Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 1 (MRT1)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

31. Januar 2012

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	20	18	12	26	24	100
Note:	Ist:						

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Wie kann man anhand einer Übertragungsfunktion erkennen, dass das zugehörige System stabil ist?
   - ☐ Alle Nullstellen der Übertragungsfunktion haben einen Realteil der kleiner als Null ist.
   - ☐ Alle Koeffizienten des Nennerpolynoms haben ein positives Vorzeichen.
   - ☐ Die Nullstellen des Nennerpolynoms (Pole) haben einen Realteil, der kleiner als Null ist.

b) Wie erkennt man die Stabilität eines Systems im Zeitbereich?
   - ☐ Die Impulsantwort klingt asymptotisch auf Null ab.
   - ☐ Die Sprungantwort klingt asymptotisch auf Null ab
   - ☐ Die Sprungantwort nähert sich asymptotisch einem Endwert an.

c) Wie hängen die Sprung-, Impuls- und Rampenantwort eines Systems zusammen?
   - ☐ Die Rampenantwort ist das Integral der Sprungantwort.
   - ☐ Die Sprungantwort ist die Ableitung der Impulsantwort.
   - ☐ Die Impulsantwort ist das Integral der Sprungantwort.

d) Ist das automatische Einschalten des Abblendlichtes eines Autos bei Dämmerung eine Steuerung oder eine Regelung?
- ☐ Eine Regelung, weil ein Sensor benötigt wird.
- ☐ Eine Steuerung, weil kein geschlossener Regelkreis vorliegt.
- ☐ Eine Steuerung, weil der Sensor die Helligkeit des Himmels misst und nicht die Helligkeit des Abblendlichtes (z.B. auf der Straße vor dem Auto).

e) Wie verhält sich ein instabiles System in der Nähe einer Ruhelage?
- ☐ Bei einer sehr kleinen Abweichung von der Ruhelage kehrt es in diese zurück.
- ☐ Bei jeder Abweichung von der Ruhelage strebt das System gegen Unendlich.
- ☐ Bei jeder Abweichung von der Ruhelage strebt das System gegen einen festen Endwert.

f) Wenn die Übertragungsfunktion eines Systems unter anderem einen Pol bei $-a$ und eine Nullstelle bei a aufweist ($a > 0$), ...
- ☐ ... hat das System einen Allpassanteil.
- ☐ ... ist das System nicht minimalphasig.
- ☐ ... ist das System instabil.

g) Was gilt für die Zählerordnung m und Nennerordnung n einer Übertragungsfunktion eines Systems?
- ☐ Wenn $m > n$ ist, dann ist das System instabil.
- ☐ Wenn $m = n$ ist, dann ist das System sprungfähig.
- ☐ Wenn $m < n$ ist, dann ist das System realisierbar.

h) Welche Aussagen sind für ein schwingungsfähiges Systems 2. Ordnung richtig?
- ☐ Es kann in eine Reihenschaltung von 2 Systemen 1. Ordnung zerlegt werden.
- ☐ Die Dämpfung D ist größer als 1.
- ☐ Die Eckfrequenz und die Resonanzfrequenz sind in der Regel unterschiedlich.

i) Welche Aussagen gelten für Totzeitsysteme?
- ☐ Totzeitsysteme sind immer auch nichtlinear.
- ☐ Ein reines Totzeitsystem erzeugt eine Phasenverschiebung, die linear von der Anregungsfrequenz abhängt.
- ☐ Totzeitsysteme haben für $\omega \to \infty$ eine endliche Phasenverschiebung.

j) Wie kann die Stabilität eines geschlossenen Regelkreises überprüft werden?
- ☐ Durch Bestimmung des Amplituden- und Phasenrandes aus dem Frequenzgang (z.B. Bodediagramm) des **geschlossenen** Regelkreises.
- ☐ Durch Ermitteln der Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion des **geschlossenen** Regelkreises.
- ☐ Durch Anwenden des Hurwitzkriteriums auf das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion des **geschlossenen** Regelkreises.

k) Mit Hilfe des Nyquistkriteriums wird anhand der Zahl der instabilen und grenzstabilen Pole der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises ein Winkel berechnet, der von der Ortskurve von $\omega = 0$ bis $\omega \to \infty$ ...

- ☐ ... exakt überstrichen werden muss,...
- ☐ ... mindestens überstrichen werden muss,...
- ☐ ... höchstens überstrichen werden darf,...

... um einen stabilen Regelkreis zu erhalten.

l) Was gilt für den PID-Regler?

- ☐ Ein PID-Regler ist die Reihenschaltung eines P-, I- und D-Gliedes.
- ☐ Der I-Anteil dient dazu den stationären Regelfehler zu eliminieren, wirkt aber destabilisierend, wenn er zu groß gewählt wird.
- ☐ Der D-Anteil wirkt in der Regel stabilisierend auf den Regelkreis, verstärkt aber das Messrauschen und darf daher nicht zu groß gewählt werden.

m) Was kann man aus einer Wurzelortskurve ablesen?

- ☐ Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit der Reglerverstärkung.
- ☐ Die Lage der Polstellen des offenen Regelkreises.
- ☐ Die Lage der Polstellen des geschlossenen Regelkreises.

Aufgabe 2: Laplace-Transformation

Gegeben ist die folgende Übertragungsfunktion $G(s)$ mit den Konstanten a und b:

$$G(s) = \frac{as^2 + 2}{s^2 + 2s + b} .$$

a) Berechnen Sie den Anfangswert $y(t \to 0)$ und den Endwert $y(t \to \infty)$ für die Systemantwort auf einen Sprung der Eingangsgröße $u(t)$.

b) Welche der beiden Konstanten a und b beeinflusst die **Sprungfähigkeit** des Systems? Wie ist diese Konstante zu wählen, damit das System **nicht sprungfähig** ist?

c) Welche der beiden Konstanten a und b beeinflusst die **Verstärkung** des Systems? Wie ist diese Konstante zu wählen, damit das System die Verstärkung $K = 1$ hat?

d) Welche der beiden Konstanten a und b beeinflusst die **Stabilität** des Systems? Wie ist diese Konstante zu wählen, damit das System stabil ist? Begründen Sie Ihre Aussage durch Anwendung des Hurwitz-Kriteriums.

e) Gehen Sie nun davon aus, dass $a = 0$ ist. Für welchen Wert von b ergibt sich eine **Dämpfung** von $D = 1$ (aperiodischer Grenzfall)?

Aufgabe 3: Lösung einer Differentialgleichung im Zeitbereich

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{y}(t) + y(t) = u(t) .$$

a) Zeichnen Sie das zugehörige Blockschaltbild im Zeitbereich.

b) Berechnen Sie die Pole des Systems. Ist das System stabil?

c) Welches Systemverhalten lässt sich anhand der DGL und der Pollage ablesen?

d) Wie lautet die homogene Lösung für $y(t)$?

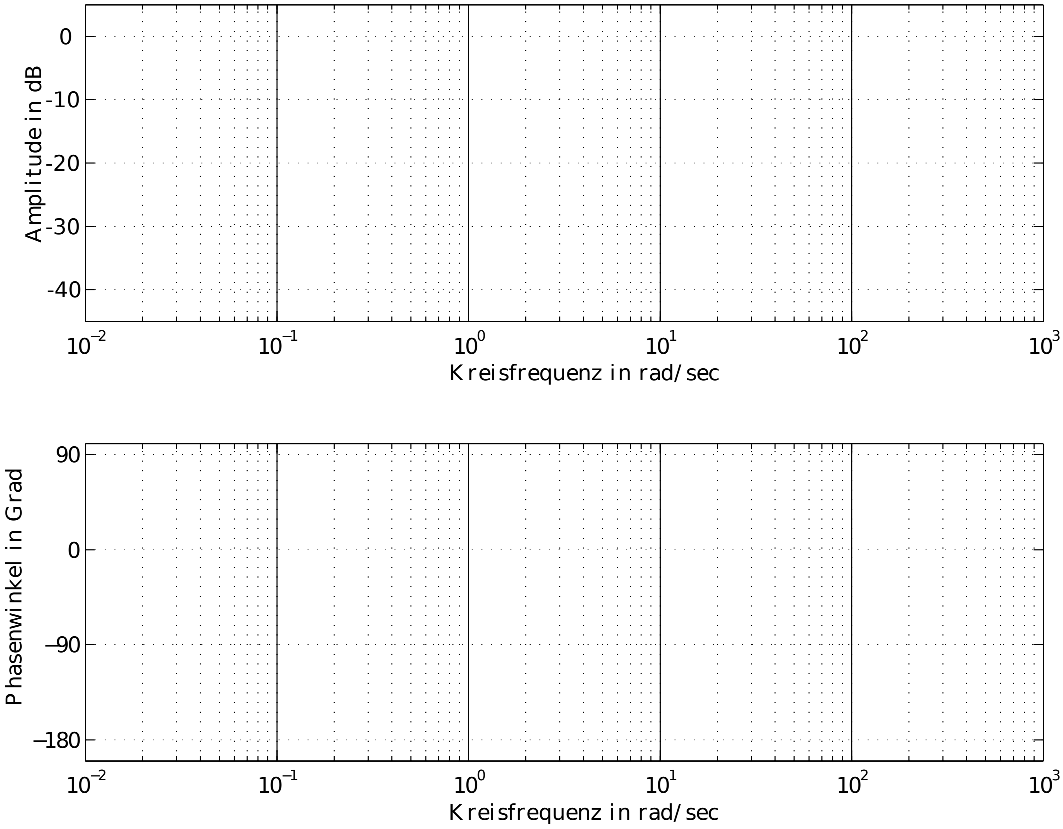
e) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω_0.

Aufgabe 4: Frequenzgang

Gegeben ist ein System erster Ordnung, ein PT_1, mit einer Verstärkung K und einer Zeitkonstanten $T = 1$, sowie einer zusätzlichen Totzeit T_t.

a) Leiten Sie die Übertragungsfunktion dieses Systems her und geben Sie dessen Eckfrequenz an.

b) Zeichnen Sie den asymptotischen Amplituden- und den Phasengang des Systems für eine Totzeit von $T_t = 0$ und eine Verstärkung $K = 1$ in das unten stehende Bodediagramm ein.



c) Was ändert sich qualitativ in Amplituden- und Phasenverlauf, wenn nun eine Totzeit von $T_t = 1$ angenommen wird?

d) Leiten Sie die Rechenvorschrift für den Betrag $A(\omega)$ und die Phase $\varphi(\omega)$ her.

e) Für welche Frequenz ist der Betrag A gleich eins in Abhängigkeit von der Verstärkung K ? Bestimmen Sie anschließend die Amplitudendurchtrittsfrequenz ω_D für $K^2 = 2$ und für $K^2 = 10$.

f) Wie groß ist der Phasenrand für $K^2 = 2$ und $T_t = 1$? Ist das System stabil? Als Vereinfachung gilt: 1 rad $\equiv 60°$.

g) Ist das System mit einer Totzeit von $T_t = 3$ noch stabil?

h) Geben Sie die Totzeit T_t an bei der das System an der Stabilitätsgrenze liegt. Hinweis: $180°$ entsprechen π.

Aufgabe 5: Wurzelortskurve

Gegeben sind zwei Standardregelkreise bestehend jeweils aus einem idealen PD-Regler G_R mit variabler Nullstelle und einer Strecke G_S.

A)

$$G_R = (s + a) \qquad G_S = \frac{1}{s+1}$$

B)

$$G_R = (s + a) \qquad G_S = \frac{1}{(s+1)^2}$$

a) Wie lautet jeweils die Übertragungsfunktion die zum skizzieren der Wurzelortskurve des Regelkreises benötigt wird? Wie lauten die Pole p_i und Nullstellen n_i?

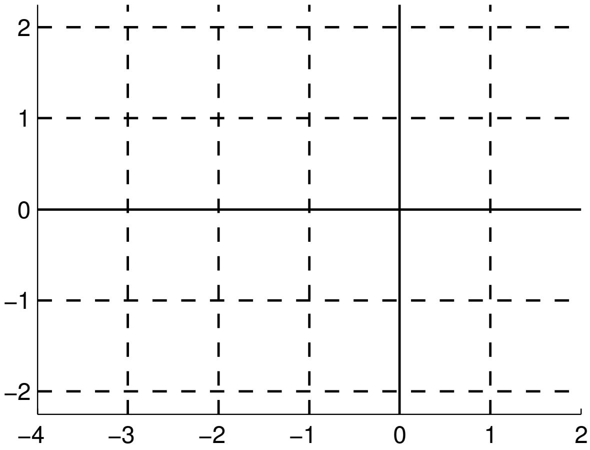
b) Für die Wurzelortskurve sind jeweils drei Fälle zu unterscheiden:

1) $a > 1$
2) $0 < a < 1$
3) $a < 0$

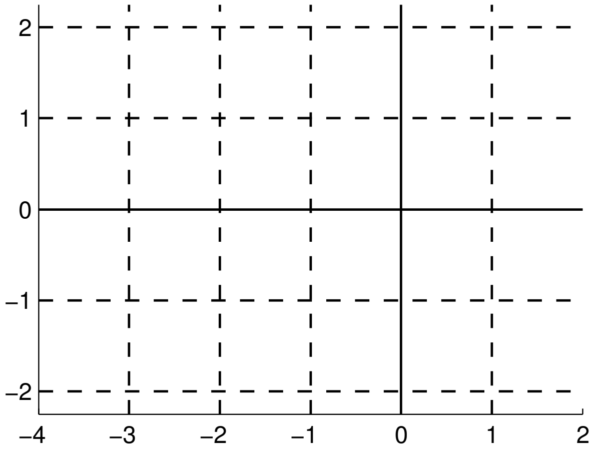
Tragen sie für jeden Fall die Lage der Pol- und Nullstellen beispielhaft ein und Skizzieren sie jeweils qualitativ den Verlauf der WOK für positive Verstärkungen. Benutzen sie dazu die vorbereiteten Diagramme. Bezeichnen sie die Fälle mit A1, A2, A3, bzw. mit B1, B2, B3 . Eine Berechnung von Asymptoten, Verzweigungspunkten o.ä. ist nicht notwendig.

c) Um das Verhalten der Wurzelortskurve für die oben genannten Fälle voneinander abzugrenzen, **begründen** sie für jeden Fall, ob dieser stabil, schwingungsfähig und phasenminimal ist. In welchen Fällen können die schnellsten Pole des geschlossenen Regelkreises auftreten?

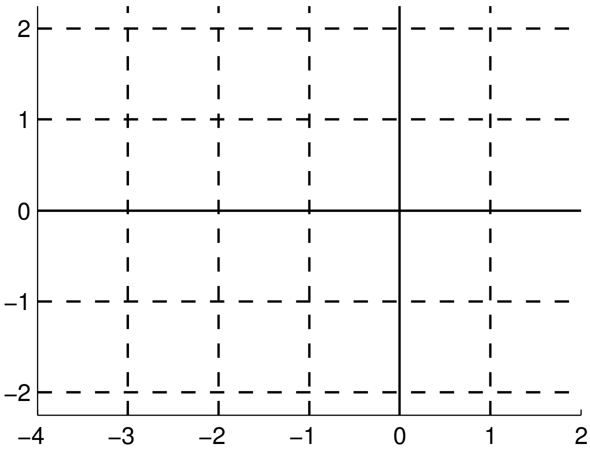
Fall: A1



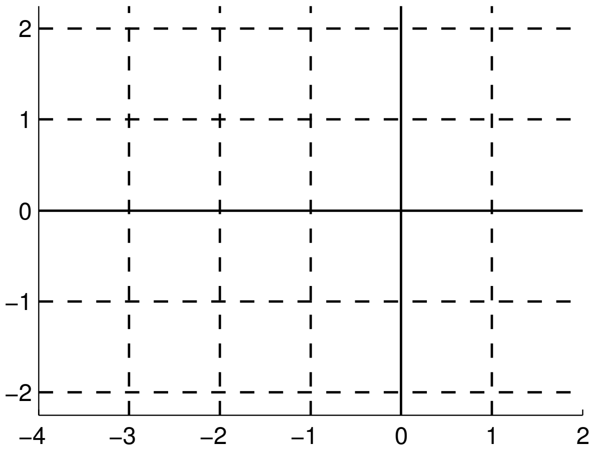
Fall: B1



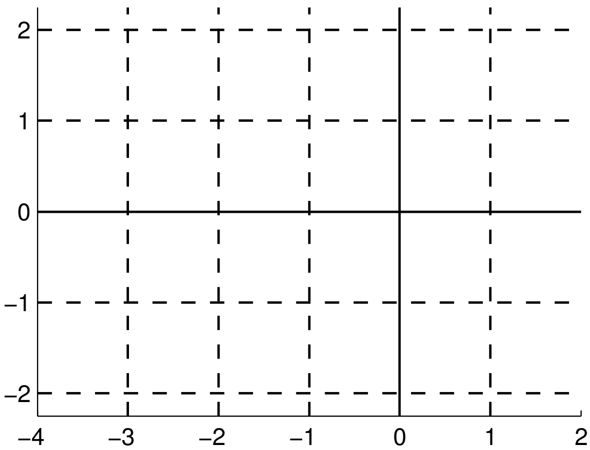
Fall: A2



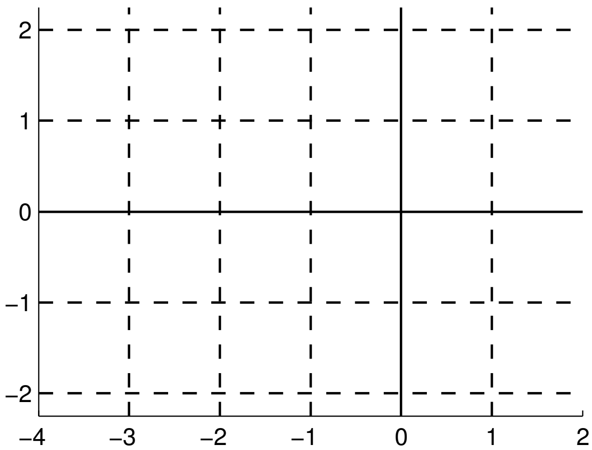
Fall: B2



Fall: A3



Fall: B3



Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Wie kann man anhand einer Übertragungsfunktion erkennen, dass das zugehörige System stabil ist?

- [ ] Alle Nullstellen der Übertragungsfunktion haben einen Realteil der kleiner als Null ist.
- [ ] Alle Koeffizienten des Nennerpolynoms haben ein positives Vorzeichen.
- [x] Die Nullstellen des Nennerpolynoms (Pole) haben einen Realteil, der kleiner als Null ist.

b) Wie erkennt man die Stabilität eines Systems im Zeitbereich?

- [x] Die Impulsantwort klingt asymptotisch auf Null ab.
- [ ] Die Sprungantwort klingt asymptotisch auf Null ab
- [x] Die Sprungantwort nähert sich asymptotisch einem Endwert an.

c) Wie hängen die Sprung-, Impuls- und Rampenantwort eines Systems zusammen?

- [x] Die Rampenantwort ist das Integral der Sprungantwort.
- [ ] Die Sprungantwort ist die Ableitung der Impulsantwort.
- [ ] Die Impulsantwort ist das Integral der Sprungantwort.

d) Ist das automatische Einschalten des Abblendlichtes eines Autos bei Dämmerung eine Steuerung oder eine Regelung?

- [ ] Eine Regelung, weil ein Sensor benötigt wird.
- [x] Eine Steuerung, weil kein geschlossener Regelkreis vorliegt.
- [x] Eine Steuerung, weil der Sensor die Helligkeit des Himmels misst und nicht die Helligkeit des Abblendlichtes (z.B. auf der Straße vor dem Auto).

e) Wie verhält sich ein instabiles System in der Nähe einer Ruhelage?

- [ ] Bei einer sehr kleinen Abweichung von der Ruhelage kehrt es in diese zurück.
- [x] Bei jeder Abweichung von der Ruhelage strebt das System gegen Unendlich.
- [ ] Bei jeder Abweichung von der Ruhelage strebt das System gegen einen festen Endwert.

f) Wenn die Übertragungsfunktion eines Systems unter anderem einen Pol bei $-a$ und eine Nullstelle bei a aufweist ($a > 0$), ...

- [x] ... hat das System einen Allpassanteil.
- [x] ... ist das System nicht minimalphasig.
- [ ] ... ist das System instabil.

g) Was gilt für die Zählerordnung m und Nennerordnung n einer Übertragungsfunktion eines Systems?

- [ ] Wenn $m > n$ ist, dann ist das System instabil.
- [x] Wenn $m = n$ ist, dann ist das System sprungfähig.
- [x] Wenn $m < n$ ist, dann ist das System realisierbar.

h) Welche Aussagen sind für ein schwingungsfähiges Systems 2. Ordnung richtig?

- [ ] Es kann in eine Reihenschaltung von 2 Systemen 1. Ordnung zerlegt werden.
- [ ] Die Dämpfung D ist größer als 1.
- [x] Die Eckfrequenz und die Resonanzfrequenz sind in der Regel unterschiedlich.

i) Welche Aussagen gelten für Totzeitsysteme?

- [ ] Totzeitsysteme sind immer auch nichtlinear.
- [x] Ein reines Totzeitsystem erzeugt eine Phasenverschiebung, die linear von der Anregungsfrequenz abhängt.
- [ ] Totzeitsysteme haben für $\omega \to \infty$ eine endliche Phasenverschiebung.

j) Wie kann die Stabilität eines geschlossenen Regelkreises überprüft werden?

- [ ] Durch Bestimmung des Amplituden- und Phasenrandes aus dem Frequenzgang (z.B. Bodediagramm) des **geschlossenen** Regelkreises.
- [x] Durch Ermitteln der Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion des **geschlossenen** Regelkreises.
- [x] Durch Anwenden des Hurwitzkriteriums auf das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion des **geschlossenen** Regelkreises.

k) Mit Hilfe des Nyquistkriteriums wird anhand der Zahl der instabilen und grenzstabilen Pole der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises ein Winkel berechnet, der von der Ortskurve von $\omega = 0$ bis $\omega \to \infty$ ...

- [x] ... exakt überstrichen werden muss,...
- [ ] ... mindestens überstrichen werden muss,...
- [ ] ... höchstens überstrichen werden darf,...

... um einen stabilen Regelkreis zu erhalten.

l) Was gilt für den PID-Regler?

- [ ] Ein PID-Regler ist die Reihenschaltung eines P-, I- und D-Gliedes.
- [x] Der I-Anteil dient dazu den stationären Regelfehler zu eliminieren, wirkt aber destabilisierend, wenn er zu groß gewählt wird.
- [x] Der D-Anteil wirkt in der Regel stabilisierend auf den Regelkreis, verstärkt aber das Messrauschen und darf daher nicht zu groß gewählt werden.

m) Was kann man aus einer Wurzelortskurve ablesen?

- [x] Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit der Reglerverstärkung.
- [ ] Die Lage der Polstellen des offenen Regelkreises.
- [x] Die Lage der Polstellen des geschlossenen Regelkreises.

$\sum$ 20

Aufgabe 2: Laplace-Transformation

Gegeben ist die folgende Übertragungsfunktion $G(s)$ mit den Konstanten a und b:

$$G(s) = \frac{as^2 + 2}{s^2 + 2s + b}\,.$$

a) Anfangswert:

$$y(t \to 0) = \lim_{s\to\infty} sG(s)U(s)\,.$$

Endwert:

$$y(t \to \infty) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s)\,.$$

Zur Berechnung der Sprungantwort $h(t)$ setzt man $U(s) = \frac{1}{s}$. Für den Anfangswert ergibt sich:

$$h(t \to 0) = \lim_{s\to\infty} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{as^2+2}{s^2+2s+b} = \lim_{s\to\infty} \frac{a+\frac{2}{s^2}}{1+\frac{2}{s}+\frac{b}{s^2}} = \frac{a+0}{1+0+0} = a\,.$$

Der Endwert berechnet sich zu:

$$h(t \to \infty) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{0+2}{0+0+b} = \frac{2}{b}\,.$$ $\boxed{6}$

b) Damit das System nicht sprungfähig ist, muss die Konstante $a = 0$ gesetzt werden.

Begründung:
Leitet man die DGL im Zeitbereich her, so ergibt sich:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{as^2+2}{s^2+2s+b} \leftrightarrow s^2Y(s) + 2sY(s) + bY(s) = as^2U(s) + 2U(s)$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + by(t) = a\ddot{u}(t) + 2u(t)\,.$$

Daraus kann man ablesen, dass die Eingangsgröße zweimal abgeleitet werden muss, wenn $a \neq 0$ ist. Bei einem Sprung von $u(t)$ würde sich demnach eine impulsförmige Antwort für $t = 0$ ergeben. Damit wäre das System sprungfähig und in der Praxis nicht realisierbar. $\boxed{3}$

c) Die Verstärkung des Systems ist gleichbedeutend mit dem stationären Endwert der Sprungantwort $h(t \to \infty) = \frac{2}{b}$. Demnach muss $b = 2$ für eine Verstärkung von $K = 1$ gewählt werden. $\boxed{3}$

d) Die Stabilität hängt vom Nennerpolynom der Übertragungsfunktion $G(s)$ und kann deshalb nur mit der Konstanten b beeinflusst werden. Wendet man das Hurwitz-Kriterium an, so ergibt sich für alle $b > 0$ Stabilität. $\boxed{3}$

e) Ein schwingungsfähige System ergibt sich dann, wenn $G(s)$ ein konjugiert komplexes Polpaar hat. Die Pole berechnen sich nach:

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-b}\,.$$

Wählt man $b = 1$, ergibt sich ein Doppelpol bei $s = -1$ und das System ist nicht schwingungsfähig. 3

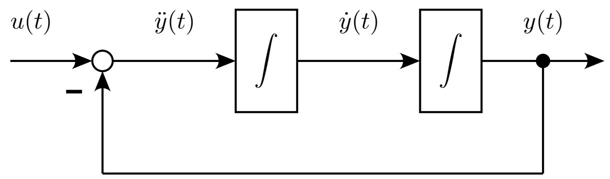
$\sum 18$

Aufgabe 3: Lösung einer Differentialgleichung im Zeitbereich

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{y}(t) + y(t) = u(t)\,.$$

a) Blockschaltbild im Zeitbereich:



5

b) Transformation der DGL in den Frequenzbereich:

$$\ddot{y}(t) + y(t) = u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2Y(s) + Y(s) = U(s) \leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s^2+1}\,.$$

Daraus folgt der Doppelpol:

$$s_{1,2} = \pm\, i\,.$$

Der Doppelpol liegt auf der imaginären Achse der s-Ebene. Das System ist daher **grenzstabil**. 3

c) Es handelt sich um eine ungedämpfte Schwingung. 1

d) Homogene Lösung bedeutet: $u(t) = 0 \rightarrow \ddot{y}_h(t) + y_h(t) = 0$. Dies ist eine freie Schwingung und kann daher mit $y_h(t) = A \sin \omega_0 t$ beschrieben werden. 2

e) Aus $y_h(t)$ kann man $\omega_0 = 1$ ablesen. 1

$\sum 12$

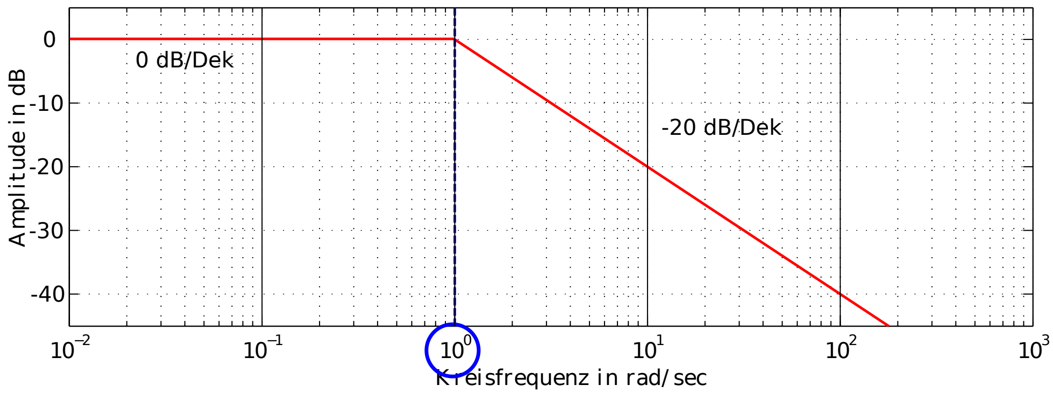
Aufgabe 4: Frequenzgang

a) Die Übertragungsfunktion eines PT_1 mit einer Zeitkonstanten $T = 1$ und einer Totzeit lautet:

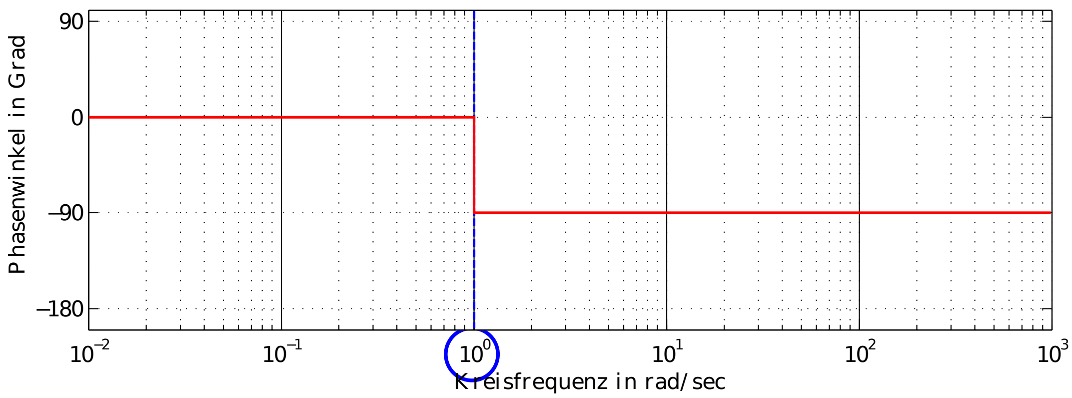
$$G(s) = \frac{K}{1+s} \cdot e^{-s \cdot T_t}$$ 2

Die dazu gehörige Eckfrequenz ist $\omega_e = 1 \frac{rad}{sec}$. 1

b) Da keine Totzeit für diese Teilaufgabe existiert, muss nur das PT_1-Glied beachtet werden. Es existiert ein Pol bei $p_1 = 1 \frac{rad}{sec}$ und die Verstärkung beträgt $0dB (\equiv 1)$. Somit ergibt sich folgendes Bodediagramm:



3



2

c) Für den Amplitudenverlauf ergibt sich keine Änderung, da der Betrag einer Totzeit immer gleich eins ist: $|e^{-i\omega T_t}| = 1$, für alle T_t. 1

Für den Phasenverlauf ergibt sich eine zusätzliche Veränderung proportional zur Frequenz:

$$\Delta \sphericalangle (G(i\omega)) = -\omega \cdot T_t \text{ , da } \arg(e^{-j\omega T_t}) = -\omega \cdot T_t$$ 1

gilt.

(siehe Skript Seite 196)

d) Die Rechenvorschrift des Betrages lautet:

$$A(\omega) = |G(s)| = |G(i\omega)| = |\frac{K}{1+i\omega}| \cdot \underbrace{|e^{-i\omega T_t}|}_{\equiv 1} = \frac{K}{|1+i\omega|} = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$ 1

Um die Rechenvorschrift der Phase zu erhalten, wird zuerst die des PT_1-Gliedes betrachtet und anschließend mit der der Totzeit superpositioniert. Für die Phase $\varphi^*(\omega)$ des PT_1-Gliedes ohne Totzeit $G^*(s)$ gilt: 1

$$\varphi^*(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(G^*(s))}{\text{Re}(G^*(s))}\right)$$ 1

Mit $\text{Re}(G^*(s)) = \frac{K}{1+T^2\omega^2}$ und $\text{Im}(G^*(s)) = \frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2}$ folgt:

$$\varphi^*(\omega) = \arctan\left(\frac{-T\omega}{1}\right) = -\arctan(T\omega)$$ 1

(Skript Seite 180)

Alternativ kann man auch rechnen:

$$\varphi^*(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(G^*(s))}{\text{Re}(G^*(s))}\right) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(G_Z^*(s))}{\text{Re}(G_Z^*(s))}\right) - \arctan\left(\frac{\text{Im}(G_N^*(s))}{\text{Re}(G_N^*(s))}\right)$$

, mit $G^*(s) = \frac{G_Z^*(s)}{G_N^*(s)} = \frac{K}{1+T\cdot s}$.

Setzt man nun Zähler- und Nennerpolynom ein ergibt sich:

$$\varphi^*(\omega) = \arctan\left(\frac{0}{K}\right) - \arctan\left(\frac{T\omega}{1}\right) = -\arctan\left(T\omega\right)$$

Hier gilt $T = 1$. Somit ergibt sich für die Phase des PT_1-Gliedes:

$$\varphi^*(\omega) = -\arctan(\omega)$$

Nun muss noch die proportionale Veränderung der Totzeit noch berücksichtigt werden, um die Phase des gesamten Systems zu erhalten (siehe c)):

$$\varphi(\omega) = \varphi^*(\omega) - \omega \cdot T_t = -\arctan(\omega) - \omega \cdot T_t$$ 1

e) $A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}} = 1 \Rightarrow K = \sqrt{1+\omega^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{K^2-1}$ 1

Bei einer Amplitude von $1 (\equiv 0\text{dB})$ kann man die zughörige Kreisfrequenz ω als Amplitudendurchtrittsfrequenz ω_D bezeichnen.

Für $K^2 = 2$ ergibt sich eine Amplitudendurchtrittsfrequenz von $\omega_D = \sqrt{2-1} = 1$.
Für $K^2 = 10$ ergibt sich eine Amplitudendurchtrittsfrequenz von $\omega_D = \sqrt{10-1} = 3$. 2

f) Für den Phasenrand gilt: $\varphi_R = 180° - |\varphi(\omega_D)|$ mit $\varphi(\omega_D) = -\arctan(\omega_D) - \omega_D \cdot T_t$. Setzt man nun die Phasendurchtrittsfrequenz von $K^2 = 2$ und $T_t = 1$ ein, ergibt sich eine Phase von $-45° - 60° * 1 = -105°$ und ein Phasenrand φ_R von $180° - 105° = 75°$. Somit ist das System stabil, hinsichtlich des Phasenrandes. 3

g) Der Phasenrand für eine Totzeit von $T_t = 3$ ist:

$$\varphi_R = 180° - |-45° - 60° \cdot 3| = 180° - 225° = -45°.$$ 1

Das System ist nicht stabil, da $\varphi_R < 0°$. 1

h) Stabilitätsgrenze liegt bei einem Phasenrand von null:

$$\varphi_R = 0 = 180° - |\varphi(\omega_D)| \Rightarrow -180° = -|\varphi(\omega_D)|$$

$$\Rightarrow 180° = |\varphi(\omega_D)| = |-\arctan(\omega_D) - \omega_D \cdot T_t|$$ $\boxed{1}$

Für $\omega_D = 1\frac{rad}{sec}$ folgt $\arctan(\omega_D) = 45° = \frac{\pi}{4}$.

$$\Rightarrow \pi = |-\frac{\pi}{4} - 1 \cdot T_t| = \frac{\pi}{4} + \underbrace{|T_t|}_{\equiv T_t}$$

Totzeiten müssen immer positiv sein. Negative Totzeiten würden einem Blick in die Zukunft bedeuten. Somit ergibt sich: $\boxed{1}$

$$\pi = \frac{\pi}{4} + T_t \Rightarrow T_t = \frac{3}{4}\pi$$ $\boxed{1}$

Mit einer Totzeit von $T_t = \frac{3}{4}\pi$ wird die Stabilitätsgrenze erreicht.

$\boxed{\sum 26}$

Aufgabe 5: Wurzelortskurve

a) A)

$$G_A = \frac{(s+a)}{(s+1)} \qquad n_1 = -a \qquad p_1 = -1$$

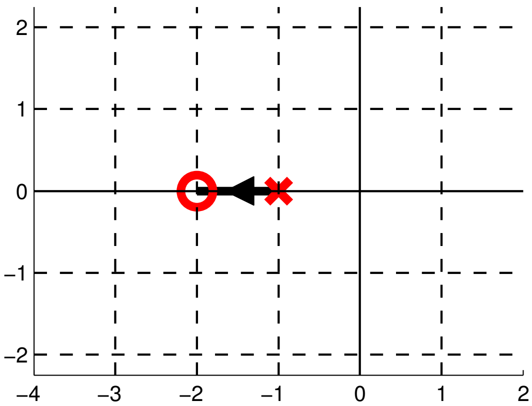
B)

$$G_B = \frac{(s+a)}{(s+1)^2} \qquad n_1 = -a \qquad p_{1,2} = -1$$

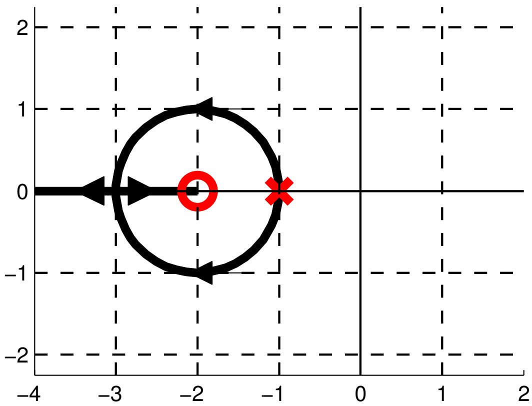
$\boxed{2}$

b)

Fall: A1 (bsp. für $a = 2$)

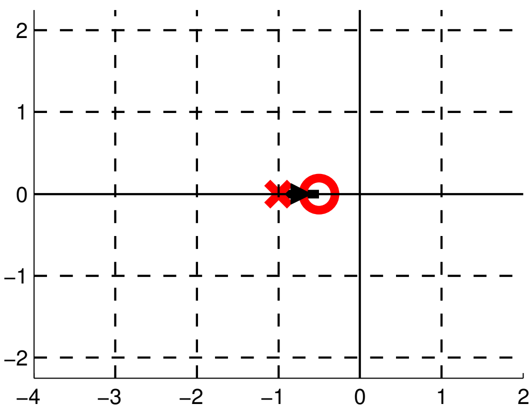


Fall: B1 (bsp. für $a = 2$)

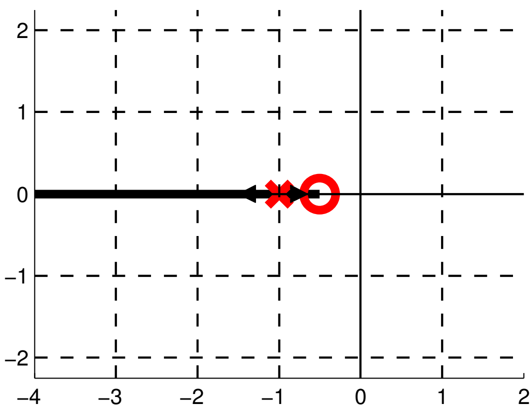


$\boxed{2}$ $\boxed{2}$

Fall: A2 (bsp. für $a = 0,5$)

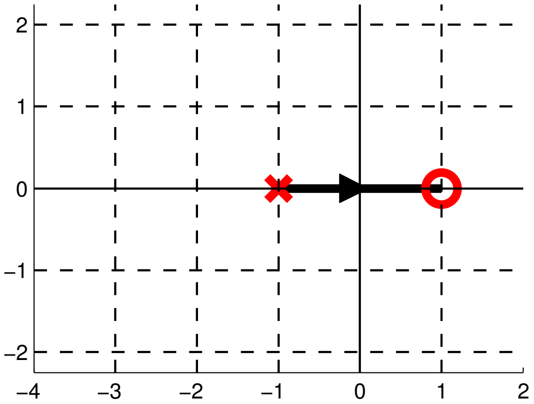


Fall: B2 (bsp. für $a = 0,5$)

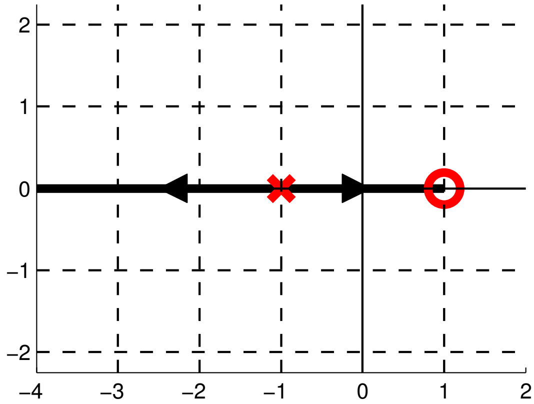


$\boxed{2}$ $\boxed{2}$

Fall: A3 (bsp. für $a = -1$)



Fall: B3 (bsp. für $a = -1$)



2

2

c)
- Stabilität: Die Fälle A1, A2, B1, B2 sind für positive Verstärkungen immer Stabil, da die Pole des geschlossenen Regelkreises die linke Halbebene nie verlassen.

  Die Fälle A3 und B3 können instabil sein, da eine kritische Verstärkung K existiert, ab der die Pole des geschlossenen Regelkreises in die rechte Halbebene wechseln. 3
- Schwingungsfähigkeit: Nur der Fall B1 stellt ein Schwingungsfähis System dar. Hier besitzen, bis zu einer bestimmten Verstärkung K_{Sch}, die Pole des geschlossenen Regelkreises einen Imaginärteil und das System ist als Folge schwingungsfähig. In allen anderen Fällen existieren keine Pole mit Imaginärteil. 3
- Die Fälle A1, A2, B1 und B2 sind phasenminimal da alle Pole und Nullstellen in der linken Halbebene liegen.

  3

  Die Fälle A3 und B3 sind nichtphasenminimal da sie eine Nullstelle in der rechten Halbebene besitzen.
- Die schnellsten Pole treten in den Fällen B1, B2 und B3 auf, da hier ein Pol des geschlossenen Regelkreises für steigende Verstärkung gegen negativ unendlich strebt. 1

$\sum 24$