Prüfungsklausur Mess- und Regelungstechnik 2 (MRT2)

Prof. Dr.-Ing. O. Nelles
Institut für Mechanik und Regelungstechnik
Universität Siegen

18. September 2012

Name:	Punkte	A1	A2	A3	A4	A5	Ges.
Mat.-Nr.:	Soll:	20	30	24	8	18	100
Note:	Ist:						

Aufgabe 1: Verständnisfragen

Bei den nachfolgenden Fragen sind die richtigen Antworten deutlich zu kennzeichnen.
Jede Frage hat entweder eine oder zwei richtige Antworten!
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Wird bei einer Frage eine richtige und eine falsche Antwort angekreuzt, gibt es für diese Frage keinen Punkt.

a) Welche der nachfolgenden Paare aus Regelstrecken $G_S(s)$ und Vorsteuerungen $G_V(s)$ sind sinnvoll:
- ☐ $G_S(s) = \frac{5}{(1+s)^3}$, $G_V(s) = \frac{(s+1)^3}{5(1+Ts)^3}$ (T möglichst klein wählen).
- ☐ $G_S(s) = \frac{2(1-s)}{(s+1)(s+2)}$, $G_V(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{2(1+Ts)^2}$ (T möglichst klein wählen).
- ☐ $G_S(s) = \frac{2(1-s)}{(s+1)(s+2)}$, $G_V(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{2(1-s)(1+Ts)}$ (T möglichst klein wählen).

b) Bei der Regleroptimierung wird eine zu minimierende Verlustfunktion verwendet, die einen Gewichtungsfaktor r für die Stellgröße enthält. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
- ☐ Für große r ergibt sich ein Regler, der einen größeren Regelfehler in Kauf nimmt, um größere Stellgrößen zu erzielen.
- ☐ Wählt man $r = 0$, ergibt sich unter Umständen keine sinnvolle Lösung des Optimierungsproblems (Stellgröße $u(t) \to \infty$) .
- ☐ Kleinere Werte von r machen die Regelung schneller und vergrößern gleichzeitig die Stellgröße.

c) Warum werden bei Reglern mit I-Anteil Anti-Windup-Verfahren verwendet?
- ☐ Sie verhindern, dass die maximal zulässige Stellgröße erreicht wird.
- ☐ Sie ermöglichen ein stoßfreies Umschalten zwischen Regelung und Handbetrieb.
- ☐ Sie verbessern das Regelverhalten bei Strecken mit Stellgrößenbeschränkungen.

d) Was sind Eigenschaften der prädiktiven Regelung?

- [ ] Sie kann nur bei linearen Systemen ohne Stellgrößenbeschränkungen verwendet werden.
- [ ] Sie sagt mit Hilfe eines Modells den zukünftigen Regelgrößenverlauf voraus und bestimmt durch Optimierung eine geeignete Stellgrößenfolge.
- [ ] Sie benötigt kein Streckenmodell, verursacht einen sehr geringen Rechenaufwand und ist daher insbesondere für sehr schnelle Regelstrecken geeignet.

e) Was gilt für Entkopplungsglieder bei Mehrgrößenregelungen?

- [ ] Wenn sich eine perfekte Entkopplung nicht realisieren lässt, besteht zumindest die Möglichkeit die Entkopplungsglieder näherungsweise zu realisieren.
- [ ] Die Entkopplung einer P-Kanonischen Strecke ist nur mit einem P-Kanonischen Regler möglich.
- [ ] Wird eine P-kanonische Strecke mit einem V-Kanonischen Regler geregelt, ergeben sich besonders einfache Gleichungen für die entkoppelten Regelkreise.

f) Der Smith-Prädiktor sorgt dafür, dass ...

- [ ] auch bei Regelstrecken mit Totzeit stets die Regelgröße der Führungsgröße ohne Zeitverschiebung folgt.
- [ ] auch bei Regelstrecken mit Totzeit hohe Reglerverstärkungen gewählt werden können, ohne dass es zur Instabilität zukommt.
- [ ] Regelstrecken mit Totzeit zwar besser geregelt werden können, dabei bleibt aber trotzdem die Totzeit im Ein-/Ausgangsverhalten erhalten.

g) Wie kann eine statische Nichtlinearität (Kennlinie) des Stellgliedes kompensiert werden?

- [ ] Durch Aufschalten der gleichen Kennlinie auf den Reglerausgang.
- [ ] Gar nicht.
- [ ] Durch Aufschalten der inversen Kennlinie auf den Reglerausgang.

h) Die Zustandsgleichungen eines Systems $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c^T})$ sollen transformiert werden. Was ist zu beachten?

- [ ] Wenn das System zustandssteuerbar ist, kann es in die Regelungsnormalform transformiert werden.
- [ ] Das System lässt sich stets in Diagonalform transformieren.
- [ ] Die Transformation erfolgt durch die Multiplikation des Zustandsvektors mit einer quadratischen Matrix. Die Rücktransformation erfolgt durch die Multiplikation mit der Inversen dieser Matrix.

i) Welche(s) dieser Systeme sind (ist) nichtlinear?

- [ ] $\ddot{y}(t) + 2D\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2 u(t)$.
- [ ] $G(s) = e^{-T_t \cdot s}$ (Totzeitglied).
- [ ] $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}^2(t) + 3y(t) = 4u(t)$.

j) Was versteht man unter der Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit?

- ☐ Diese Eigenschaften sind eng miteinander verwandt. Wenn z.B. ein System $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^T$ steuerbar ist, dann ist das System $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}^T$ beobachtbar.
- ☐ Ein steuerbares System ist stets auch beobachtbar.
- ☐ Wenn man einen Zustandsbeobachter entworfen hat, kann man diesen gleichzeitig auch als Zustandsregler verwenden.

k) Was gilt für die Empfindlichkeitsfunktion?

- ☐ Empfindlichkeitsfunktionen treten nur bei nichtlinearen Systemen auf.
- ☐ Die Empfindlichkeitsfunktion addiert sich mit der Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ stets zu 1.
- ☐ Sie ist identisch zur Übertragungsfunktion zwischen Führungsgröße und Regelabweichung.

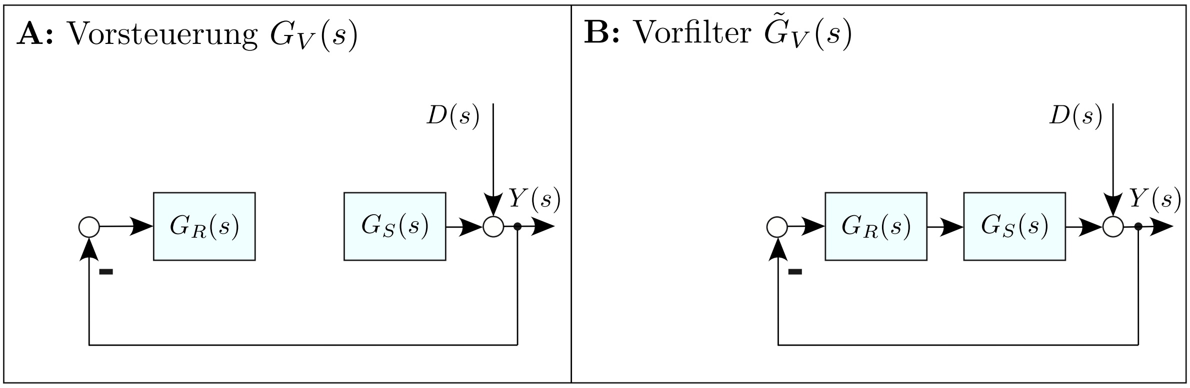
l) Ein sehr einfacher Reglertyp ist der Zweipunktregler mit Hysterese. Welche Eigenschaften hat er?

- ☐ Es handelt sich um einen linearen Regler.
- ☐ Die Regelung schwankt immer um den Sollwert, die Schwankungsbreite wird mit der Hysteresebreite eingestellt.
- ☐ Er ist ideal geeignet, wenn die Regelgröße asymptotisch den Sollwert erreichen soll.

m) Was ist der Wasserbetteffekt?

- ☐ Der Begriff beschreibt anschaulich die Auswirkungen des sogenannten *Gleichgewichtstheorems* von Bode.
- ☐ Er beschreibt eine Besonderheit im Schwingungsverhalten von nichtlinearen Systemen.
- ☐ Er besagt, dass ab einem Polüberschuss von 2 jede Verbesserung im Gegenkopplungsbereich einer Regelung zwangsläufig zu einer Verschlechterung im Mitkopplungsbereich führt.

Aufgabe 2: **Vorsteuerung und Vorfilter**



Aufgabenteile b) und c) sind unabhängig voneinander lösbar!

a) Ergänzen Sie die Blockschaltbilder um die fehlenden Bestandteile (Blöcke, Pfeile, Bezeichnungen), die für die Realisierung eines Regelkreises mit Vorsteuerung (A) bzw. mit Vorfilter (B) nötig sind.

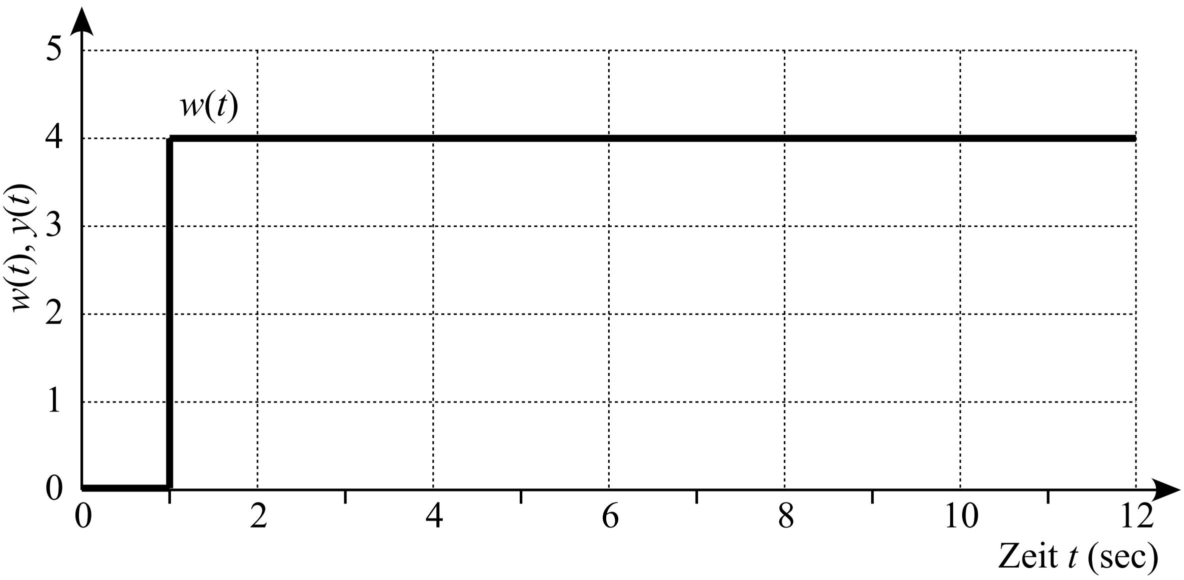
b) Die Streckenübertragungsfunktion für den Regelkreis mit Vorsteuerung (A) lautet:

$$G_S(s) = \frac{2}{1 + 10s}$$

Das System reagiert zu langsam und soll deshalb auf ein gewünschtes Führungsverhalten $G_W(s) = \frac{1}{1+2s}$ gebracht werden.

1) Ermitteln Sie die für diese Aufgabe nötige Vorsteuerung $G_V(s)$ (dazu wird angenommen, dass die Regelung unwirksam ist $G_R(s) = 0$). **Begründen** Sie kurz, warum die Vorsteuerung realisierbar ist.

2) Skizzieren Sie qualitativ die Antwort $y(t)$ des vorgesteuerten Systems auf einen Führungssprung $w(t) = 4\sigma(t-1)$ in das vorbereitete Diagramm.



c) Für den Regelkreis mit Vorfilter (B) sind folgende Strecke $G_S(s)$ und folgender Regler $G_R(s)$ gegeben:

$$G_S(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2}, \qquad G_R(s) = K_R$$

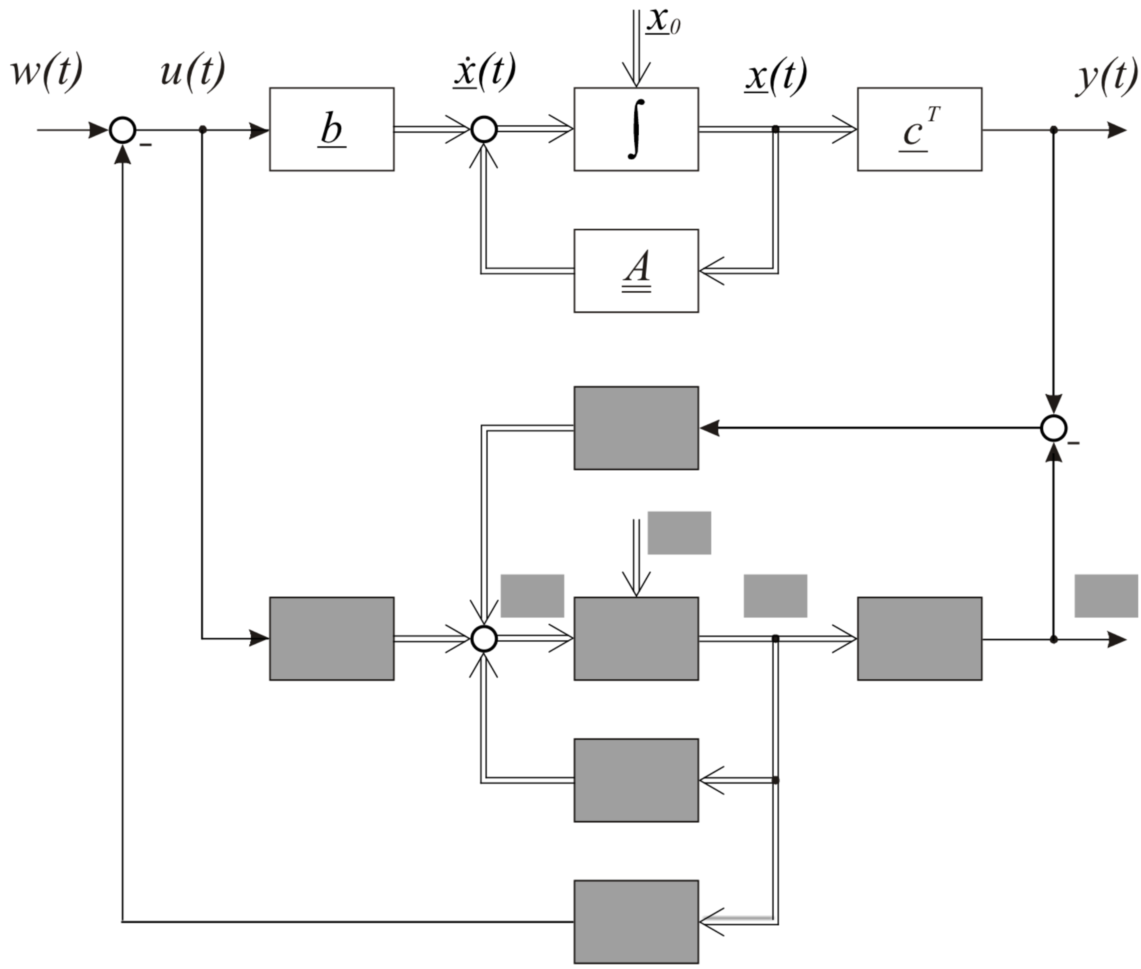
Zunächst soll der Regler für ein geeignetes Störverhalten entworfen und anschließend das Führungsverhalten durch einen Vorfilter $\tilde{G}_V$ verbessert werden.

1) Wie lautet der verwendete Reglertyp und warum ist nicht zu erwarten, dass damit der Regelfehler $e(t \to \infty)$ bei einem Führungs- oder Störsprung exakt auf Null gebracht werden kann. Kurze **Begründung**!
2) Bestimmen Sie mit Hilfe der Störübertragungsfunktion $G_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)}$ den Regler K_R so, dass bei einem Störsprung $d(t) = \sigma(t)$ die Regelgröße $y(t \to \infty) = 0{,}2$ beträgt. Zeigen Sie, dass der Regelkreis mit diesem K_R stabil ist.
3) Nehmen Sie $K_R = 4$ an und berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$. Durch die Regelung ist eine unerwünschte Nullstelle in $G_W(s)$ entstanden. Bestimmen Sie einen Vorfilter $\tilde{G}_V$ der die Nullstelle entfernt und dafür sorgt, dass der vorgefilterte Regelkreis die Verstärkung 1 hat.

Aufgabe 3: Zustandsraum mit Beobachter

Hinweis: Die einzelnen Teilaufgaben können unabhängig von einander bearbeitet werden.

a) Ergänzen Sie das Blockschaltbild um die fehlenden, grau hinterlegten Signale und Übertragungsfunktionen.



b) Wann ist es notwendig, einen Zustandsbeobachter zu verwenden? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus?

Für die folgenden Teilaufgaben verwenden Sie bitte:

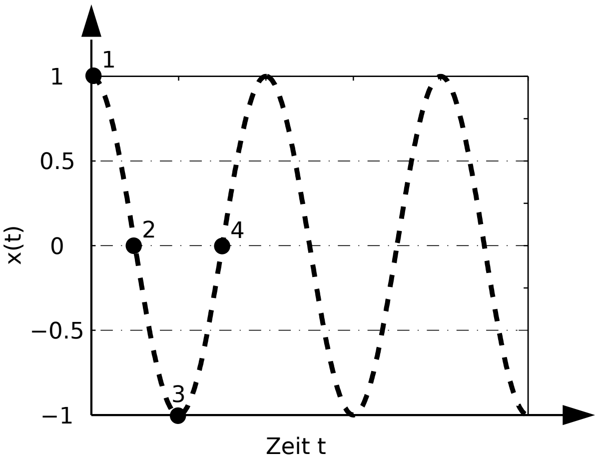
$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \ \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \underline{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \ d = 0.$$

c) Überprüfen Sie, ob das System vollständig zustandsbeobachtbar ist.
Tipp: Leiten Sie zunächst die Beobachtbarkeitsmatrix $\underline{\underline{S}}_B$ her.

d) Berechnen Sie den Rückkopplungsvektor $\underline{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ des Beobachters, welcher alle Pole bei $s = -4$ hat.

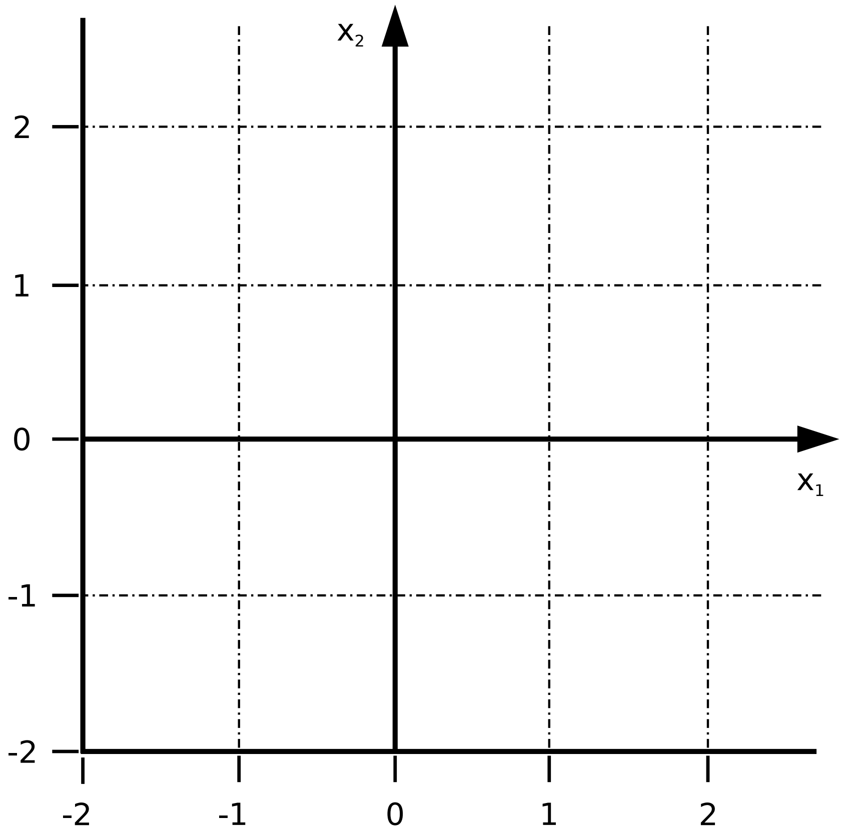
Aufgabe 4: Zustandsebene

Gegeben ist die Funktion $x(t) = \cos(\omega \cdot t)$ mit $\omega = 1\frac{rad}{sec}$:



Es gilt: $x_1 = x(t)$ und $x_2 = \dot{x}(t)$

a) Zeichnen Sie qualitativ den Zeitverlauf in die gegebene Zustandsebene ein. Geben Sie die Richtung der Laufvariablen an! **Tipp:** Übertragen Sie zunächst die Punkte 1 bis 4 in die Zustandsebene.



b) Was verändert sich bezüglich des Zustandes x_2, wenn $\omega = 2\frac{rad}{sec}$ gilt?

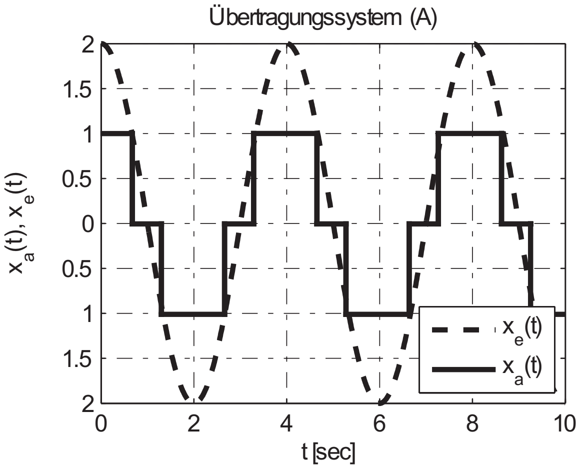
c) Zeichnen Sie qualitativ den veränderten Zeitverlauf in die gegebene Zustandsebene ein.

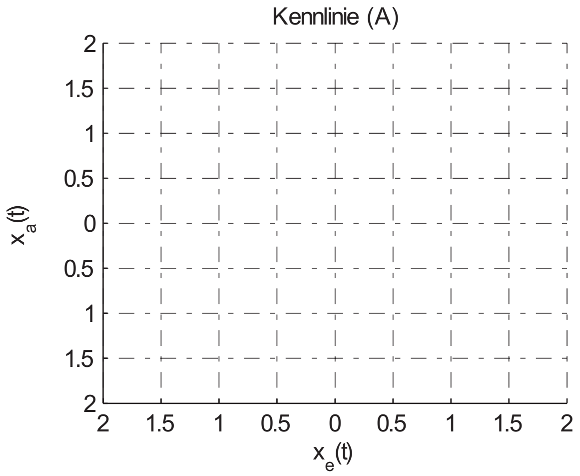
Aufgabe 5: Nichtlineare Kennlinien

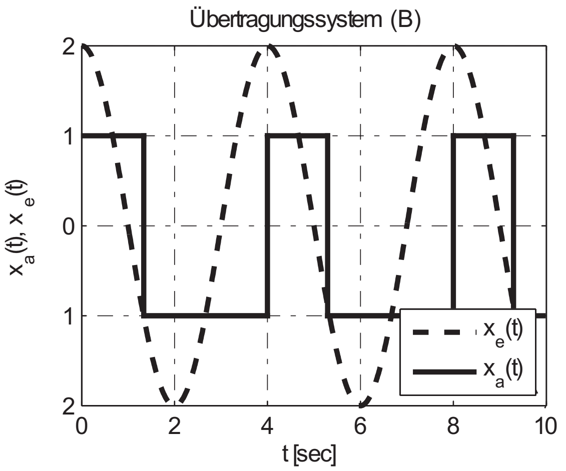
Gegeben sind drei Übertragungssysteme (A) bis (C).

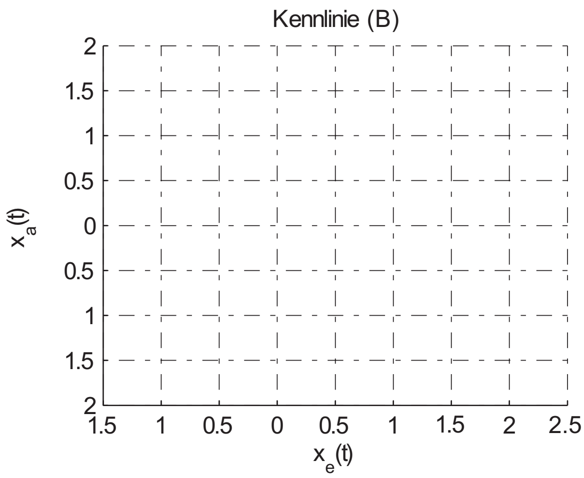
Hinweis: Die Aufgabenteile *a*) und *b*) können unabhängig voneinander bearbeitet werden!

a) Zeichnen Sie mithilfe der Eingangs- und Ausgangssignale $x_e(t)$ und $x_a(t)$ die Kennlinien der Übertragungssysteme (A) und (B) in die dazugehörigen, vorbereiteten Diagramme. Beurteilen Sie jeweils, ob die Kennlinie eindeutig oder mehrdeutig ist.

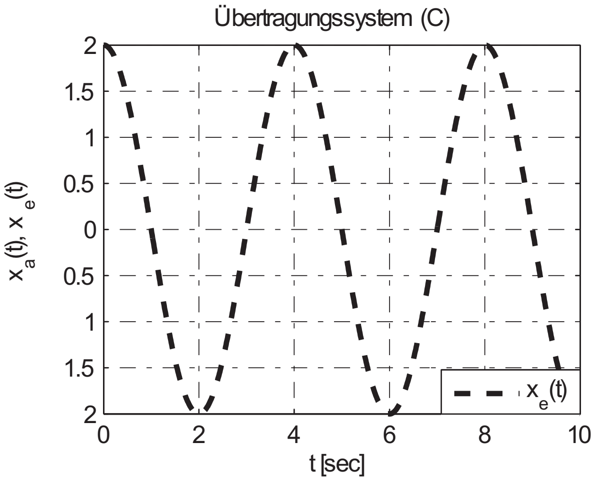


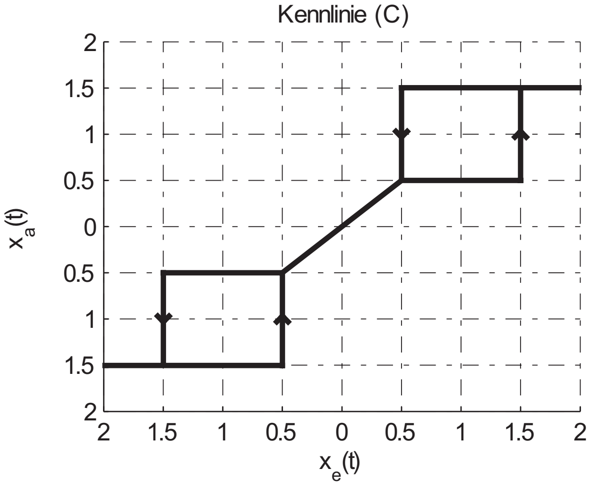






b) Ergänzen Sie für das Übertragungssystem (C) das Ausgangssignal $x_a(t)$ mithilfe des gegebenen Eingangssignal $x_e(t)$ und der Kennlinie (C).





Lösungen:

Aufgabe 1: Verständnisfragen

a) Welche der nachfolgenden Paare aus Regelstrecken $G_S(s)$ und Vorsteuerungen $G_V(s)$ sind sinnvoll:

- ■ $G_S(s) = \frac{5}{(1+s)^3}$, $G_V(s) = \frac{(s+1)^3}{5(1+Ts)^3}$ (T möglichst klein wählen).
- ■ $G_S(s) = \frac{2(1-s)}{(s+1)(s+2)}$, $G_V(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{2(1+Ts)^2}$ (T möglichst klein wählen).
- □ $G_S(s) = \frac{2(1-s)}{(s+1)(s+2)}$, $G_V(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{2(1-s)(1+Ts)}$ (T möglichst klein wählen).

b) Bei der Regleroptimierung wird eine zu minimierende Verlustfunktion verwendet, die einen Gewichtungsfaktor r für die Stellgröße enthält. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- □ Für große r ergibt sich ein Regler, der einen größeren Regelfehler in Kauf nimmt, um größere Stellgrößen zu erzielen.
- ■ Wählt man $r = 0$, ergibt sich unter Umständen keine sinnvolle Lösung des Optimierungsproblems (Stellgröße $u(t) \to \infty$) .
- ■ Kleinere Werte von r machen die Regelung schneller und vergrößern gleichzeitig die Stellgröße.

c) Warum werden bei Reglern mit I-Anteil Anti-Windup-Verfahren verwendet?

- □ Sie verhindern, dass die maximal zulässige Stellgröße erreicht wird.
- □ Sie ermöglichen ein stoßfreies Umschalten zwischen Regelung und Handbetrieb.
- ■ Sie verbessern das Regelverhalten bei Strecken mit Stellgrößenbeschränkungen.

d) Was sind Eigenschaften der prädiktiven Regelung?

- □ Sie kann nur bei linearen Systemen ohne Stellgrößenbeschränkungen verwendet werden.
- ■ Sie sagt mit Hilfe eines Modells den zukünftigen Regelgrößenverlauf voraus und bestimmt durch Optimierung eine geeignete Stellgrößenfolge.
- □ Sie benötigt kein Streckenmodell, verursacht einen sehr geringen Rechenaufwand und ist daher insbesondere für sehr schnelle Regelstrecken geeignet.

e) Was gilt für Entkopplungsglieder bei Mehrgrößenregelungen?

- ■ Wenn sich eine perfekte Entkopplung nicht realisieren lässt, besteht zumindest die Möglichkeit die Entkopplungsglieder näherungsweise zu realisieren.
- □ Die Entkopplung einer P-Kanonischen Strecke ist nur mit einem P-Kanonischen Regler möglich.
- ■ Wird eine P-kanonische Strecke mit einem V-Kanonischen Regler geregelt, ergeben sich besonders einfache Gleichungen für die entkoppelten Regelkreise.

f) Der Smith-Prädiktor sorgt dafür, dass ...

- ☐ auch bei Regelstrecken mit Totzeit stets die Regelgröße der Führungsgröße ohne Zeitverschiebung folgt.
- ■ auch bei Regelstrecken mit Totzeit hohe Reglerverstärkungen gewählt werden können, ohne dass es zur Instabilität zukommt.
- ■ Regelstrecken mit Totzeit zwar besser geregelt werden können, dabei bleibt aber trotzdem die Totzeit im Ein-/Ausgangsverhalten erhalten.

g) Wie kann eine statische Nichtlinearität (Kennlinie) des Stellgliedes kompensiert werden?

- ☐ Durch Aufschalten der gleichen Kennlinie auf den Reglerausgang.
- ☐ Gar nicht.
- ■ Durch Aufschalten der inversen Kennlinie auf den Reglerausgang.

h) Die Zustandsgleichungen eines Systems $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c^T})$ sollen transformiert werden. Was ist zu beachten?

- ■ Wenn das System zustandssteuerbar ist, kann es in die Regelungsnormalform transformiert werden.
- ☐ Das System lässt sich stets in Diagonalform transformieren.
- ■ Die Transformation erfolgt durch die Multiplikation des Zustandsvektors mit einer quadratischen Matrix. Die Rücktransformation erfolgt durch die Multiplikation mit der Inversen dieser Matrix.

i) Welche(s) dieser Systeme sind (ist) nichtlinear?

- ☐ $\ddot{y}(t) + 2D\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2 u(t)$.
- ☐ $G(s) = e^{-T_t \cdot s}$ (Totzeitglied).
- ■ $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}^2(t) + 3y(t) = 4u(t)$.

j) Was versteht man unter der Dualität von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit?

- ■ Diese Eigenschaften sind eng miteinander verwandt. Wenn z.B. ein System $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^T$ steuerbar ist, dann ist das System $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}^T$ beobachtbar.
- ☐ Ein steuerbares System ist stets auch beobachtbar.
- ☐ Wenn man einen Zustandsbeobachter entworfen hat, kann man diesen gleichzeitig auch als Zustandsregler verwenden.

k) Was gilt für die Empfindlichkeitsfunktion?

- ☐ Empfindlichkeitsfunktionen treten nur bei nichtlinearen Systemen auf.
- ■ Die Empfindlichkeitsfunktion addiert sich mit der Führungsübertragungsfunktion $G_W(s)$ stets zu 1.
- ■ Sie ist identisch zur Übertragungsfunktion zwischen Führungsgröße und Regelabweichung.

l) Ein sehr einfacher Reglertyp ist der Zweipunktregler mit Hysterese. Welche Eigenschaften hat er?

- [ ] Es handelt sich um einen linearen Regler.
- [x] Die Regelung schwankt immer um den Sollwert, die Schwankungsbreite wird mit der Hysteresebreite eingestellt.
- [ ] Er ist ideal geeignet, wenn die Regelgröße asymptotisch den Sollwert erreichen soll.

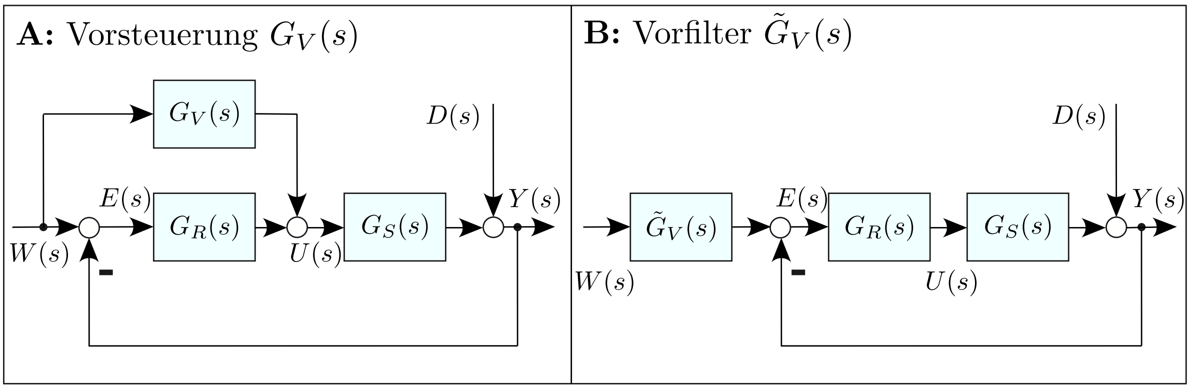
m) Was ist der Wasserbetteffekt?

- [x] Der Begriff beschreibt anschaulich die Auswirkungen des sogenannten *Gleichgewichtstheorems* von Bode.
- [ ] Er beschreibt eine Besonderheit im Schwingungsverhalten von nichtlinearen Systemen.
- [x] Er besagt, dass ab einem Polüberschuss von 2 jede Verbesserung im Gegenkopplungsbereich einer Regelung zwangsläufig zu einer Verschlechterung im Mitkopplungsbereich führt.

$\sum$ 20

Aufgabe 2: Vorsteuerung und Vorfilter

a) Vervollständigte Blockschaltbilder:



3

2

b) Entwurf der Vorsteuerung:

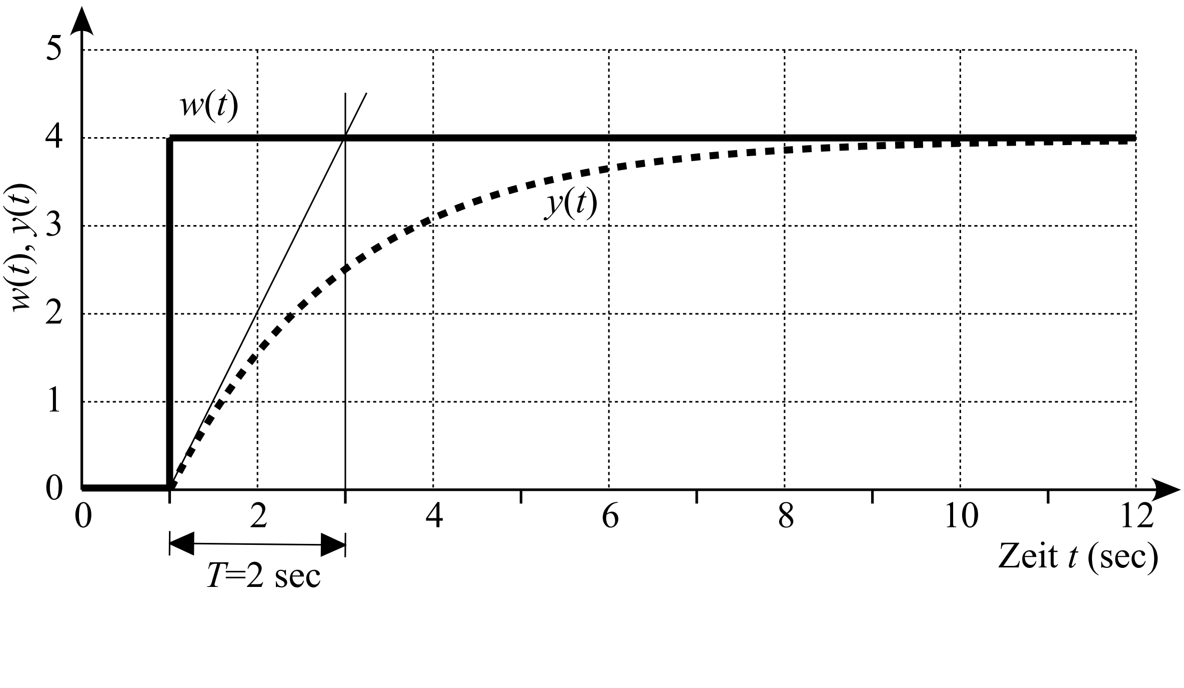
1) Unter der Annahme $G_R(s) = 0$ ergibt sich eine herkömmliche Steuerung. Es gilt daher:

$$Y(s) = G_V(s) \cdot G_S(s) \cdot W(s) \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{W(s)} = G_V(s) \cdot G_S(s) = G_W(s) \stackrel{!}{=} \frac{1}{1+2s}$$

$$\Rightarrow G_V(s) \cdot \frac{2}{1+10s} = \frac{1}{1+2s} \Leftrightarrow \boxed{G_V(s) = \frac{1+10s}{2(1+2s)}}$$ 3

Das Vorsteuerglied $G_V(s)$ ist realisierbar, da die **Zählerordung nicht größer ist als die Nennerordnung**. 1

2) Skizze der Antwort $y(t)$ des vorgesteuerten Systems auf einen Führungssprung $w(t) = 4\sigma(t-1)$:



4

c) Entwurf des Reglers und des Vorfilters für Blockschaltbild B:

1) Reglertyp: Der Regler ist ein **P-Regler** (Proportionalregler). Da sowohl Regler als auch Regelstrecke **keinen I-Anteil** haben, kann eine sprungartige Führungs- oder Störgröße nicht vollständig ausgeregelt werden. 1 1

2) Für die Störübertragungsfunktion $G_D(s)$ des Standardregelkreises gilt:

$$G_0(s) = \frac{Z}{N} = G_R(s) \cdot G_S(s), \quad G_D(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{1}{1+\frac{Z}{N}} = \frac{N}{Z+N}$$

Mit: $G_0(s) = \dfrac{K_R(2s+1)}{(s+1)^2}$

$$\Rightarrow G_D(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2 + K_R(2s+1)} = \boxed{\frac{(s+1)^2}{s^2+(2+2K_R)s+1+K_R}}$$ 4

Aus dem Endwertsatz und der Bedingung $y(t\to\infty) = 0{,}2$ für einen Störsprung $D(s) = \frac{1}{s}$ errechnet man K_R wie folgt:

$$Y(s) = G_D(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{(s+1)^2}{s(s^2+(2+2K_R)s+1+K_R)}$$

$$y(t\to\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}(s+1)^2}{\cancel{s}(s^2+(2+2K_R)s+1+K_R)}$$

$$\Rightarrow y(t\to\infty) = \frac{(0+1)^2}{0+0+1+K_R} = \frac{1}{1+K_R} \overset{!}{=} 0{,}2$$

$$\Rightarrow 1 = 0{,}2 + 0{,}2K_R \Leftrightarrow 0{,}8 = 0{,}2K_R \Leftrightarrow \boxed{K_R = 4}$$ 3

Mit $K_R = 4$ lautet die charakteristische Gleichung (ermittelt aus dem Nennerpolynom von $G_D(s)$):

$$s^2 + (2+2K_R)s + 1 + K_R = 0 \Rightarrow s^2 + 10s + 5 = 0$$

Da alle Koeffizienten gleiches (positives) Vorzeichen haben, ist der Regelkreis **stabil** (Hurwitz-Kriterium für Systeme 2. Ordnung). 1

3) Berechnung der Führungsübertragungsfunktion:

$$G_0(s) = \frac{Z}{N} = G_R(s) \cdot G_S(s), \quad G_W(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{\frac{Z}{N}}{1+\frac{Z}{N}} = \frac{Z}{Z+N}$$

$$G_0(s) = \frac{4(2s+1)}{(s+1)^2} \Rightarrow \boxed{G_W(s) = \frac{8s+4}{s^2+10s+5}}$$ 4

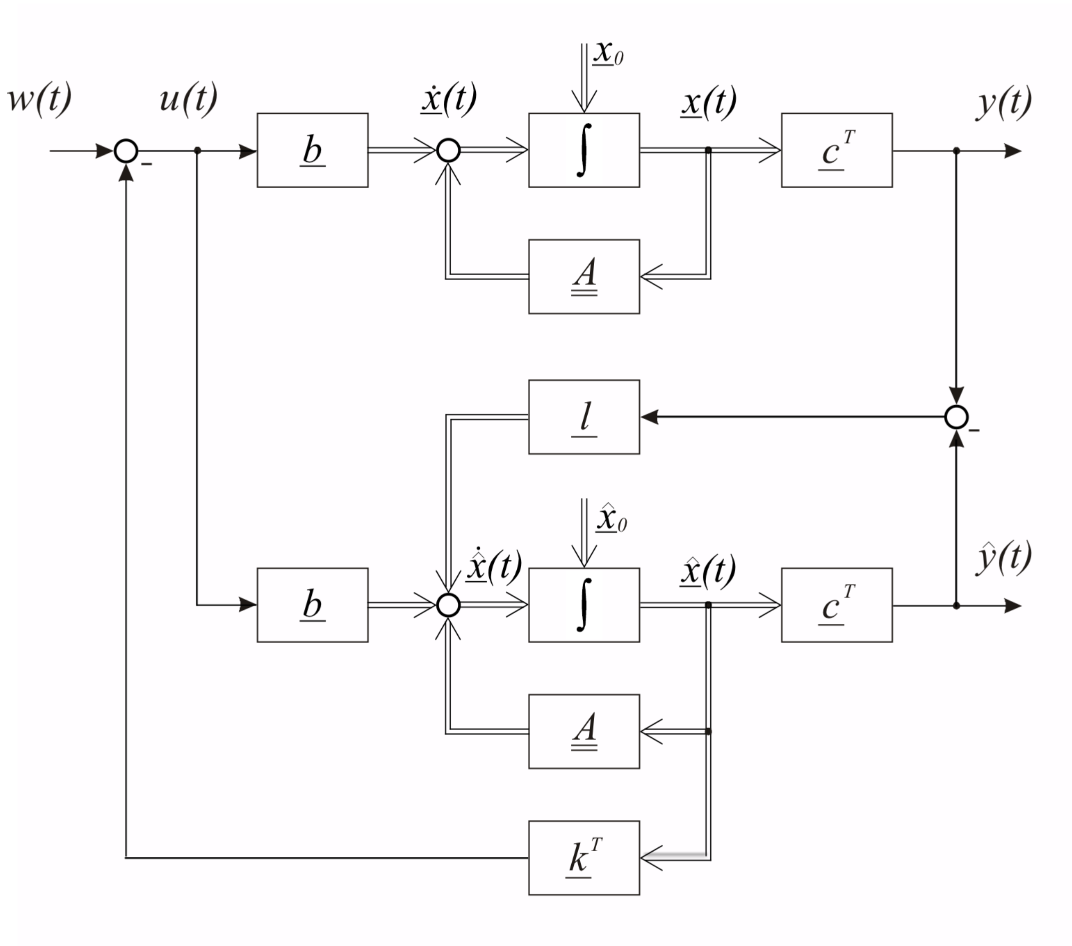
Berechnung des Vorfilters $\tilde{G}_V$ der die Nullstelle entfernt und Verstärkung 1 erzeugt:

$$\tilde{G}_V(s) \cdot \frac{8s+4}{s^2+10s+5} \overset{!}{=} \frac{5}{s^2+10s+5} \Leftrightarrow \boxed{\tilde{G}_V(s) = \frac{5}{8s+4}}$$ 3

$\sum 30$

Aufgabe 3: Zustandsraum

a) Das ergänzte Blockschaltbild:



10

b) Es ist notwendig einen Zustandsbeobachter zu verwenden, wenn man nicht alle Zustände messbar sind. Die Garantie eines Phasenrandes von mindestens 60° ist nicht mehr gegeben. 4

c) Herleiten der Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_B$:

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{c^T} \\ \mathbf{c^T} \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} .$$ 1

Nun muss mithilfe der Determinante der Rank der Matrix bestimmt werden:

$$\det(\mathbf{S}_B) = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(\mathbf{S}_B) = 2 .$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix besitzt somit vollen Rang und folglich ist das System vollständig beobachtbar. . 1

d) Löst man die Beobachtergleichung nach $\hat{\mathbf{x}}$ auf erhält man die charakteristische Gleichung:

$$\det\left(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{l} \cdot \mathbf{c}^T\right) = 0 .$$ 1

Diese muss man auflösen und mit dem gewünschten Polynom gleichsetzen, um mittels Koeffizientenvergleiches die Parameter l_1 und l_2 zu bestimmen. Zunächst muss das Polynom der charakteristischen Gleichung berechnet werden:

$$\det\left(s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{l} \cdot \mathbf{c}^T\right) = \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & l_1 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & l_1-1 \\ 3 & s+2+l_2 \end{bmatrix}\right) = (s+1)\cdot(s+2+l_2) - 3\cdot(l_1-1)$$ 4

$$= s^2 + (3+l_2)\cdot s + 5 - 3\cdot l_1 + l_2 = 0 \; .$$

Das gewünschte Polynom lautet:

$$(s+4)^2 = s^2 + 8\cdot s + 16 = 0 \; .$$ 1

Anschließen erfolgt der Koeffizientenvergleich:

$$8 = 3 + l_2 \Rightarrow l_2 = 5 \; ,$$ 1

und

$$16 = 5 - 3\cdot l_1 + l_2 = 10 - 3\cdot l_1 \Rightarrow 6 = -3\cdot l_1 \Rightarrow l_1 = -2 \; .$$ 1

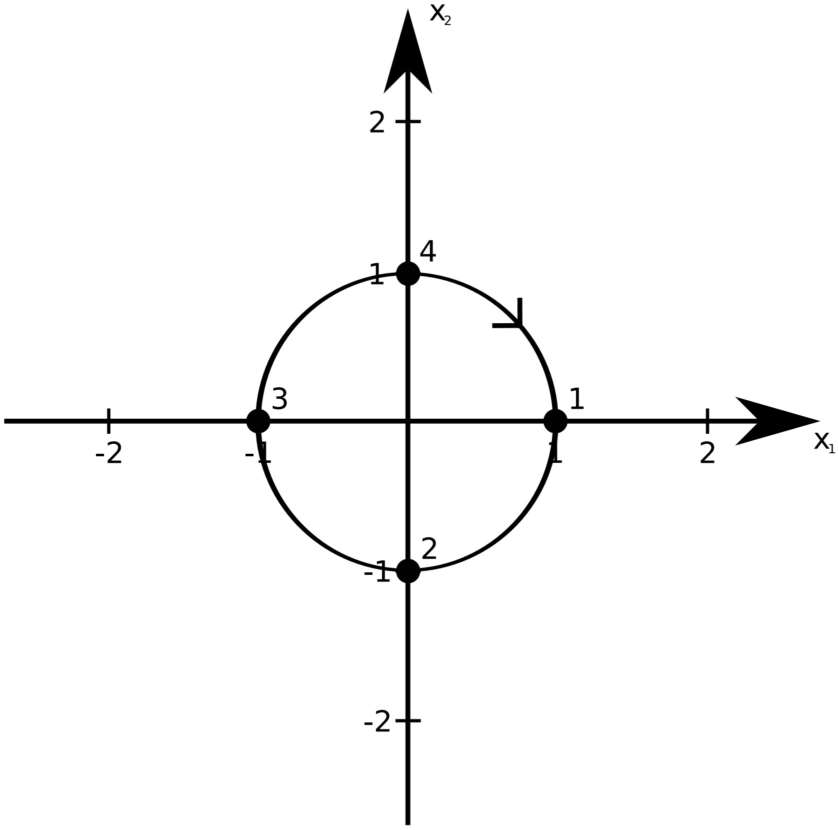
Der gesuchte Rückkopplungsvektor ist somit:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \; .$$

$\sum$ 24

Aufgabe 4: Zustandsebene

a) Der qualitative Verlauf ist:

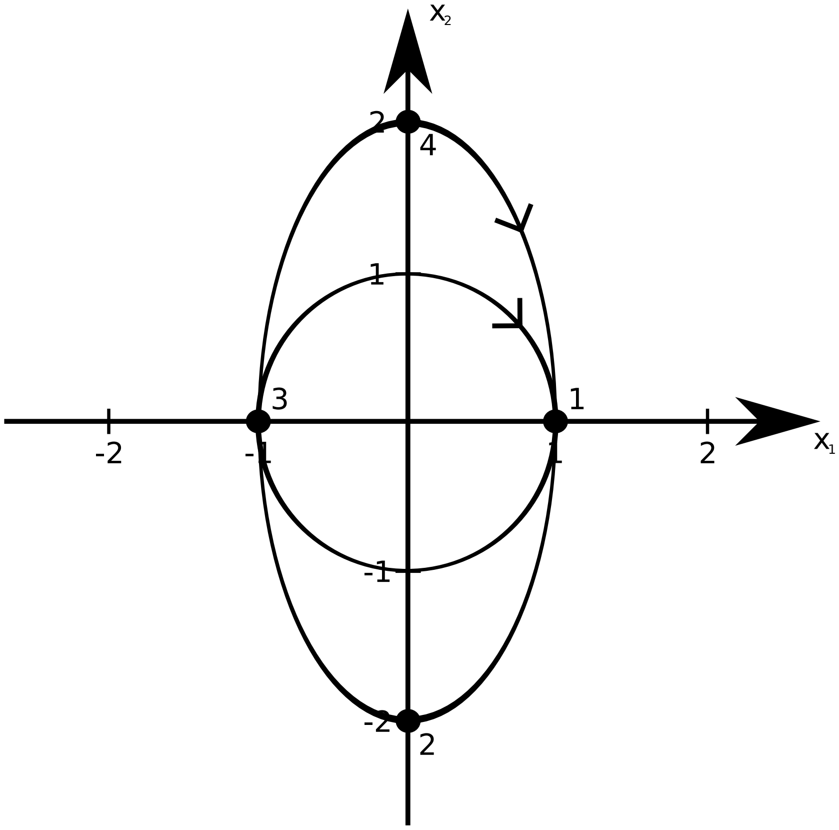


5

Zunächst sind die Punkte 1 bis 4 einzuzeichnen. Da es sich um Kosinus und Sinus handelt, bewegt sich die Laufvariable auf einem Kreis mit dem Radius 1. Die Bewegungsrichtung ist mit dem Uhrzeigersinn.

b) Da x_2 die Ableitung von $x_1 = x(t)$ ist, muss die innere Ableitung berücksichtigt werde, wodurch sich der Faktor 2 ergibt mit dem der Sinus noch multipliziert werden muss. 1

c) Der zweite Verlauf ist:



2

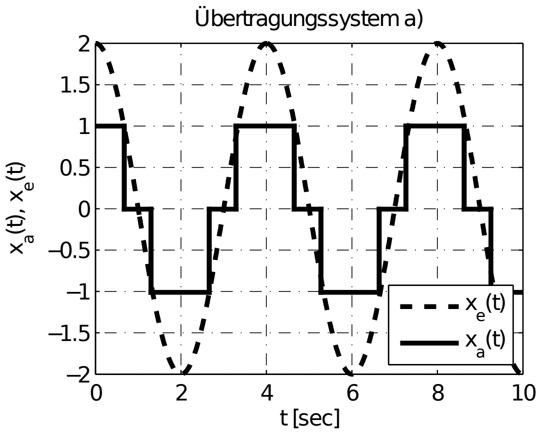
Der Verlauf verändert sich dahingehend, dass der Kreis zu einer Ellipse wird, da der Zustand x_2 mit dem Faktor 2 multipliziert werden muss. Außerdem bewegt sich die Variable aufgrund der höheren Eigenkreisfrequenz schneller auf der Laufbahn.

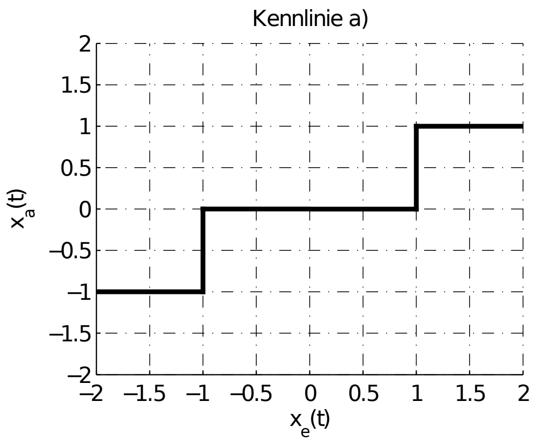
$\sum 8$

Aufgabe 5: Nichtlineare Kennlinien

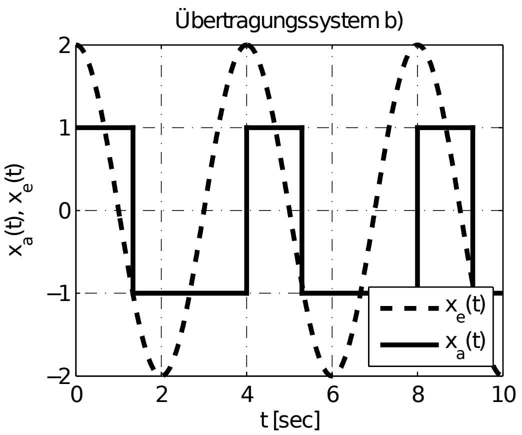
Gegeben sind drei Übertragungssysteme *a*) bis *c*).

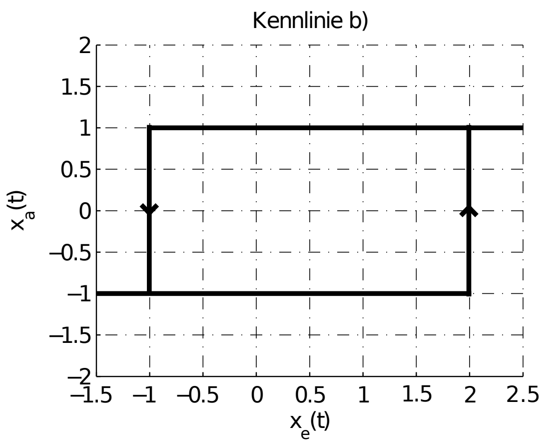
a) Die Lösungen für die beiden gesuchten Kennlinien sind:





4



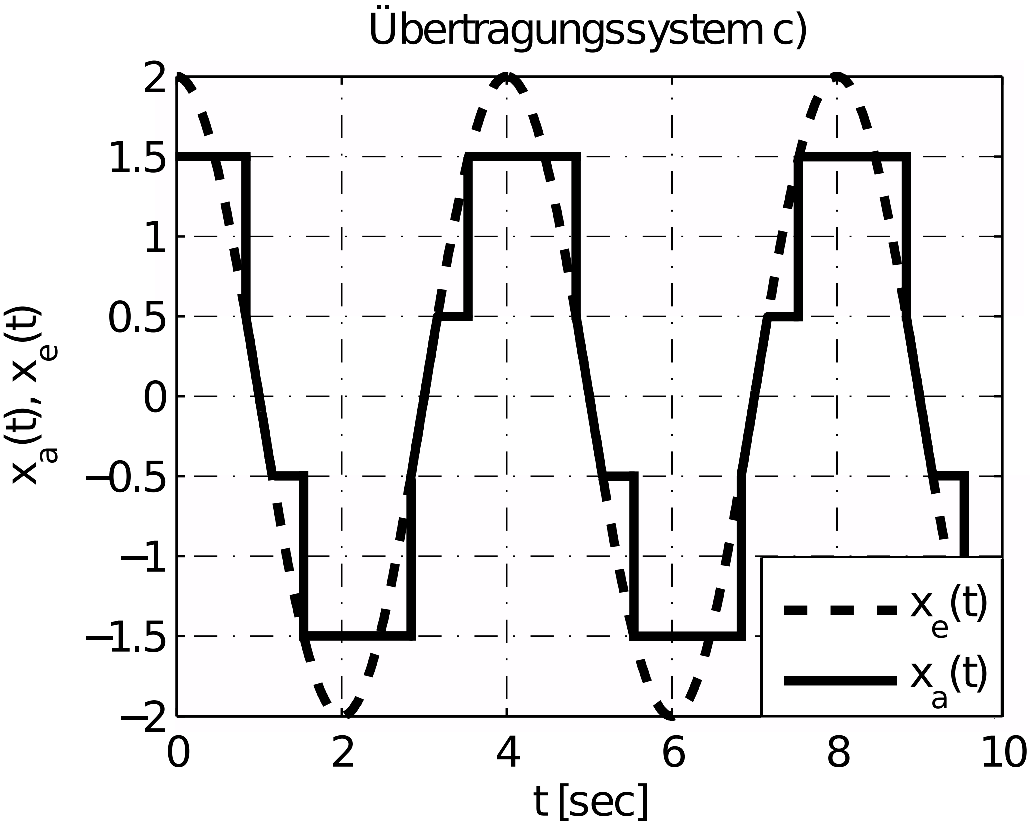


4

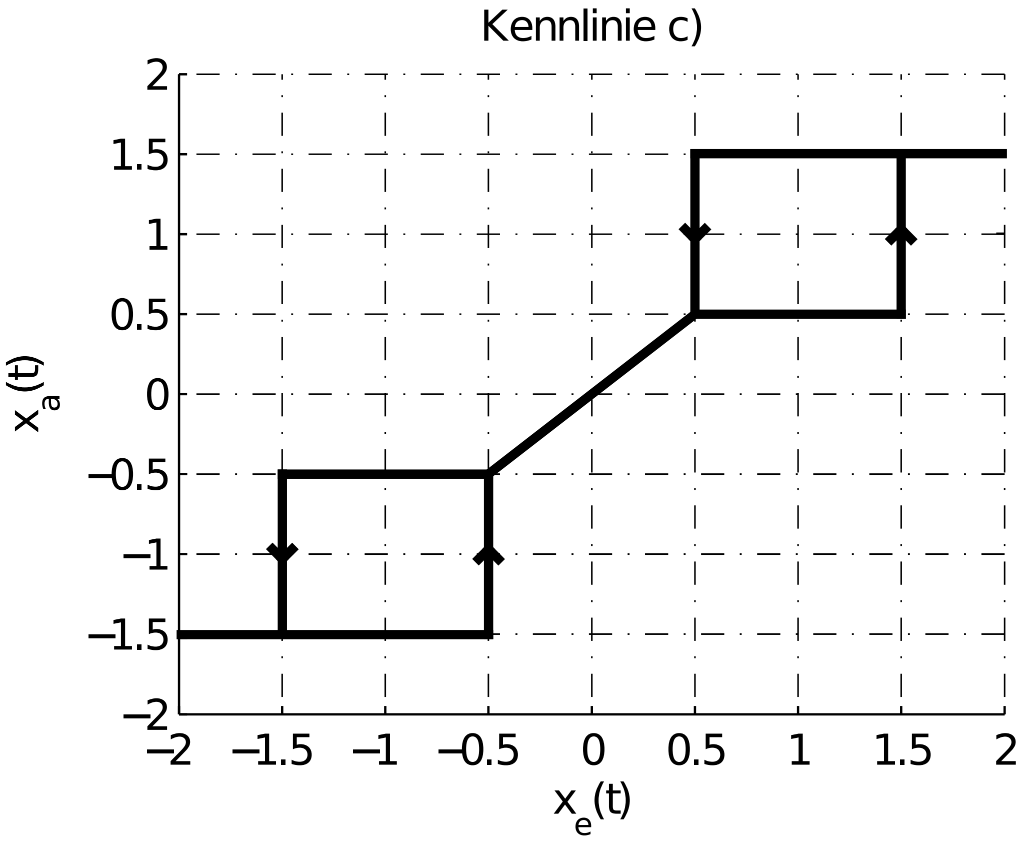
Zu *a*): Die Umschaltpunkte liegen bei -1 und 1. Die Stufen sind -1, 0 und 1. Es handelt sich somit um ein 3-Punkt-Glied ohne Hystherese. Diese Kennlinie ist eindeutig.

Zu *b*): Die Umschaltpunkte liegen bei -1 und 2. Die Stufen sind -1 und 1. Es handelt sich somit um ein 2-Punkt-Glied mit Hystherese. Diese Kennlinie ist mehrdeutig. 2

b) $x_a(t)$ ergibt sich wie folgt:



8



Das Ausgangssignal $x_a(t)$ beginnt bei einem Wert von 1.5. Aufgrund der Hystherese erfolgt das erste Umschalten von 1.5 auf 0.5 bei einem Eingangswert von $x_e = 0.5$. Anschließend entspricht das Ausgangssignal dem Eingangssignal, bis x_e den Wert -0.5 erreicht. Dort bleibt der Ausgangswert x_a konstant bei -0.5. Wird der Wert $x_e = -1.5$ erreicht, springt der Ausgangswert auf -1.5. Erst wenn der Eingangswert wieder -0.5 ist, verändert sich der Ausgangswert durch einen Sprung von -1.5 auf -0.5. Nun sind Eingang und Ausgang wieder identisch bis zum Wert $x_e = 0.5$. Ab dort bleibt der Ausgangswert konstant bei 0.5 bis der Eingangswert x_e den Wert 1.5 erreicht. Dort springt der Ausgangswert von 0.5 auf 1.5 und bleibt dort, bis x_e wieder 0.5 ist. Da das Signal periodisch ist, wiederholt sich der Ablauf.

$\boxed{\sum 18}$