D. Allgemeine Wärmeleitprobleme in Festkörpern

Mehrdimensionalität

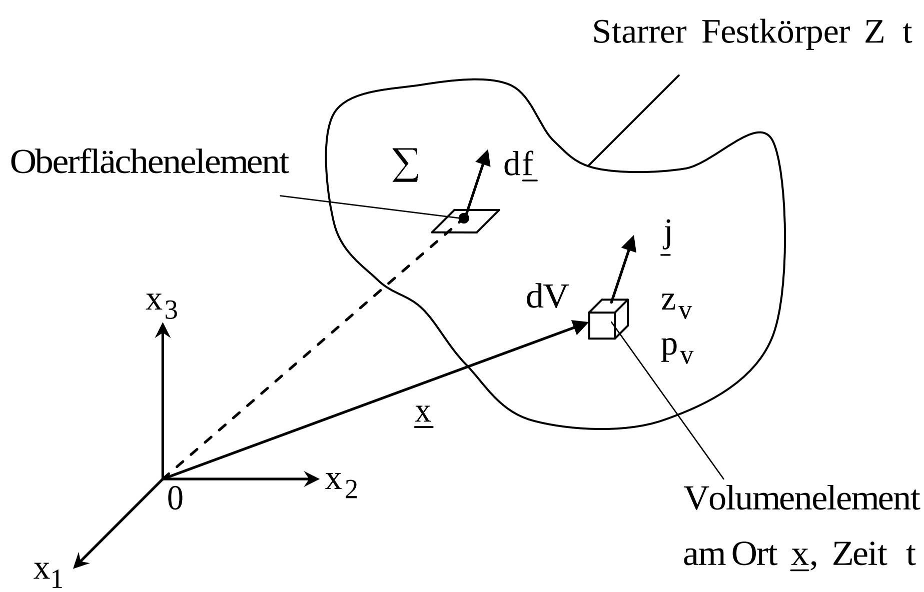
Instationarität

Wärmequellen und Senken

Bilanzgleichungen extensiver Größen $Z \ t$

$$\dot{Z} = J_z + P_z \qquad *$$

Lokale Form



$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1,\ x_2,\ x_3$$

$Z \quad = \ Z \quad t$ …Extensivgröße, z.B. Innere Energie

$z_V \quad = \ z_V \quad \underline{x}, \ t$ …Dichte von (Z)

$z_V \quad = \quad Z \ / m^3$

$z \quad = \ z \quad \underline{x}, \ t$ …spezif. Wert von (Z)

$z \quad = \quad z \ / kg$

$\underline{j}_z \quad = \ \underline{j}_z \quad \underline{x}, \ t$ …Stromdichte von (Z)

$\left[\underline{j}_z \right] = \quad Z \ / m^2 s$

$p_V \quad = \ p_V \quad \underline{x}, \ t$ …Produktionsdichte von (Z)

$p_V \quad = \quad Z \ / m^3 s$

Speicherterm

$$Z \quad t \quad = \underbrace{\int_V}_{\text{Systemvolumen}} z_V \quad \underline{x}, \ t \ \ dV \ = \underbrace{\int_m}_{\text{Systemmasse}} z \quad \underline{x}, \ t \ \ dm$$

$dm \quad = \rho dV$

$z_V \quad = \rho z$

Stromterm

$$J_z = -\oint_O \underline{j}_z \cdot d\underline{f} = -\oint_O j_{z_1} df_1 + j_{z_2} df_2 + j_{z_3} df_3 \qquad (3)$$

Systemoberfläche

Stromdichte oder Flussdichte von (Z)

$$\underline{j}_z = \begin{bmatrix} j_{z_1} \\ j_{z_2} \\ j_{z_3} \end{bmatrix}$$

Flächenelementvektor

$$d\underline{f} = \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{bmatrix}$$

Integralsatz C.F. Gauß (Lit: Fichtenholz, Smirnow)

$$\Sigma : \quad \oint_O \underline{j}_z \cdot d\underline{f} = \int_V \mathrm{div}\, \underline{j}_z dV \qquad (4)$$

$$\mathrm{div}\, \underline{j}_z = \partial_1 j_{z_1} + \partial_2 j_{z_2} + \partial_3 j_{z_3} \qquad (5)$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \qquad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \qquad (6)$$

Produktionsterm

$$P_z \;=\; \int_V p_z \;\; \underline{x}, t \;\; dV \tag{7}$$

Zusammenfassung $\;*, 1, 4, 7$

$$\frac{d}{dt}\int_V z_v dV = -\int_V \mathrm{div}\; \underline{j}_z \; dV + \int_V p_z \; dV$$

$$\int_V \;\partial_t z_v + \mathrm{div}\; \underline{j}_z - p_z \quad dV = 0 \tag{8}$$

V... beliebig wählbar!

$V \rightarrow dV$... am Ort $\underline{x}$, Zeit(t):

$$\partial_t z_v \;\; \underline{x}, t \;\; + \mathrm{div}\, \underline{j}_z \;\; \underline{x}, t \quad = p_z \;\; \underline{x}, t \tag{9}$$

Lokale Form der Bilanzgleichung für (Z)

Ruhende Massen konstanter Dichte, $\rho = \rho \;\; \underline{x}$

(9,2) $$\rho \partial_t z + \partial_i j_{z_i} = p_z \tag{9A}$$

Summenkonvention!

Lokale Energiebilanz

Festkörper mit Wärmeleitung

$z = u \quad \underline{x}, t$ … Spez. Innere Energie

$\underline{j}_z = \underline{q} \quad \underline{x}, t$ … Wärmestromdichte

$p_z = p_z \quad \underline{x}, t$ … Wärmeerzeugungsdichte

Ohm – Wärme

Peltier – Wärme / Kälte

Elektr. Induktion

Chemische Reaktion

Biolog. Prozesse

Kernreaktion

(9A) $$\rho \partial_t u + \underbrace{\partial_\alpha q_\alpha}_{\partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3} = p_v \qquad (10)$$

Fourier – Gesetz (lokale Form)

$$\underline{q} = -\lambda \quad \underline{x} \quad \operatorname{grad} T \quad \underline{x}, t \qquad (11)$$

$$q_\alpha = -\lambda \, \partial_\alpha T \qquad \alpha = 1, 2, 3 \qquad (11A)$$

Kalorische ESO

$$u = u_0 + c\left(T - T_0\right) + \vartheta\left(T - T_0\right)^2 \qquad (12)$$

$$c = \text{const} \quad \ldots\text{Wärmekapazität des Stffes} \qquad (13)$$

$$\rho = \text{const} \quad \ldots\text{Dichte des Medium} \qquad (14)$$

$$\lambda = \lambda\left(\underline{x}\right) \quad \ldots\text{ortsabhängige Wärmeleitfähigkeit} \qquad (15)$$

$$\left(10, 15\right) : \quad \underline{\underline{\partial_t T\left(\underline{x}, t\right) = a\Delta T + \partial_\alpha a \cdot \partial_\alpha T + \frac{p_v}{\rho c}}} \qquad (16)$$

Temperaturleitungsgleichung

Medium: inhomogenen, Wärmequellen p_v

Anfangs- und Randbedingungen

$$a = \frac{\lambda\left(x\right)}{\rho c} \qquad \ldots \text{ Temperaturleitfähigkeit}$$

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 \quad \ldots \text{ Laplace Operatur}$$

Spezialfälle von Gl.(16)

1) Stoffparameter konstant:

$$\lambda = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \; c = \text{const} : (16) \rightarrow$$

$$\underline{\underline{\partial_t T = a \Delta T + \frac{p_v}{\rho c}}} \qquad (17)$$

Temperaturleitungsgleichung
Medium: homogen, Wärmequellen p_v .

2) Temperaturleitung in Medium ohne Wärmequellen

$$p_v = 0$$

$$(17) \rightarrow \partial_t T = a \Delta T \qquad (18)$$

3) Stationäre Temperaturleitprobleme und $a = \text{const}$

$$T = T \; \underline{x} \quad \ldots \text{keine Zeitabhängigkeit}$$

$$(18) \rightarrow 0 = \Delta T \qquad (19)$$

4) Stationäre Temperaturleitung(Medium mit Wärmequellen)

$$p_v = \text{const}$$

$$(17) \rightarrow 0 = a \Delta T + \frac{p_v}{\rho c} \qquad (20)$$

Anfangs- und Randbedingungen!

Klassifikation Temperaturleitprobleme

Kategorie	Eigenschaft	Zahl
1. Stationarität Instationarität	$\partial_t T = 0$ $T = T \quad \underline{x}, t$	2
2. Stoffgröße λ ortsabhängig ortsunabhängig, konst.	$\lambda = \lambda \quad \underline{x}$ $\lambda = \text{const}$	2
3. Wärmequellen vorhanden nicht vorhanden	$p_V \quad \underline{x}, t \quad \neq 0$ $p_V = 0$	2
4. Dimension (D) Symmetrien des System?		3
		24

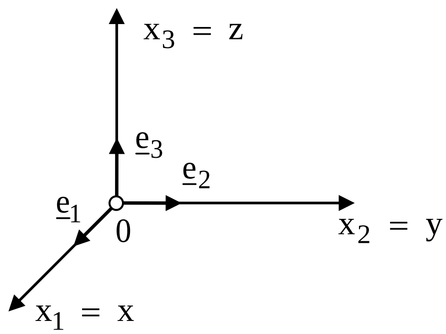
Aufgaben A17, A18a, b

<u>Ergänzung</u>

Differentialoperatoren

Literatur: E. Madelung, Smirnow, Fichtenholz

1. **Kartesische Koordinaten**



Einheitsvektoren

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gradient eines skalaren Feldes, z.B. $T = T \quad \underline{x}, t$

$$\nabla T \equiv \mathrm{grad}\, T = \underline{e}_1 \partial_1 T + \underline{e}_2 \partial_2 T + \underline{e}_3 \partial_3 T = \underline{e}_i \partial_i T$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_1 T \\ \partial_2 T \\ \partial_3 T \end{bmatrix}$$

Divergenz eines Vektorfeldes, z.B. $\underline{q} = \underline{q} \quad \underline{x},\ t$

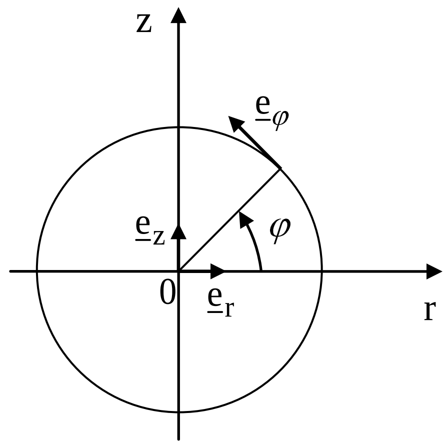
$$\mathrm{div}\underline{q} = \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3 = \partial_i q_i$$

Laplace – Operator eines Skalarfeldes, $T \quad \underline{x}, t$

$$\Delta T = \partial_1^2 T + \partial_2^2 T + \partial_3^2 T = \partial_i \partial_i T$$

Abkürzungen: $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\qquad i = 1, 2, 3$

2. Zylinderkoordinaten



r…Radius, φ …Azimut Winkel, z…Höhe

Einheitsvektoren

$$\underline{e}_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gradient eines Skalarfeldes, z.B. $T = \quad r,\ \varphi,\ z$

$$\nabla T = \mathrm{grad}\ T = \underline{e}_r \partial_r T + \frac{\underline{e}_\varphi}{r}\ \partial_2 T + \underline{e}_z \partial_z T$$

Divergenz eines Vektorfeldes, z.B. $q \quad r,\ \varphi,\ z$

$$\mathrm{div}\underline{q} = \partial_r q_r + \frac{1}{r}\ \partial_\varphi q_\varphi + \partial_z q_z$$

Laplace Operator eines Skalarfeldes, z.B. T:

$$\Delta T = \partial_r^2 T + \frac{1}{r}\ \partial_r T + \frac{1}{r^2}\ \partial_\varphi^2 T + \partial_z^2 T$$

Abkürzungen: $\partial_r = \dfrac{\partial}{\partial_r}, \quad \partial_\varphi = \dfrac{\partial}{\partial_\varphi}, \quad \partial_z = \dfrac{\partial}{\partial_z}$