Prüfungsklausur Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

13.03.2021

Name:	
Mat.-Nr.	
Note:	

Aufgabe:	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Ges.
Punkte:	18	21	9	17	18	19	18	120
Erreicht:								

Dauer der Klausur: 2 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner und 4-seitige Formelsammlung

Aufgabe 1: Verständnisfragen (18 Punkte)

a) Wie lautet die Übertragungsfunktion eines proportionalen Systems 1. Ordnung mit Totzeit? (2 Punkte)

b) Skizzieren Sie die Ortskurve eines PT_2-Gliedes. (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm eines Allpasses 2. Ordnung. (4 Punkte)

d) Skizzieren Sie die Impulsantwort eines PT1-Gliedes mit negativer Verstärkung. (2 Punkte)

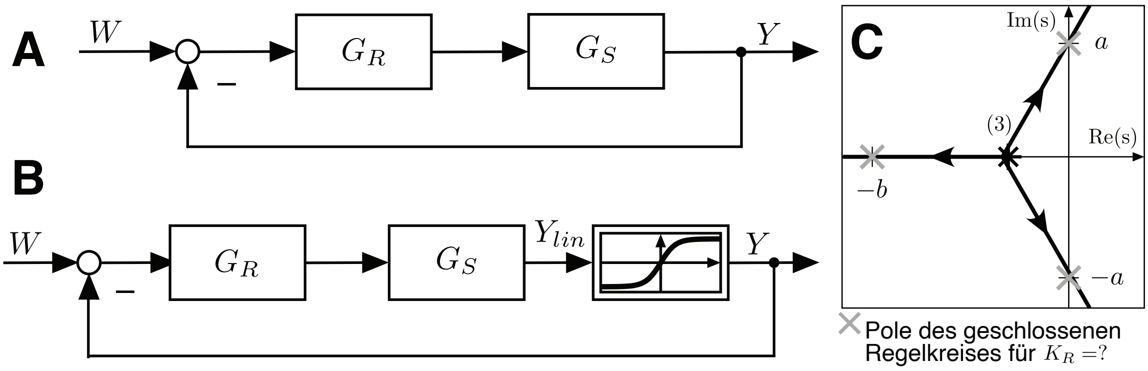
e) Woran erkennt man, ob ein System globales I-Verhalten hat? (2 Punkte)

f) Was gilt für den Frequenzgang einer minimalphasigen Übertragungsfunktion? (3 Punkte)

g) Wie lautet die Übertragungsfunktion der Empfindlichkeitsfunktion? (2 Punkte)

h) Wie bezeichnet man „Steuerung“ in englischer Sprache? (1 Punkte)

Aufgabe 2: Regelkreis mit Nichtlinearität (21 Punkte)



Gegeben sind obige Regelkreise, die untersucht werden sollen. Regelkreis B unterscheidet sich von A lediglich durch die zusätzliche Nichtlinearität im Ausgang der Streckenübertragungsfunktion G_S (Wiener-System). Der Regler G_R sei ein einfacher P-Regler mit Reglerverstärkung K_R. Gegeben seien folgende Übertragungsfunktionen und Nichtlinearität:

$$G_S(s) = \frac{0{,}5}{(1+s)^3}, \quad G_R = K_R, \quad y(y_{lin}) = \frac{2}{1 + \mathrm{e}^{-4 \cdot y_{lin}}} - 1$$

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises für Regelkreis A und ermitteln Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums, für welchen Wertebereich von K_R, der Regelkreis stabil ist.

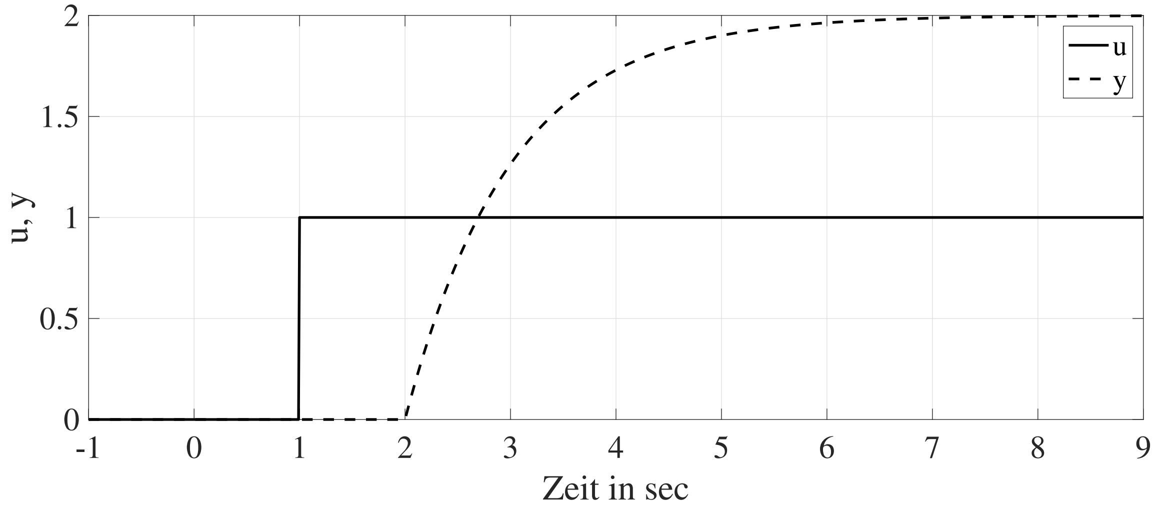
b) Oben in Diagramm C ist die Wurzelortskurve für Regelkreis A und die Pollage für eine besondere Situation dargestellt (3 graue Kreuze). Wie nennt man diese Situation? Benennen Sie den zugehörigen Wert von K_R. Berechnen Sie die Werte der Pole für diese Situation $p_1 = -b$, $p_{2,3} = \pm a \cdot i$ durch Koeffizientenvergleich des Nennerpolynoms von G_W mit dem Polynom $(s+b)(s+a\cdot i)(s-a\cdot i)$.

c) Berechnen Sie für Regelkreis A den stationären Endwert der Regelgröße $y(t \to \infty)$ bei einem Sprung der Führungsgröße $w(t) = \sigma(t)$ in Abhängigkeit von K_R.

d) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe, welchen Wert K_R haben muss, damit der stationäre Endwert $y(t \to \infty) = 0{,}9$ beträgt (bleibender Regelfehler von 10%). Ist der Regelkreis bei dieser Reglerverstärkung noch stabil?

e) Linearisieren Sie die Nichtlinearität um die Betriebspunkte $y_{lin} = 1$ und $y_{lin} = 0$. Sie erhalten jeweils ein einfaches P-Glied $y(t) = K_{NL} \cdot y_{lin}(t)$. Nehmen Sie nun an, Sie wählen $K_R = 10$ um etwas Abstand von der Stabilitätsgrenze (des linearen Systems) zu haben. Wäre der Regelkreis B sowohl im oberen als auch im unteren Betriebspunkt stabil?
Hinweis: Wenn Sie Aufgabenteil a) nicht gelöst haben, nehmen Sie an, Sie hätten $K_R < 12$ als Stabilitätsbedingung erhalten.

Aufgabe 3: Reglerentwurf mittels Einstellregeln (9 Punkte)



Gegeben ist die Sprungantwort eines Systems.

a) Bestimmen Sie mithilfe der abgebildeten Sprungantwort die Totzeit T_t, die Zeitkonstante T und die statische Verstärkung K_s des gegebenen Systems.

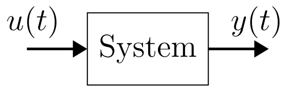
b) Wie lautet die Übertragungsfunktion des Systems? Wie wird das System bezeichnet? (P, I, D, DT_1...)

c) Welche Eigenschaften muss eine Regelstrecke haben, damit das erste Verfahren nach Ziegler-Nichols gut funktioniert?

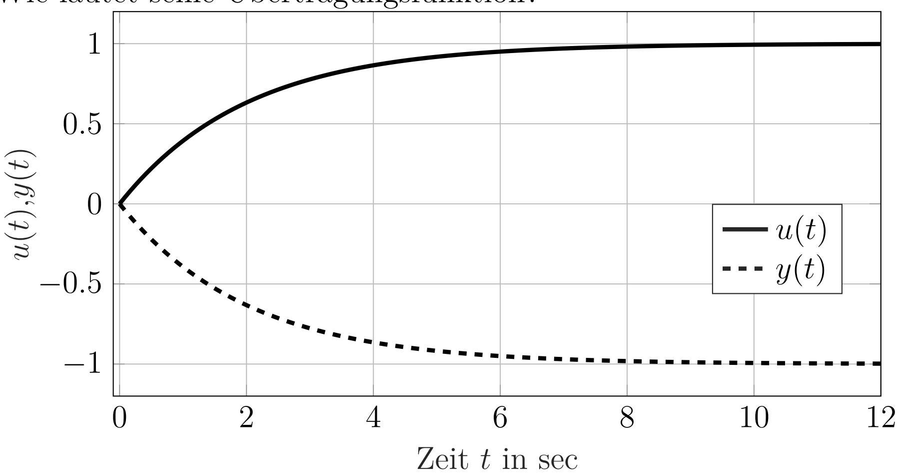
d) Beschreiben Sie die Vorgehensweise, wie man mit der Einstellregel 2 nach Ziegler-Nichols einen Regler auslegt. Welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, um die Regel anwenden zu können?

Aufgabe 4: Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgängen (17 Punkte)

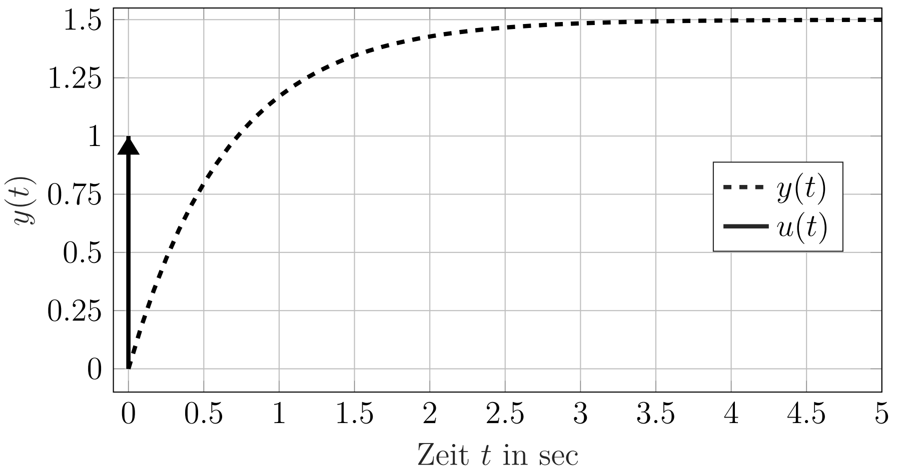
Die Übertragunsfunktion eines Systems soll den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgang des Systems beschreiben. In den folgenden Aufgaben sollen Sie die Systeme beschreiben (P, PD, PI, PID, PT_1, etc.) und deren Übertragungsfunktionen finden. Bestimmen Sie alle Zeitkonstanten und Verstärkungen (falls möglich). Es reicht eine grobe Abschätzung.
Hinweis: Überlegen Sie sich den Zusammenhang zwischen Impuls-, Sprung und Rampenantwort eines Systemes.



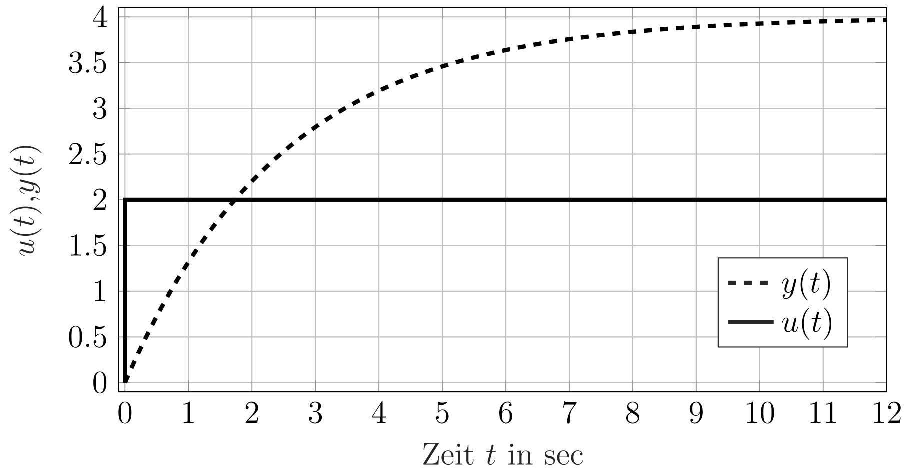
a) In der folgenden Grafik ist die Antwort eines Systemes $y(t)$ auf den Eingang $u(t)$ abgebildet.
Wie wird ein solches System genannt?
Wie lautet seine Übertragungsfunktion?



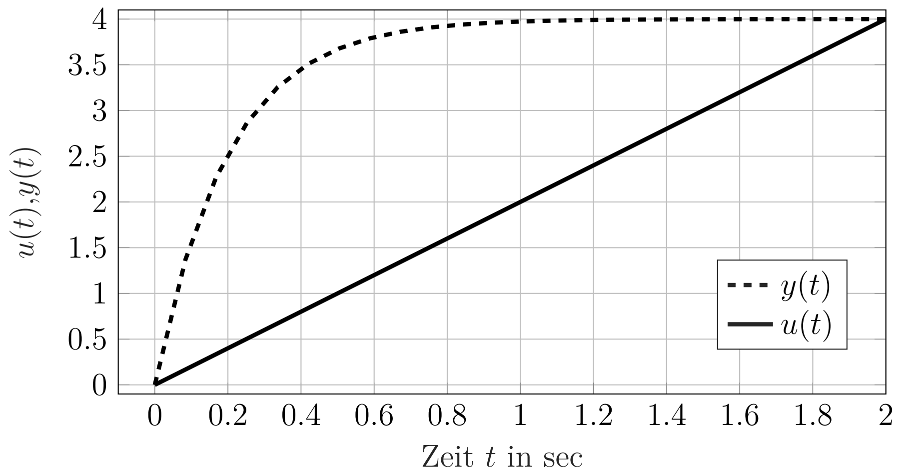
b) In der folgenden Grafik sehen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems auf einen **Impuls** $u(t) = \delta(t)$ bei t=0.
Wie wird ein solches System genannt?
Wie lautet seine Übertragungsfunktion?



c) In der folgenden Grafik sehen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems auf einen **Sprung** $u(t) = 2\sigma(t)$ bei $t = 0$.
Wie wird ein solches System genannt?
Wie lautet seine Übertragungsfunktion?



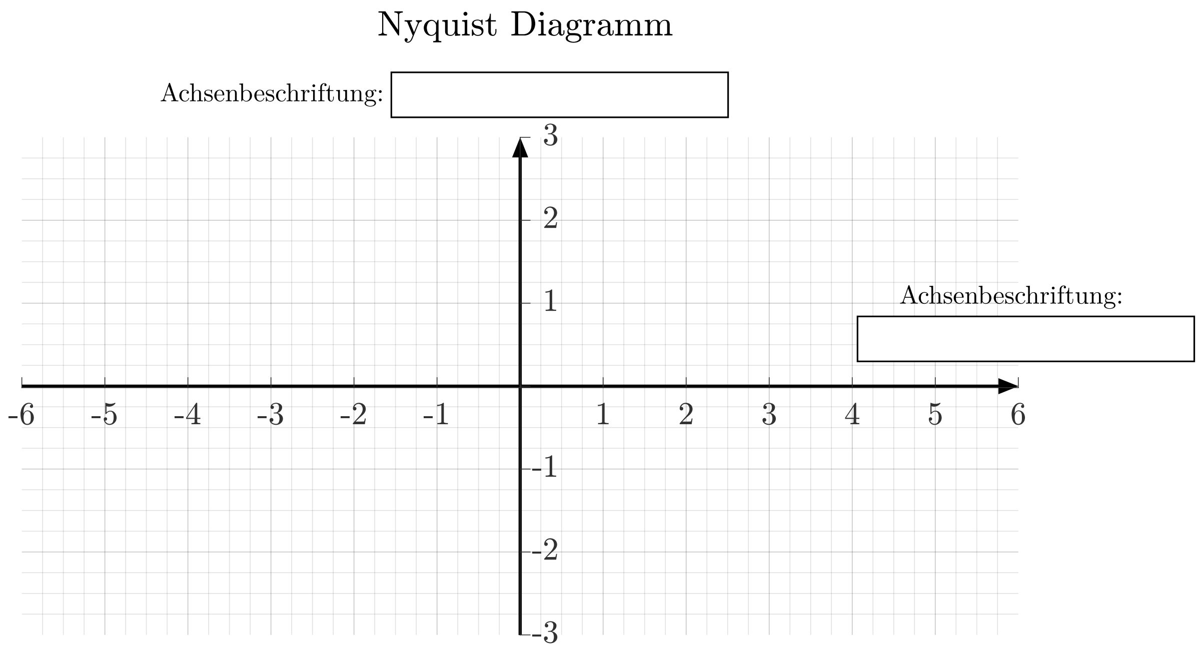
d) In der folgenden Grafik sehen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems auf ein **Rampensignal** als Eingang $u(t)$.
Wie wird ein solches System genannt?
Wie lautet seine Übertragungsfunktion?
Hinweis: Überlegen Sie, welche Übertragungsfunktion zu einer Antwort $y(t) = 2\sigma(t)$ führen würde. Im 2. Schritt können Sie das Verzögerungsverhalten berücksichtigen. Siehe Aufgabenteil c).

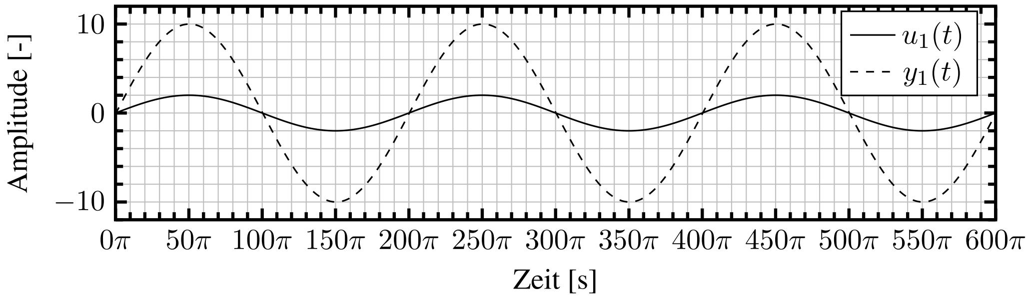


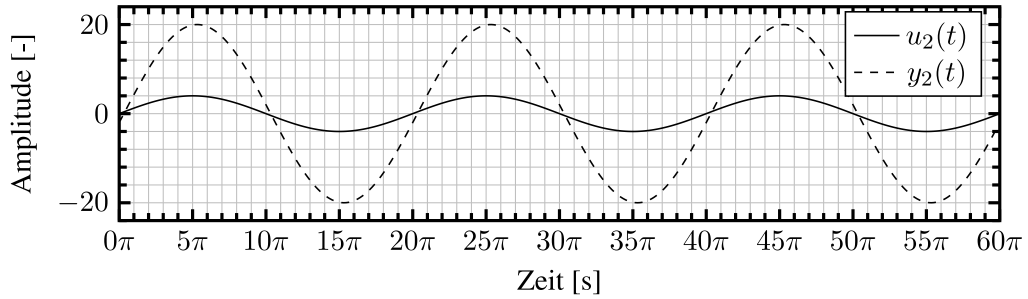
Aufgabe 5: Frequenzgänge (18 Punkte)

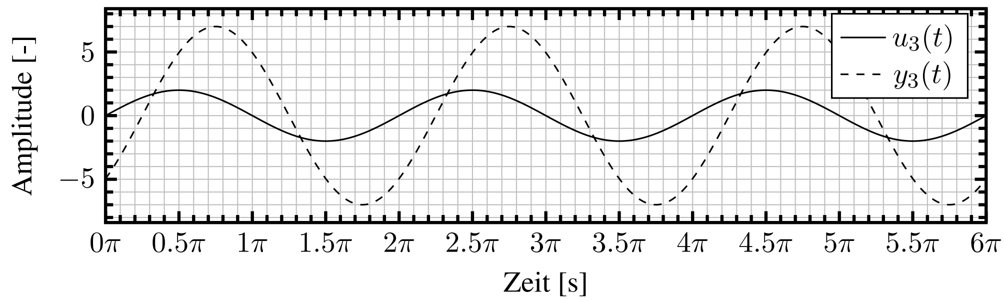
An einem linearen dynamischen System werden fünf Experimente durchgeführt. Pro Experiment wird das System mit einem Sinus-Signal (Eingangssignal) $u_i(t)$ angeregt und das dazugehörige Ausgangssignal $y_i(t)$ gemessen (für $i = 1, \ldots, 5$). **Die Ein- und Ausgangssignale für den eingeschwungenen Zustand der fünf Experimente sind am Ende der Aufgabe abgebildet.**

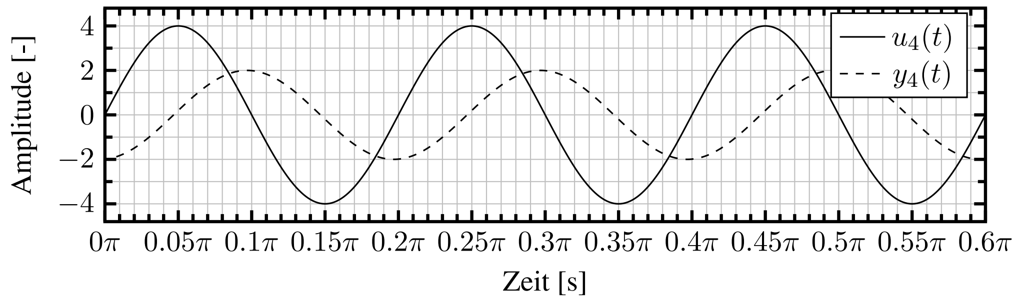
Übertragen Sie das vorgegebene Nyquist-Diagramm auf Ihre Lösungsblätter und tragen Sie außerdem die richtigen Achsenbeschriftungen an den Achsen ein. Ermitteln Sie aus den Experimenten fünf Stützpunkte für das Nyquist-Diagramm des dynamischen Systems und skizzieren Sie den Verlauf der Ortskurve. Beschriften Sie außerdem die Stützstellen mit den dazugehörigen Kreisfrequenzen.

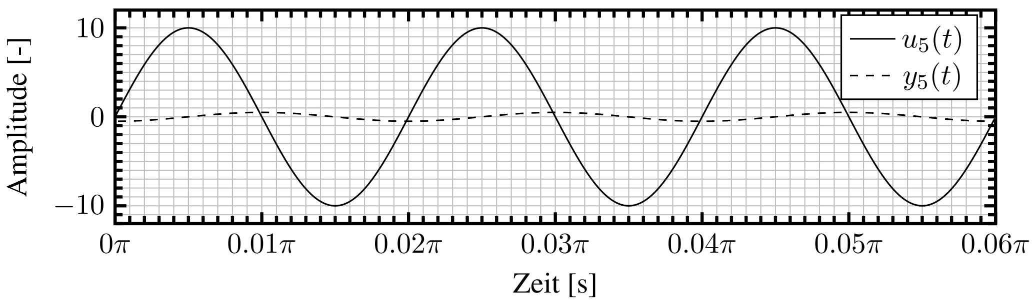



Amplitude [-]
10
0
−10
0π 50π 100π 150π 200π 250π 300π 350π 400π 450π 500π 550π 600π
Zeit [s]
u1(t)
y1(t)


Amplitude [-]
20
0
−20
0π 5π 10π 15π 20π 25π 30π 35π 40π 45π 50π 55π 60π
Zeit [s]
u2(t)
y2(t)


Amplitude [-]
5
0
−5
0π 0.5π 1π 1.5π 2π 2.5π 3π 3.5π 4π 4.5π 5π 5.5π 6π
Zeit [s]
u3(t)
y3(t)


Amplitude [-]
4
2
0
−2
−4
0π 0.05π 0.1π 0.15π 0.2π 0.25π 0.3π 0.35π 0.4π 0.45π 0.5π 0.55π 0.6π
Zeit [s]
u4(t)
y4(t)


Amplitude [-]
10
0
−10
0π 0.01π 0.02π 0.03π 0.04π 0.05π 0.06π
Zeit [s]
u5(t)
y5(t)

Aufgabe 6: Wurzelortskurve (19 Punkte)

Gegeben ist eine instabile Regelstrecke mit folgender Übertragungsfunktion:

$$G_S(s) = \frac{1}{T_1 s - 1} \quad \text{mit} \quad T_1 > 0$$

Beachten Sie, dass eine Rechnung in den einzelnen Teilaufgaben nur dann nötig ist, wenn diese explizit gefordert ist.

a) Zur Stabilisierung des Systems soll ein PI-Regler eingeführt werden. Dieser besitzt die folgende Übertragungsfunktion:

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \quad \text{mit} \quad T_i, K > 0$$

Zeichnen Sie ein Pol-Nullstellen-Diagramm und tragen Sie die Polstelle(n) und/oder Nullstelle(n) des offenen Regelkreises ein. Nehmen Sie dazu Werte für die Reglerparameter und die Zeitkonstante des Systems an.

b) Zeichnen Sie nun die Wurzelortskurve des geschlossenen Regelkreises in das erstellte Pol-Nullstellen-Diagramm aus Aufgabenteil a). Achten Sie darauf, die Richtung, in der die Wurzelortskurve mit steigender Verstärkung läuft, eindeutig kenntlich zu machen.

c) Unterteilen Sie die gezeichnete Wurzelortskurve in Abschnitte, in denen Kombinationen der Eigenschaften stabil/instabil und schwingungsfähig/nicht schwingungsfähig zutreffen. Benennen Sie die Eigenschaften der einzelnen Abschnitte.

d) Für die Regelstrecke $G_S(s)$ und den Regler $G_R(s)$ werden nun folgende Werte vorgegeben:

$$T_1 = T_i = 1$$

Berechnen Sie nun die Wertebereiche der Reglerverstärkung K, in denen der geschlossene Regelkreis die in c) definierten Eigenschaften besitzt.

Aufgabe 7: Strörgrößenaufschaltung (18 Punkte)

Um die zwei dynamischen Prozesse mit den Übertragungsfunktionen

$$G_{\mathrm{S},1}(s) = \frac{4}{1+2s}\,,$$
$$G_{\mathrm{S},2}(s) = \frac{s+3}{s+4}\,e^{-s}$$

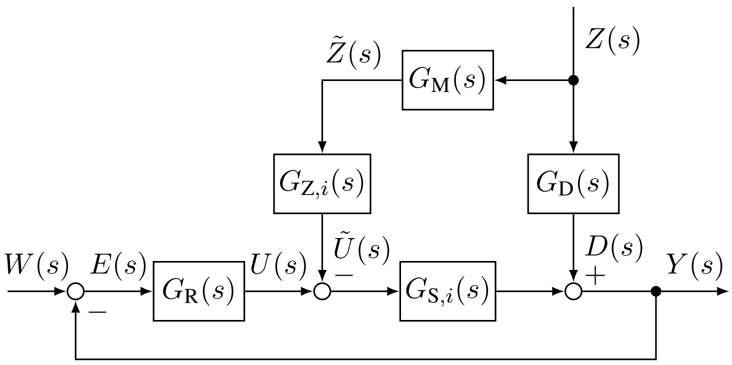
zu regeln wurde ein PI-Regler entworfen. Dieser hat die Übertragungsfunktion

$$G_{\mathrm{R}}(s) = \frac{1+s}{s}\,.$$

Da die beiden Prozesse sehr anfällig gegenüber der Störgröße $Z(s)$ sind, soll der bestehende Regelkreis um eine Störgrößenaufschaltung erweitert werden. Die Störübertragungsfunktion $G_{\mathrm{D}}(s)$ konnte bereits im Vorfeld zu

$$G_{\mathrm{D}}(s) = \frac{s+2}{s+1}\,e^{-s}$$

bestimmt werden. Zur Messung der Störgröße $Z(s)$ wird eine Messeinrichtung verwendet. In der folgenden Abbildung wird das Prinzip veranschaulicht.



Zunächst wird angenommen, dass es sich um eine ideale Messeinrichtung mit der Übertragungsfunktion $G_{\mathrm{M}}(s) = 1$ handelt.

a) Berechnen Sie für die beiden Streckenübertragungsfunktionen $G_{\mathrm{S},1}(s)$ und $G_{\mathrm{S},2}(s)$ die jeweilige ideale Störgrößenaufschaltung $G_{\mathrm{Z},i}(s)$.

b) Sind beide Störgrößenaufschaltungen aus Teilaufgabe a) realisierbar? Wenn nein, begründen Sie ihre Meinung und geben Sie eine dynamische und realisierbare Näherungslösungen an.

Für die Messeinrichtung gilt nun folgende Übertragungsfunktion:

$$G_{\mathrm{M}}(s) = e^{-s}.$$

c) Bestimmen Sie für die neue Messeinrichtung erneut die jeweilige ideale Störgrößenaufschaltung $G_{\mathrm{Z},i}(s)$. Falls die Störgrößenaufschaltung nicht realisierbar ist, geben Sie auch hier eine dynamische und realisierbare Näherungslösung an.

d) Erläutern Sie den Einfluss der Störgrößenaufschaltung auf die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

e) Kann durch eine Vorsteuerung oder eine Kaskadenregelung die Stabilität des geschlossenen Regelkreises beeinflusst werden? Begründen Sie ihre Aussage.

Lösung:

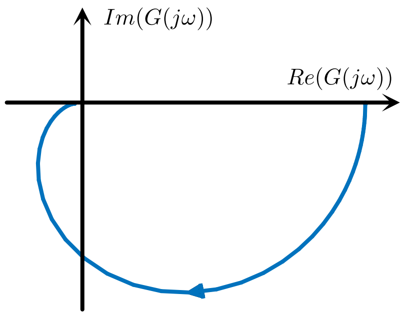
Aufgabe 1: Verständnisfragen (18 Punkte)

a) Wie lautet die Übertragungsfunktion eines proportionalen Systems 1. Ordnung mit Totzeit? (2 Punkte)
Antwort:

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} \cdot e^{-T_t s}$$

2

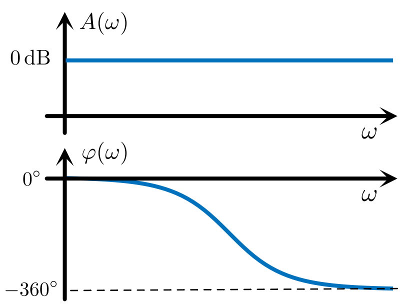
b) Skizzieren Sie die Ortskurve eines PT_2-Gliedes. (2 Punkte)
Antwort:



- Achsenbeschriftungen
- Richtungspfeile (Achsen und Frequenz)
- Beginn auf reeller Achse, Ende im Ursprung
- Kreisähnliche Form
- Verlauf durch 2 Quadranten

2

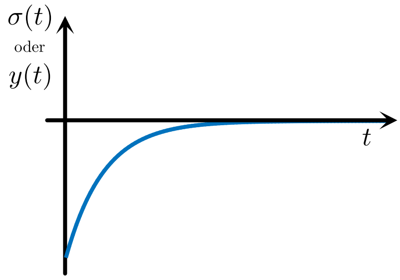
c) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm eines Allpasses 2. Ordnung. (4 Punkte)
Antwort:



- Achsenbeschriftungen
- Achsenpfeile
- 0dB (z.B.), 0° und -360° Beschriftung
- Konstante Amplitude (z.B. 0dB)
- S-förmiger Verlauf der Phase auf -360°

4

d) Skizzieren Sie die Impulsantwort eines PT1-Gliedes mit negativer Verstärkung. (2 Punkte)
Antwort:



- Achsenbeschriftungen
- Achsenpfeile
- Sprung am Anfang
- Asymptotisches Abklingen auf Null

2

e) Woran erkennt man, ob ein System globales I-Verhalten hat? (2 Punkte)
Antwort:
In der Übertragungsfunktion kann s im Nenner ausgeklammert werden. Frequenzgang: $A(\omega \to 0) = \infty$, $\varphi(\omega \to 0) = -90°$. Frequenzgangsortskurve beginnt im Unendlichen bei -90°. Sprungantwort strebt linear gegen Unendlich. Impulsantwort verharrt auf konstanten Wert ($\neq 0$). (Eine der Antworten in sinngemäßer Form genügt.) 2

f) Was gilt für den Frequenzgang einer minimalphasigen Übertragungsfunktion? (3 Punkte)
Antwort:
Der Amplituden- und Phasengang haben einen eindeutigen Zusammenhang. Für ±20dB/Dek. Steigung im Amplitudengang ergeben sich ±90° Phasenverschiebung (asymptotischer Frequenzgang). Zu einem gegebenen Amplitudengang hat die Phase betragsmäßig den kleinstmöglichen Wert. (Eine der Antworten in sinngemäßer Form genügt.) 3

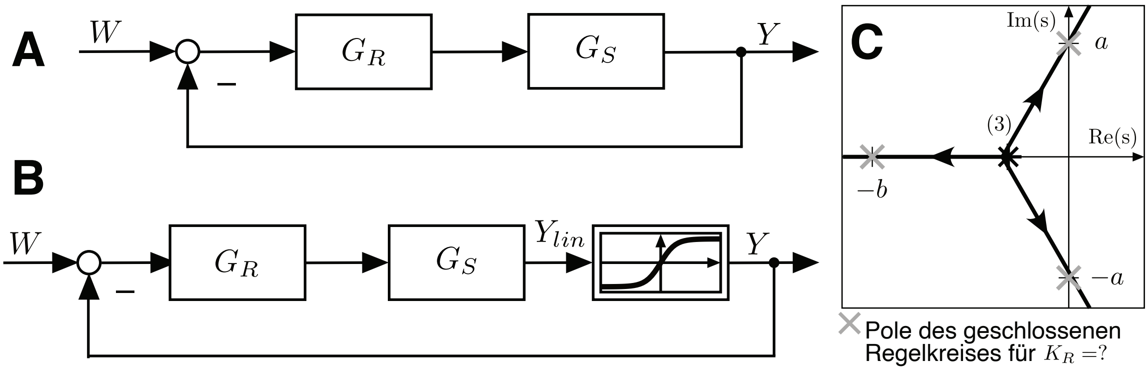
g) Wie lautet die Übertragungsfunktion der Empfindlichkeitsfunktion? (2 Punkte)
Antwort:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

2

h) Wie bezeichnet man „Steuerung“ in englischer Sprache? (1 Punkte)
Antwort:
Feedforward control oder auch *open-loop control*. (Eine der Antworten genügt.) 1

Aufgabe 2: Regelkreis mit Nichtlinearität (21 Punkte)



Gegeben sind obige Regelkreise, die untersucht werden sollen. Regelkreis B unterscheidet sich von A lediglich durch die zusätzliche Nichtlinearität im Ausgang der Streckenübertragungsfunktion G_S (Wiener-System). Der Regler G_R sei ein einfacher P-Regler mit Reglerverstärkung K_R. Gegeben seien folgende Übertragungsfunktionen und Nichtlinearität:

$$G_S(s) = \frac{0{,}5}{(1+s)^3}, \quad G_R = K_R, \quad y(y_{lin}) = \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-4\cdot y_{lin}}} - 1$$

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises für Regelkreis A und ermitteln Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums, für welchen Wertebereich von K_R, der Regelkreis stabil ist.
Antwort:

$$G_0 = G_R \cdot G_S = \frac{Z_0}{N_0} = \frac{0{,}5K_R}{s^3+3s^2+3s+1}$$

$$\boxed{G_W = \frac{Z_0}{N_0+Z_0} = \frac{0{,}5K_R}{s^3+3s^2+3s+(1+0{,}5K_R)}}$$

Notwendige Hurwitz-Bedingung:

$$a_i > 0 \Leftrightarrow 1+0{,}5K_R > 0 \Leftrightarrow \boxed{K_R > -2}$$

Hinreichende Hurwitz-Bedingung (für $n=3$):

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \Leftrightarrow 3\cdot 3 - (1+0{,}5K_R)\cdot 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{K_R < 16}$$

5

b) Oben in Diagramm C ist die Wurzelortskurve für Regelkreis A und die Pollage für eine besondere Situation dargestellt (3 graue Kreuze). Wie nennt man diese Situation? Benennen Sie den zugehörigen Wert von K_R. Berechnen Sie die Werte der Pole für diese Situation $p_1=-b$, $p_{2,3}=\pm a\cdot i$ durch Koeffizientenvergleich des Nennerpolynoms von G_W mit dem Polynom $(s+b)(s+a\cdot i)(s-a\cdot i)$.
Antwort:
Die Situation ist der **grenzstabile Fall**. K_R entspricht dem maximal zulässigen Wert aus der vorherigen Teilaufgabe $\boxed{K_R=16}$. Koeffizientenvergleich:

$$(s+b)(s+a\cdot i)(s-a\cdot i) = s^3+bs^2+a^2s+ba^2 = s^3+3s^2+3s+(1+0{,}5K_R)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 3}, \quad a^2 = 3 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{3}}, \quad ba^2 = 3 \cdot 3 = 9 = (1 + 0{,}5K_R) \Rightarrow \boxed{K_R = 16}$$

5

c) Berechnen Sie für Regelkreis A den stationären Endwert der Regelgröße $y(t \to \infty)$ bei einem Sprung der Führungsgröße $w(t) = \sigma(t)$ in Abhängigkeit von K_R.
Antwort:

$$y(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot G_W \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} G_W = \boxed{\frac{0{,}5K_R}{1 + 0{,}5K_R}}$$

3

d) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe, welchen Wert K_R haben muss, damit der stationäre Endwert $y(t \to \infty) = 0{,}9$ beträgt (bleibender Regelfehler von 10%). Ist der Regelkreis bei dieser Reglerverstärkung noch stabil?
Antwort:

$$y(t \to \infty) = 0{,}9 = \frac{0{,}5K_R}{1 + 0{,}5K_R} \Leftrightarrow \boxed{K_R = 18}$$

Es gilt für Stabilität: $-2 < K_R < 16$. Damit liegt $K_R = 18$ $\boxed{\text{im \textbf{instabilen} Bereich}}$.
Dieser Regelfehler kann mit einem P-Regler nicht erreicht werden!

3

e) Linearisieren Sie die Nichtlinearität um die Betriebspunkte $y_{lin} = 1$ und $y_{lin} = 0$. Sie erhalten jeweils ein einfaches P-Glied $y(t) = K_{NL} \cdot y_{lin}(t)$. Nehmen Sie nun an, Sie wählen $K_R = 10$ um etwas Abstand von der Stabilitätsgrenze (des linearen Systems) zu haben. Wäre der Regelkreis B sowohl im oberen als auch im unteren Betriebspunkt stabil?
Hinweis: Wenn Sie Aufgabenteil a) nicht gelöst haben, nehmen Sie an, Sie hätten $K_R < 12$ als Stabilitätsbedingung erhalten.
Antwort:

$$K_{NL} = \left.\frac{dy}{dy_{lin}}\right|_{y_{lin}} = \left.\frac{d\left(\frac{2}{1+e^{-4\cdot y_{lin}}} - 1\right)}{dy_{lin}}\right|_{y_{lin}} = 2 \cdot \frac{-1}{(1 + e^{-4\cdot y_{lin}})^2} \cdot \left.\frac{d\,(1 + e^{-4\cdot y_{lin}})}{dy_{lin}}\right|_{y_{lin}}$$

$$= 2 \cdot \frac{-1}{(1 + e^{-4\cdot y_{lin}})^2} \cdot -4 \cdot e^{-4\cdot y_{lin}}\Big|_{y_{lin}} \Leftrightarrow \boxed{K_{NL} = \left.\frac{8 \cdot e^{-4\cdot y_{lin}}}{(1 + e^{-4\cdot y_{lin}})^2}\right|_{y_{lin}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{NL} = 2} \text{ für } y_{lin} = 0$$

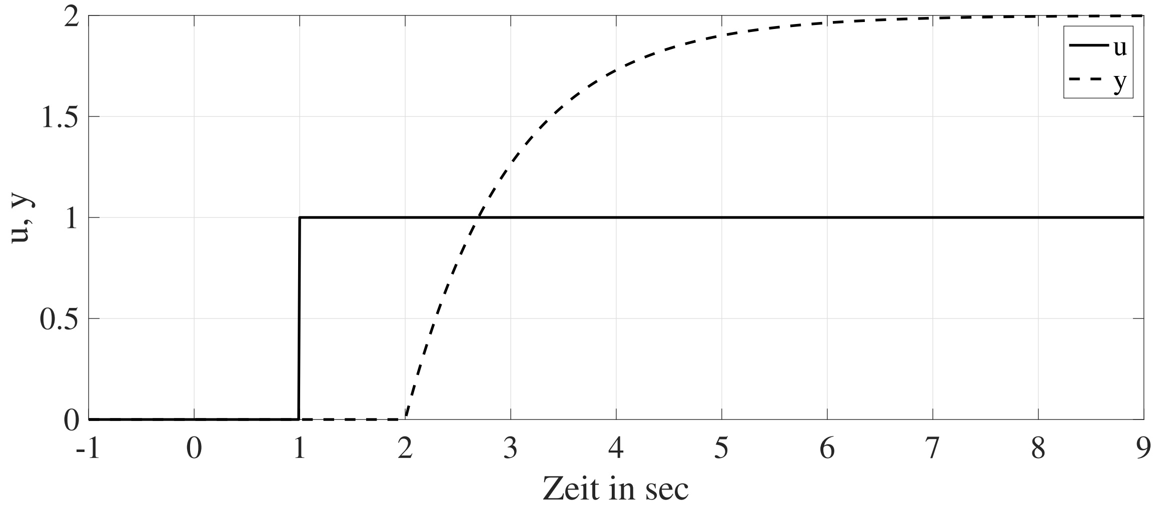
$$\Rightarrow \boxed{K_{NL} \approx 0{,}14} \text{ für } y_{lin} = 1$$

Durch das zusätzliche P-Glied wird im offenen Regelkreis K_R ersetzt durch $K_R \cdot K_{NL}$, damit verändert sich die Verstärkung des offen Regelkreises:
Für $y_{lin} = 1$ gilt: $K_R \cdot 0{,}14 = 10 \cdot 0{,}14 = 1{,}4 < 16 \Rightarrow$ Regelkreis $\boxed{\textbf{stabil}}$.
Für $y_{lin} = 0$ gilt : $K_R \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 > 16 \Rightarrow$ Regelkreis $\boxed{\textbf{instabil}}$.
Aufgrund der für große y_{lin} abflachenden Nichtlinearität, wird der Regelkreis erst ab einem Mindestwert für die Führungsgröße stabil!

5

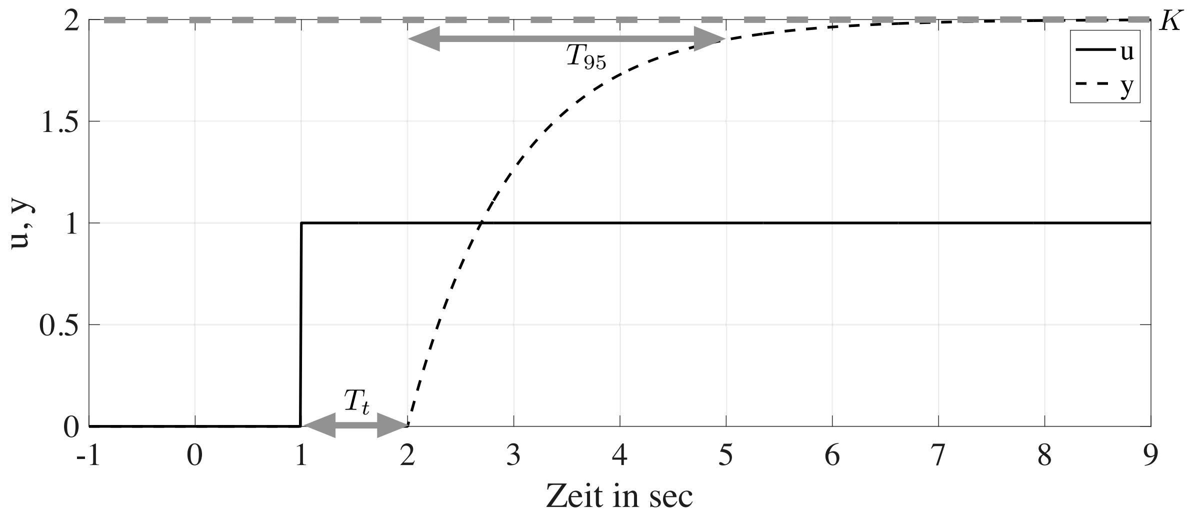
$\boxed{\sum 21}$

Aufgabe 3: Reglerentwurf mittels Einstellregeln (9 Punkte)



Gegeben ist die Sprungantwort eines Systems.

a) Bestimmen Sie mithilfe der abgebildeten Sprungantwort die Totzeit T_t, die Zeitkonstante T und die statische Verstärkung K_s des gegebenen Systems.
Antwort:



$$T \approx \frac{T_{95}}{3} = 1 \text{ sec mit } T_{95} = 3 \text{ sec}$$
$$T_t = 1 \text{ sec}$$
$$K_s = 2$$

3

b) Wie lautet die Übertragungsfunktion des Systems? Wie wird das System bezeichnet? (P, I, D, DT_1...)

Antwort:

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}e^{-T_t s} = \frac{2}{1+1s}e^{-1s}$$ 1

Es handelt sich um ein PT_1-T_t System. 1

c) Welche Eigenschaften muss eine Regelstrecke haben, damit das erste Verfahren nach Ziegler-Nichols gut funktioniert?
Antwort:
Das erste Kriterium nach Ziegler-Nichols funktioniert für Systeme, die näherungsweise aperiodisches (nicht oder nur sehr schwach oszillatorisches) Verhalten aufweisen. 1

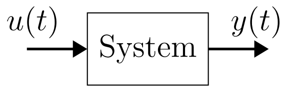
d) Beschreiben Sie die Vorgehensweise, wie man mit der Einstellregel 2 nach Ziegler-Nichols einen Regler auslegt. Welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, um die Regel anwenden zu können?
Antwort:
Um die Einstellregel 2 nach Ziegler-Nichols anwenden zu können, muss die untersuchte Regelstrecke stabil sein und muss bei einem Dauerschwingversuch an die Stabilitätsgrenze gebracht werden dürfen. 2

Die Strecke wird zuerst mit einem P-Regler geregelt. Die Verstärkung des P-Reglers wird so lange erhöht, bis die Stabilitätsgrenze erreicht ist. 1

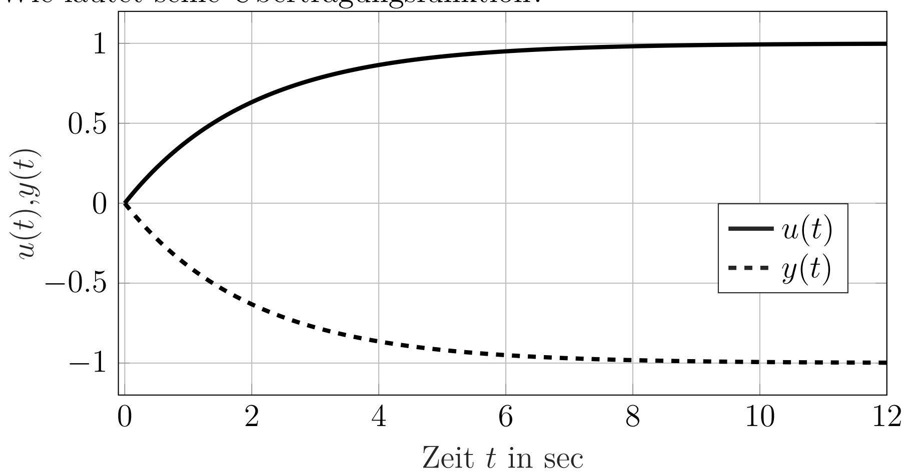
$\sum 9$

Aufgabe 4: Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgängen (17 Punkte)

Die Übertragunsfunktion eines Systems soll den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgang des Systems beschreiben. In den folgenden Aufgaben sollen Sie die Systeme beschreiben (P, PD, PI, PID, PT_1, etc.) und deren Übertragungsfunktionen finden. Bestimmen Sie alle Zeitkonstanten und Verstärkungen (falls möglich). Es reicht eine grobe Abschätzung.
Hinweis: Überlegen Sie sich den Zusammenhang zwischen Impuls-, Sprung und Rampenantwort eines Systemes.



a) In der folgenden Grafik ist die Antwort eines Systemes $y(t)$ auf den Eingang $u(t)$ abgebildet.
Wie wird ein solches System genannt?
Wie lautet seine Übertragungsfunktion?

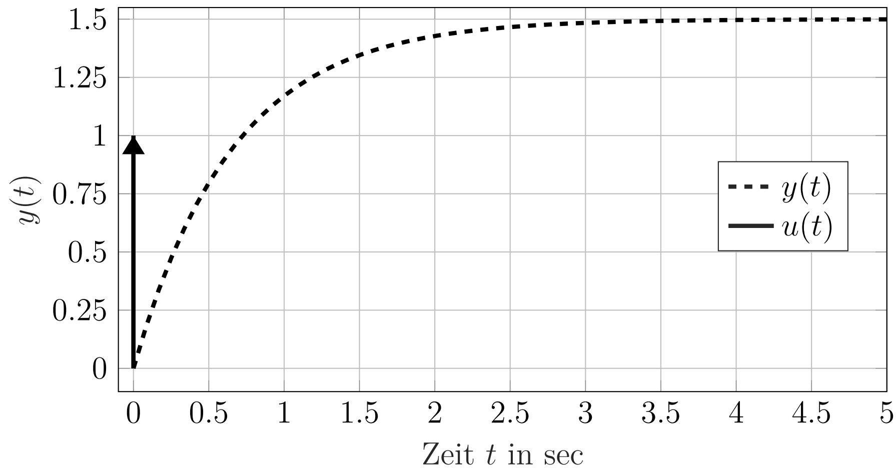


Antwort:
Es handelt sich um ein Proportionales System/ einen Faktor. Allgemeine Form:

$$G(s) = K$$

$K = -1$ kann aus dem Endwert abgelesen werden. 3

b) In der folgenden Grafik sehen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems auf einen **Impuls** $u(t) = \delta(t)$ bei t=0.
Wie wird ein solches System genannt?
Wie lautet seine Übertragungsfunktion?

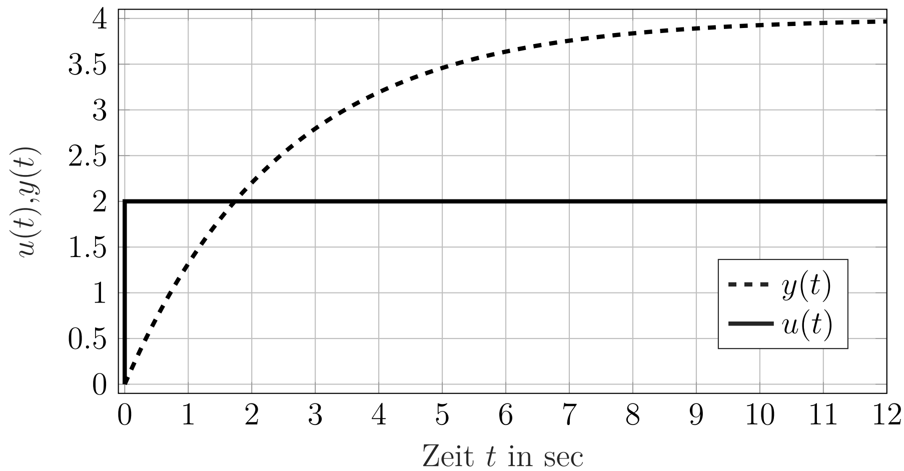


Antwort:
Es handelt sich um ein IT_1 System.
Allgemeine Form:

$$G(s) = \frac{K}{(1+Ts)s}$$

Ein Sprung ist das Integral eines Impulses. Daher sieht der Ausgang des Systemes wie die Sprungantwort eines PT_1-Systems aus. Somit steckt ein integrierender Teil im System. $K = 1.5$ kann aus dem Endwert abgelesen werden. $T = 2/3$ sec kann aus dem Graphen abgelesen werden, da bei 2 sec $(3 \cdot T)$ ca. 95% des Endwertes erreicht ist. 5

c) In der folgenden Grafik sehen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems auf einen **Sprung** $u(t) = 2\sigma(t)$ bei $t = 0$.
Wie wird ein solches System genannt?
Wie lautet seine Übertragungsfunktion?

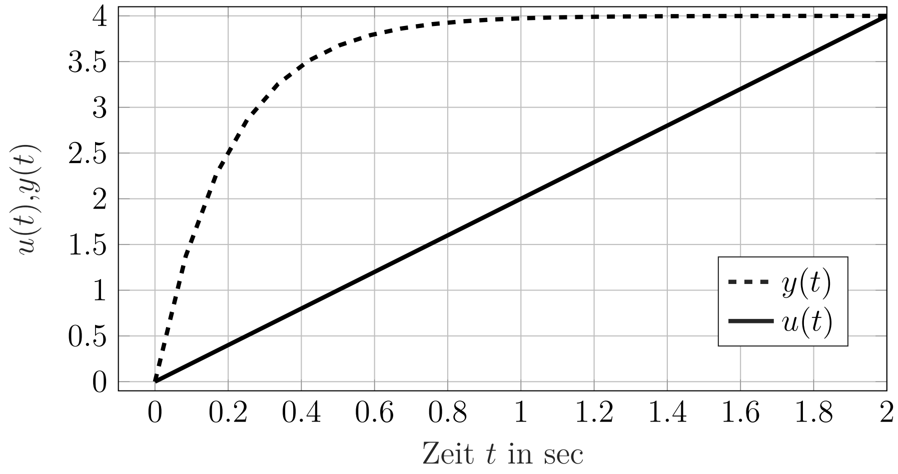


Antwort: Es handelt sich um ein PT_1-System. Allgemeine Form:

$$G(s) = \frac{K}{(1+Ts)}$$

$K = 2$ kann aus dem Endwert abgelesen werden. $T = 2.5$ sec kann aus dem Graphen abgelesen werden, da bei 7.5 sec $(3 \cdot T)$ ca. 95% des Endwertes erreicht ist. 4

d) In der folgenden Grafik sehen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems auf ein **Rampensignal** als Eingang $u(t)$.
Wie wird ein solches System genannt?
Wie lautet seine Übertragungsfunktion?
Hinweis: Überlegen Sie, welche Übertragungsfunktion zu einer Antwort $y(t) = 2\sigma(t)$ führen würde. Im 2. Schritt können Sie das Verzögerungsverhalten berücksichtigen. Siehe Aufgabenteil c).



Antwort:
Es handelt sich um ein DT_1 System.
Allgemeine Form:

$$G(s) = \frac{Ks}{1 + Ts}$$

Ein Sprung kann auch als die Ableitung einer Rampe betrachtet werden. Daher sieht der Ausgang des Systemes wie die Sprungantwort eines PT_1-Systems aus. Somit steckt ein ableitender Teil im System. $K = 2$ kann aus dem Endwert $(2 \cdot 2 = 4)$ abgelesen werden. $T = 0.2$ sec kann aus dem Graphen abgelesen werden, da bei 0.6 sec $(3 \cdot T)$ ca. 95% des Endwertes erreicht ist. 5

$\sum 17$

Aufgabe 5: Frequenzgänge (18 Punkte)

An einem linearen dynamischen System werden fünf Experimente durchgeführt. Pro Experiment wird das System mit einem Sinus-Signal (Eingangssignal) $u_i(t)$ angeregt und das dazugehörige Ausgangssignal $y_i(t)$ gemessen (für $i = 1, \dots, 5$). **Die Ein- und Ausgangssignale für den eingeschwungenen Zustand der fünf Experimente sind am Ende der Aufgabe abgebildet.**

Übertragen Sie das vorgegebene Nyquist-Diagramm auf Ihre Lösungsblätter und tragen Sie außerdem die richtigen Achsenbeschriftungen an den Achsen ein. Ermitteln Sie aus den Experimenten fünf Stützpunkte für das Nyquist-Diagramm des dynamischen Systems und skizzieren Sie den Verlauf der Ortskurve. Beschriften Sie außerdem die Stützstellen mit den dazugehörigen Kreisfrequenzen.

Antwort:

Amplitudenverhältnis

$$A(\omega) = \frac{A_y(\omega)}{A_u(\omega)}$$

Wichtig: Das Amplitudenverhältnis $A(\omega)$ darf nicht in der Einheit Dezibel für das Nyquist-Diagramm verwendet werden.

Phasengang

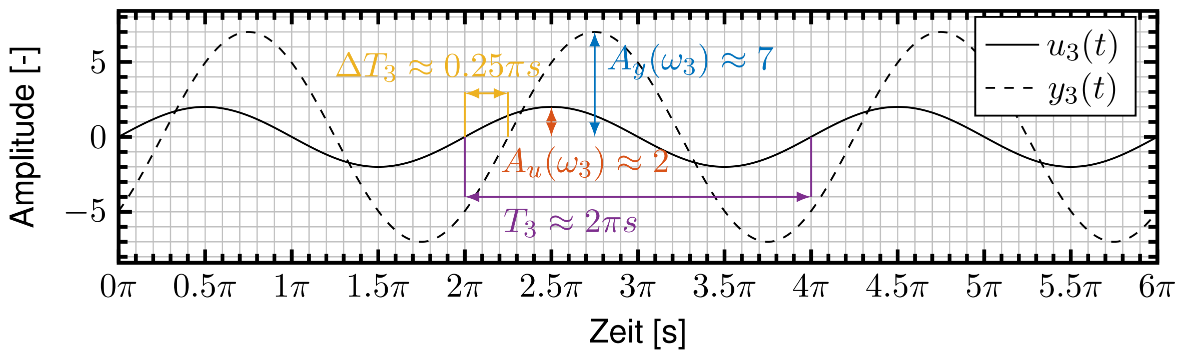
$$\varphi(\omega) = 360° \cdot \left(-\frac{\Delta T}{T}\right)$$

Berechnung der Real- und Imaginärteile:

$$\mathrm{Re}\{G(i\omega)\} = A(\omega) \cdot \cos(\varphi(\omega))$$

$$\mathrm{Im}\{G(i\omega)\} = A(\omega) \cdot \sin(\varphi(\omega))$$

Beispielrechnung an Experiment 3:



$$T_3 = 2\pi\,\mathrm{s} \qquad \Delta T_3 \approx 0.25\pi\,\mathrm{s}$$

$$\omega_3 = 2\pi f_3\,\mathrm{rad} = 2\pi \frac{1}{T_3}\,\mathrm{rad} = \frac{\cancel{2\pi}\,\mathrm{rad}}{\cancel{2\pi}\,\mathrm{s}} = 10^0\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$A_y(\omega_3) \approx 7 \qquad A_u(\omega_3) \approx 2 \quad \rightarrow A(\omega_3) = 3.5$$

$$\varphi(\omega_3) \approx 360^\circ \cdot \left(-\frac{0.25\pi\,\mathrm{s}}{2\pi\,\mathrm{s}}\right) \approx -45^\circ$$

$$\mathrm{Re}\left\{G(i\omega_3)\right\} = 3.5 \cdot \cos(-45^\circ) \approx 2.47$$

$$\mathrm{Im}\left\{G(i\omega_3)\right\} = 3.5 \cdot \sin(-45^\circ) \approx -2.47$$

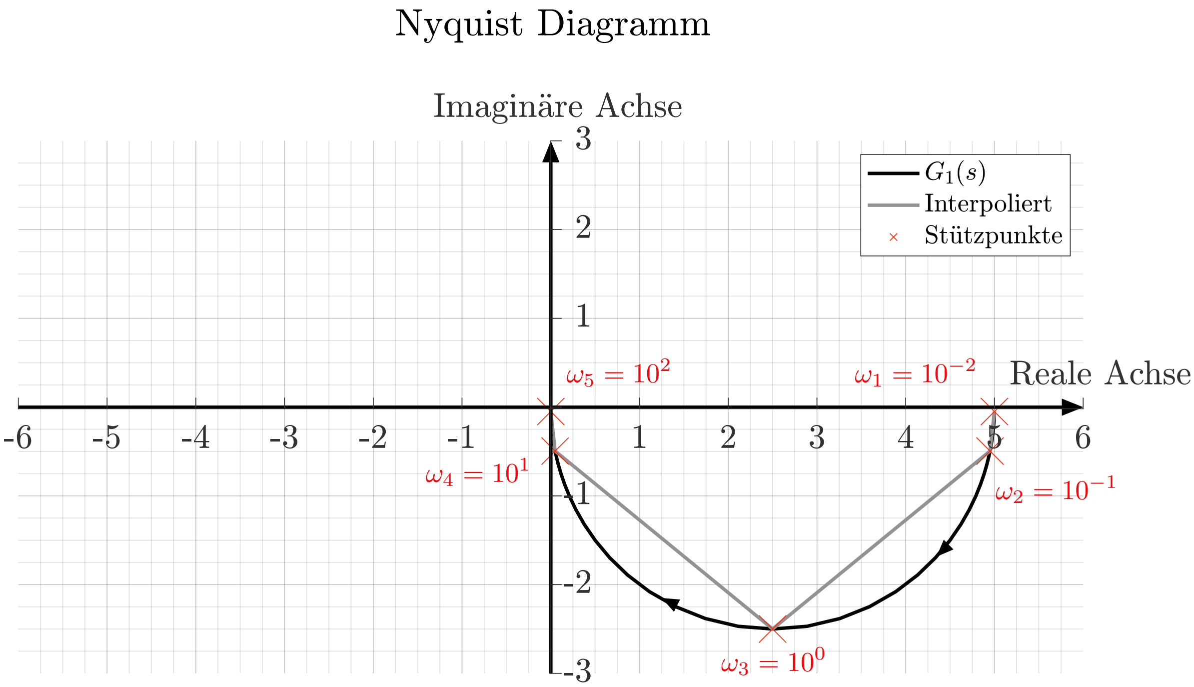
2

Berechnung der anderen Experimente wie 3:

Größe / Exp. i	1	2	3	4	5
T_i [s]	200π	20π	20π	0.2π	0.02π
ΔT_i [s]	0π	0.33π	0.25π	0.0475π	0.005π
ω_i $\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}
$A_y(\omega_i)$ $[-]$	10	20	7	2	0.5
$A_u(\omega_i)$ $[-]$	2	4	2	4	10
$A(\omega_i)$ $[-]$	5	5	3.5	0.5	0.05
$\varphi(\omega_i)$ $[^\circ]$	0	-6	-45	-86	-90
$\mathrm{Re}\left\{G(i\omega_i)\right\}$	5	4.97	2.47	0.03	0
$\mathrm{Im}\left\{G(i\omega_i)\right\}$	0	-0.5	-2.47	-0.5	-0.05

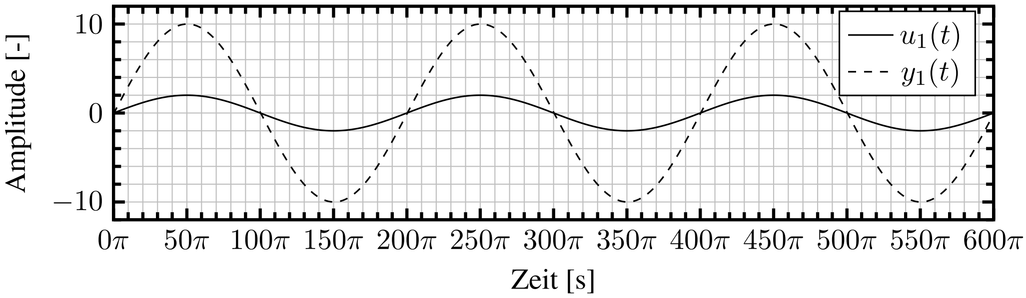
8

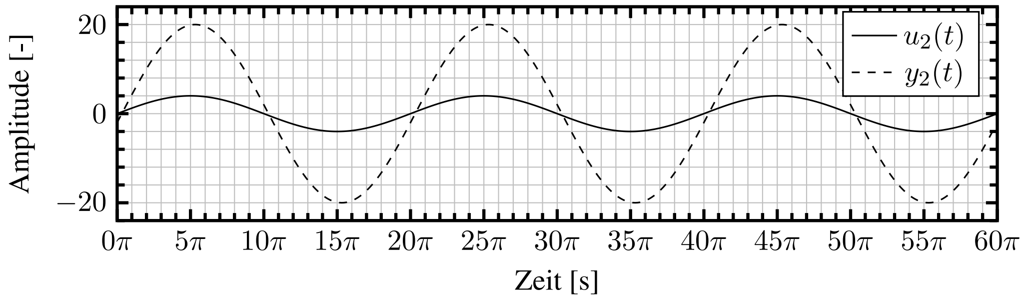
Einzeichnen in Diagramm:

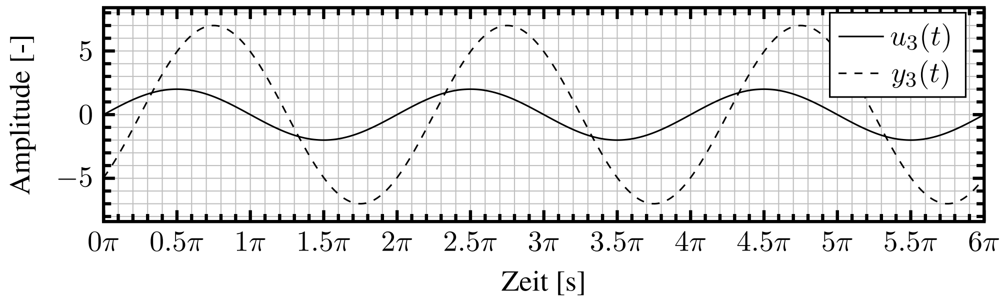


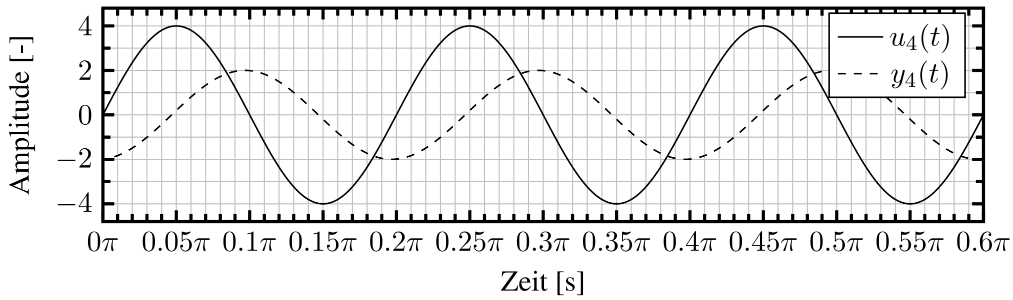
8

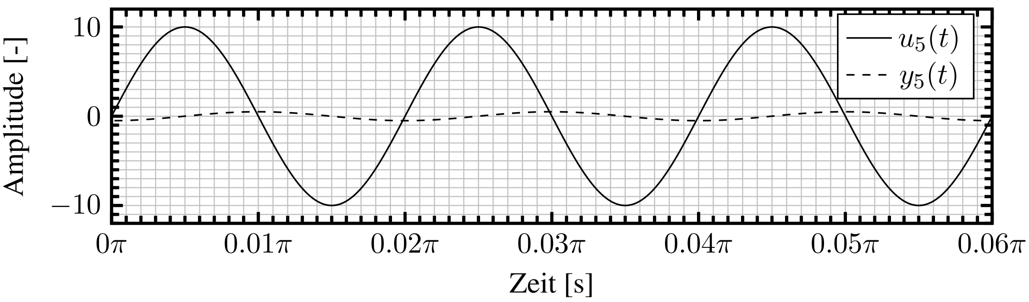
$\sum 18$


Amplitude [-]
Zeit [s]
$u_1(t)$
$y_1(t)$


Amplitude [-]
Zeit [s]
$u_2(t)$
$y_2(t)$


Amplitude [-]
Zeit [s]
$u_3(t)$
$y_3(t)$


Amplitude [-]
Zeit [s]
$u_4(t)$
$y_4(t)$


Amplitude [-]
Zeit [s]
$u_5(t)$
$y_5(t)$

Aufgabe 6: Wurzelortskurve (19 Punkte)

Gegeben ist eine instabile Regelstrecke mit folgender Übertragungsfunktion:

$$G_S(s) = \frac{1}{T_1 s - 1} \quad \text{mit} \quad T_1 > 0$$

Beachten Sie, dass eine Rechnung in den einzelnen Teilaufgaben nur dann nötig ist, wenn diese explizit gefordert ist.

a) Zur Stabilisierung des Systems soll ein PI-Regler eingeführt werden. Dieser besitzt die folgende Übertragungsfunktion:

$$G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \quad \text{mit} \quad T_i, K > 0$$

Zeichnen Sie ein Pol-Nullstellen-Diagramm und tragen Sie die Polstelle(n) und/oder Nullstelle(n) des offenen Regelkreises ein. Nehmen Sie dazu Werte für die Reglerparameter und die Zeitkonstante des Systems an.

Antwort:

Es existieren 2 Polstellen und 1 Nullstelle. Anhand der Vorgaben können die Bereiche, in denen sie liegen müssen, bestimmt werden.

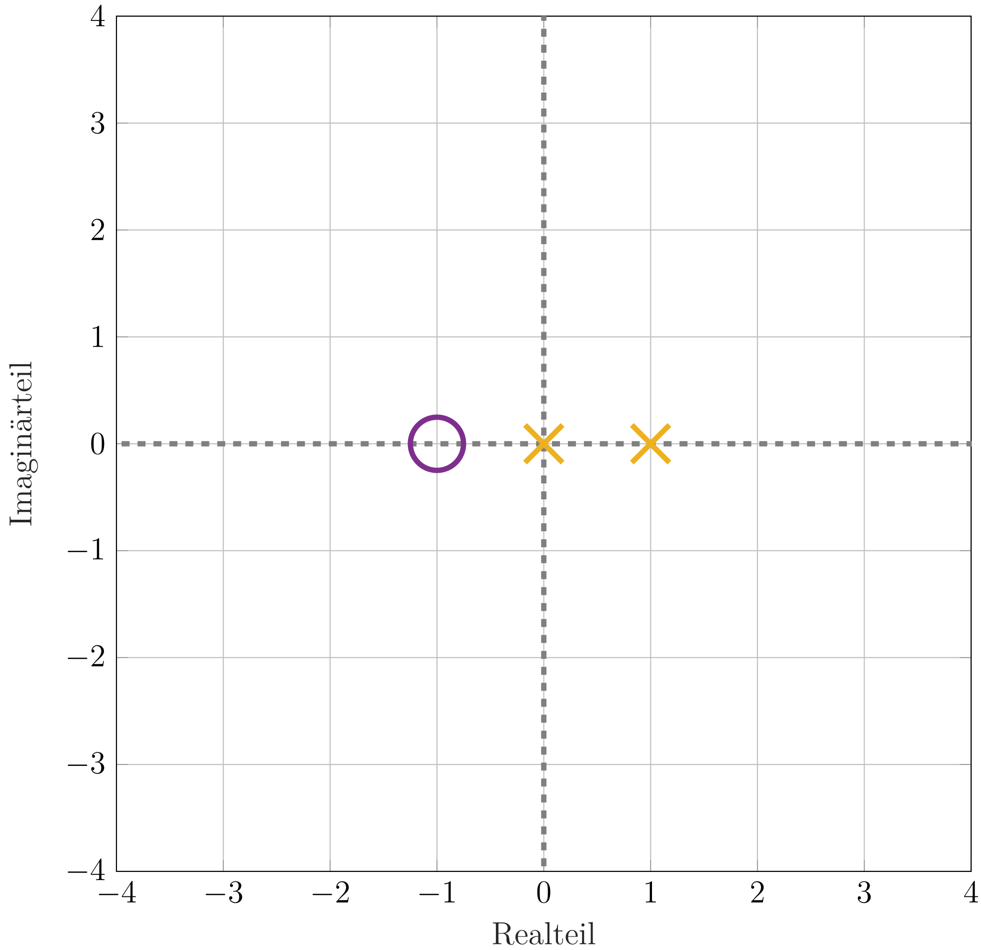
$G_o(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = K \cdot \frac{T_i s+1}{T_i s} \cdot \frac{\frac{1}{T_1}}{s-\frac{1}{T_1}}$

$p_1 = \frac{1}{T_1} > 0$

$p_2 = 0$

$n_1 = -1/T_i < 0$

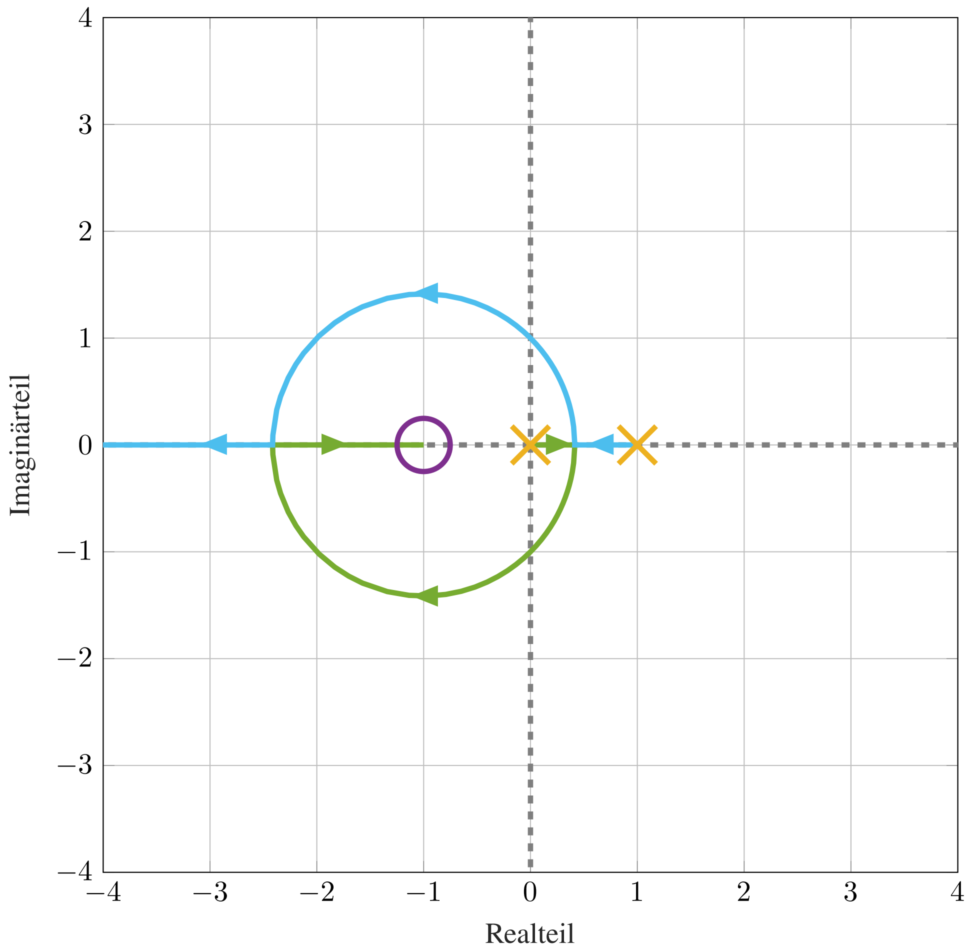
Mit $T_i = 1$ und $T_1 = 1$ ergeben sich die im folgenden Diagramm dargestellten Pol- und Nullstellen. Alle weiteren Pol- und Nullstellen, die den beschriebenen Anforderungen genügen, sind ebenfalls korrekt.



3

b) Zeichnen Sie nun die Wurzelortskurve des geschlossenen Regelkreises in das erstellte Pol-Nullstellen-Diagramm aus Aufgabenteil a). Achten Sie darauf, die Richtung, in der die Wurzelortskurve mit steigender Verstärkung läuft, eindeutig kenntlich zu machen.
Antwort:
Die Lösung der Wurzelortskurve kann folgendem Diagramm entnommen werden. Punkte werden für die drei folgenden Bereiche vergeben:

1) Auf der Realachse in der linken Halbebene
2) Kreisförmiger Bereich
3) Auf der Realachse in der rechten Halbebene

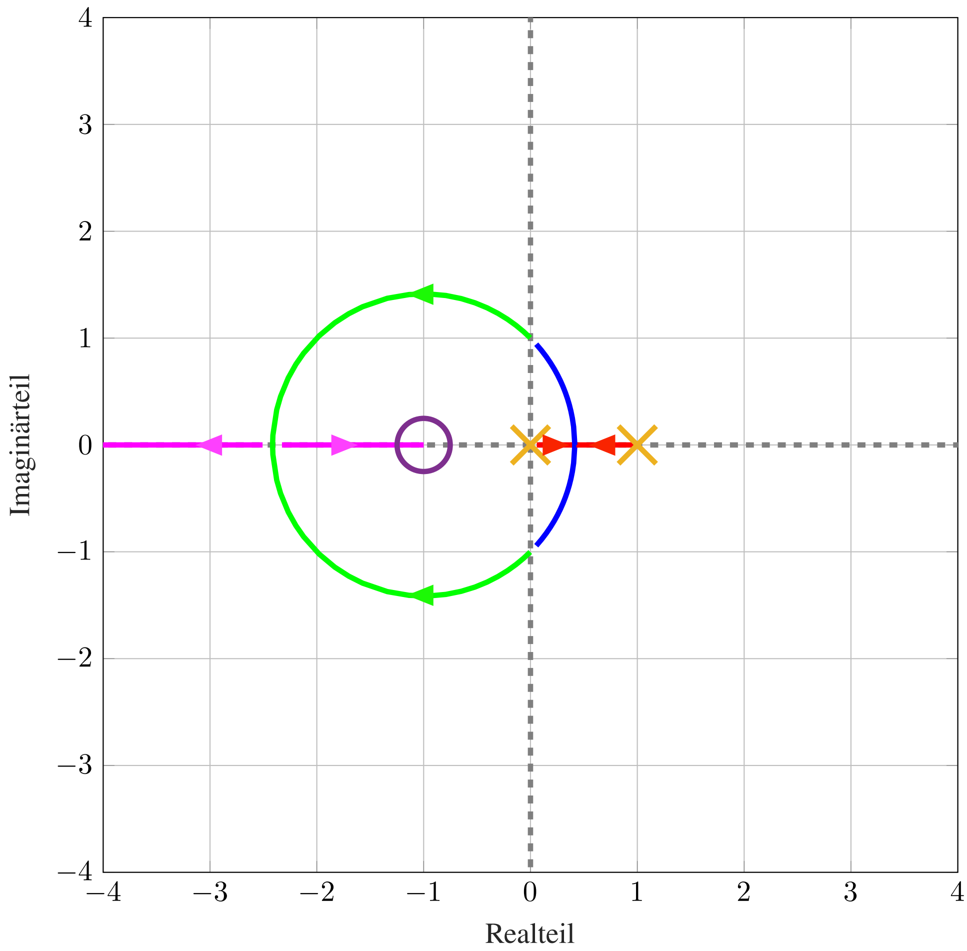


4

c) Unterteilen Sie die gezeichnete Wurzelortskurve in Abschnitte, in denen Kombinationen der Eigenschaften stabil/instabil und schwingungsfähig/nicht schwingungsfähig zutreffen. Benennen Sie die Eigenschaften der einzelnen Abschnitte.

Antwort:
Die Eigenschaften sind im folgenden Diagramm farblich markiert. Die verschiedenen Farben besitzen die folgenden Bedeutungen:

1) Rot: instabil & nicht schwingungsfähig
2) Blau: instabil & schwingungsfähig
3) Grün: stabil & schwingungsfähig
4) Pink: stabil & nicht schwingungsfähig



4

d) Für die Regelstrecke $G_S(s)$ und den Regler $G_R(s)$ werden nun folgende Werte vorgegeben:

$$T_1 = T_i = 1$$

Berechnen Sie nun die Wertebereiche der Reglerverstärkung K, in denen der geschlossene Regelkreis die in c) definierten Eigenschaften besitzt.

Antwort:
Es sind die Werte von K gesucht, in denen der geschlossene Regelkreis von stabil zu instabil wechselt und von schwingungsfähig zu nicht schwingungsfähig.

Stabilität kann z. B. über das Hurwitzkriterium bestimmt werden:

$$G_w = \frac{G_S \cdot G_R}{1 + G_S \cdot G_R} = \frac{K(s+1)}{s^2 + s(K-1) + K} = \frac{s+1}{\frac{1}{K}s^2 + \frac{K-1}{K}s + 1}$$

Für die Systemordnung $n = 2$ ist die notwendige auch die hinreichende Bedingung des Hurwitzkriteriums für Stabilität:

$$a_i > 0 \quad \forall \quad i = 1, ..., n \Rightarrow K > 1$$

Schwingungsfähigkeit kann über die Polstellen des geschlossenen Regelkreises bestimmt werden:

$$s^2 + s(K-1) + K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\left(\frac{K-1}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{K^2-2K+1}{4} - K}$$

Das System ist schwingungsfähig, wenn ein konjugiert komplexes Polpaar vorliegt. Dies ist der Fall, wenn der Term unter der Wurzel negativ wird:

$$\frac{K^2-2K+1}{4} - K = K^2 - 6K + 1 = 0 \Rightarrow K_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8}$$

ODER Schwingfähigkeit kann über Dämpfung bestimmt werden. Ein System 2. Ordnung ist dann schwingungsfähig wenn:

$$D < 1$$

Durch einen Koeffizientenvergleich kann die Dämpfung bestimmt werden.

$$\frac{1}{K}s^2 + \frac{K-1}{K} + 1 = T^2s^2 + 2DTs + 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2DT = \frac{K-1}{K} \qquad ,T^2 = \frac{1}{K}$$

eliminieren von T:

$$4D^2\frac{1}{K} = \frac{K^2-2K+1}{K^2}$$
$$4D^2K = K^2 - 2K + 1$$
$$K^2 - (2+4D^2)K + 1 = 0$$
$$\Rightarrow K_{1,2} = 1 + 2D^2 \pm \sqrt{4D^2 + 4D^4}$$

mit $D = 1$:

$$K_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8}$$

Damit lassen sich die 4 Bereiche in Abhängigkeit der Reglerverstärkung K definieren:

instabil	&	nicht schwingungsfähig:	$0 \leq K \leq 3 - \sqrt{8}$
instabil	&	schwingungsfähig:	$3 - \sqrt{8} < K < 1$
stabil	&	schwingungsfähig:	$1 < K < 3 + \sqrt{8}$
stabil	&	nicht schwingungsfähig:	$3 + \sqrt{8} \leq K$

$\boxed{8}$

$\boxed{\sum 19}$

Aufgabe 7: Strörgrößenaufschaltung (18 Punkte)

Um die zwei dynamischen Prozesse mit den Übertragungsfunktionen

$$G_{\mathrm{S},1}(s) = \frac{4}{1+2s}\,,$$
$$G_{\mathrm{S},2}(s) = \frac{s+3}{s+4}\,e^{-s}$$

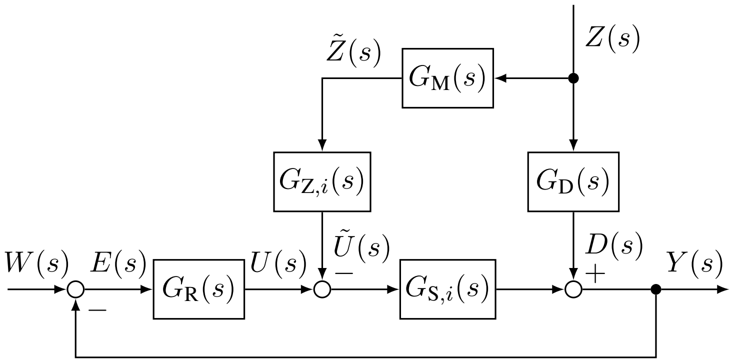
zu regeln wurde ein PI-Regler entworfen. Dieser hat die Übertragungsfunktion

$$G_{\mathrm{R}}(s) = \frac{1+s}{s}\,.$$

Da die beiden Prozesse sehr anfällig gegenüber der Störgröße $Z(s)$ sind, soll der bestehende Regelkreis um eine Störgrößenaufschaltung erweitert werden. Die Störübertragungsfunktion $G_{\mathrm{D}}(s)$ konnte bereits im Vorfeld zu

$$G_{\mathrm{D}}(s) = \frac{s+2}{s+1}\,e^{-s}$$

bestimmt werden. Zur Messung der Störgröße $Z(s)$ wird eine Messeinrichtung verwendet. In der folgenden Abbildung wird das Prinzip veranschaulicht.



Zunächst wird angenommen, dass es sich um eine ideale Messeinrichtung mit der Übertragungsfunktion $G_{\mathrm{M}}(s) = 1$ handelt.

a) Berechnen Sie für die beiden Streckenübertragungsfunktionen $G_{\mathrm{S},1}(s)$ und $G_{\mathrm{S},2}(s)$ die jeweilige ideale Störgrößenaufschaltung $G_{\mathrm{Z},i}(s)$.

Antwort:

$$G_{\mathrm{M}}(s)G_{\mathrm{Z}}(s) = \frac{G_{\mathrm{D}}(s)}{G_{\mathrm{S}}(s)}$$

$$G_{\mathrm{Z},i}(s) = \frac{G_{\mathrm{D}}(s)}{G_{\mathrm{S},i}(s)G_{\mathrm{M}}(s)}$$

$$G_{\mathrm{Z},1}(s) = \frac{\frac{s+2}{s+1}\,e^{-s}}{\frac{4}{1+2s}} = \frac{s+2}{s+1}\,\frac{2s+1}{4}\,e^{-s}$$

$$G_{\mathrm{Z},2}(s) = \frac{\frac{s+2}{s+1}\,e^{-s}}{\frac{s+3}{s+4}\,e^{-s}} = \frac{s+2}{s+1}\,\frac{s+4}{s+3}$$

$\boxed{5}$

b) Sind beide Störgrößenaufschaltungen aus Teilaufgabe a) realisierbar? Wenn nein, begründen Sie ihre Meinung und geben Sie eine dynamische und realisierbare Näherungslösungen an.

Antwort:

$G_{\mathrm{Z},1}(s)$ ist **nicht realisierbar**, da der Zählergrad ($m = 2$) größer ist als der Nennergrad ($n = 1$).
$G_{\mathrm{Z,1,real}}(s) = \dfrac{s+2}{s+1}\,\dfrac{2s+1}{4(Ts+1)}\,e^{-s}$, mit $T > 0$
($T = 0.1$ oder $T = 0.5$, schneller Pol hinzufügen oder schnellste NS kürzen)

$G_{\mathrm{Z},2}(s)$ ist **realisierbar**. 3

Für die Messeinrichtung gilt nun folgende Übertragungsfunktion:

$$G_{\mathrm{M}}(s) = e^{-s}.$$

c) Bestimmen Sie für die neue Messeinrichtung erneut die jeweilige ideale Störgrößenaufschaltung $G_{\mathrm{Z},i}(s)$. Falls die Störgrößenaufschaltung nicht realisierbar ist, geben Sie auch hier eine dynamische und realisierbare Näherungslösung an.

Antwort:

$$\begin{aligned}
G_{\mathrm{M}}(s)G_{\mathrm{Z}}(s) =& \frac{G_{\mathrm{D}}(s)}{G_{\mathrm{S}}(s)}\\
G_{\mathrm{Z},i}(s) =& \frac{G_{\mathrm{D}}(s)}{G_{\mathrm{S},i}(s)G_{\mathrm{M}}(s)}\\
G_{\mathrm{Z},1}(s) =& \frac{\frac{s+2}{s+1}\,e^{-s}}{\frac{4}{1+2s}\,e^{-s}} = \frac{s+2}{s+1}\frac{2s+1}{4}\\
G_{\mathrm{Z},2}(s) =& \frac{\frac{s+2}{s+1}\,e^{-s}}{\frac{s+3}{s+4}\,e^{-s}\,e^{-s}} = \frac{s+2}{s+1}\frac{s+4}{s+3}\,e^{s}\\
G_{\mathrm{Z,1,real}}(s) =& \frac{s+2}{s+1}\frac{2s+1}{4(Ts+1)} \qquad \text{, mit } T > 0\\
& (T = 0.1 \text{ oder } T = 0.5,\ \text{schneller Pol hinzufügen oder schnellste NS kürzen})\\
G_{\mathrm{Z,2,real}}(s) =& \frac{s+2}{s+1}\frac{s+4}{s+3} \qquad \text{, da keine } \textbf{negative Totzeit} \text{ möglich: ohne Totzeit}
\end{aligned}$$

6

d) Erläutern Sie den Einfluss der Störgrößenaufschaltung auf die Stabilität des geschlossenen Regelkreises.

Antwort:

Bei der Störgrößenaufschaltung wird die Stabilität des Regelkreises **nicht beeinflusst**, da es sich um eine **Steuerung** handelt. 1

e) Kann durch eine Vorsteuerung oder eine Kaskadenregelung die Stabilität des geschlossenen Regelkreises beeinflusst werden? Begründen Sie ihre Aussage.

Antwort:

Bei der **Vorsteuerung** wird die Stabilität des Regelkreises **nicht beeinflusst**, da es sich ebenfalls um eine **Steuerung** handelt.

Bei der **Kaskadenregelung** wird die Stabilität des Regelkreises **beeinflusst**, da es eine **zusätzliche Rückkopplung** gibt. 3

$\sum 18$