 10° sind in Ordnung)

$\omega_1 = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$:
$\text{A} \approx \sqrt{(-0{,}55)^2 + (0{,}85)^2} \approx 1 \mathrel{\widehat{=}} 0\,\text{dB}$
$\varphi \approx -147\,°$

$\omega_2 = 3\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$:
$\text{A} \approx \sqrt{(-0{,}05)^2 + (0{,}35)^2} \approx 0{,}35 \mathrel{\widehat{=}} -9\,\text{dB}$
$\varphi \approx -262\,°$

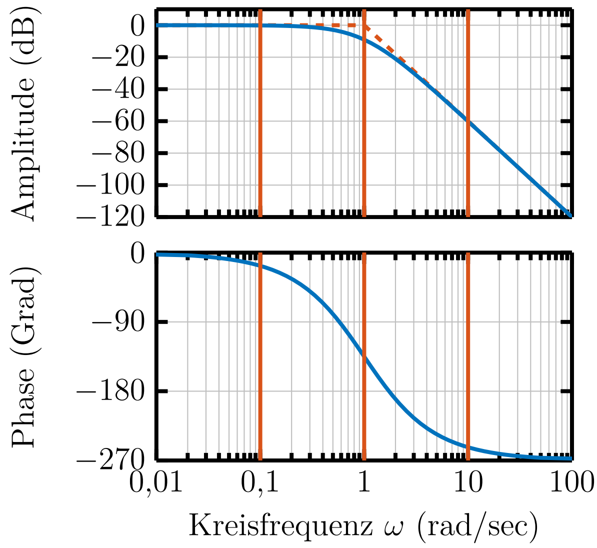
$\omega_3 = 7\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$:
$\text{A} \approx \sqrt{(-0{,}1)^2 + (-0{,}1)^2} \approx 0{,}14 \mathrel{\widehat{=}} -17\,\text{dB}$ 4
$\varphi \approx -495\,°$

$\omega_4 = 9\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$:
$\text{A} \approx \sqrt{(-0{,}1)^2 + (0{,}05)^2} \approx 0{,}11 \mathrel{\widehat{=}} -19\,\text{dB}$
$\varphi \approx -603\,°$

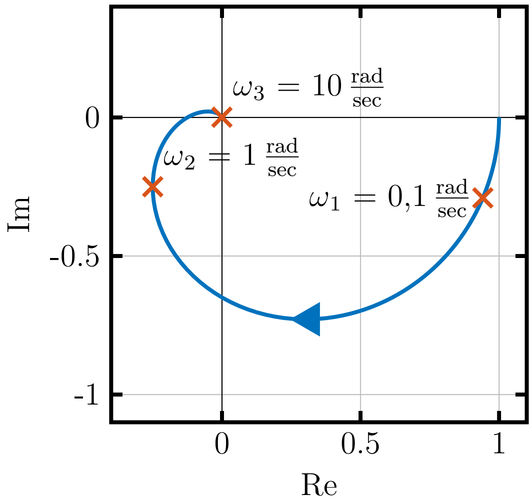
Bei dem System handelt es sich um ein I-T_t System, einem Integrator mit Totzeit. 1

b) Skizzieren Sie die Ortskurve aus dem vorliegenden Bodediagramm. Stellen Sie die Übertragungsfunktion des Systems auf. Wie lautet die Bezeichnung dieses Systems?

Bodediagramm



Ortskurve



3

Antwort:

Die Übertragungsfunktion des Systems lautet:

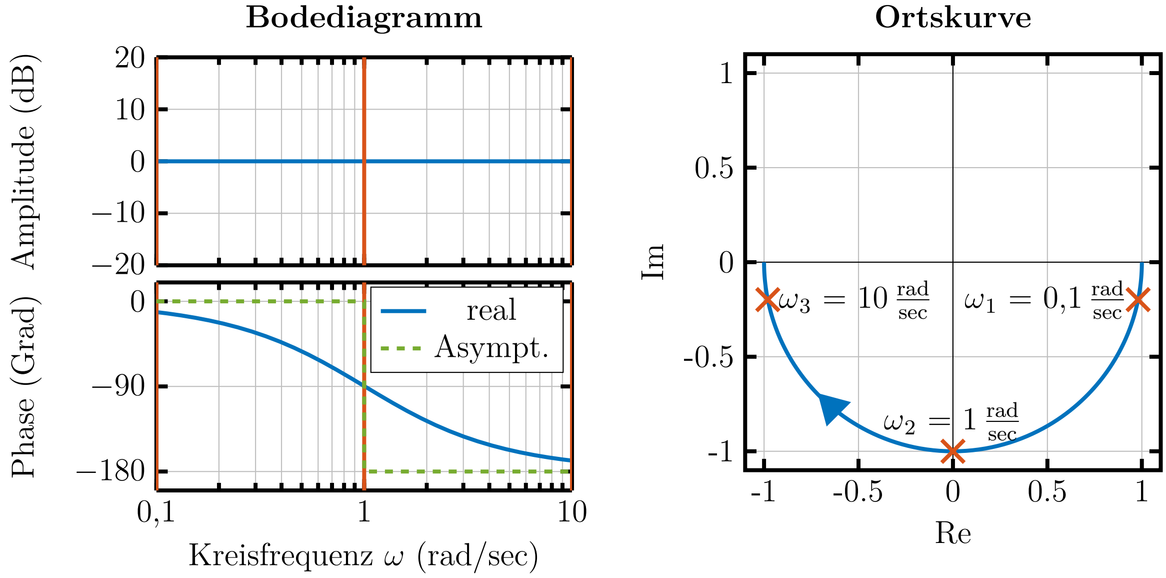
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}.$$ 2

Dabei handelt es sich um ein PT_3 System. 1

c) Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1 - s}{1 + s}.$$

Wie wird dieses System genannt? Skizzieren Sie das asymptotische Bodediagramm und die Ortskurve dieses Systems.



6

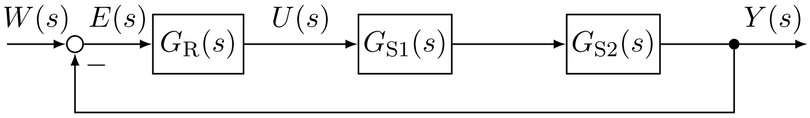
Antwort:

Das System ist ein Allpass. 1

$\sum$ 21

Aufgabe 6: Störgrößenaufschaltung (17 Punkte)

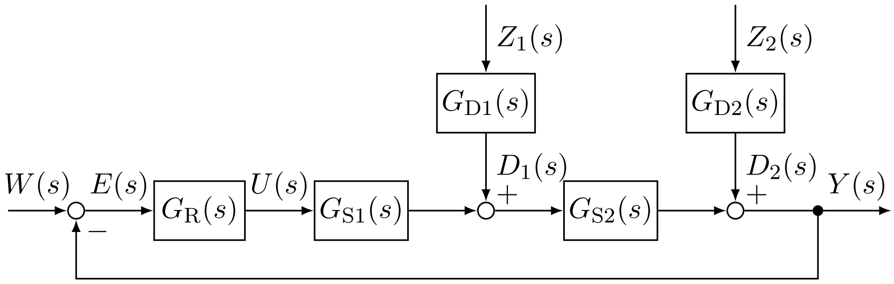
Ziel dieser Aufgabe ist es eine Störgrößenaufschaltung zu realisieren. Gegeben ist ein System $G_\mathrm{S}(s)$, welches in die beiden Teilübertragungsfunktionen $G_\mathrm{S1}(s)$ und $G_\mathrm{S2}(s)$ unterteilt werden kann. Dieses soll mit einem Regler $G_\mathrm{R}(s)$ in einem geschlossenen Regelkreis geregelt werden.



Im Folgenden wirken zwei unabhängige Störungen auf das System. Die erste Störung $Z_1(s)$ wirkt sich zwischen den Systemen $G_\mathrm{S1}(s)$ und $G_\mathrm{S2}(s)$ additiv auf den Prozess aus. Die zweite Störung $Z_2(s)$ wirkt auf den Prozessausgang.

a) Skizzieren Sie das Blockschaltbild des Regelkreises mit den beiden Störgrößen sowie jeweils einer Störübertragungsfunktion $G_\mathrm{D1}(s)$ (bei $Z_1(s)$) und $G_\mathrm{D2}(s)$ (bei $Z_2(s)$).

Antwort:

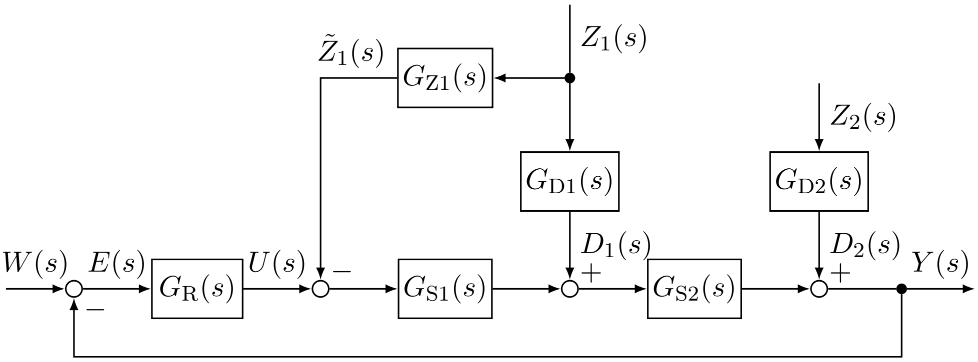


3

Nun soll eine Störgrößenaufschaltung entworfen werden. Vorerst wird angenommen, dass die zweite Störung $Z_2(s)$ null ist.

b) Skizzieren Sie das Blockschaltbild mit einer Störgrößenaufschaltung. Geben Sie zudem die Übertragungsfunktion der Störgrößenaufschaltung an.

Antwort:



4

Die Übertragungsfunktion der Störgrößenaufschaltung lautet:

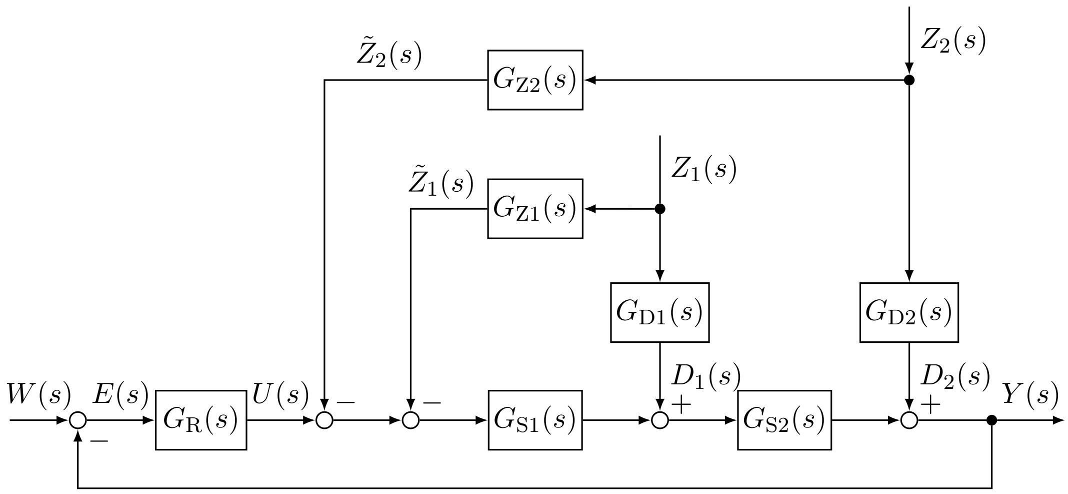
$$G_\mathrm{Z1}(s) = \frac{G_\mathrm{D1}(s)}{G_\mathrm{S1}(s)}.$$

1

Die zweite Störung $Z_2(s)$ ist nun nicht mehr null. Im kommenden sollen nun beide Störungen mit jeweils einer Störgrößenaufschaltung kompensiert werden. Beachten Sie, dass die Größe zwischen $G_{\mathrm{S1}}(s)$ und $G_{\mathrm{S2}}(s)$ **nicht** beeinflusst werden kann!

c) Skizzieren Sie das Blockschaltbild mit beiden Störgrößenaufschaltungen. Geben Sie zudem die Übertragungsfunktion der zweiten Störgrößenaufschaltung an, wenn die erste Störgrößenaufschaltung wie in b) verwendet wird.

Antwort:



5

Die Übertragungsfunktion der Störgrößenaufschaltung lautet:

$$G_{\mathrm{Z2}}(s) = \frac{G_{\mathrm{D2}}(s)}{G_{\mathrm{S1}}(s) \cdot G_{\mathrm{S2}}(s)}.$$ 2

d) Wie lautet die Übertragungsfunktion des kompletten geschlossenen Regelkreises, falls es sich um zwei ideale Störgrößenaufschaltungen handelt?

Antwort:

Die Störungen werden vollständig kompensiert, somit lautet die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{G_{\mathrm{R}}(s) \cdot G_{\mathrm{S1}}(s) \cdot G_{\mathrm{S2}}(s)}{1 + G_{\mathrm{R}}(s) \cdot G_{\mathrm{S1}}(s) \cdot G_{\mathrm{S2}}(s)}.$$ 2

$\sum 17$