J. Wärmeübertragung durch Strahlung

Wärmestrahlung

1. Phänomenologie
   Optische Koeffizienten, Gesetze von Lambert u. Kirchhoff
2. Physik der Strahlung (Dualismus)
3. Thermodynamik der Strahlung
   Boltzmann T^4 –Gesetz, Planck-Formel
4. Beispiele: Strahlungsaustausch parallele Wände
   Solarstrahlung → Erdmitteltemperatur

1. Phänomenologie

Strahlung = Energiestrom, Wärmeempfindung → Wärmestrom

Beispiele: Glühendes Eisen

Infrarot-Wärmestrahler, Wärmebox !

Glühlampen, Sonne, Erde,...

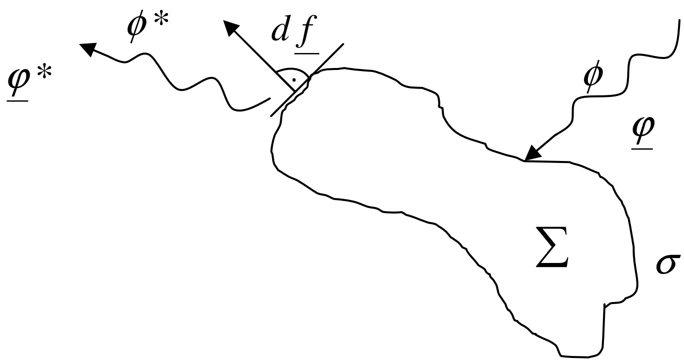
1. Strahlung ist nicht an Materie gebunden !
2. Strahlung breitet sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit

   (ca. 300 000km/s) aus.

Alle Körper $\left(\sum\ \right)$

a) empfangen Strahlung (ϕ, [W]) aus Umgebung

b) senden Strahlung in Umgebung aus ($\phi^*, [W]$) Flächendichte der einfallenden Strahlung oder Strahlungsfluss.



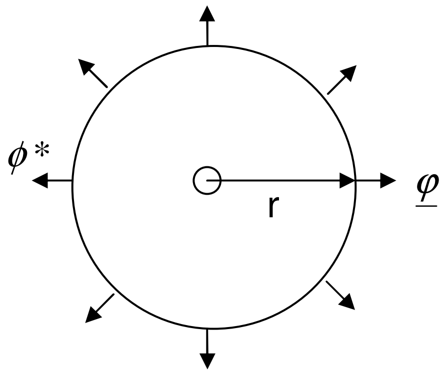
$$\phi = \oint_0 \left(\underline{\varphi} \cdot d\underline{f}\right), \qquad \phi^* = \oint_0 \left(\underline{\varphi}^* \cdot d\underline{f}\right)$$

$$[\phi] = \left[\phi^*\right] = \mathrm{W}, \qquad [\varphi] = \left[\varphi^*\right] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Strahlungsgleichgewicht:

$$\phi = \phi^* \tag{J1}$$

Lambert-Gesetz für „Punktstrahler“ (Sonne-Erde)



Energiesatz:

$$\phi^* = 4\pi r^2 \varphi = \text{const.} \tag{J2}$$

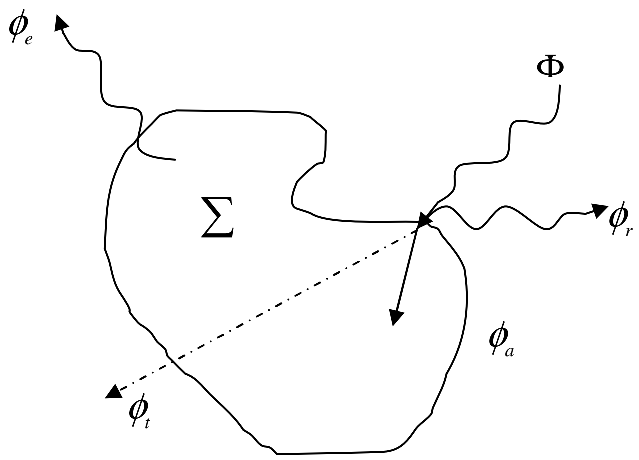
$$\varphi(r) = \frac{\phi^*}{4\pi r^2} \tag{J2a}$$

$$\text{Strahlungsverhältnis}(r_1, r_2)\left(\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}\right) = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \tag{J3}$$

Beispiel: Solarstrahlung, Rom, Sommer, keine Wolke,

$$\varphi_0 = 1kW \;/\; m^2\,!$$

Strahlungskoeffizienten / Optische Koeffizienten



ϕ Einfallende Strahlung

ϕ_r Reflektierte Strahlung

ϕ_a Absorbierte Strahlung

ϕ_t Transmittierte Strahlung

ϕ_e Emittierte Strahlung

$\rho = \frac{\phi_r}{\phi}$: Reflexionskoeffizient

$\alpha = \frac{\phi_a}{\phi}$: Absorptionskoeffizient

$\tau = \frac{\phi_t}{\phi}$: Transmissionskoeffizient

$\varepsilon = \frac{\phi_e}{\phi}$: Emissionskoeffizient

Energiesatz:

$$\Phi = \phi_a + \phi_r + \phi_t \qquad / \frac{1}{\phi}$$

$$1 = \alpha + \rho + \tau \qquad \text{(J4)}$$

$$0 \leq \alpha, \rho, \tau \leq I \qquad \text{(J4a)}$$

(J4) Spezialfälle

$(J4)$ α	+ ρ	+ τ	= 1 Körper:
1	0	0	schwarz*)
0	1	0	weiß
0	0	1	Vakuum, Gas

$$\text{Festkörper}: \quad \tau \to 0, \quad \alpha + \rho = 1 \tag{J4b}$$

$$\text{Gase, Flüssigkeiten}: \rho \to 0, \quad \alpha + \tau = 1 \tag{J4c}$$

*) Realisierung: Blende Lochkamera

Kirchhoff-Gesetz

Emissionsvermögen eines Körpers:

Definition $$\varepsilon = \frac{\phi_e}{\phi_{es}} \tag{J5}$$

Strahlungsgleichgewicht (Energiesatz)

$$\phi_e = \phi_a$$

$$\text{Schwarzer Körper}: \quad \phi_{es} = \phi_{as} = \phi$$

$$\varepsilon = \frac{\phi_a}{\phi} = \alpha \tag{J6}$$

$$\varepsilon = \alpha$$

Gute Absorber sind gute Ermitter etc.

2. Physik der Strahlung

Strahlung aller Art besitzt eine **dualistische Natur**.

1) **Elektromagnetische Welle**

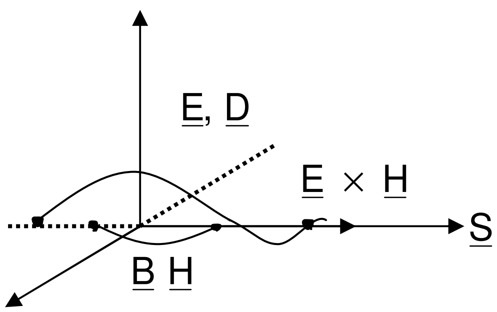
H. Hertz, J.C. Maxwell

Wärmestrahlung: 0,1 µm < λ < 10³ = 1mm

λ: Wellenlänge

ν: Frequenz

c: Lichtgeschwindigkeit



$$c = \lambda\,\nu \qquad (J7)$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \text{Festkörperschwingungen}$$

$$= (0{,}3\cdot 10^{15} - 3\cdot 10^{12})\,s^{-1} \qquad \rightarrow \text{gute Absorption der Wärmestrahlung (Resonanz)}$$

Optische Koeffizienten: Summenwerte über Einzelbeiträge der Moden, d.h. Wellen vorgegebener Wellenlänge (λ)

$$\omega = \int_0^\infty \omega_\lambda(\lambda', T)\,d\lambda' \qquad (J8)$$

$$\omega = \alpha, \rho, \tau$$

2. Photonen-Gas

Strahlung ist quantisiert , d.h. besitzt Korpuskelcharaker! *)

L. de Broglie, A. Einstein (Photoeffekt)

Strahlungsteilchen → Photon, bewegt sich mit c !

Energie $E_{PH} = h\nu$ $(J9)$

Impuls $p_{PH} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}$ $(J10)$

Masse $m_{PH} = \frac{E}{c^2} = \frac{h}{c\lambda} = \frac{P}{c}$ $(J11)$

Ruhmasse $m_0 = 0!$

Planck Wirkungsquantum: h = 6,62 $\cdot 10^{-34}\, Js$

Wärmestrahlung:

$\lambda = 1$ µm:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 3 \cdot 10^{15}\, s^{-1}$$

$$E = h \cdot \nu = 19,9 \cdot 10^{-19}\, J$$

$$m_{PH} = \frac{h}{c\lambda} = 2,2 \cdot 10^{-33}\, g$$

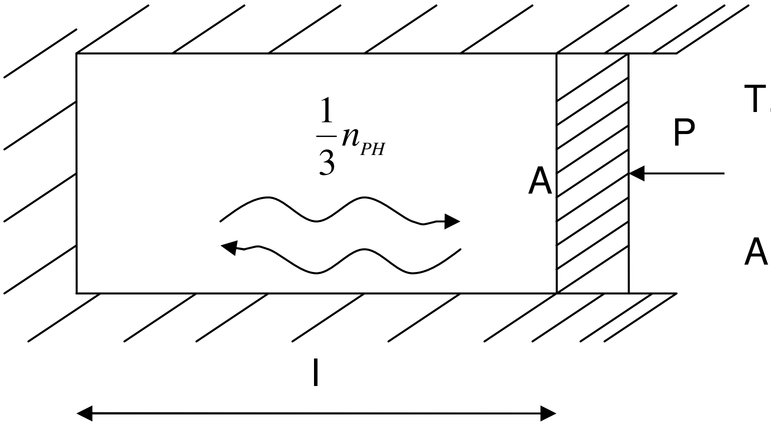
$*$) Materie besitzt Wellencharakter → “Materiewellen“

(L. de Broglie)

3. Thermodynamik der Strahlung

Spezialfall: Strahlung im Hohlraum schwarzer Körper

→ **“Schwarze Hohlraumstrahlung“**



T…Temperatur der **Wände** des Hohlraums

A = l²…Kolbenfläche

Berechnung des Strahlungsdruckes, vgl. Kin. Gastheorie

$$p = \frac{F}{l^2} = \frac{1}{l^2} \cdot \frac{1}{3} n_{PH} \cdot F_{PH} = \frac{1}{3} n_{PH} \frac{1}{l^2} \cdot \frac{h}{\lambda} \frac{c}{l}; F: \quad \textit{Kraft durch Stöße der Photonen auf Wand}$$

Newton-Grundgleichung:

$$F_{PH} = \frac{d}{dt}(mv) = \underbrace{\cancel{2} P_{PH}}_{\text{Impulsänderung}} \cdot \underbrace{\frac{c}{\cancel{2} l}}_{\text{Anzahl Stösse pro Zeiteinheit}}$$

$$p = \frac{1}{3} \underbrace{n_{PH} \frac{h\nu}{l^3}}_{\downarrow}$$

$$p = \frac{1}{3} u$$ ...Strahlungsdruck auf Energiedichte Photonengas (J12)

Gedankenexperiment (L. Boltzmann)

2. HS → u = u (T) … unabhängig von Gestalt des Hohlraums (vgl. Ideales Gas) (J13)

Hohlraum-Strahlung $\simeq$ Thermodynamisches System:
Gibbs-Gleichung

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV \tag{J14}$$

Neue Variable: $U_1 V \rightarrow n = \frac{U}{V}, \qquad V$

$$dU = d\,(uV) = udV + Vdu \tag{J15}$$

$$(J14, J15):\; dS(u,V) = \frac{V}{T(u)}du + \frac{4}{3}\frac{u}{T(u)}dV \tag{J16}$$

Maxwell-Beziehung (Zustandsgröße Entropie)

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial V}\right) = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial u}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{4}{3}\frac{u}{T(u)}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T(u)}\right)$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{u = aT^4}}, \qquad a = const. \tag{J17}$$

Stefan-Boltzmann-Gleichung für Energiedichte der Strahlung eines schwarzen Körpers.

Flächendichte der Strahlung eines schwarzen Körpers:

$$\varphi_S = c \cdot u(T) = c \cdot aT^4$$

$$\varphi_S = \sigma T^4, \quad \sigma = 5{,}8 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2 K^4} \tag{J18}$$

(J18) Ingenieur-Version:

$$\varphi_s = \overline{\sigma}\left(\frac{T}{100K}\right)^4 \qquad (J18a)$$

$$\overline{\sigma} = 5{,}8 W/m^2$$

„Graue Körper“ (ε = α = const.)

$$\varphi = \varepsilon\varphi_s = \varepsilon\sigma T^4 \qquad (J19)$$

$$\varphi = \varepsilon\overline{\sigma}\left(\frac{T}{100K}\right)^4 \qquad (J19a)$$

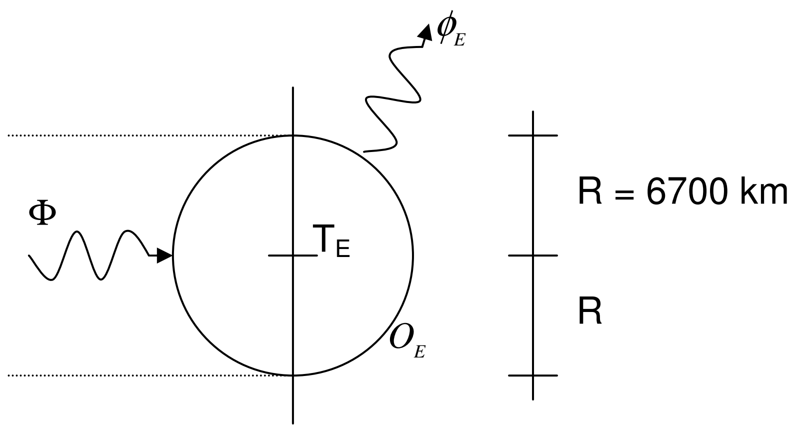
Flächendichte der Strahlung eines „grauen Körpers“ der Temperatur T (Stefan – Boltzmann - Gesetz).

Beispiel 1

Welche Temperatur (T_E) muss die Erde an ihrer Oberfläche als Infrarotstrahler (ε = 0,9) haben, um die Solarstrahlung bei senkrechter Einstrahlung von ca. 1 kW / m² wieder an den Weltraum abgeben zu können.

Hinweis: Erde $\simeq$ Hähnchen am Grillspieß,

Strahlungsbilanz für 1 Umdrehung (24h).



Solarstrahlung: $\Phi = \pi R^2 \varphi$

$\phi_a = a\Phi$

Erdstrahlung: $\phi_E = O_E \varphi_E$

$(J19)$ $= 4\pi R^2 \cdot \overline{\varepsilon\sigma}\left(\frac{T_E}{100K}\right)^4$

Strahlungsgleichgewicht (Mittel über 1 Erdumdrehung)

$$\underline{\phi_a = \phi_E} \qquad (J20)$$

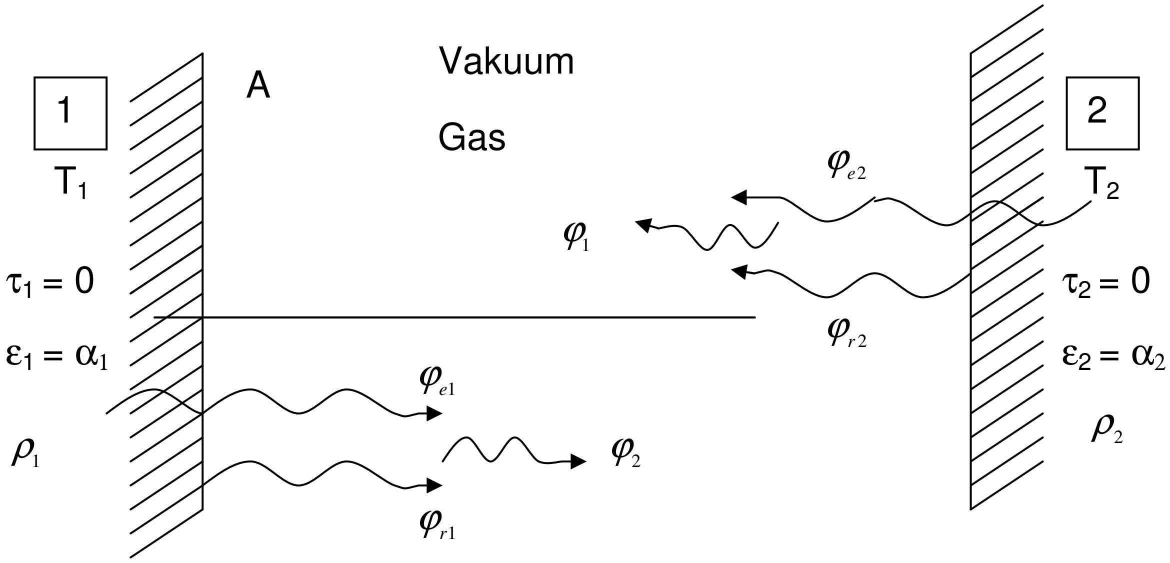
$(\alpha = \varepsilon)$ $\rightarrow \frac{T_E}{100K} = \left(\frac{1000}{4 \cdot 5{,}8}\right)^{1/4} = 2{,}563 \rightarrow$ $T_E = 256{,}3K$

$T_E = -16°C$

Glashauseffekt der Atmosphäre: $T_{E0} \cong 15°C$

Beispiel 2

Strahlungsaustausch zwischen eben begrenzten Hohlräumen verschiedener Temperatur



Strahlungskoeffizienten:

$$1: \quad \tau_1 = 0, \qquad \rho_1 = 1 - \varepsilon_1, \quad \alpha_1 = \varepsilon_1$$
$$2: \quad \tau_2 = 0, \qquad \rho_2 = 1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2$$

φ_i...Strahlungsdichte, die Halbraum i=1,2 empfängt.

ges: $\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$...Flächendichte der Strahlung,
die von 1 nach 2 geht.
Kein Strahlungsgleichgewicht!

$$2 \to 1 : \varphi_1 \quad = \quad \varphi_{e2} + \varphi_{r2} = ? \tag{J21}$$
$$1 \to 2 : \underline{\varphi_2 \quad = \quad \varphi_{e1} + \varphi_{r1}} = ? \tag{J22}$$

Stefan – Boltzmann – Gesetz

Emittierte Strahlung : $\varphi_{\mathrm{ei}} = \varepsilon_i \sigma T_i^4, \; i = 1,2$ (J23)

Reflektierte Strahlung : $\varphi_{\mathrm{ri}} = \rho_i \varphi_i = (1-\varepsilon_i)\varphi_i$ (J24)

(J21-24)

$$\varphi_1 = \varphi_{e2} + (1-\varepsilon_2)\varphi_2$$
$$\underline{\varphi_2 = \varphi_{e1} + (1-\varepsilon_1)\varphi_1} \qquad \text{(J25)}$$

Lineare Gleichungen für $\varphi_1, \;\; \varphi_2$

Umformung, um Differenz $\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$ zu berechnen!

$$\left.\begin{array}{l|l} \varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_2\varphi_2 - \varphi_{\mathrm{e2}} & \varepsilon_1 \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \varepsilon_1\varphi_1 - \varphi_{\mathrm{e1}} & (..\varepsilon_2) \end{array}\right\} +$$
$$\underbrace{(\varphi_2 - \varphi_1)}_{\varphi_{12}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2) = \varepsilon_2\varphi_{e1} - \varepsilon_1\varphi_{e2}$$

(J23)
$$\varphi_{12} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} \qquad \text{(J26)}$$

Wandabstand beliebig ! ...Vakuum

Übertragener Energiestrom:

$$\phi_{12} = A\varphi_{12} \qquad \text{(J27)}$$