G. Instationäre Wärmeleitung

Zeitabhängige Wärmeleitprozesse in ruhenden Körpern

1. Integrale Kapazitätsmethode

Beschreibung des thermischen Zustandes eines Körpers durch eine einzige, zeitlich veränderliche Mitteltemperatur $T(t)$.

Anwendung: Erwärmung / Abkühlung von

Werkstücken

Bauteilen

Trockengut

Tabletten

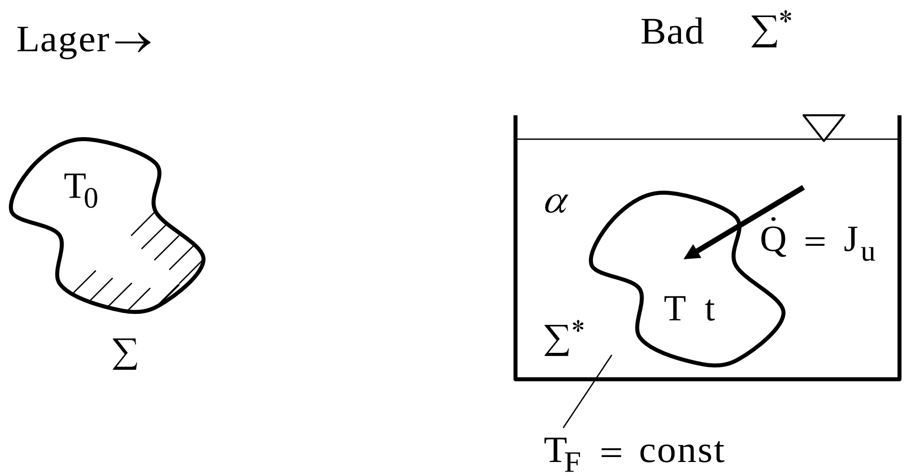
Konserven

…

bei thermischen Behandlungen
wie Verzinken, Lackieren, Trocknen
etc…

Tauchexperiment

Werkstück (Thermodynamisches System Σ)



Definition der Körpertemperatur $T(t)$:

$$T(t) = \frac{\int_V c\rho T(\underline{x},t)\, dV}{\int_V c\rho\, dV} \tag{0}$$

$$\underline{x} = (x,y,z), \qquad dV = dx\, dy\, dz$$

Energiebilanz

$$\Sigma: \quad \dot{U} = J_u = \dot{Q} \tag{1}$$

$$\text{Fourier} \quad \dot{Q} = \alpha A\,(T_F - T(t)) \tag{2}$$

Vorzeichen : $\dot{Q} \geq 0$ ...Wärmezufuhr $\Sigma^* \to \Sigma$

Abkürzung

$$\theta(t) = T(t) - T_F \tag{3}$$

Kalorische Zustandsgleichung des Systems

$$U(\theta) = U_0 + cm\theta + O(\theta^2) \tag{4}$$

$$\dot{U}(t) = cm\dot{\theta}(t) \tag{4A}$$

$$(1-4): cm\dot{\theta} = -\alpha A \theta$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{\tau}\theta \tag{5}$$

$$\tau = \frac{cm}{\alpha A} = \frac{1}{\alpha A} \cdot cm = R_{wü} \cdot C \tag{6}$$

Relaxationszeit des Wärmeprozesses,d.h. Angleichung $T(0) \to T_F$.

Für $\tau \to \infty$, ,d.h. $\alpha \to 0$, $R_{wü} \to \infty$ oder

$C \to \infty$, d.h. $m \to \infty$ bleibt Temperaturdifferenz

$\theta(t) = T(t) - T_F$ lange bestehen.

Integration Gl.(6)

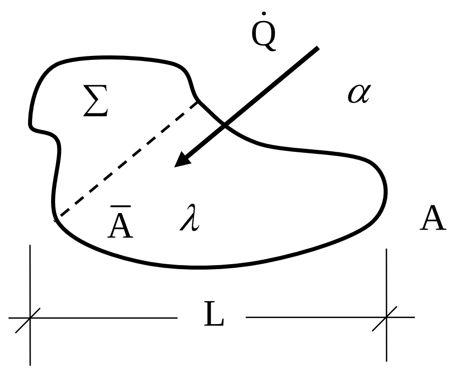
$$\underline{\theta(t) = \theta_0 e^{-(t-t_0)/\tau}} \tag{7}$$

$$\theta_0 = \theta(t = 0) \tag{7a}$$

$$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = 0 \quad \to \quad \underline{T(\infty) = T_F} \tag{8}$$

Gültigkeits- /Anwendungsbereich Gl. (7)

V: Temperaturausgleich im Körper Σ_{Rw} muss rasch gegenüber Wärmeaufnahme / Wärmeabgabe zwischen Körper Σ und Bad Σ^* sein $R_{wü}$



$$R_w \ll R_{wü} \tag{10}$$

$$\| \qquad \|$$

$$\frac{L}{\lambda \bar{A}} \ll \frac{1}{\alpha A}$$

Modell : $\bar{A} \cong A$ ..."Formfaktor"?

Biot – Zahl des Wärmeleitprozesses

(10) $$\underline{Bi \doteq \frac{\alpha L}{\lambda} \ll 1}$$

Praktisches Kriterium :

$$Bi < 0{,}1 \tag{11A}$$

Integrale Temperaturmethode

Verallgemeinerung

Energieaustausch Körper $\sum T\ t$, Umgebung $\sum^{*}_{T_\infty}$:

1. Wärmeübertragung $\sum \leftrightarrow \sum^{*}$, α , $\dot{Q}$
2. Wärmestrahlung $\sum \leftarrow \sum^{*}$, ε , J_s
3. Innere Wärmequellen / - senken $\sum$, Φ

Energiebilanz, Vgl. (1)

$$\dot{U} = \dot{Q} + J_s + \Phi \tag{12}$$

$$\dot{U} = c\ m\ \dot{T} \tag{4}$$

2 $$\dot{Q} = -\alpha\ A\ \ T - T_\infty \tag{2}$$

$$\underline{J_s = -\varepsilon\sigma A_s\ T^4 - T_\infty^4} \quad \text{...Boltzmann Strahlungsgesetz} \tag{13}$$

$$\sigma = 5{,}8 \cdot 10^{-8}\ \ \mathrm{W/m^2K} \quad \text{...Stefan – Boltzmann Konstante}$$

$$0 \le \varepsilon \le 1 \quad \text{...Emissionsvermögen des Körpers } \textstyle\sum \text{ Stoffgröße}$$

$$\Phi = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^3}} \quad \text{...Wärmeerzeugung in } \textstyle\sum.$$

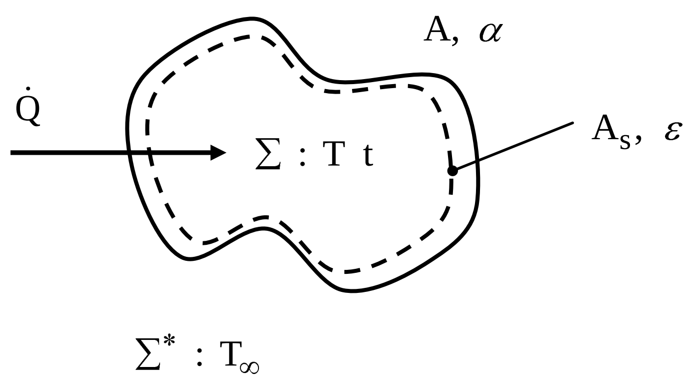
2,4A,12,13 $$c m \dot{T} = - \alpha A \ T - T_\infty - \varepsilon \sigma A_s \ T^4 - T_\infty^4 + \Phi \qquad (15)$$

ODE 1. Ordnung

Numerische Lösungsmethoden! (EDV)

Anwendung: Kühlvorgänge Metallschmelzen

Astronomie: Abkühlung Himmelskörper.



Aufgabe A22 etc.

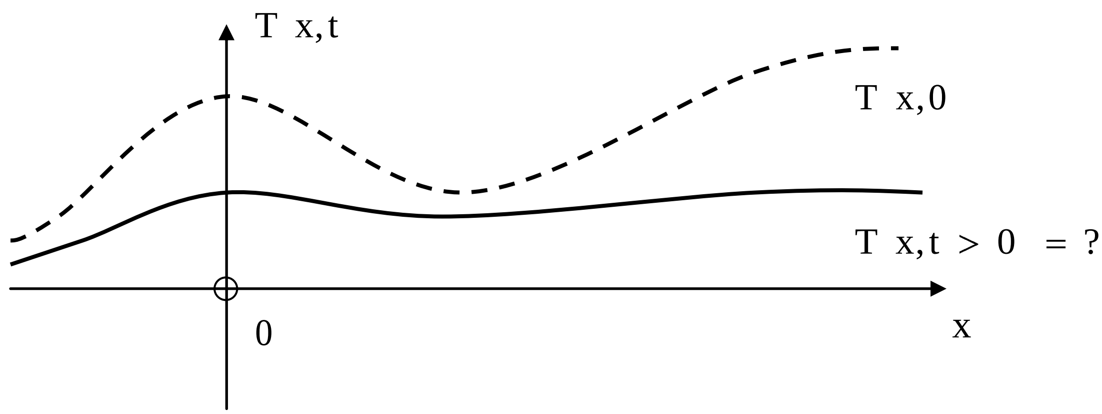
2. Lokale Temperaturleitungsgleichung

2a) Eindimensionale Probleme ohne Wärmequellen.
Der Wärmepol.

Anwendung:

Wärmeleitung und Temperaturausbreitung in Drähten, Elektroleitungen, Seilen, Pfannenstielen, Greifwerkzeugen, Löffeln etc.

Halbräumen (Erdreich, ruhende Gewässer)



Fragestellung:

Geg. Anfangsverteilung $(t = 0)$ der Temperatur im **ruhenden** Medium: $T_0 = T(x,0)$

Ges.: Temperaturverteilung zu beliebigem späteren Zeitpunkt $T = T(x,t)$, $t > 0$.

Temperaturleitungsgleichung (TLG) *)

$$\partial_t T(x,t) = a\,\partial_x^2 T(x,t) \qquad (1)$$

Anfangsbedingung :

$$T(x,t=0) = T_0(x) \qquad (2)$$

Randbedingung :

$$\lim_{x\to\infty} T(x,t) = T_\infty \quad \ldots\text{alle } t \qquad (3)$$

Linearität der TLG: Darstellung der Lösungsfunktion als Superponierung von Einzellösungen, sog. ‚"Greenschen Funktionen":

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{T(\xi,t=0)}_{\text{Anfangsbedingung}}\ \underbrace{G(\xi-x,t)}_{\text{Green Funktion}}\, d\xi \qquad (4)$$

---

*) Zeitverschiebungsinvarianz $t \to t - t_0$

Ortsverschiebungsinvarianz $x \to x - x_0$

Linearität in $T(x,t)$.

Green Funktion: Lösung der TLG (1) mit spezieller Anfangsbedingung:

1. $$\partial_t G(x,t) = a\partial_x^2 G(x,t) \tag{5}$$

2. $$\int_{x=-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = 1 \quad \ldots \text{alle } t \geq 0 \tag{6}$$

3. $$\lim_{t\to 0} G(x,t) = \begin{cases} 0 \ldots \text{alle } x \neq 0 \\ \infty \ldots \quad x = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\to G(x,t=0) = \delta(x) \tag{8}$$

Dirac Deltafunktion

Temperierte Distribation

(6) $$\to \int_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1 \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0) = f(x_0) \tag{10}$$

$\delta(x)$ ...Analogon zum Kronecker–Symbol (δ_{ik})

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \ldots \text{alle } i \neq k \\ 1 \ldots \quad i = k \end{cases}$$

$$\to \sum_i a_i \delta_{ik} = a_k$$

Wegen Linearität und Zeitverschiebungsinvarianz von Gl. (1) sind mit $G(x,t)$ nach Gl. (5) auch folgende Funktionen Lösungen von (1):

$$G(\xi - x,t) \qquad \ldots \qquad \xi = \text{const} \tag{11}$$

$$F(\xi) \cdot G(\xi - x,t)\,, \tag{12a}$$

$$8{,}10 \qquad \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot G(\xi - x,t)\, d\xi \tag{12b}$$

$$(12b):\ t = 0\ : \quad \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot G(\xi - x,0)\, d\xi$$

$$(8) \qquad = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot \delta(\xi - x)\, d\xi = F(x)$$

Spezielle Wahl :

$$F(x) = T(x,t=0)$$

$$(12b): \qquad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} T(\xi,t=0) \cdot G(\xi - x,t)\, d\xi}_{\text{Lösungsfunktion, die wegen (8), (2), (3) erfüllt!}} = T(x,t) \tag{4}$$

Bestimmung der Green Funktion $G(x,t)$ der TLG (1) nach (5-8):

Lösungsansatz:

$$G(x,t) = G(y(x,t)) \tag{13}$$

$\rightarrow$ Umwandlung TLG (5) in ODE!

Ansatz : $$y(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{at}}, \quad a = const \tag{14}$$

(13) $$\frac{dG}{dy} = G'(y) \tag{15.1}$$

$$\frac{d^2G}{dy^2} = G''(y) \tag{15.2}$$

(13,14) $$\partial_t G(y) = -\frac{1}{2t}\frac{x}{\sqrt{at}}G'(y) \tag{16}$$

$$\partial_x G(y) = \frac{1}{2\sqrt{at}}G'(y) \tag{17}$$

$$\partial_x^2 G(y) = \frac{1}{4at}G''(y) \tag{18}$$

(5),(16,18) $$G''(y) = -2yG'(y) \ldots \quad \text{G selbst kommt nicht vor!} \tag{19}$$

Substitution: $$G'(y) = W(y) = ? \qquad (20)$$

(19) $$W'(y) = -2yW(y) \qquad (21)$$

(21) $$W(y) = Ce^{-y^2} \qquad (22)$$

(20,22) $$\underline{G(y) = G(0) + C\int_0^y e^{-u^2}du} \qquad (23)$$

Grenzverhalten von $G(y)$ für $t \to 0$, d.h. $y \to \infty$:

(23) $$G(\infty) = G(0) + C\underbrace{\int_0^\infty e^{-u^2}du}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \qquad (24)$$

$$0 = G(0) + \frac{C}{2}\sqrt{\pi}$$

$$C = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}G(0)$$

$$G(y) = G(0)\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-u^2}du\right)$$

$x = 0$: $$\lim_{t\to 0, x\to 0} \frac{x}{2\sqrt{at}} = y \quad \text{... beliebig}$$

$$G(y) = G(0) \neq \infty \quad \text{... falsches Grenzverhalten für } t = 0,\ x \to 0!$$

Mit (23) ist auch $\partial_x G\ \ y$ eine Lösung von (5)!

$$G_0\ \ x,t \quad = \quad \partial_x G\ \ y \quad = \quad \frac{C}{2\sqrt{at}}\, e^{-x^2/4at} \qquad (25)$$

(25) erfüllt Grenzbedingungen (7)!

Bestimmung von C über Normierungsbedingung (6) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_0\ \ x,t\ dx \;=\; \frac{C}{2\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4at}\, dx \;=\; 1 \qquad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \quad = \quad \sqrt{\pi} \qquad (27)$$

(26,27) $$C \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad (28)$$

(25,28) $$\underline{G_0\ \ x,t \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\, e^{-x^2/4at}} \qquad (29)$$

$$\lim_{t \to 0} G_0 (x,t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \ldots x \neq 0 \\ \infty & \ldots x = 0 \end{cases} \qquad \ldots \qquad (7)$$

Allg. Lösung der TGL zur Anfangsbedingung $T(x, t=0)$:

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi, t=0)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4at}}\, d\xi \tag{30}$$

Erweiterung von (30) auf 3 – dimensionales Kontinuum (isotrop) ohne „Ränder“:

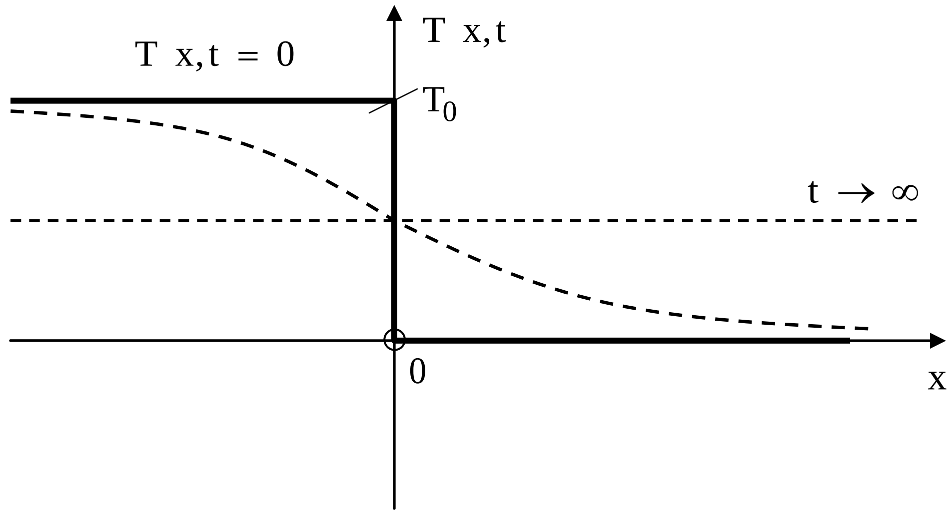
$$T(\underline{x},t) = \frac{1}{2^3 (\pi a t)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} T(\underline{X}, t=0) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ -\frac{(\xi - x)^2}{4at} - \frac{(\eta - y)^2}{4at} - \frac{(\zeta - z)^2}{4at} \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$\underline{x} = (x, y, z)$$

$$\underline{X} = (\xi, \eta, \zeta)$$

Beispiel: Ausbreitung Temperaturfront im Halbraum (x > 0)



$$T(x,t=0) = \begin{cases} T_0 > 0 & \ldots\ x < 0 \\ 0 & \ldots\ x > 0 \end{cases} \qquad (31)$$

(30),(31)
$$T(x,t) = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi a t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4at}}\, d\xi \qquad (32)$$

$$\xi - x = u \quad , \quad d\xi = -du$$

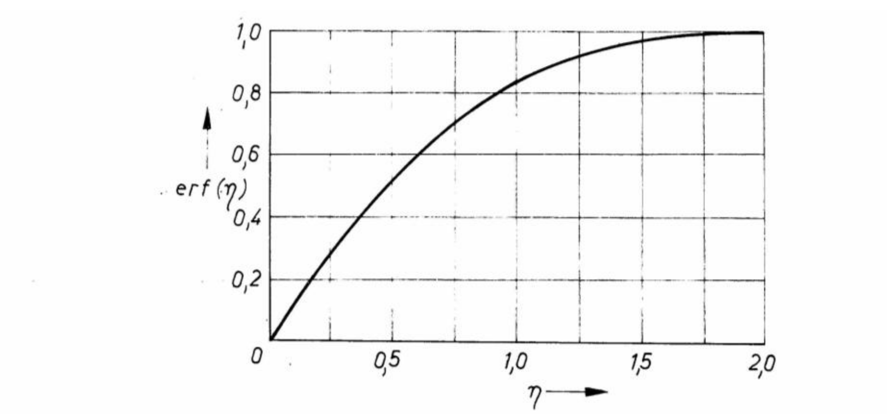
$$(32) \qquad T\;\;x,t > 0 \;=\; \frac{T_0}{\sqrt{\pi}}\left(- \underbrace{\int_{\infty}^{x/2\sqrt{at}}} e^{-\left(\frac{u}{2\sqrt{at}}\right)^2} d\left(\frac{u}{2\sqrt{at}}\right)\right)$$

$$\int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^{x/2\sqrt{at}}$$

$$T\;\;x,t > 0 \;=\; \frac{T_0}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \underbrace{\int_0^{x/2\sqrt{at}} e^{-w^2} dw}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)}\right) \qquad (33)$$

$$\underline{T\;\;x,t > 0 \;=\; \frac{T_0}{2}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right)} \qquad (34)$$

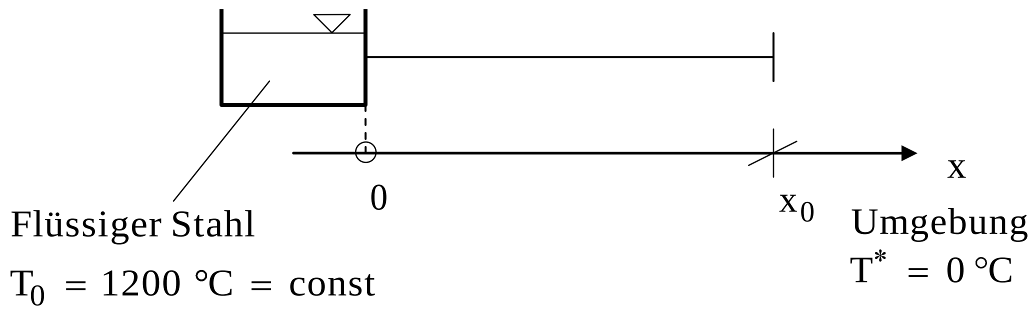
$$\mathrm{erf}\;\;z \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{1} - \frac{1}{1!}\frac{z^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{z^5}{5} - \cdots\right) \qquad (35)$$



Gaußsche Fehlerfunktion! (C.F. Gauß, 1777-1855)

<u>Zahlenbeispiel</u>

Stiel Keramiktiegel zur Entahme von Stahlproben aus Stahlfluss



$$x_0 = 2{,}5 \quad m$$

$$c = 0{,}4 \quad kJ/kgK$$

$$\rho = 7800 \quad kg/m^3$$

$$\lambda = 15 \quad W/mK$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{15W \cdot kgK \cdot m^3}{mK \cdot 0{,}4kJ \cdot 7800kg} = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \qquad m^2/s$$

a) Hat sich das Ende des Pfannenstiels nach 60s erwärmt?

$$T(x_0, t_0 = 60s) = ?$$

$$T(x_0, t_0 = 60s) = \frac{T_0}{2}\left(1 - \text{erf}\left(\frac{x_0}{2\sqrt{a \cdot t_0}}\right)\right) \tag{34}$$

$$= 600 \quad °C\left(1 - \text{erf}\left(\frac{2{,}5m}{2\left(4{,}8 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1} \cdot 60s\right)^{1/2}}\right)\right)$$

$$= 0 \qquad °C$$

b) In welchem Abstand vom Tiegel ist nach $t_0 = 60\mathrm{s}$ die Temperatur $T(x, t_0) \leq 60°\mathrm{C}$?
(Keine Verbrennungsgefahr!)

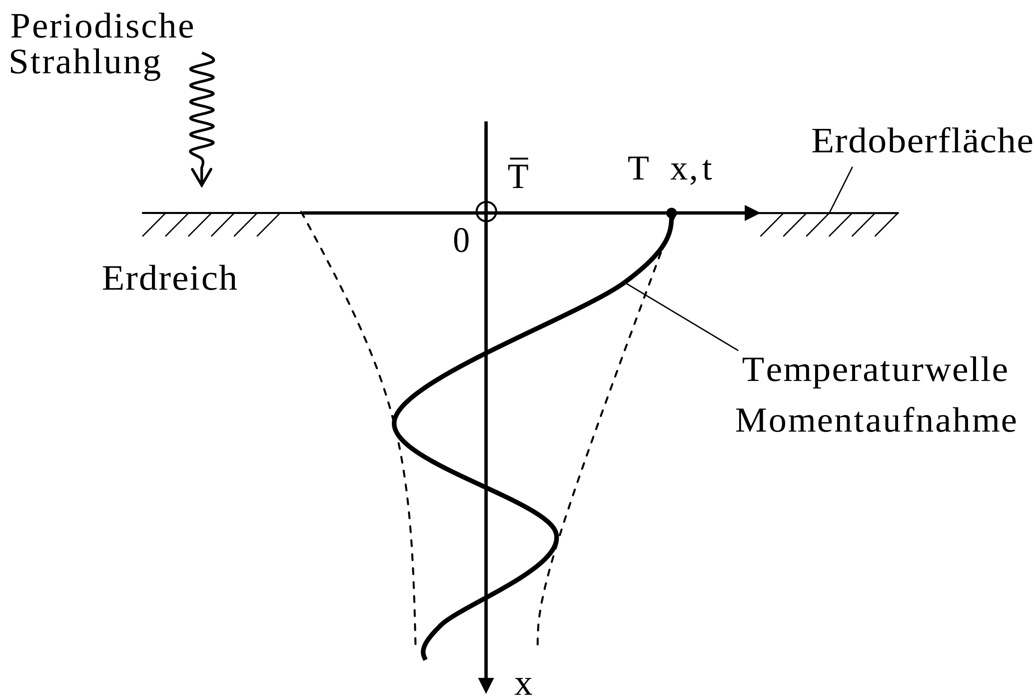
$$(34) \qquad 60 = 600\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\left(4{,}8 \cdot 10^{-6}\mathrm{m^2 s^{-1}} \cdot 60\mathrm{s}\right)^{1/2}}\right)\right)$$

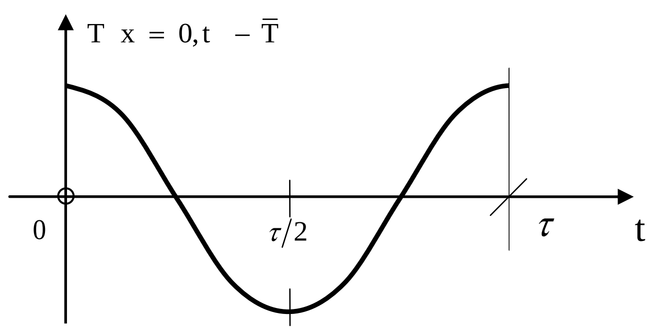
$$\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2 \cdot 0{,}017}\right) = 0{,}9$$

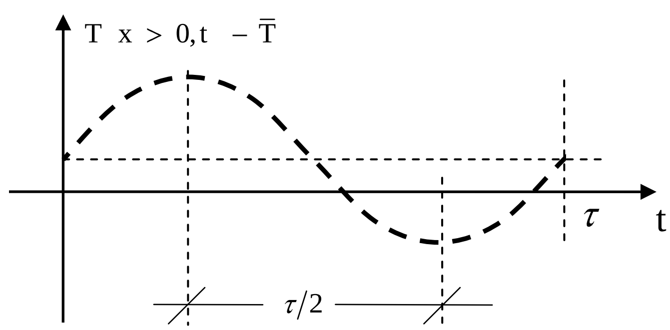
$$\text{Diagramm}: x = 4{,}7\mathrm{cm}.$$

2b) Eindimensionale Wärmeleitprobleme ohne Quellen.

Temperaturwellen im Erdreich durch Sonnenstrahlung







$\bar{T} = \text{const}$ … Jahresmitteltemperatur an Erdoberfläche

Abkürzung: $\theta(x,t) = T(x,t) - \bar{T}$ (36)

geg.: Temperaturänderungen an Erdoberfläche und in großer Tiefe $x \to \infty$

1) $x = 0$: $\theta(x = 0, t) = \theta_0 \cos \Omega t$ (37)

$$\Omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau} \qquad (38)$$

τ … Schwingungsdauer $1d, 1a$ etc.

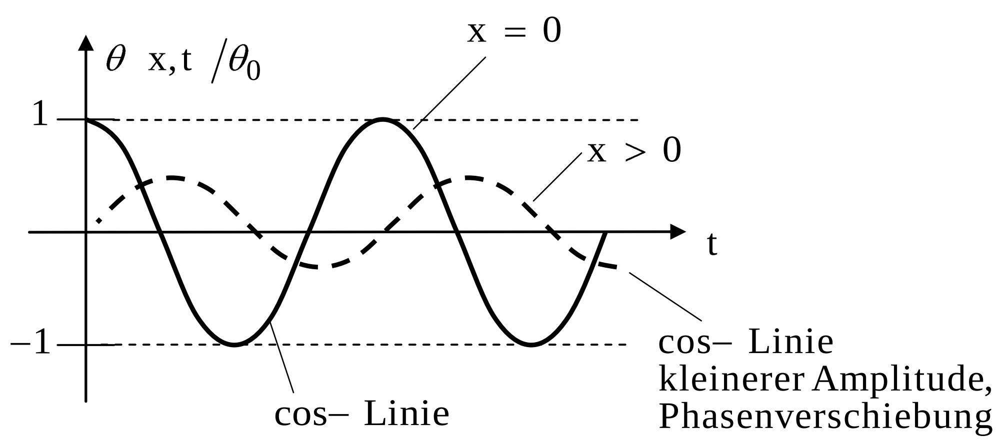
2) $x \to \infty$ $\theta(x \to \infty, t) = 0$ … alle t (39)

ges.: Temperaturänderungen im tiefen Erdreich

$\theta(x,t) = ?$

Temperaturleitungsgleichung (TLG):

$$\partial_t \theta(x,t) = a \partial_x^2 \theta(x,t) \tag{40}$$



Lösung von (40) mit Randbedingungen (37), (39):

→ Produktansatz

Aufbau vollständiges Funktionensystem

→ Reihenentwicklung der Lösungsfunktion nach diesem System.

Literatur: Carslaw H.S., Jaeger J.C.,
Conduction of Heat in Solids
Clarendon Press, 2nd Ed., 1965, Oxford, UK.

$$\theta(x,t) = f(x) \cdot g(t) \tag{41}$$

$$\dot{g} = \frac{dg}{dt}$$

$$f' = \frac{df}{dx}$$

$$(40) \rightarrow \quad \underbrace{\frac{\dot{g}}{g}}_{G(t)} = \underbrace{a\,\frac{f''}{f}}_{F(x)} = A = \text{const} \;\ldots\; \text{Komplexität!}$$

a) $\dot{g} - Ag = 0$

$$g(t) = C\,e^{At} \quad , \qquad A \;\ldots\; \text{komplex!} \tag{42}$$

b) $f'' - \frac{A}{a}f = 0$

$$f(x) = C_1\,e^{\kappa x} + C_2\,e^{-\kappa x} \tag{43}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{A}{a}} \tag{44}$$

$$(41-43) \quad \underline{\theta(x,t) = e^{At}\left(C_1 e^{\kappa x} + C_2 e^{-\kappa x}\right)} \tag{45}$$

Elementarlösung der TLG (40)

Allg. Lösung durch Superponierung von Elementarlösungen;

$$\theta \;\; x,t \quad = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[e^{-A_\alpha t} \;\; C_{1\alpha} e^{\kappa_\alpha x} \; + \; C_{2\alpha} e^{-\kappa_\alpha x} \;\; \right] \tag{46}$$

$C_{1\alpha}, C_{2\alpha}$ beliebige Konstante

$$\theta \;\; x \; = \; 0,t \quad = \sum_{\alpha}^{\infty} e^{-A_\alpha t} \;\; C_{1\alpha} \; + \; C_{2\alpha} \tag{46A}$$

Randbedingung (37):

Reduktion $\left(\sum_{\alpha}^{\infty} \right)$ auf 2 Terme!

$$\theta \;\; x \; = \; 0,t \;\; = \theta_0 \cos \;\; \Omega t$$

$$= \frac{\theta_0}{2} \;\; e^{i\Omega t} \; + \; e^{-i\Omega t} \tag{46B}$$

$$(46A,B): \quad A_1 = i\Omega \quad , \quad A_2 = -i\Omega \tag{47}$$

(44) $\rightarrow$

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{i\Omega}{a}} = \sqrt{\frac{\Omega}{2a}} \;\; 1 + i$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{-i\Omega}{a}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\Omega}{2a}}}_{k} \;\; -1 + i \tag{48}$$

$$k \; = \sqrt{\frac{\Omega}{2a}} \quad \ldots \quad \text{Wellenzahl} \tag{49}$$

$$\lambda \; = \frac{2\pi}{k} \quad \ldots \quad \text{Wellenlänge} \tag{50}$$

$$(46-49)\qquad \theta(x,t) = \frac{\theta_0}{2}e^{i\Omega t}\left(\underset{0}{c_{11}e^{(1+i)kx}} + \underset{1}{c_{21}e^{-(1+i)kx}}\right)$$

$$\frac{\theta_0}{2}e^{-i\Omega t}\left(\underset{1}{c_{12}e^{(-1+i)kx}} + \underset{0}{c_{22}e^{-(-1+i)kx}}\right)\qquad (51)$$

$c_{\alpha\beta}$ ... beliebig wählbar!

$$(51)\qquad \underline{\theta(x,t) = \theta_0 e^{-kx}\cos(\Omega t - kx)}\qquad (52)$$

Gedämpfte Welle ins Erdreich!

Hinweis: Lösungsansatz (52) mit unbekanntem k führt über TLG (40) auf die „Dispersionsrelation“(49)!
(Differenzieren von (52): Abkürzungen verwenden!)

Eindringtiefe ξ der θ-Welle:

$$D: \qquad |\theta(\xi,t)| \le \frac{\theta_0}{2}$$

$$\theta_0 e^{-k\xi} = \frac{\theta_0}{2}$$

$$\xi = \frac{\ln 2}{k} = \ln 2\cdot\sqrt{\frac{2a}{\Omega}}\qquad (53)$$

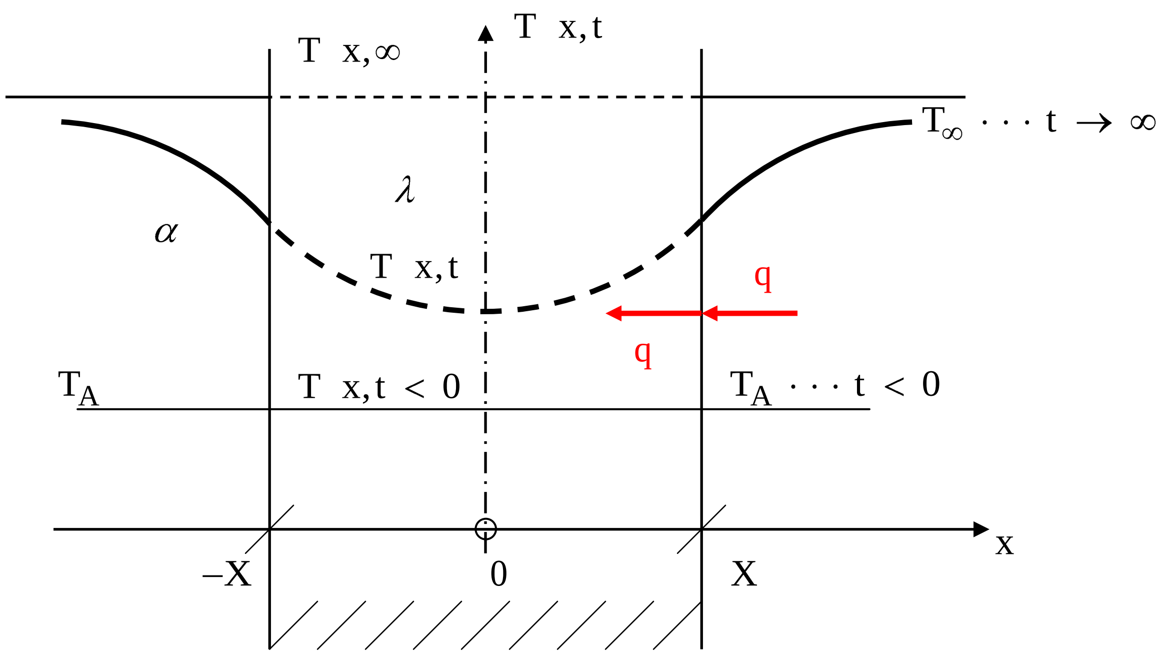
$$\rightarrow\qquad \frac{\xi_1}{\xi_2} = \sqrt{\frac{\Omega_2}{\Omega_1}} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}$$

Beispiele: $\tau_1 = 1d$, $\tau_2 = 1a = 365d$, $\frac{\xi_1}{\xi_2} \cong \frac{1}{19}$

Erwärmung/Abkühlung von Platten und Zylinder

Instationäre eindimensionale Wärmeleitung

1. Methode nach Gröber
2. Näherungsmethode nach Schlünder



Ruhende Platte

Dicke :	$2X$	m
Dichte :	ρ = const	kg/m³
Wärmekapazität :	c = const	kJ/kgK
Wärmeleitfähigkeit :	λ = const	W/Km
Wärmeübergangskof. :	α = const	W/Km²

1. Methode nach Gröber

Temperaturleitungsgleichung (1 Ortskoordinate (x)):

$$\partial_t T(x,t) = a\,\partial_x^2 T(x,t) \tag{1}$$

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} > 0 \tag{2}$$

Umgebung T_u : Temperatursprung $T_A \to T_\infty$ zur Zeit $t = 0$.

$$|x| > X: \quad T_u = T_A = \text{const} \quad \dots \quad t < 0 \tag{3a}$$

$$T_u = T_\infty = \text{const} \quad \dots \quad t > 0 \tag{3b}$$

Anfangsbedingungen für Platte :

$$|x| < X: \quad T(x,t) = T_A \quad \dots \quad t < 0 \tag{3c}$$

$$T(x,\infty) = T_\infty \quad \dots \quad t \to \infty \tag{3d}$$

Bedingungen an Plattenoberflächen, Randbedingungen (RB)

$$|x| = X$$

Randbedingungen 1. Art:

$$T_0(t) = T(x = \pm X, t) = T_u(t) = \begin{cases} T_A & \dots \quad t < 0 \\ T_\infty & \dots \quad t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Oberflächentemperatur = Umgebungstemperatur

(4) entspricht extrem größer WÜ – Zahl $\alpha \to \infty$.

Randbedingung 2. Art

Wärmestrom durch **Oberfläche** ist gemäß Fourier bestimmt durch:

a) WÜ bei $x = \pm X \;, \quad A = 1$

$$q = \alpha \;\; T_u - T_0 \tag{5}$$

$T_0(t) \doteq T(x = \pm X, t)$

b) WL in Platte bei $x = \pm X$

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x = \pm X} \tag{6}$$

Energiehaltung (5), (6):

$$\underline{-\frac{\lambda}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x = \pm X} + T_0 \;\; t \;\; = T_u \;\; t} \tag{7}$$

Spezialfall von (7) für Temperatursprung (3):

$$-\frac{\lambda}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x = \pm X} = 0 \qquad \ldots \qquad t < 0$$

(8)

$$-\frac{\lambda}{\alpha} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x = \pm X} + T_0 \;\; t \;\; = T_\infty \ldots \qquad t > 0$$

Randwärmestrom Randtemperatur

Für $\alpha \to \infty$ geht RB (8) in RB (4) über.

Formulierung des Randwertproblems (1-3,8) in dimensionslosen Koordinaten.

$$\xi \;=\; \frac{x}{X} \quad \ldots \quad -1 < \xi < 1 \tag{9}$$

$$\tau \;=\; \frac{a}{X^2}t \quad \ldots \quad \text{Fourier} - \text{Zeit} \tag{10}$$

Reduzierte Temperatur

$$\theta\;\;\xi,\tau \;=\; \frac{T\;\;x,t\;\; - T_\infty}{T_A - T_\infty} \le 1 \tag{11}$$

$$(9)\;:\; dx \;=\; X\,d\xi \tag{12}$$

$$(10):\; dt \;=\; \frac{X^2}{a}d\tau \tag{13}$$

$$(1{,}9-11)\;:\qquad \partial_\tau\,\theta \;=\; \partial_\xi^2\,\theta \tag{14}$$

$$(8{,}9-11)\;:\;\; \partial_\xi\theta\;\Big|_{|\xi|=1} \;=\; 0 \quad \ldots \quad \tau < 0 \tag{15a}$$

$$-\frac{1}{Bi}\underbrace{\partial_\xi\theta\;\Big|_{|\xi|=1}} + \theta_0\;\;\tau \;\;=\; 0 \quad \ldots \quad \tau > 0 \tag{15b}$$

Ankathete, Steigung $\theta\;\;1,\tau$ am Rand Red. Wandtemperatur

Biozahl:

$$Bi \;=\; \frac{\alpha X}{\lambda} \tag{16}$$

Reduzierte Oberflächentemperatur

$$\theta_0(t) = \theta(t, \xi = \pm 1) = \frac{T_0(t) - T_\infty}{T_A - T_\infty} \tag{17}$$

Randwertproblem (14,15) nur numerisch über Reihenentwicklungen lösbar.

Ergebnisse darstellbar in **Gröber – Diagrammen**

mit 1 Systemparameter (Bi). $\rightarrow$ Folgeseiten.

Thermische Mitteltemperatur der Wand (V):

$$\bar{T}(t) = \frac{\int_V \rho c T(x,t)\, dV}{\int_V \rho c dV} \tag{18}$$

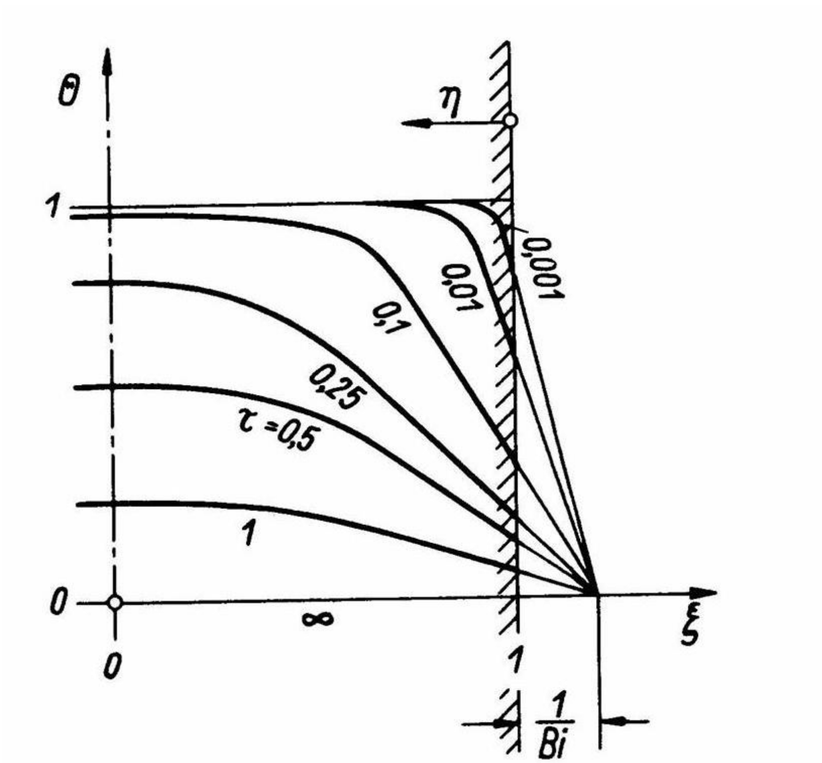
$$\bar{\theta}(t) = \frac{\bar{T}(t) - T_\infty}{T_A - T_\infty} \tag{18A}$$

$$\bar{\theta}(\tau) = \int_0^1 \theta(\xi, \tau)\, d\xi \tag{18B}$$

Vom Körper in (0,t) aufgenommene Wärme:

$$\dot{Q}(t) = \rho c V (T_\infty - T_A)(1 - \bar{\theta}(t)) \tag{19}$$

Figuren G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7



Instationäres Temperaturfeld Erwärmen/Kühlen

Platte: Dicke 2X, $\xi = \frac{x}{X}$

Zylinder: Durchmesser 2R, $\xi = \frac{r}{R}$

Figur G1: Temperaturfeld $\theta \;\; \xi,\tau,\mathrm{Bi}$ einer Platte bei der Randbedingung 3. Art

Zusammenfassung

Beschreibung des Erwärmungs- / Abkühlungsvorganges der Platte durch reduzierte Temperaturen und Diagramme:

Dimensionslose Koordinaten

$$0 \le \xi = \frac{x}{X} \le 1$$

Fourier Zeit

$$\tau = \frac{at}{X^2}$$

Biot – Zahl der Platte :

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha X}{\lambda}$$

Reduzierte Temperatur

$$\theta(\xi,\tau) = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_A - T_\infty}$$

Oberflächentemperatur

$$\theta(\tau) = \theta(\xi = 1,\tau) = \frac{T(X,t) - T_\infty}{T_A - T_\infty}$$

Mitten – oder Achsentemperatur

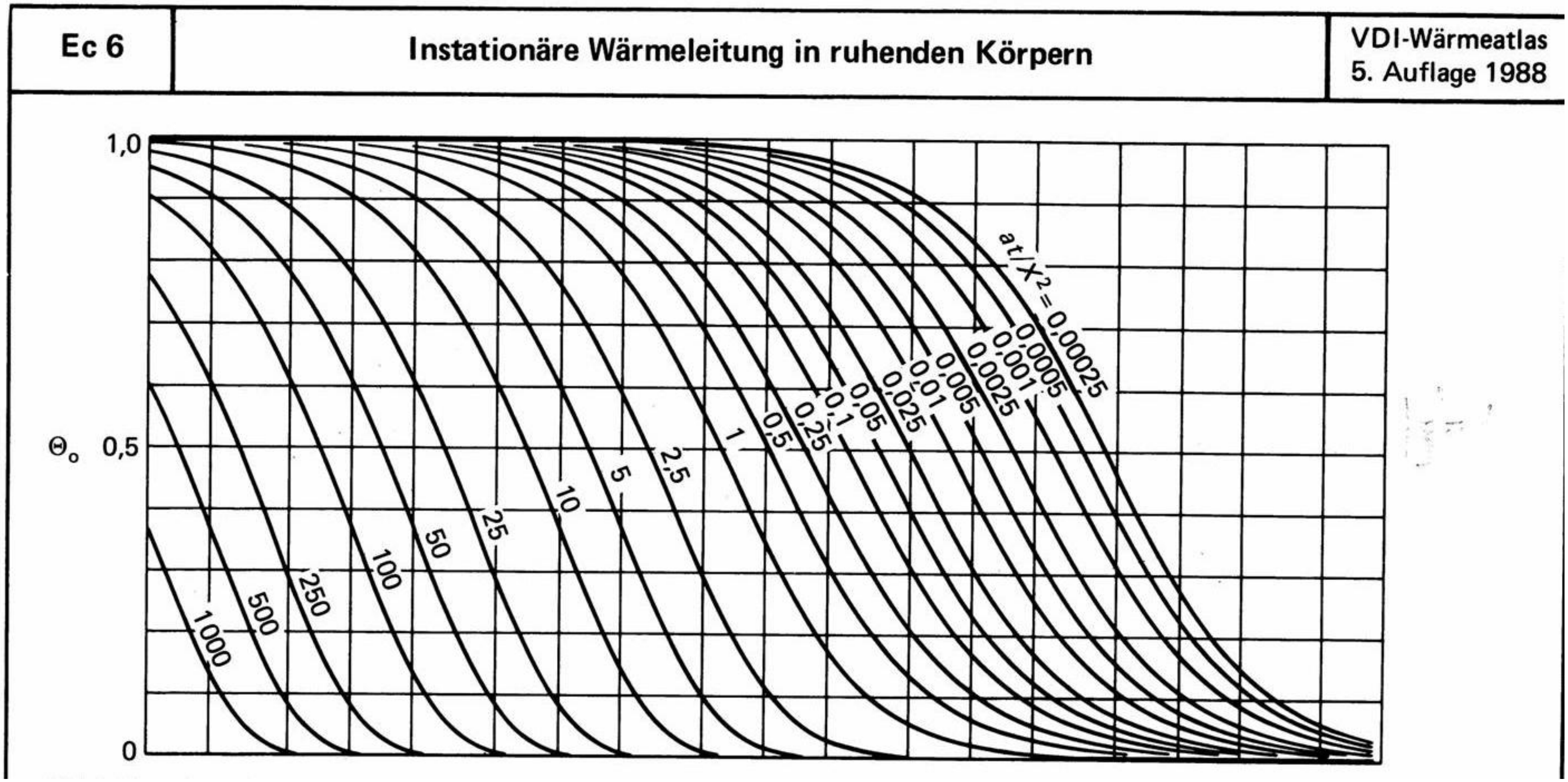
$$\theta_m(\tau) = \theta(\xi = 0,\tau) = \frac{T(0,t) - T_\infty}{T_A - T_\infty}$$

Thermische Mitteltemperatur

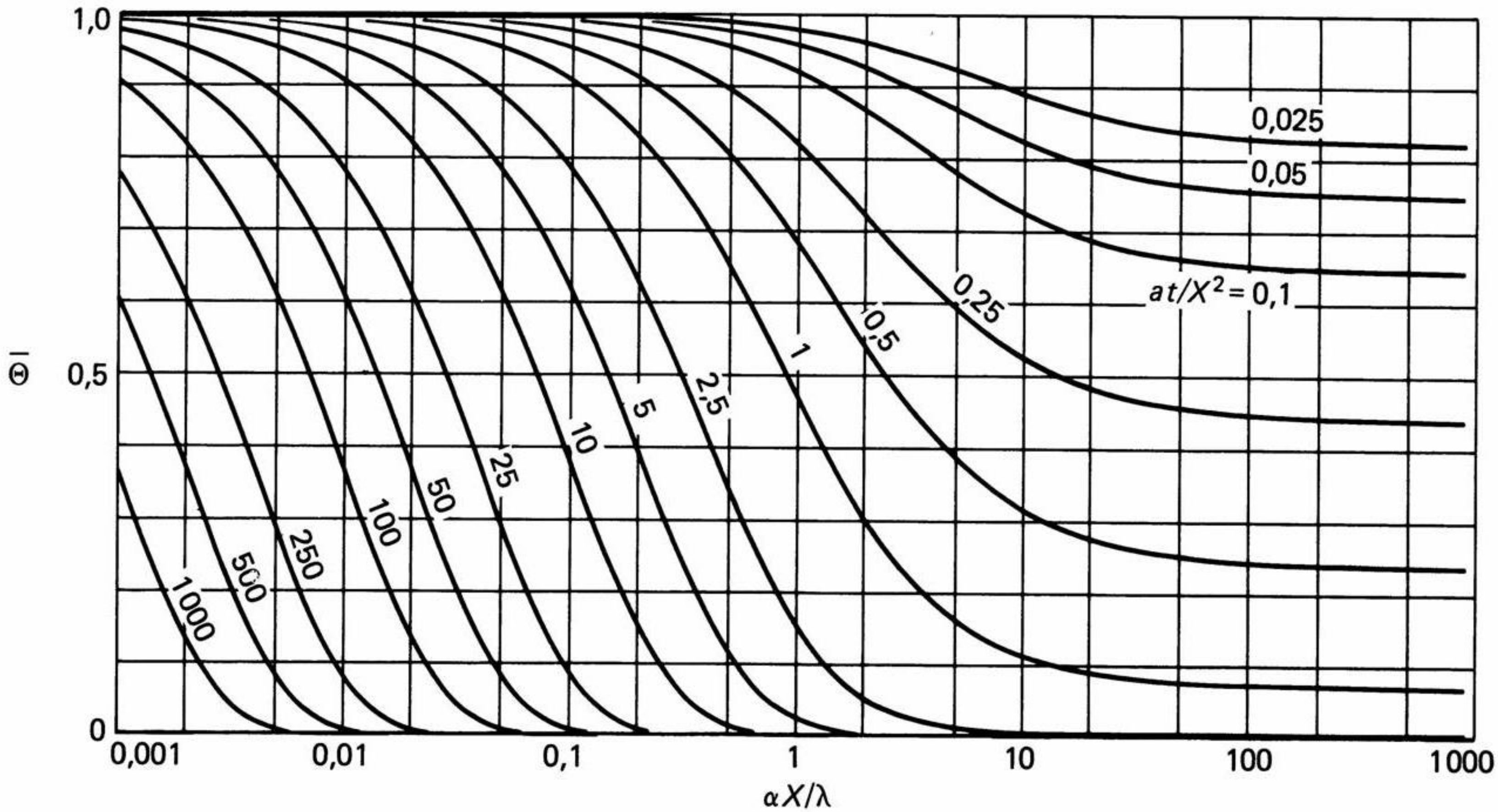
$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{\bar{T}(t) - T_\infty}{T_A - T_\infty}$$

Diagramme : $\theta^{\cdots}_{\ldots} = \theta^{\cdots}_{\ldots}(\mathrm{Bi},\tau)$

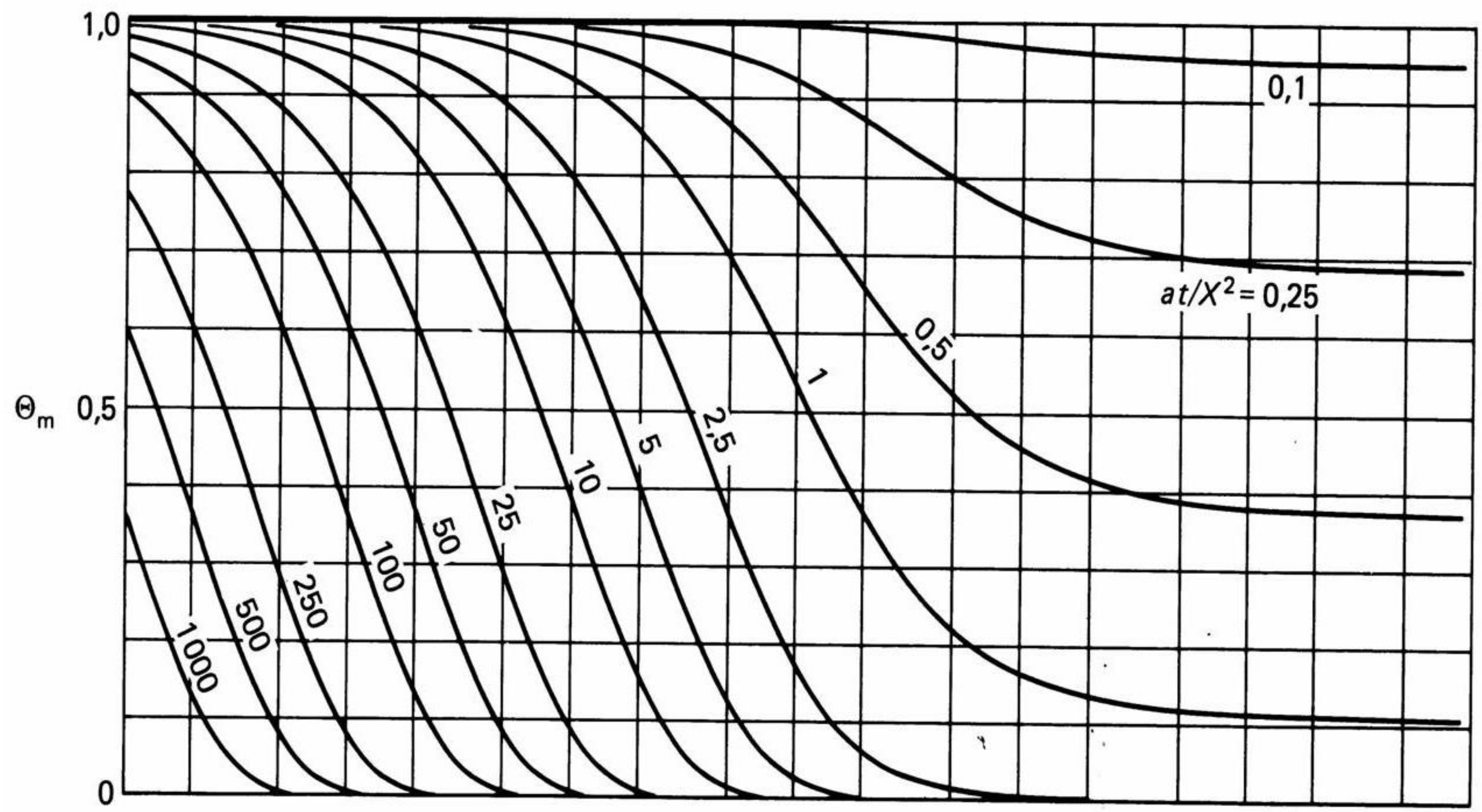
$\ldots = 0,\ m,\ ^{-}$



Figur G2: Normierte Oberflächentemperatur einer ebenen Platte als Funktion der Biot-Zahl $Bi = \alpha X/\lambda$. Plattendicke: 2X.



Figur G3: Normierte kalorische Mitteltemperatur $\bar{\theta}$ einer ebenen Platte als Funktion der Biot-Zahl $\mathrm{Bi} = \alpha X/\lambda$. Plattendicke: 2X



Figur G4: Normierte Mittentemperatur θ_m einer ebenen Platte als Funktion der Biot-Zahl $\mathrm{Bi} = \alpha X/\lambda$. Plattendicke: 2X

Zylinder $d = 2R$

Erwärmung / Abkühlung

Analoge Behandlung wie Festplatte.

Dimensionslose Koordinaten

$$\xi = \frac{r}{R}$$

Fourier Zeit

$$\tau = \frac{at}{R^2}$$

Biot – Zahl

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$$

Reduzierte Temperatur

$$\theta(\xi,\tau) = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_A - T_\infty}$$

Oberflächentemperatur

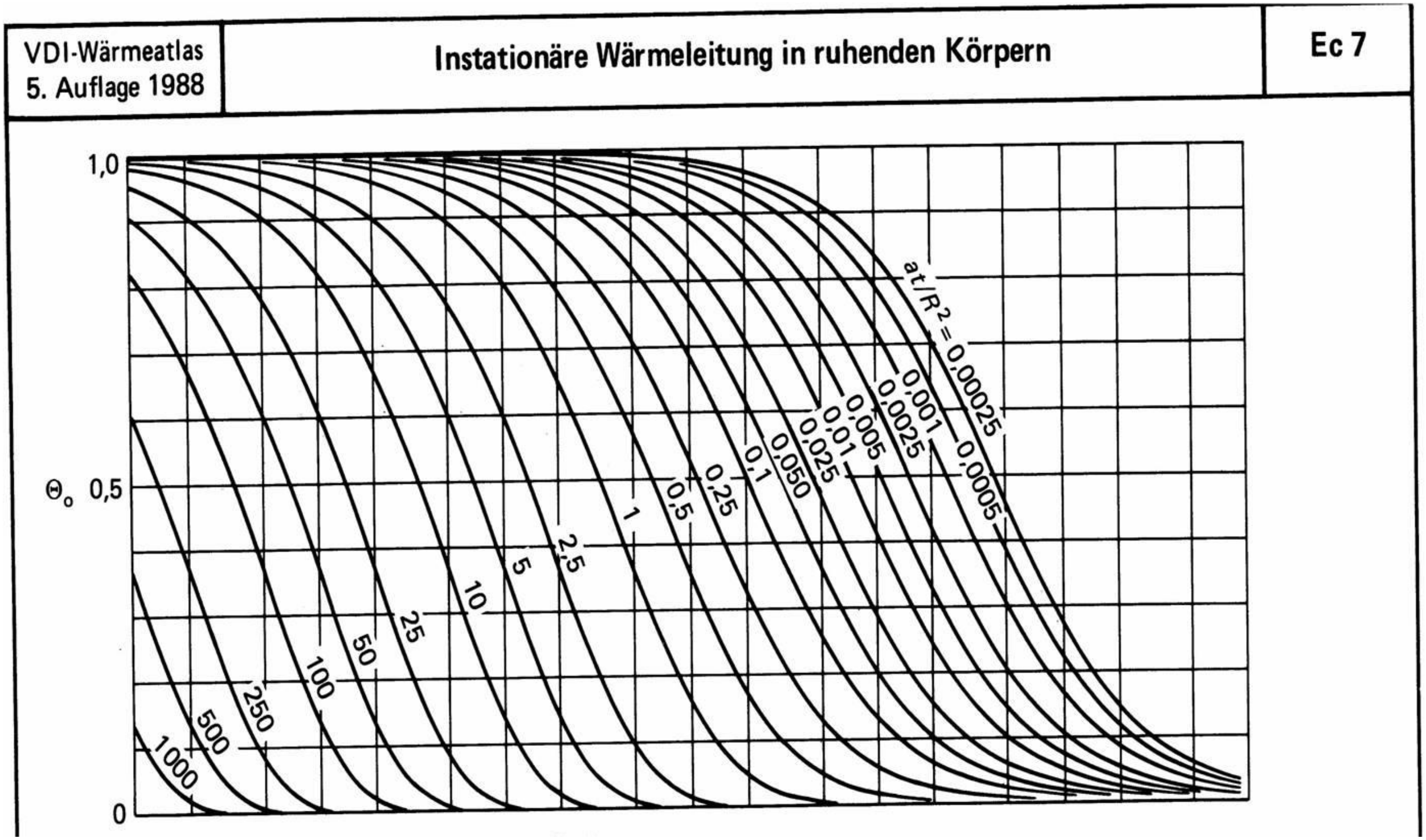
$$\theta_0(\tau) = \theta(\xi = 1,\tau) = \frac{T(R,t) - T_\infty}{T_A - T_\infty}$$

Mitten – oder Außentemperatur

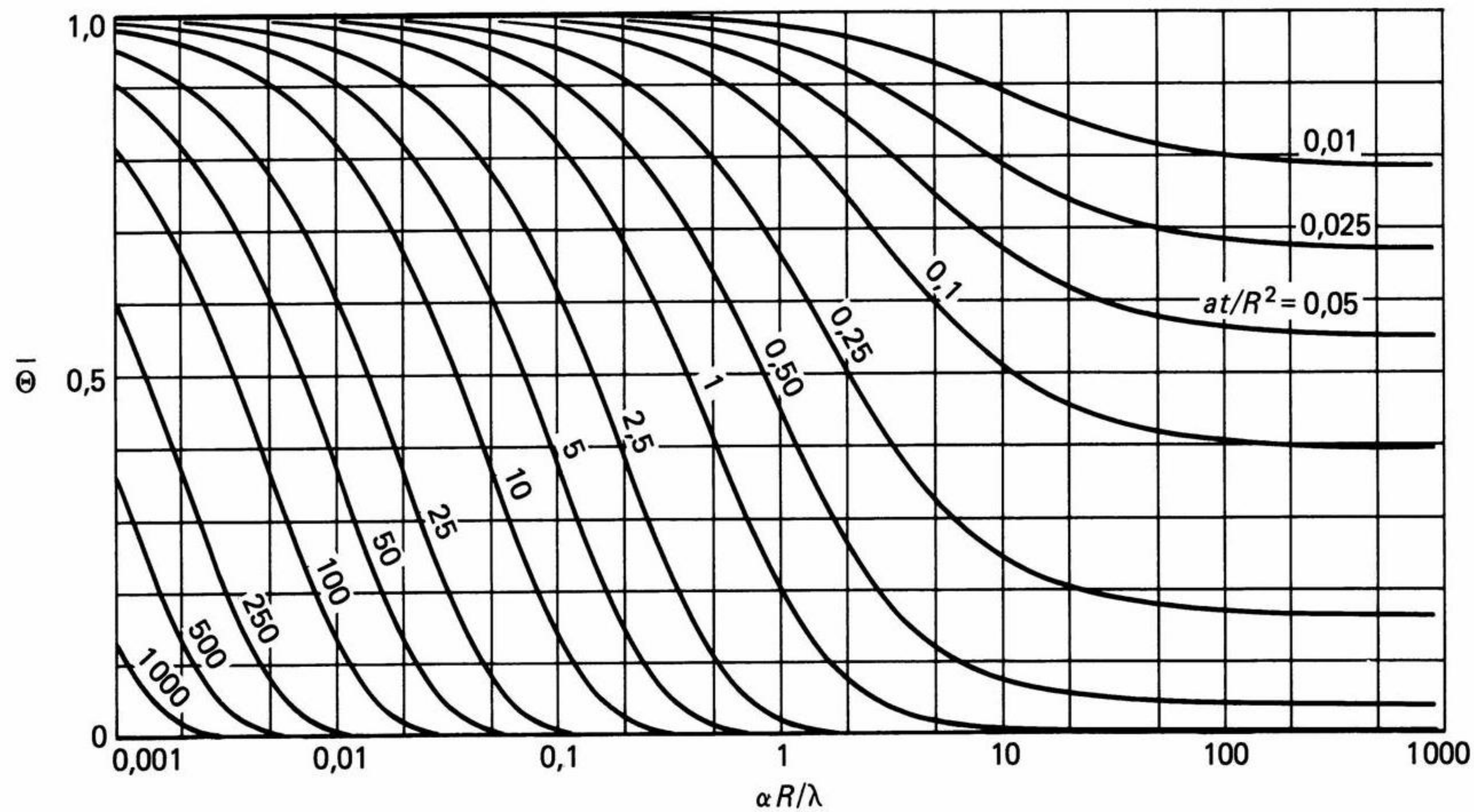
$$\theta_m(\tau) = \theta(\xi = 0,\tau) = \frac{T(r = 0,t) - T_\infty}{T_A - T_\infty}$$

Thermische Mitteltemperatur

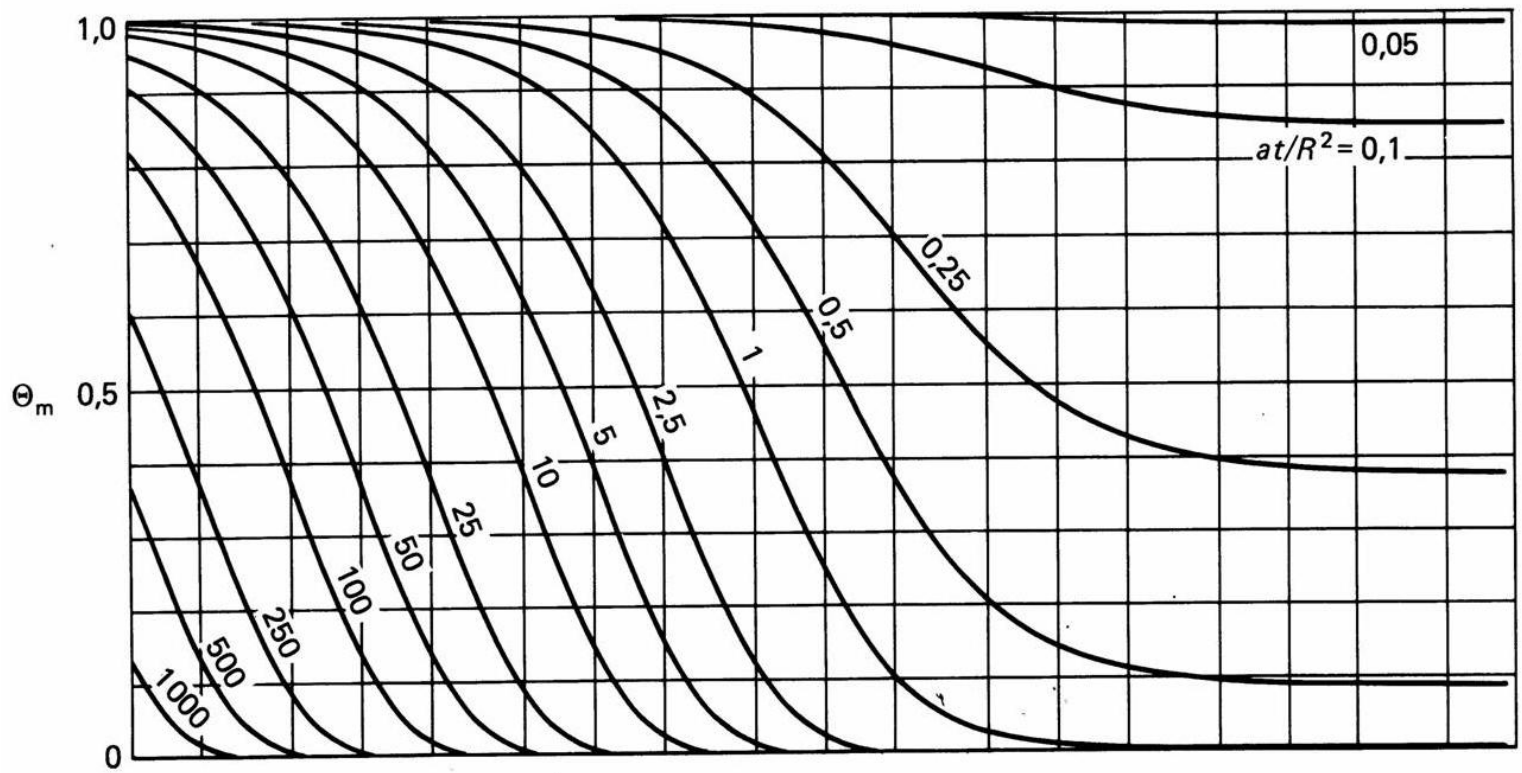
$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{\bar{T}(t) - T_\infty}{T_A - T_\infty}$$



Figur G5: Normierte Oberflächentemperatur θ_0 eines Zylinders als Funktion der Biot-Zahl $\mathrm{Bi} = \alpha R/\lambda$. Zylinderdurchmesser: 2R.



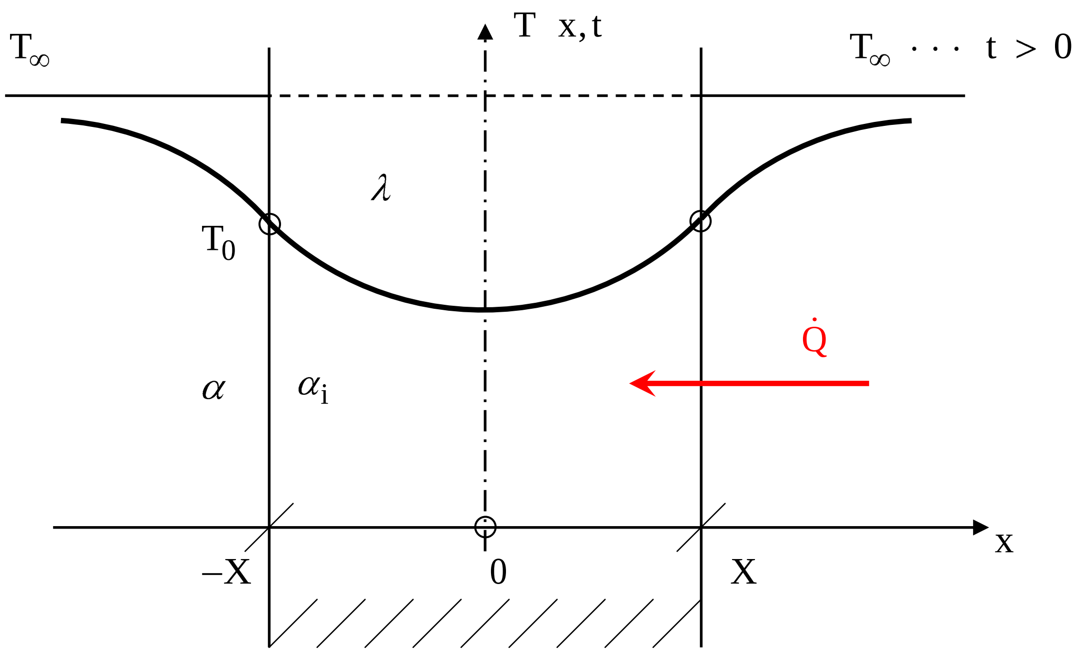
Figur G6: Normierte thermische Mitteltemperatur $\bar{\theta}$ eines Zylinders als Funktion der Biot-Zahl $\mathrm{Bi} = \alpha\mathrm{R}/\lambda$. Zylinderdurchmesser: 2R.



Figur G7: Normierte Temperatur θ_m auf der Achse eines Zylinders als Funktion der Biot-Zahl $\mathrm{Bi} = \alpha R/\lambda$. Zylinderdurchmesser: 2R

2. Näherungsmethode nach Schlünder

Erwärmung / Abkühlung einer ebenen Wand



$T_0(t) = T(x = \pm X, t)$
Randtemperatur

Einführung eines fiktiven
Innern Wärmeübergangskoeffizienten α_i
der Platte gemäß

$$\dot{Q}(t) = \alpha_i A \left[T_0(t) - \bar{T}(t)\right] \tag{21}$$

$\bar{T}(t)$: Thermische Mitteltemperatur (18)

Beachte: $\alpha_i(t)$ ist grundsätzlich aus Lösung des Randwertproblems (14,15) gemäß (17-19) numerisch berechenbar, wird im Folgenden aber als konstanter Systemparameter angesehen.

Äußerer Wärmeübergang

$$\dot{Q} = \alpha A \;\; T_\infty - T_0 \tag{22}$$

Energiebilanz & Kalorische Zustandsgleichung der Platte

$$\dot{Q} \;\; t = c\rho V \dot{\bar{T}} \;\; t \tag{23}$$

$$V = 2XA \tag{24}$$

Elimination von $\dot{Q}, T_0$ aus (21 – 23) gibt ODE für Mitteltemperatur $\bar{T}$ t :

$$(21) \quad T_0 = \bar{T} + \frac{\dot{Q}}{\alpha_i A}$$

$$(22) \quad T_0 = T_\infty - \frac{\dot{Q}}{\alpha A}$$

$$\dot{Q} \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_i A} + \frac{1}{\alpha A} \right)}_{1/kA} = T_\infty - \bar{T}$$

$$(23) \qquad c\rho V \dot{\bar{T}} = kA \;\; T_\infty - \bar{T}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha} = \text{const} \;\ldots\; \text{Modell!} \tag{25}$$

$$\bar{T} - T_\infty \;^{\bullet} = -\frac{kA}{c\rho V} \;\; \bar{T} - T_\infty \tag{26}$$

$$\underline{\bar{T} \;\; t \;\; - T_\infty = \;\; T_A - T_\infty \;\; e^{-\frac{kA}{c\rho V} t}} \tag{27}$$

Mitteltemperaturdifferenz $\bar{\bar{T}} - T_\infty$ nimmt unter der Voraussetzung (25) zeitlich exponentiell ab!

Exponent in Gl. (27): Umformung auf dimensionslose Größen:

$$\tau = \frac{at}{X^2} = \frac{\lambda t}{c\rho X^2}$$

$$Bi = \frac{\alpha X}{\lambda}$$

$$V = 2AX$$

(25),(27)

$$\frac{kAt}{c\rho V} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha}} \frac{\cancel{A}\,\cancel{c\rho}\,X^2}{\lambda\,\cancel{c\rho}\,2\cancel{A}X}\tau = \frac{\tau}{2\left(\frac{1}{Nu_i} + \frac{1}{Bi}\right)} \qquad (28)$$

"Innere Nusselt – Zahl"

$$Nu_i = \frac{\alpha_i X}{\lambda} \qquad (29)$$

Nu_i ist grundsätzlich eine Funktion der Zeit, kann aber näherungsweise als konstant angesehen werden.

Abklingverhalten der reduzierten Mitteltemperatur

$$0 \le \bar{\theta}\ \tau = \frac{\bar{\bar{T}}\ t - T_\infty}{T_A - T_\infty} \le 1$$

(27)

$$\bar{\theta}\ \tau = \exp\left\{-\frac{\tau}{2\left(\frac{1}{Bi} + \frac{1}{Nu_i}\right)}\right\} = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_R}\right) \qquad (30)$$

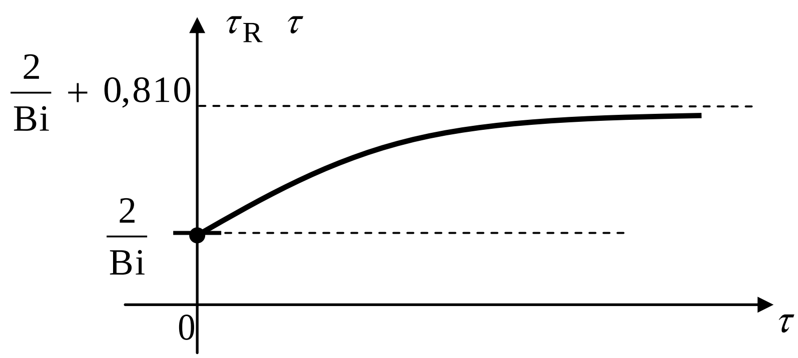
Näherungslösung für $\mathrm{Nu_i}\ \ \tau$ für alle $\tau > 0$:

$$\mathrm{Nu_i^2}\ \ \tau \quad = \quad 6{,}09 + \frac{4}{\pi\tau} \qquad (31)$$

$$\rightarrow \qquad \alpha_i\ \ \tau \quad = \quad \frac{\lambda}{X}\left(6{,}09 + \frac{4}{\pi\tau}\right)^{1/2} \qquad (32)$$

(30): Thermische Mitteltemperatur steigt / fällt immer exponentiell mit zeitlich größer werdenden Relaxationszeit τ_R , vgl. (30):

(31):
$$\tau_R\ \ \tau \quad = 2\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}} + \frac{1}{\left(6{,}09 + \frac{4}{\pi\tau}\right)^{1/2}}\right) \qquad (33)$$



Eine analoge Lösung existiert für den Erwärmungsvorgang eines **Zylinderstabes**.

$X \rightarrow R$ ... Radius, α, λ, ρ, c

$$\bar{\theta}\ \tau = \exp\left\{-\frac{2\tau}{\frac{1}{Bi}+\frac{1}{Nui}}\right\} \tag{34}$$

$$Bi = \frac{\alpha_a R}{\lambda}$$

$$\tau = \frac{at}{R^2} = \frac{\lambda t}{c\rho R^2}$$

$$Nui^2 = 8{,}36 + \frac{4}{\pi\tau}$$

Aufgaben A23, A24