

I. Wärmeleitung in Systemen mit Phasenwechsel *)

- *) Verdampfen, Kondensieren
Erstarren, Schmelzen
Sublimieren, Desublimieren etc.

Ruhende Systeme

Temperaturverlauf: $T(\underline{x}, t) = ?$

Schwierige Probleme!

Numerische Methoden, großer Aufwand

Näherungsannahmen

Beschränkung auf

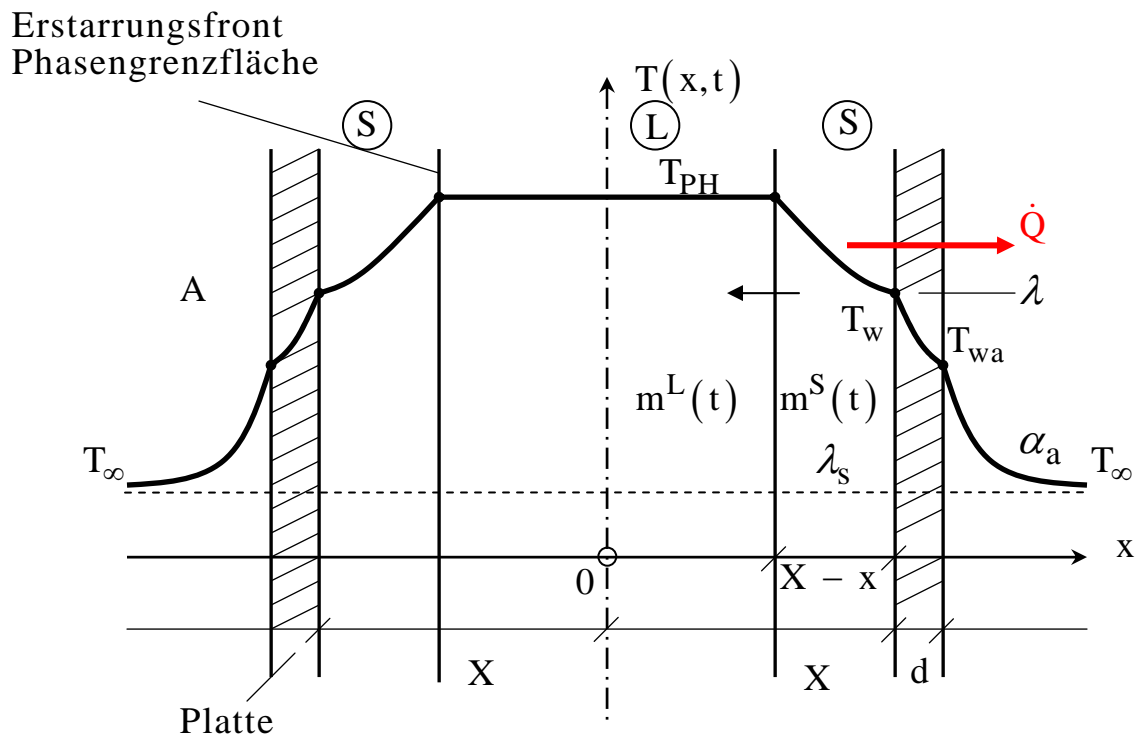
Schmelz - / Erstarrungsvorgänge

Platten – oder Zylinderrohrsysteme

1. Flüssigkeit zwischen lotrechten Platten
 Kalte Umgebung, keine Randeﬀekte

$$t_E = \int_0^{t_E} dt = \int_{x=X}^0 \frac{dx}{\dot{x}} = ? \tag{0}$$

Ges: Erstarrungszeit (t_E)



$$\Sigma = \Sigma^L + \Sigma^S \tag{1}$$

Gesamtes System
Flüssigphase(L)
Festphase(S)

$$X = x(t) + (X - x(t)) \quad |A \tag{1a}$$

$$V = V^L(t) + V^S(t) \tag{1b}$$

Erstarren, Wärmeabfuhr:

$$\text{Ges.:} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} < 0 \quad (2)$$

Phasenumwandlungstemperatur

Fluid: Reiner Stoff

$$T_{\text{PH}} = T_{\text{PH}}(p) = \text{const} \quad \text{bei} \quad p = \text{const}$$

Massenbilanz

$$\dot{m}^{\text{L}} + \dot{m}^{\text{S}} = 0 \quad (4)$$

$$\rho^{\text{L}} A \dot{x}^{\text{L}} + \rho^{\text{S}} A \dot{x}^{\text{S}} = 0 \quad (4a)$$

$$V : \quad \rho^{\text{L}}(T_{\text{PH},p}) = \rho^{\text{S}}(\bar{T}_{,p}^{\text{S}}) \quad (5)$$

$$(4a,5) \quad \dot{x}^{\text{L}} = -\dot{x}^{\text{S}} = -\dot{x} \quad (6)$$

Gl. (5) gilt nicht exakt für Wasser!

→ Sprengen von Rohrleitungen durch Eisexpansion.

Enthalpiebilanz:

$$\sum = \quad \underline{\dot{H}} = \underline{\dot{Q}} \quad \dots p = \text{const} \quad (7)$$

$$\sum^L + \sum^S : \quad H = h^S m^S + h^L m^L \quad (8)$$

$$(4) \quad \dot{H} = (h^L - h^S) \dot{m}^L \quad (9)$$

$$h^L = h^L(T_{PH}, p) \quad (10L)$$

$$h^S = h^S(\bar{T}^S, p) \quad \text{Modell!}$$

$$\cong h^S(T_{PH}, p) + c_p^S (\bar{T}^S - T_{PH}) \quad (10S)$$

$$\bar{T}^S \cong \frac{1}{2} (T_{PH} + T_w)$$

$$= T_{PH} + \underbrace{\frac{1}{2} (T_w - T_{PH})}_0$$

$$(9,10) \quad \dot{H} \cong (h^L(T_{PH}) - h^S(T_{PH})) \dot{m}^L$$

$$\dot{H} \cong r_{SL} \dot{m}^L \quad (11)$$

Wärmeaustausch

$$\dot{Q} = kA(T_\infty - T_{HP}) \quad \begin{cases} > 0 & \text{Schmelzen} \\ < 0 & \text{Erstarren} \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_a} + \frac{d}{\lambda} + \frac{X-x}{\lambda_S} \quad (13)$$

$$(7,11,12) \quad \underline{r_{SL} \dot{m}^L = kA(T_\infty - T_{PH})} \quad \dots \quad \text{ODE für } x(t) \quad (14)$$

$$\dot{m}^L = \rho A \dot{x}, \quad k = k(x)$$

$$(13,14) \quad \left(\frac{X}{\lambda_S} \left(1 - \frac{x}{X} \right) + \underbrace{\frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}}_{\frac{1}{k_a} = \text{const}} \right) r_{SL} \rho A \dot{x} = A (T_\infty - T_{PH}) \quad (15)$$

$$1 + \frac{\rho r_{SL} X}{T_{PH} - T_\infty} \left(\frac{x}{X} \right) \cdot \left(\frac{X}{\lambda_S} \left(1 - \frac{x}{X} \right) + \frac{1}{k_a} \right) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{k_a} = \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a} = \text{const} \quad (16a)$$

"Äußerer k - Wert" der Platte

Dimensionslose Variable

$$\xi = \frac{x}{X} \quad (17)$$

$$\tau = \frac{a_s t}{X^2} = \frac{\lambda_s t}{\rho_s c_p^s X^2} \quad \dots \quad \text{Fourier - Zeit} \quad (18)$$

Festphase!

$$(17,18) \quad x = \xi X$$

$$t = \frac{\rho_s c_p^s X^2}{\lambda_s} \tau \quad (18a)$$

$$(16) \quad 1 + \text{PH} \left(\frac{1}{\text{Nu}(\xi)} + \frac{1}{\text{Bi}} \right) \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right) = 0 \quad (19)$$

$$\text{PH} = \frac{\rho_L r_s L}{\rho_s c_p^s (T_{\text{PH}} - T_\infty)} \quad \dots \quad \text{Phasenumwandlungszahl} \quad (20)$$

$$\frac{1}{\text{Nu}(\xi)} = 1 - \xi \quad \dots \quad \text{fiktive Nusselt - Zahl} \quad (21)$$

$$\frac{1}{\text{Bi}} = \frac{\lambda_s}{X k_a} \quad \dots \quad \text{fiktive Biot - Zahl} \quad (22)$$

Erstarrungszeit (τ_E, t_E) der Flüssigkeit (T_{PH}) zwischen den Platten (k_a, T_∞).

Integration von (19)

$$PH \left(1 - \xi + \frac{1}{Bi} \right) d\xi = -d\tau \quad \left| \int_{\xi=1}^0 \int_{\tau}^{\tau_E} \right. \quad (23)$$

$$\underline{\tau_E = PH \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi} \right)} \quad (24)$$

$$(18a) \quad \underline{t_E = \frac{\rho_L r_{sL} X}{T_{PH} - T_\infty} \left(\frac{X}{2\lambda_s} + \frac{1}{k_a} \right)} \quad (25)$$

(24): Minimale reduzierte Erstarrungszeit

(25): Minimale physikalische Erstarrungszeit

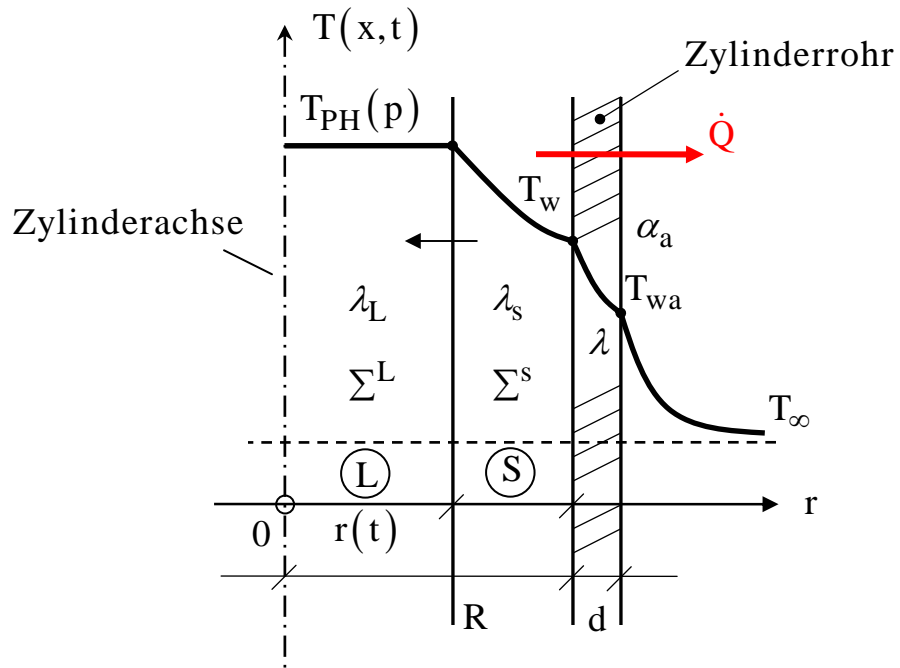
Tatsächliche Zeiten sind viel größer wegen
Näherungsannahme (11).

Korrekturdiagramme für

$$\frac{\tau_E}{\tau_{E,\min}} = \frac{t_E}{t_{E,\min}}$$

siehe nach Seite J10.

2. Flüssigkeit im lotrechten Zylinderrohr
Erstarrungsprozess in kalter Umgebung.



Zylinderrohr: Innenradius R
 Wanddicke d
 Länge ℓ

Thermodynamisches System

$$\Sigma = \Sigma^L + \Sigma^s$$

$$H = H^L + H^s$$

1.HS $\dot{H} = \dot{Q} \quad \dots \quad p = \text{const} \quad (28)$

$\dot{H} = r_{sL} \dot{m}^L \quad \dots \quad \text{Vernachlässigung eines Teils der Enthalpie der Festphase deren Temperatur unter } T_{PH} \text{ liegt!} \quad (29)$

$$\dot{Q} = -\frac{1}{R}(T_{\text{PH}} - T_{\infty}) \quad \dots \quad \text{Wärmeabfuhr} \quad (30)$$

Wärme widerstand eines Zylinders (zeitlich veränderlicher Dicke $(R - r(t) + d)$), vgl. Aufgabe A11 (U-Boot).

$$R = R_{\text{WÜ,a}} + R_{\text{WL,WAND}} + R_{\text{WL,SOLID}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{2\pi\ell}{\frac{1}{\alpha_a(R+d)} + \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{R+d}{R}\right) + \frac{1}{\lambda_s} \ln\left(\frac{R}{r}\right)} \quad (31)$$

$$(28-31) \quad V : \quad R \gg d$$

$$1 + \frac{\rho^L r_{sL}}{T_{\text{PH}} - T_{\infty}} r \left(\frac{dr}{dt} \right) \left(\frac{1}{\lambda_s} \ln\left(\frac{R}{r(t)}\right) + \frac{1}{Rk_a} \right) = 0 \quad (32)$$

$$\xi = \frac{r}{R} \quad (33)$$

$$\tau = \frac{a_s t}{R^2} = \frac{\lambda_s t}{\rho^s c_p^s R^2} \quad \dots \quad \text{Fourierzeit} \quad (34)$$

$$r(t) = \xi(t)R \quad (33a)$$

$$t = \frac{1}{\lambda_s} \rho^s c_p^s R^2 \tau \quad (34a)$$

$$(32 - 34) \quad 1 + \text{PH} \left(-\ln \xi + \frac{1}{\text{Bi}} \right) \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right) = 0 \quad \left| \int_{\xi=1}^0 \int_{\tau=0}^{\tau_E} \right. \quad (35)$$

$$\text{PH} = \frac{\rho_L r_{sL}}{\rho_s c_p^s (T_{\text{PH}} - T_\infty)} \dots \text{Phasenumwandlungszahl} \quad (36)$$

$$\frac{1}{\text{Bi}} = \frac{\lambda_s}{R} \underbrace{\left(\frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a} \right)}_{1/k_a} \dots \text{Biot Zahl des Systems} \quad (37)$$

Integration von (35) :

$$-\tau_E = \text{PH} \left(-\int_1^0 \underbrace{\xi \ln \xi}_{\substack{1 \text{ u}' \\ v}} d\xi + \frac{1}{\text{Bi}} \int_1^0 \xi d\xi \right)$$

$$\tau_E = \frac{1}{2} \text{PH} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}} \right) \quad (38)$$

Erstarrungszeit :

$$(36 - 38) \quad t_{E, \text{Zylinder}} = \frac{1}{2} \frac{\rho_L r_{sL} R}{T_{\text{PH}} - T_\infty} \left(\frac{R}{2\lambda_s} + \frac{1}{k_a} \right) \quad (40)$$

Anmerkung

Wegen Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit der Enthalpie der Festphase (H^s), vgl. (10S, 29), geben die Ausdrücke (25, 40) nur Minimalwerte der Erstarrungszeiten der Flüssigkeit an. Genauere Zeiten ermittelbar mit Korrektur – Diagrammen gemäß Anlage (VDI).

Korrekturkurven für Erstarrungszeiten von Flüssigkeiten (VDI)

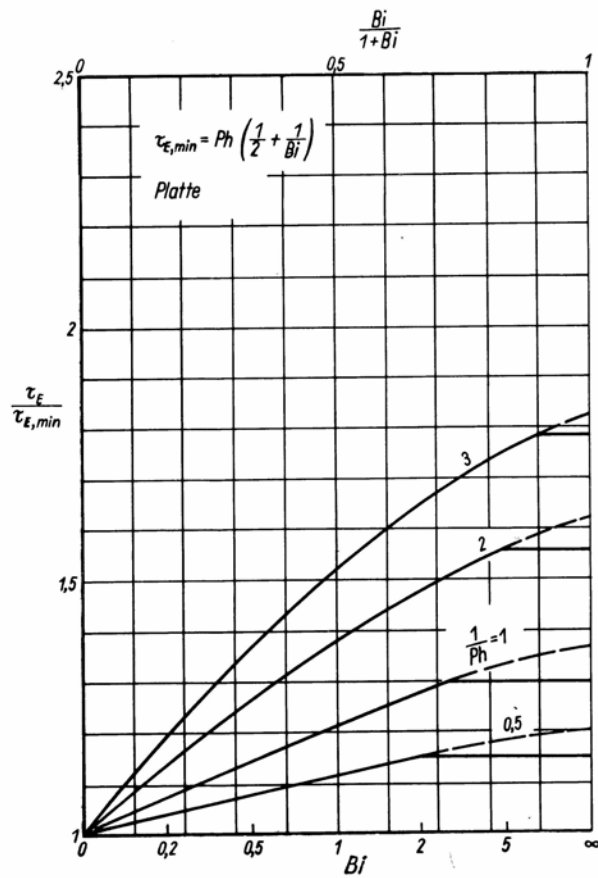


Bild 14. Ermittlung der wahren Erstarrungszeit τ_E für Platte, Zylinder und Kugel.

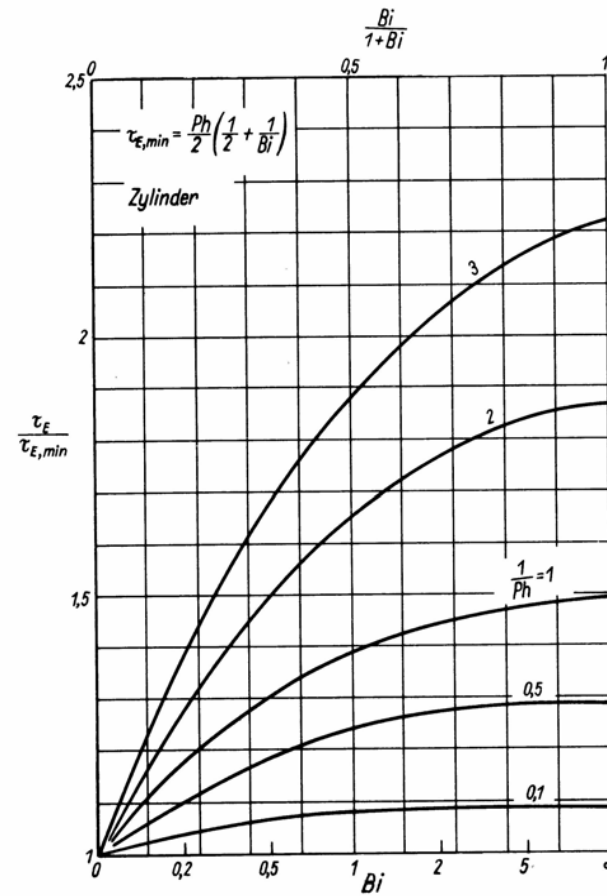
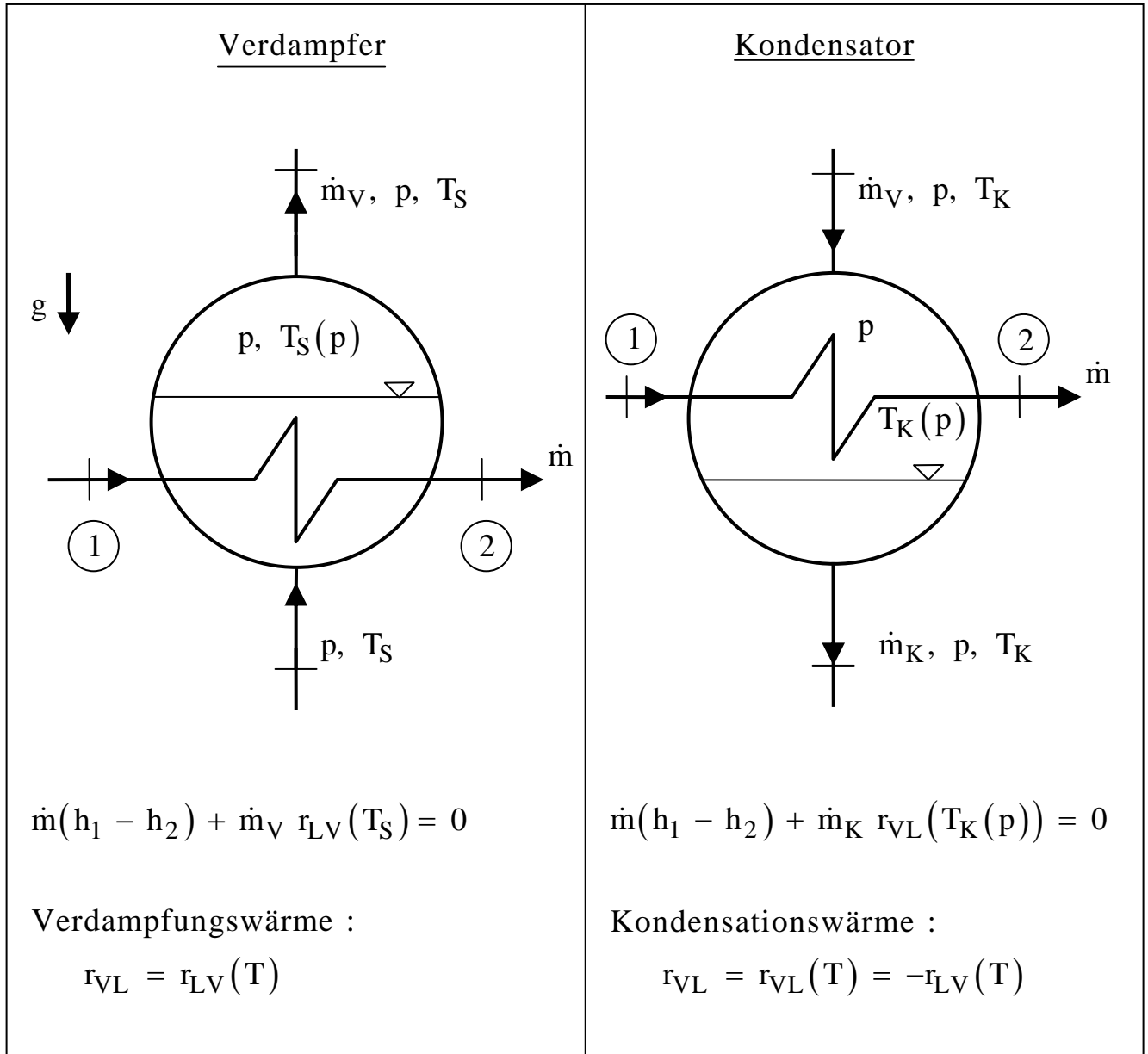
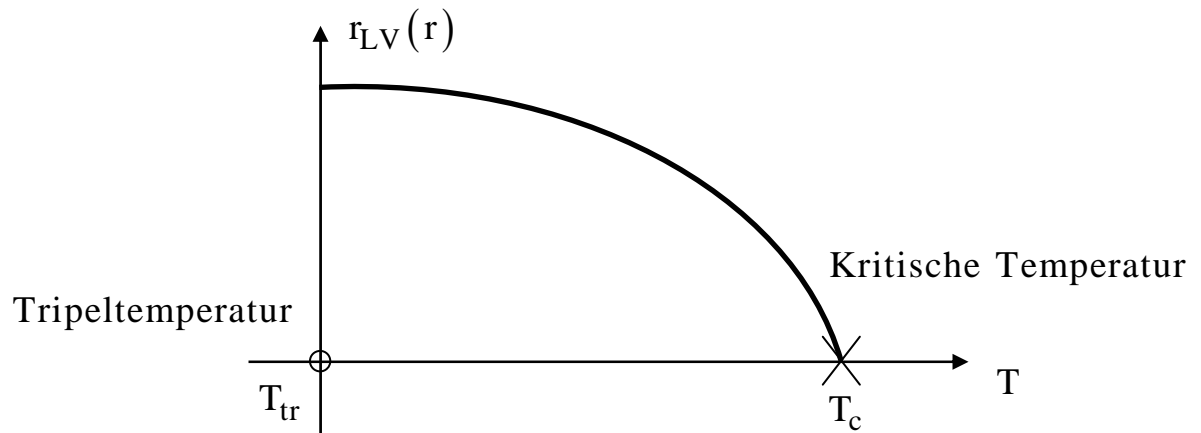


Bild 15. Ermittlung der wahren Erstarrungszeit τ_E für Platte, Zylinder und Kugel.

Wärmeübertragung beim Verdampfen / Kondensieren

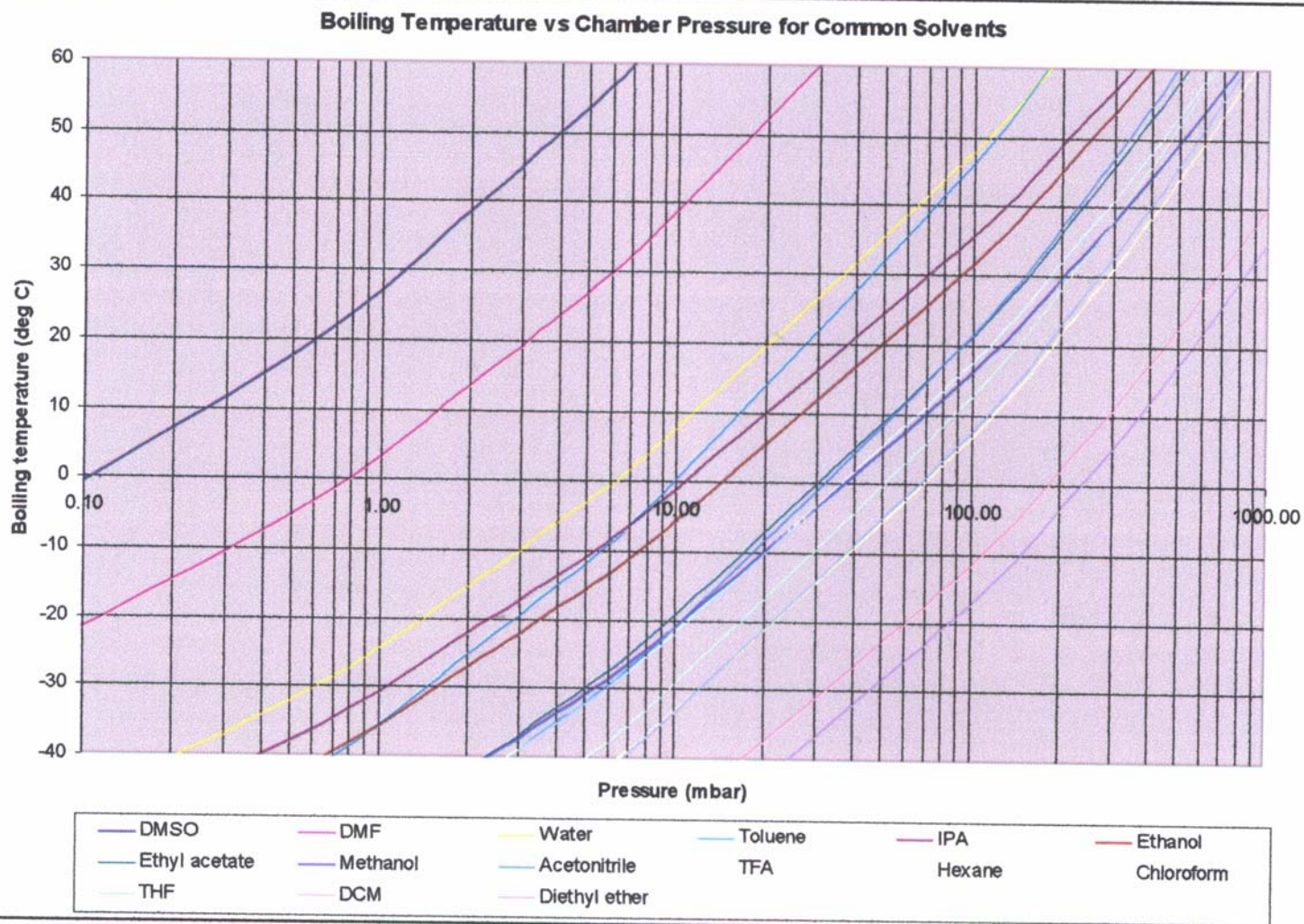


Reines Fluid

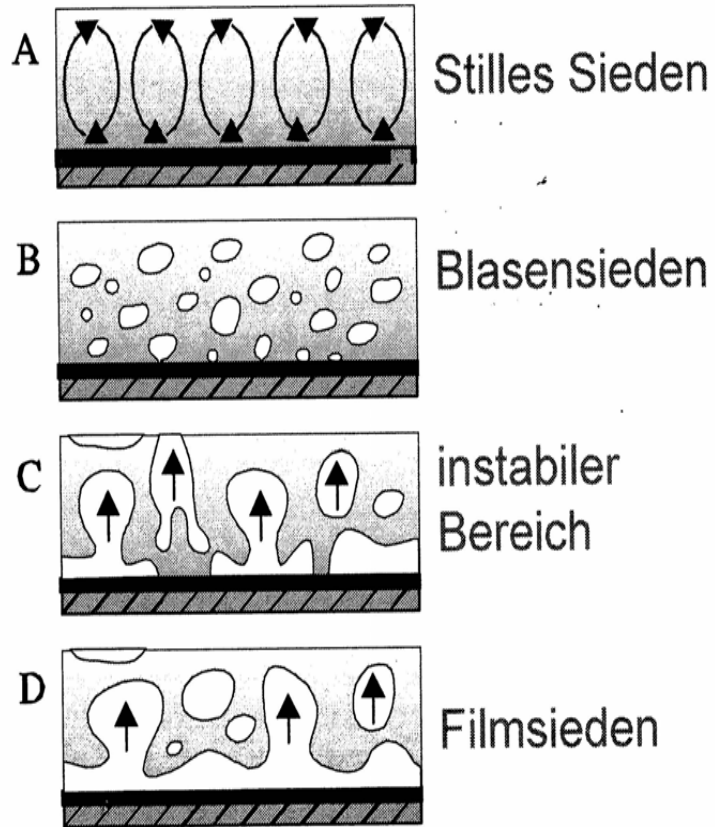


Literatur:

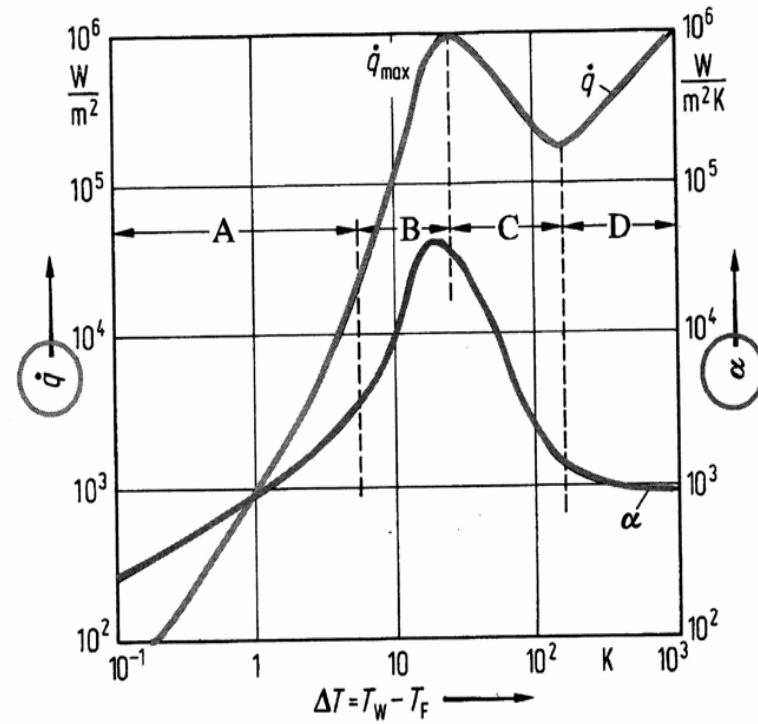
1. Karl Stephan, Wärmeübergang beim Kondensieren und beim Sieden, Springer, Berlin etc, 1988.
2. VDI - Wärmeatlas



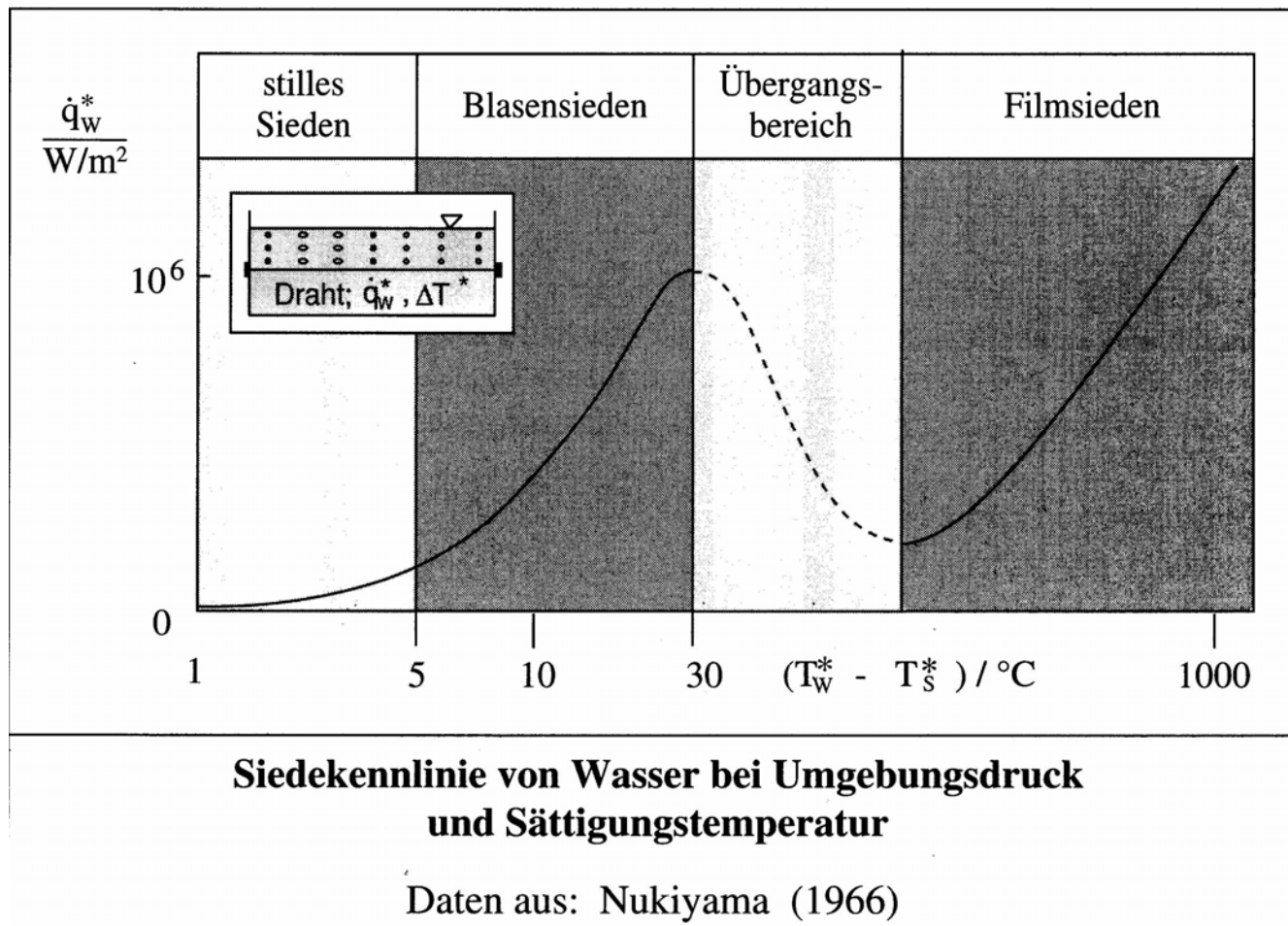
Wärmeübergang beim Sieden und Verdampfen einer Flüssigkeit (1)



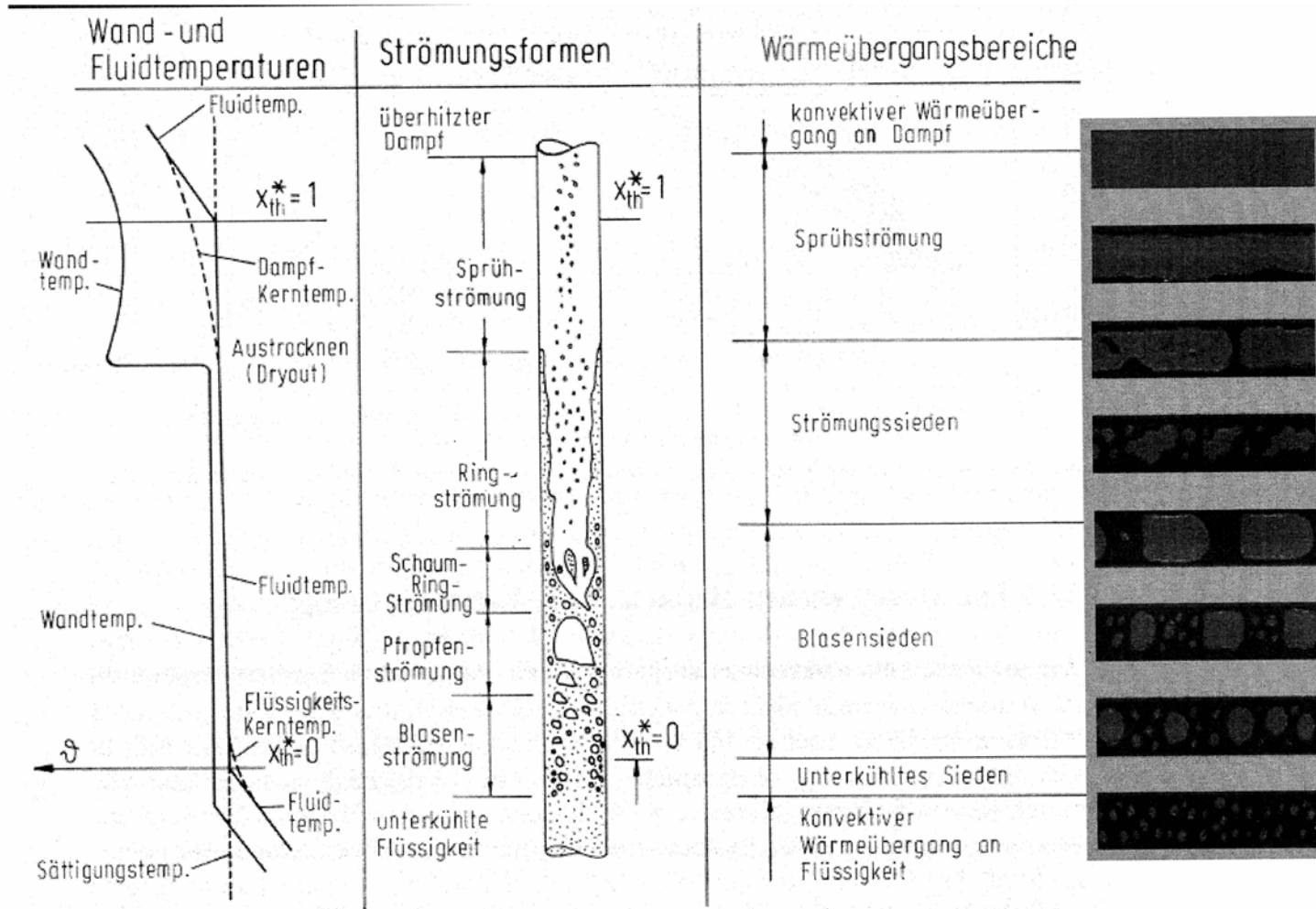
Nukiyama -Kurven



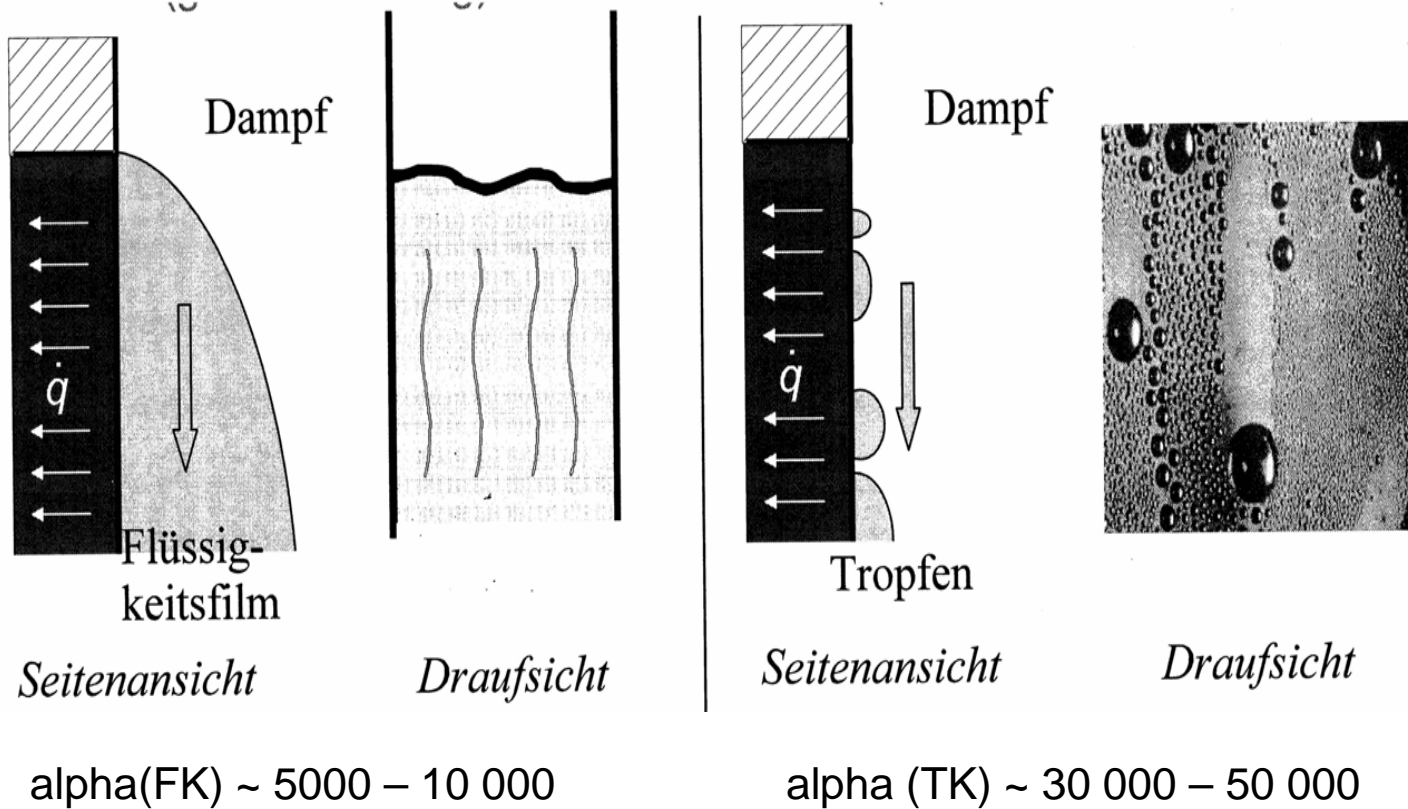
Wärmeübergang beim Sieden und Verdampfen einer Flüssigkeit (2)



Wärmeübergang beim Strömungssieden im lotrechten Rohr



Film- und Tropfenkondensation eines gesättigten Dampfes Lotrechte Wand



Tropfenkondensation von Wasserdampf an unterkühltem Schauglas

