Messung von Zinsrisiken mit dem Value at Risk-Konzept

Prof. Dr. Arnd Wiedemann, Universität Siegen

Für die Quantifizierung der potenziellen Barwertverluste einer Bank wurde das statistische Konzept Value at Risk (VaR) entwickelt. Mit dem VaR lässt sich der potenzielle Verlust eines Portefeuilles (z.B. festverzinsliche Wertpapiere) in einer einzigen Risikokennzahl mit einer vorzugebenden Wahrscheinlichkeit erfassen.

Erst mit der Implementierung des VaR-Konzeptes lässt sich der Ansatz eines integrierten Rendite-/Risikomanagements im Rahmen der Gesamtbanksteuerung umsetzen. Der VaR wird hierbei u.a. dafür genutzt, um ein Limitsystem zur Allokation des Risikokapitals aufzubauen und die notwendige Kapitalreserve für unerwartete Verluste zu bestimmen.

I. Einführung in den Value at Risk für Zinstitel

Die Berechnung des VaR kann mit unterschiedlichen Methoden erfolgen. Allen in der Praxis verwendeten Methoden liegt dabei die gleiche Definition des VaR zugrunde: Der VaR ist der maximale Wertverlust eines Portefeuilles, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit innerhalb einer ebenfalls vorgegebenen Haltedauer nicht überschritten wird (vgl. Jorion 2000, S. 22).

Unter dem Wertverlust eines Portefeuilles mit Zinstiteln ist die negative Abweichung des zukünftigen Barwertes (BW_i) von dem aktuellen Barwert (BW_0) der Zinsposition zu verstehen. Die gewählte Haltedauer definiert den betrachteten Zeithorizont zwischen den jeweiligen Barwertveränderungen. Die Schätzung der potenziellen Verluste erfolgt auf Basis der vorliegenden Verteilung der Barwertveränderungen und wird mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage verknüpft.

Das Risikopotenzial einer Zinsposition liegt in der negativen Entwicklung der den Barwert bestimmenden Bewertungsparameter. Für Zinspositionen sind das die laufzeitspezifischen Marktzinssätze. Steigende Zinssätze führen zu sinkenden Barwerten. Im Gegenzug bedeuten sinkende Zinssätze steigende Barwerte. Bei der Risikoanalyse wird für die Beschreibung der Bewertungsparameter synonym die Bezeichnung Risikofaktor verwendet.

Die Ermittlung der Barwerte von Zinspositionen erfolgt durch Diskontierung der laufzeitspezifischen Cash Flows mithilfe der Zerobond-Abzinsfaktoren, die sich aus der zugrunde gelegten Zinsstrukturkurve ableiten lassen. Jede Veränderung der Zinssätze kann in eine entsprechende Veränderung der Zerobond-Abzinsfaktoren umgerechnet werden. (Fußnote: Vgl. Schierenbeck/Wiedemann 1996, S. 13 ff.) Demnach kann auch direkt der Zerobond-Abzinsfaktor und nicht nur der Zinssatz als Risikofaktor für die Zinspositionen fungieren. Die Verwendung von Zerobond-Abzinsfaktoren als Risikofaktoren in der Value at Risk - Berechnung bietet gleichzeitig den Vorteil, dass die relativen Wertschwankungen der Zerobond-Abzinsfaktoren den relativen Barwertveränderungen der Cash Flows der Zinspositionen in den jeweiligen Fristen entsprechen (linearer Zusammenhang).

In das Konzept zur Value at Risk – Berechnung von Zinstiteln soll mit einem Beispiel eingeführt werden. Für die Beispielrechnung wird eine 1-jährige Nullkuponanleihe mit einem Rückzahlungsbetrag von 10.000 EUR betrachtet.

Im ersten Schritt gilt es, den aktuellen Barwert (BW_0) der zur analysierenden Zinsposition zu ermitteln. Hierzu werden die aktuellen Zerobond-Abzinsfaktoren ($ZB\text{-}AF_0$) herangezogen. Aus dem 1-Jahreszins von 5% errechnet sich ein 1-jähriger aktueller Zerobond-Abzinsfaktor von 0,9524 (1÷1,05). Für die Barwertbestimmung wird der Cash Flow der Anleihe (im Beispiel 10.000 EUR am Ende der 1-jährigen Laufzeit) mit dem entsprechenden Zerobond-Abzinsfaktor multipliziert. Folglich ergibt sich für die untersuchte Anleihe ein Barwert von 9.524 EUR.

Danach wird der Cash Flow der Anleihe mit alternativen Werten der Zerobond-Abzinsfaktoren ($ZB\text{-}AF_1$ bis $ZB\text{-}AF_n$) abgezinst, um diverse weitere Barwerte zu erzeugen. Die alternativen Werte der Zerobond-Abzinsfaktoren ergeben sich stets aus den zugrunde liegenden Zinssätzen, die mittels einer Simulation oder aus historischen Beobachtungen bestimmt werden können. Für die Beispielrechnung wurden 100 Werte der Zerobond-Abzinsfaktoren festgelegt (i=1: 0,9527; i=2: 0,9530; i=3: 0,9520;...; i=98: 0,9497; i=99: 0,9512; i=100: 0,9529).

Durch mehrfache Bewertung der Anleihe ergeben sich alternative Barwerte (BW_1 bis BW_{100}), die den aktuellen Barwert der Anleihe (BW_0) von 9.524 EUR über- resp. unterschreiten. Für den VaR sind definitionsgemäß die Wertschwankungen der Anleihe maßgeblich. Deshalb werden im nächsten Schritt die Differenzen zwischen dem aktuellen Barwert (BW_0) und den alternativen Barwerten (BW_1 bis BW_{100}) gebildet (vgl. Abbildung 1):

$\Delta BW_1 = BW_1 - BW_0$ bis $\Delta BW_{100} = BW_{100} - BW_0$

i	1-J-Zins	$ZB\text{-}AF_i$	BW_i	$\Delta BW = Bw_i - BW_0$
0	5,00 %	0,9524	9.524	0
1	4,96 %	0,9527	9.527	+ 3
2	4,93 %	0,9530	9.530	+ 6
3	5,04 %	0,9520	9.520	- 4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
98	5,30 %	0,9497	9.497	- 27
99	5,13 %	0,9512	9.512	- 12
100	4,94 %	0,9529	9.529	+ 5

Abbildung 1: Berechnung der Barwertdifferenzen der Beispielanleihe

Zur Visualisierung der Barwertschwankungen werden in Abbildung 2 die positiven und die negativen Barwertdifferenzen oberhalb und unterhalb des Nullwertes in einem Balkendiagramm abgetragen. Der Nullwert ergibt sich, wenn die alternativen Barwerte mit der Ausgangsgröße BW_0 identisch sind.

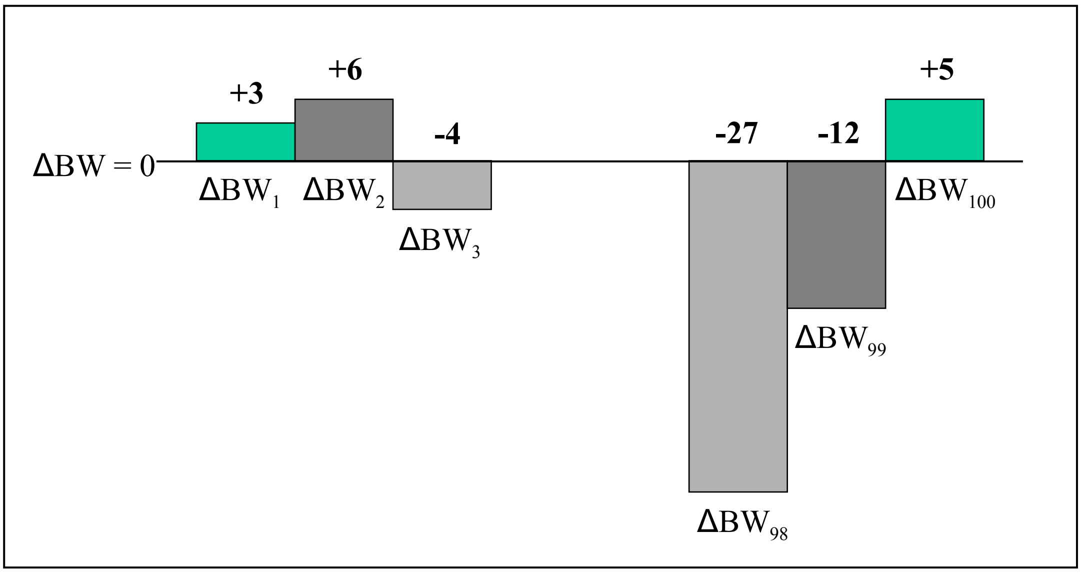


Abbildung 2: Barwertschwankungen der Beispielanleihe

Die ermittelten Ergebnisse der Barwertveränderungen werden anschließend so aufbereitet, dass eine Verteilung der Barwertveränderungen erkennbar wird. Dafür sind zuerst Intervalle mit vorgegebenen Wertbereichen für die Barwertschwankungen zu bilden (im Beispiel 2 EUR). Für jedes Intervall wird anschließend die Häufigkeit der beobachteten Barwertveränderungen ermittelt (vgl. Abbildung 3). Eine Barwertveränderung von mehr als – 22 EUR wurde zum Beispiel dreimal beobachtet. Für das Intervall zwischen 0 EUR und – 2 EUR wurden 9 Ergebnisse gezählt.

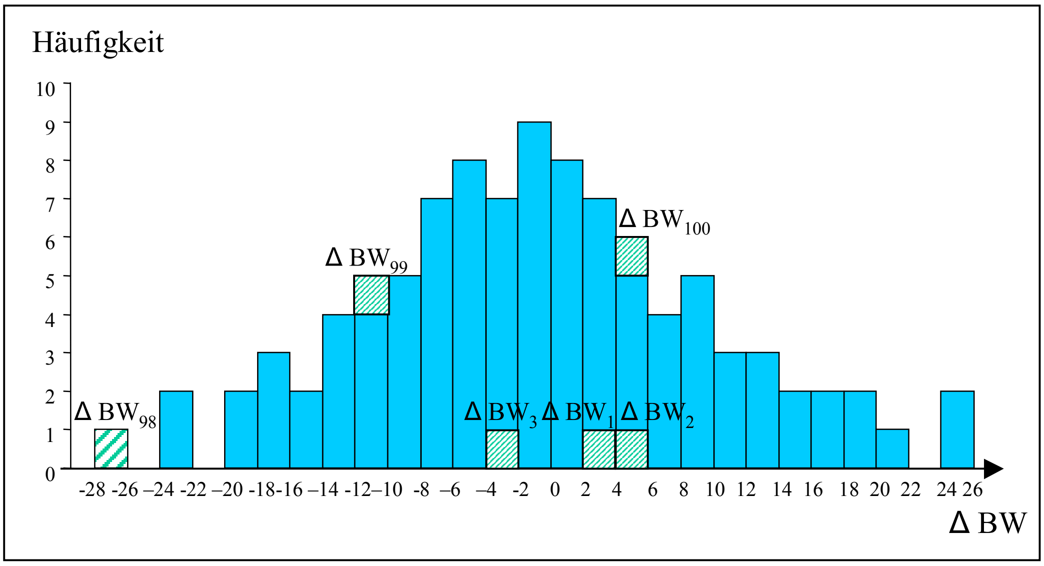


Abbildung 3: Verteilung der Barwertveränderungen der Beispielanleihe

Auf diese Weise entsteht eine Wahrscheinlichkeitsfunktion der Barwertveränderungen. Jeder Wertveränderung lässt sich eine Eintrittswahrscheinlichkeit zuordnen. Dafür muss die Anzahl der Beobachtungen einer bestimmten Wertveränderung durch die Anzahl aller Beobachtungen, die die Grundgesamtheit darstellen, dividiert werden. Zum Beispiel ergibt sich für die Wertveränderung von mehr als – 22 EUR eine Wahrscheinlichkeit von 3% (3 ÷100).

Ist die Verteilung der Barwertveränderungen ermittelt, kann der VaR als der maximale Verlust, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird, bestimmt werden. Für eine Aussagesicherheit von 95% dürfen beispielsweise bei 100 beobachteten Barwertveränderungen nur 5 über dem geschätzten Verlust liegen. Demnach beträgt der VaR für die untersuchte Anleihe mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% 18 EUR (vgl. Abbildung 4). In 5% aller Fälle wird der potenzielle Verlust größer als 18 EUR ausfallen resp. in 95% aller Fälle kleiner als 18 EUR sein.

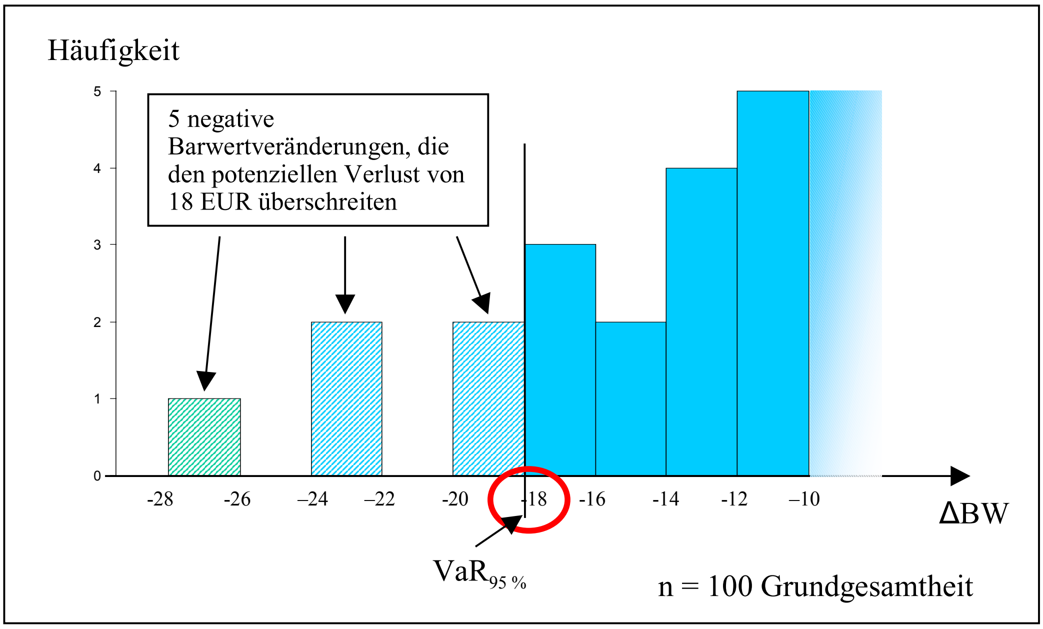


Abbildung 4: VaR-Bestimmung für die Beispielanleihe

Das vorgestellte Beispiel zur VaR-Bestimmung lässt sich vom Prinzip auch auf komplexere Portefeuilles, die Zahlungen in verschiedenen Laufzeitbändern aufweisen, übertragen. Über den 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktor als relevanten Risikofaktor hinaus, werden dann weitere laufzeitspezifische Zerobond-Abzinsfaktoren benötigt, um den Barwert der Portefeuille-Cash Flows zu bestimmen. Durch Neubewertung des Portefeuilles mit alternativen Zerobond-Abzinsfaktoren erhält man in Analogie zur Beispielrechnung mit der 1-jährigen Nullkuponanleihe wieder eine Verteilung der Barwerte (diesmal der Portefeuille-Barwerte), die für die Bestimmung des VaR erforderlich ist.

Methoden zur Modellierung der Verteilung der Barwertveränderungen

Die Modellierung der Verteilung der Barwertveränderungen für die Risikoschätzung stellt die größte Herausforderung an die Implementierung des VaR dar. Für die Bestimmung der Verteilung der Barwertveränderungen existieren drei Ansätze (vgl. Wiedemann 2002). Sie unterscheiden sich in der Methodik, mit der die Veränderungen der den Barwert bestimmenden Risikofaktoren modelliert werden:

Historische Simulation: Die Wertveränderungen der Risikofaktoren aus einer bestimmten Datenhistorie werden für die Schätzung der zukünftigen Wertveränderungen übernommen.

Monte-Carlo-Simulation: Für die Wertveränderungen der Risikofaktoren wird eine statistische Verteilung angenommen. Basierend auf dieser Verteilung werden die potenziellen Portefeuille-Barwertveränderungen mithilfe von Zufallszahlen simuliert.

Varianz-Kovarianz-Ansatz: Die Wertveränderungen der Risikofaktoren werden statistisch mithilfe der Normalverteilung modelliert.

II. Value at Risk ohne Diversifikationseffekte

1. Berechnungskomponenten des Value at Risk

Im folgenden sei das analytische Varianz-Kovarianz-Modell ausführlicher vorgestellt. Es unterstellt über die Annahme der Normalverteilung der Werte der Risikofaktoren hinaus, dass sich die Barwertveränderungen der Zinspositionen linear zu den Veränderungen der Risikofaktoren verhalten. Für Zinsinstrumente mit symmetrischen Auszahlungsprofilen und die dazugehörigen Zerobond-Abzinsfaktoren als Risikofaktoren lässt sich eine solche lineare Beziehung ableiten. Damit sind die Barwertveränderungen der Zinspositionen ebenfalls normalverteilt. In Abbildung 5 wird gezeigt, wie sich eine empirische Verteilung in eine Normalverteilung überführen lässt.

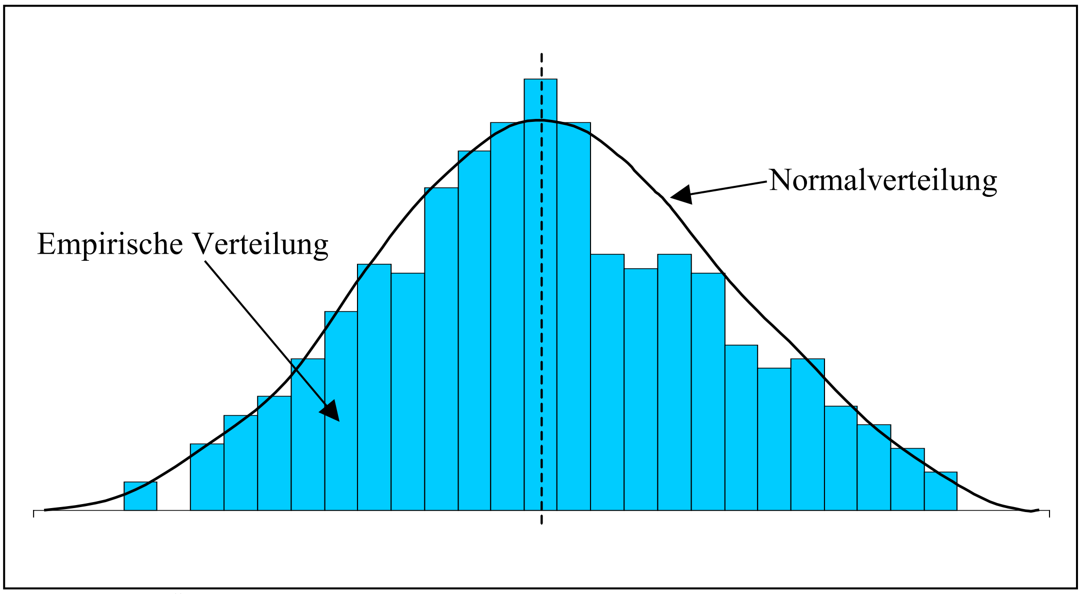


Abbildung 5: Überführung einer empirischen Verteilung in eine Normalverteilung

Die Annahme der Normalverteilung zur Abbildung der Wertveränderungen der Zerobond-Abzinsfaktoren vereinfacht die VaR-Berechnung für Zinspositionen entscheidend. Das zukünftige Verhalten der Zerobond-Abzinsfaktoren lässt sich damit statistisch modellieren. Die relevanten Informationen über das potenzielle Ausmaß der Wertveränderungen der Zerobond-Abzinsfaktoren sind im zentralen Parameter der Normalverteilung, der Standardabweichung, enthalten.

Die Standardabweichung (σ) erfasst die Schwankungsintensität (durchschnittliche Veränderungsrate) der Zerobond-Abzinsfaktoren und dient als Maß für die Volatilität des Barwertes der Zinspositionen. Höhere Volatilitäten induzieren eine flachere Verteilung der Risikofaktoren und somit eine höhere Wahrscheinlichkeit für größere Verluste. Eine steilere Verteilung signalisiert dagegen eine geringere Volatilität und folglich weniger Risiko. In Abbildung 6 wird dieser Zusammenhang für die Veränderungen des 1-jährigen und 2-jährigen Zerobond-Abzinsfaktors unter der Annahme der Normalverteilung dargestellt.

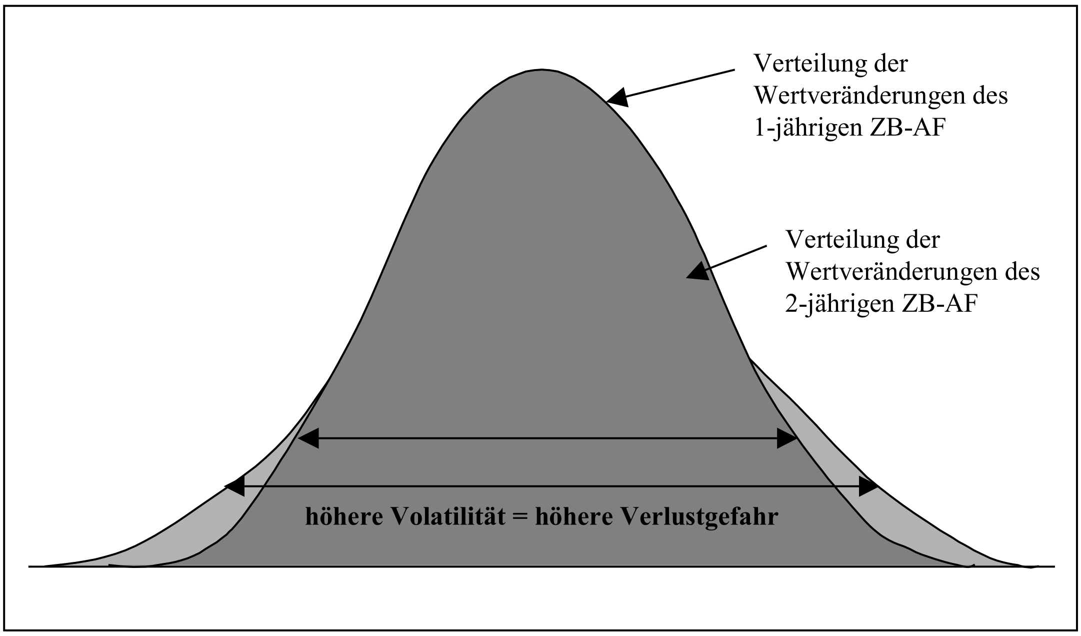


Abbildung 6: VaR in Abhängigkeit von der Volatilität

Für die Quantifizierung der potenziellen Barwertverluste ist die Kenntnis der zukünftigen Volatilität erforderlich. Gemessen wird die Volatilität meistens auf Basis der historischen Schwankungen. Unter der Annahme, dass die historischen Volatilitäten zumindest für eine gewisse Zeit stabil sind, können sie durchaus als Prognosewert dienen.

Jede Normalverteilung lässt sich in eine Standardnormalverteilung mit dem Erwartungswert 0 und der Standardabweichung 1 transformieren. (Fußnote: Vgl. Bosch 1996, S. 254) Der Erwartungswert von 0 bedeutet, dass der Durchschnitt aller Wertveränderungen der Zerobond-Abzinsfaktoren 0 beträgt. Die Standardabweichung von 1 spiegelt die geschätzte Volatilität der Zerobond-Abzinsfaktoren wider und beschreibt das Ausmaß der zukünftigen Barwertschwankungen.

Einer Standardabweichung von 1 oder einem Vielfachen davon kann im Falle einer Standardnormalverteilung eine bestimmte Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet werden, wobei speziell für die Risikobetrachtung nur auf die negativen Abweichungen Bezug genommen wird (vgl. Abbildung 7). Damit lässt sich die Berechnung der Volatilität für alternative Konfidenzniveaus (Aussagesicherheiten) erheblich vereinfachen. Die Standardabweichung von 1 steht für ein Konfidenzniveau von 84,14%. Soll ein anderes Konfidenzniveau zugrunde gelegt werden, muss die Standardabweichung von 1 lediglich mit einem der gewünschten Aussagesicherheit entsprechenden z-Wert der Standardnormalverteilung multipliziert werden.

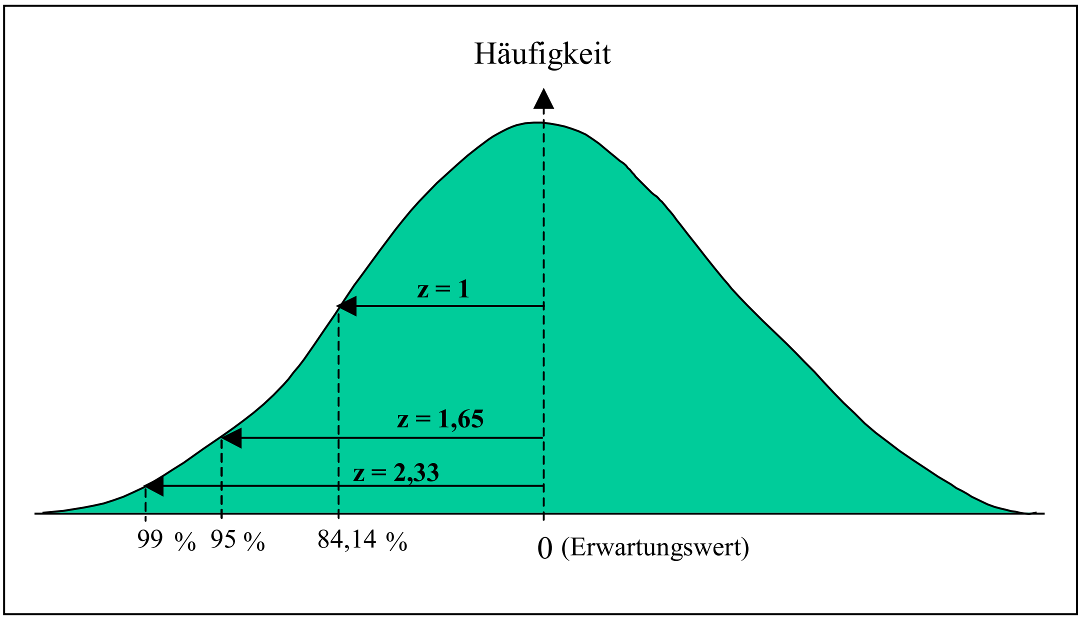


Abbildung 7: z-Werte in Abhängigkeit von der Aussagesicherheit

Dank dieser Eigenschaft der Standardnormalverteilung kann der VaR analytisch berechnet werden. Das Produkt aus dem Cash Flow-Barwert und der Volatilität des zugehörigen laufzeitspezifischen Zerobond-Abzinsfaktors ergibt die Barwertvolatilität (als absoluten Betrag). Der VaR verhält sich proportional zu dieser Volatilität. Die Proportionalitätskonstante kann durch den z-Wert der Standardnormalverteilung beschrieben werden. Daher ergibt die anschließende Multiplikation der Barwert-Volatlität mit dem z-Wert der Standardnormalverteilung den undiversifizierten VaR für die gewünschte Aussagesicherheit. Die Formel für den VaR ohne Berücksichtigung von Diversifikationseffekten wird in Abbildung 8 dargestellt.

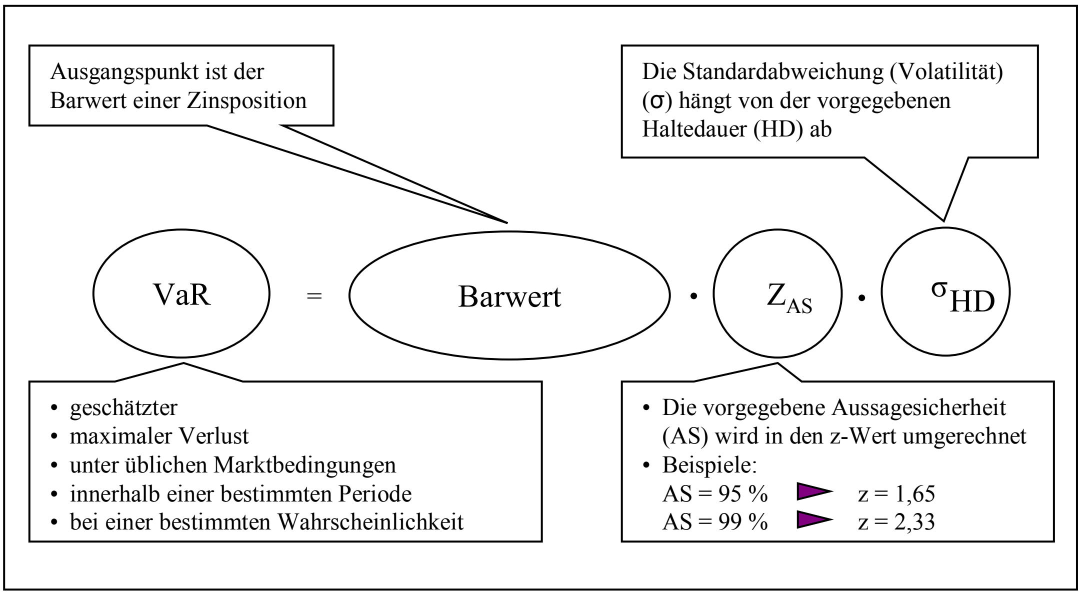


Abbildung 8: VaR-Formel mit Beschreibung ihrer Komponenten

Bei einer monatlichen Volatilität des 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktors von 0,5% errechnet sich der VaR für die 1-jährige Anleihe bei einem Konfidenzniveau von 95% wie folgt:

$VaR_{95\%} = 9.524 \text{ EUR} \bullet 0{,}5\% \bullet 1{,}65 = 78{,}57 \text{ EUR}$

Auf der Grundlage dieses Ergebnisses kann die folgende Aussage formuliert werden: Unter normalen Marktbedingungen wird der potenzielle Barwertverlust der Anleihe innerhalb eines Monats mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht mehr als 78,57 EUR betragen.

Die Kenntnis der Parameter der Standardnormalverteilung erlaubt auch das Umrechnen des Ergebnisses der VaR-Berechnung in andere Konfidenzniveaus. Das Ergebnis aus dem obigen Beispiel lässt sich zum Beispiel in einen VaR für ein Konfidenzniveau von 99% durch Multiplikation mit 2,33/1,65 (z-Wert für 99% geteilt durch z-Wert für 95%) umrechnen. Folglich beträgt der VaR der 1-jährigen Anleihe mit einer Wahrscheinlichkeit von 99%:

$VaR_{99\%} = 78{,}57 \text{ EUR} \bullet (2{,}33 / 1{,}65) = 110{,}95 \text{ EUR}$

In Analogie zur Skalierung der Ergebnisse zwischen verschiedenen Konfidenzniveaus, ermöglicht die Verwendung der Normalverteilungsannahme eine Vergleichbarkeit der Risikokennzahl für verschiedene Haltedauern. Die Reproduktivitätseigenschaft der Normalverteilung ermöglicht die Skalierung der Volatilitäten (vgl. Jorion 2000, S. 103). Wurde die Volatilität beispielsweise mit einer 1-tägigen Haltedauer ermittelt, so lässt sich der VaR für eine monatliche Haltedauer (20 Handelstage) durch Multiplikation mit √20 berechnen. Im Umkehrschluss kann auch die monatliche Volatilität in die tägliche Volatilität umgerechnet werden, indem die gegebene monatliche Volatilität durch √20 geteilt wird. Umgerechnet auf eine 1-tägige Haltedauer ergibt sich für den VaR von 78,57 EUR, der auf Basis einer monatlichen Haltedauer errechnet wurde, ein Ergebnis von:

$VaR_{95\%} = 78{,}57 \text{ EUR} / \sqrt{20} = 17{,}57 \text{ EUR}$

Für die Umrechnung der täglichen Volatilität in längere Zeithorizonte gilt allgemein das Wurzelgesetz in Gestalt der Formel:

$\sigma_{n\text{-Tage}} = \sqrt{n} \bullet \sigma_{1\text{-Tag}}$

2. Mapping von Zinspositionen

Für das einführende Beispiel zur VaR-Berechnung wurde eine Anleihe zugrunde gelegt, die während ihrer Laufzeit nur einen Zahlungstermin aufweist (10.000 EUR in 1 Jahr). Die Höhe des zugehörigen Risikos ist somit alleine von der Volatilität des 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktors abhängig, der als Risikofaktor für die VaR-Bestimmung der Anleihe fungiert. Bei Zinstiteln, die Zahlungen zu verschiedenen Fälligkeitsterminen aufweisen, sind diese bei der VaR-Bestimmung zu berücksichtigen. Maßgeblich für die Barwertveränderung der Gesamtposition sind die Barwertschwankungen der einzelnen laufzeitspezifischen Cash Flows. Das Risiko einer Zinsposition hängt somit von den Wertschwankungen aller den Gesamtbarwert bestimmenden Zerobond-Abzinsfaktoren ab.

Diesem Zusammenhang wird durch das Cash Flow-Mapping im analytischen Varianz-Kovarianz-Ansatz Rechnung getragen. Der Cash Flow eines Zinstitels resp. eines ganzen Portefeuilles mit Zinstiteln wird in einzelne Laufzeitbänder zerlegt. Auf diese Weise lassen sich komplexe Zinstitel in Einzelkomponenten (Basisinstrumente) aufspalten. Die Einzelkomponenten stellen laufzeitspezifische Nullkuponanleihen dar. Ihre Barwertveränderungen ergeben sich aus den Wertveränderungen der zugehörigen Risikofaktoren.

Diese Methodik sei beispielhaft für eine 2-jährige Kuponanleihe mit jährlichen Zinszahlungen und endfälliger Tilgung dargestellt. Die Kuponanleihe möge einen Nominalzins von 5% haben und am Ende der Laufzeit zum Nominalwert von 10.000 EUR getilgt werden. Die Anleihe generiert demnach im ersten Jahr einen Zinsertrag von 500 EUR und im zweiten Jahr einen nochmaligen Zinsertrag von 500 EUR plus die Kapitalrückzahlung von 10.000 EUR. Unterstellt sei ferner eine normale Zinsstrukturkurve mit 5% für den 1-Jahres-Kuponzins und 5,5% für den 2-Jahres-Kuponzins. Aus der zugrunde liegenden Zinsstrukturkurve ergeben sich die folgenden Zerobond-Abzinsfaktoren: 0,9524 für die 1-jährige Laufzeit und 0,8982 für die 2-jährige Laufzeit.

Folgend der Methodik des Cash Flow-Mapping werden die Cash Flows der Kuponanleihe in zwei Laufzeitbänder zerlegt, in das 1-jährige Laufzeitband und in das 2-jährige Laufzeitband. Im 1-jährigen Laufzeitband wird der Zinsertrag des ersten Jahres von 500 EUR erfasst. In das 2-jährige Laufzeitband fallen die Zahlungen am Ende des zweiten Jahres. Das sind der Zinsertrag von 500 EUR plus die Kapitalrückzahlung von 10.000 EUR. Die Kuponanleihe wird somit in zwei Nullkuponanleihen zerlegt: eine 1-jährige Nullkuponanleihe mit einem Rückzahlungsbetrag von 500 EUR und eine 2-jährige Nullkuponanleihe mit einem Rückzahlungsbetrag von 10.500 EUR (vgl. Abbildung 9).

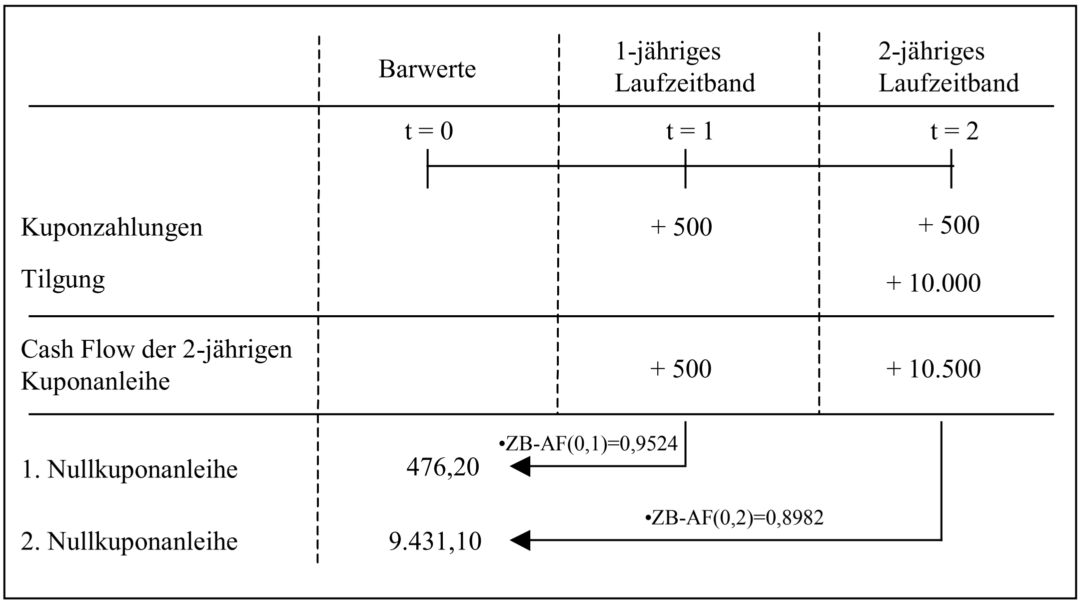


Abbildung 9: Cash Flow-Mapping

Die laufzeitspezifischen Nominal-Cash Flows werden im nächsten Schritt diskontiert. Für die errechneten Barwerte der Nullkuponanleihen wird das Verlustpotenzial mithilfe der Volatilitäten der zugehörigen Risikofaktoren geschätzt. Die potenzielle_Barwertveränderung der 1-jährigen Nullkuponanleihe ist von der Volatilität des 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktors abhängig, die potenzielle Barwertveränderung der 2-jährigen Nullkuponanleihe von der Volatilität des 2-jährigen Zerobond-Abzinsfaktors.

Nachdem der VaR für jedes Basisinstrument einzeln berechnet wurde, können die Einzelergebnisse zum VaR für den originären Zinstitel, die 2-jährige Kuponanleihe, zusammengefasst werden. Der VaR sei beispielhaft für ein Konfidenzniveau von 95% und eine Haltedauer von 20 Tagen (1 Monat) bestimmt. Die Volatilität des 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktoren beträgt weiterhin 0,5%, die des 2-jährigen Zerobond-Abzinsfaktor 0,7%.

Abbildung 10 zeigt die Berechnung des VaR für die Beispielanleihe. Der VaR der 2-jährigen Kuponanleihe beträgt ohne Berücksichtigung von Diversifikationseffekten 112,86 EUR.

Laufzeit	Barwert	Volatilität der ZB-AF	z-Wert	VaR
(0)	(1)	(2)	(3)	(4) = (1)•(2)•(3)
1 Jahr	476,20	0,50 %	1,65	3,93
2 Jahre	9.431,10	0,70 %	1,65	108,93
Undiversifizierter VaR der Gesamtposition				112,86

Abbildung 10: Undiversifizierter VaR für die 2-jährige Kuponanleihe

Das Beispiel sei im Folgenden zu einem kleinen Portefeuille erweitert, das aus den bisher in den Einzelbeispielen untersuchten Anleihen bestehen soll (vgl. Abbildung 11).

Laufzeit-band	1-jährige Nullkuponanleihe	2-jährige 5%-Kuponanleihe	Nominal- Cash Flow	Marktzins	ZB-AF
(0)	(1)	(2)	(3) = (1)+(2)	(4)	(5)
1	10.000	500	10.500	5,00 %	0,9524
2		10.500	10.500	5,50 %	0,8982

Laufzeit-band	Barwerte	Volatilität der ZB-AF	z-Wert (95 %)	VaR
(0)	(6) = (5) • (3)	(7)	(8)	(9) = (6)•(7)•(8)
1	10.000,00	0,50 %	1,65	82,50
2	9.431,10	0,70 %	1,65	108,93
Undiversifizierter Portefeuille-VaR				**191,43**

Abbildung 11: Undiversifizierter VaR für das Beispiel-Portefeuille

Für das Portefeuille, das aus einer 1-jährigen Nullkuponanleihe und einer 2-jährigen Kuponanleihe besteht, ergibt sich ein potenzieller Verlust von 191,43 EUR. Das gleiche Ergebnis erhält man auch, wenn die VaR der Einzelpositionen addiert werden. Der VaR für die 1-jährige Nullkuponanleihe beträgt 78,57 EUR und der VaR für die 2-jährige Kuponanleihe 112,86 EUR.

Dieses Ergebnis ist zwingend, denn bisher wurden noch keine Interdependenzen zwischen den Einzelwerten berücksichtigt. Implizit wird damit eine vollständig positive Korrelation zwischen den Marktzinsen unterstellt (Korrelation der Marktzinsen entspricht der Korrelation der Zerobond-Abzinsfaktoren), d. h. die Marktzinsveränderungen treten in allen Laufzeitbändern stets in gleicher Stärke auf (Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve). Dies ist theoretisch zwar vorstellbar, in der Praxis aber nicht der Fall. Infolgedessen wird das Risiko des Portefeuilles überschätzt, wenn die Verbundeffekte zwischen den Risikofaktoren (Marktzinssätze resp. Zerobond-Abzinsfaktoren) unberücksichtigt bleiben.

III. Value at Risk mit Diversifikationseffekten

1. Risikodiversifikationseffekte und TriRisk

Innerhalb einer Zinsposition ergeben sich Diversifikationseffekte immer dann, wenn die portefeuillerelevanten Zerobond-Abzinsfaktoren nicht vollständig positiv miteinander korreliert sind. Die Korrelation zwischen zwei Zerobond-Abzinsfaktoren misst, inwieweit sich Wertveränderung eines Zerobond-Abzinsfaktors auf den Wert des anderen Zerobond-Abzinsfaktors auswirkt. Da die Wertveränderungen der Zerobond-Abzinsfaktoren die Barwertveränderungen der Cash Flows einer Zinsposition determinieren, zeigt die Korrelation damit, wie stark das Gesamtrisiko durch Mischung von Cash Flows unterschiedlicher Laufzeitbänder reduziert wird.

Die Korrelation lässt sich durch den Korrelationskoeffizienten (k) zum Ausdruck bringen, der Werte zwischen –1 und +1 annehmen kann.

- Ein Korrelationskoeffizient von + 1 bedeutet, dass die Wertveränderungen vollständig positiv miteinander korreliert sind. Zwei Positionen (Cash Flows), deren zugehörige Zerobond-Abzinsfaktoren einen Korrelationskoeffizienten von + 1 aufweisen, haben ein identisches Wertveränderungsverhalten . In diesem Fall existieren keine Diversifikationseffekte.

- Ein Korrelationskoeffizient von 0 bedeutet, dass die Wertveränderungen zweier Positionen unabhängig voneinander sind. Folglich ist eine Risikoreduktion durch Diversifikation möglich.

- Ein Korrelationskoeffizient von –1 bedeutet vollständig negative Korrelation. Die Wertveränderung einer Position bewegt sich immer in entgegengesetzter Richtung zur Wertveränderung der anderen Position. Es ergeben sich maximale Diversifikationseffekte.

Wenn die Barwertveränderungen aller zum Portefeuille gehörenden Basisinstrumente normalverteilt sind, ist auch die Portefeuille-Barwertveränderung als Summe aller Barwertveränderungen der Basisinstrumente normalverteilt. Einzelne eindimensionale Verteilungen werden zu einer mehrdimensionalen Normalverteilung zusammengesetzt. In diesem Fall wird zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität (σ_P) neben der Standardabweichung jedes einzelnen Risikofaktors ein zusätzlicher Parameter für mehrdimensionale Verteilungen benötigt, die Kovarianz. Die Kovarianz ergibt sich aus der Multiplikation der Volatilitäten der einzelnen Zerobond-Abzinsfaktoren (Risikofaktoren) und des Korrelationskoeffizienten, der die Abhängigkeit zwischen den Wertschwankungen der Zerobond-Abzinsfaktoren zum Ausdruck bringt.

Da die Wertveränderungen der Basisinstrumente in einem linearen Zusammenhang zu den Wertveränderungen der Risikofaktoren stehen, kann die Portefeuille-Volatilität mithilfe einer standardisierten statistischen Methode berechnet werden. Die Formel zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität berücksichtigt durch Einbeziehung des Korrelationskoeffizienten die Diversifikationseffekte zwischen den einzelnen Risikofaktoren (vgl. Abbildung 12).

Portefeuille-Volatilität (σ_p):

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<1}^{n} \cdot x_i \cdot x_j \cdot cov_{ij}}$$

$$\boxed{cov_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot k_{ij}}$$

Kovarianz

Portefeuille-Volatilität (σ_p) für zwei Wertpapiere

$$\sigma_P = \sqrt{x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot k_{1,2}}$$

Mit ihrem Portefeuilleanteil (x_1) gewichtete Volatilität (σ_1) von Wertpapier 1

Erfassung des Risikoverbundes zwischen den Wertpapieren über den Korrelationskoeffizienten $k_{1,2}$

Mit ihrem Portefeuilleanteil (x_2) gewichtete Volatilität (σ_2) von Wertpapier 2

Abbildung 12: Formel zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität

Unter dem Portefeuille-Anteil x_i ist im Sinne der VaR-Berechnung für Zinstitel der Barwert einer Zinsposition im Portefeuille zu verstehen. In Fortsetzung des Beispiels aus Abbildung 11 entspricht x_1 dem Barwert der 1-jährigen Nullkuponanleihe und x_2 dem Barwert der 2-jährigen Nullkuponanleihe. Der Korrelationskoeffizient zwischen dem 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktor und dem 2-jährigen Zerobond-Abzinsfaktor möge 0,8 betragen. Somit ergibt sich eine Portefeuille-Volatilität von 110,18 EUR. Der Portefeuille-VaR bei der gewünschten Aussagesicherheit von 95% und unter Berücksichtigung der Diversifikationseffekte beträgt 181,80 EUR (vgl. Abbildung 13).

Berechnung der Portefeuille-Volatilität

$$\sigma_P = \sqrt{\begin{array}{l} 10.000^2 \cdot 0{,}5\%^2 + 9.431{,}10^2 \cdot 0{,}7\%^2 + \\ 2 \cdot 10.000 \cdot 9.431{,}10 \cdot 0{,}7\% \cdot 0{,}5\% \cdot 0{,}8 \end{array}} = \boxed{110{,}18 \text{ EUR}}$$

Portefeuille-Value at Risk bei einem Konfidenzniveau von 95 %

$$\text{VaR} = z \cdot \sigma_P = 1{,}65 \cdot 110{,}18 = \boxed{181{,}80 \text{ EUR}}$$

Diversifikationseffekt $\dfrac{181{,}80 - 191{,}43}{191{,}43} = -5{,}03\,\%$

Abbildung 13: Berechnung des VaR mit Diversifikationseffekten

Durch die Berücksichtigung der Diversifikationseffekte im Portefeuille lässt sich der Portefeuille-VaR um 5,03% reduzieren. Der Korrelationskoeffizient von 0,8 bedeutet, dass einer der beiden Zerobond-Abzinsfaktoren jedes Mal nur 80% der Wertveränderung des anderen Zerobond-Abzinsfaktors mitmacht. Da aufgrund der Laufzeiteffekte die längeren Zerobond-Abzinsfaktoren stärkere Wertschwankungen als die kürzeren Zerobond-Abzinsfaktoren aufweisen, schlägt sich eine Wertveränderung des 2-jährigen Zerobond-Abzinsfaktors nur zu 80% als Wertveränderung beim 1-jährigen Zerobond-Abzinsfaktor nieder. Ein Korrelationskoeffizient kleiner als 0,8 hätte einen noch geringeren Risikoverbund und somit eine noch stärkere Risikodiversifikation zur Folge. Bei einem Korrelationskoeffizienten von 0,5 ergibt sich beispielsweise ein VaR von 166,30 EUR. Folglich wird ein Risikodiversifikationseffekt von 13,13% erzielt.

Alternativ lässt sich die VaR-Berechnung für Portefeuilles auch so durchführen, dass die Volatilitäten der Risikofaktoren bereits vor dem Einsetzen in die Formel aus Abbildung 12 gemäß der gewünschten Aussagesicherheit skaliert werden. Das Ergebnis der Addition aller Komponenten unter dem Wurzel ist dann nicht mehr die Portefeuille-Volatilität, sondern direkt der VaR. Im Fall eines Portefeuilles, das nur aus zwei Laufzeitbändern besteht, ergibt sich in Analogie zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität die in Abbildung 14 erläuterte Formel für den Portefeuille-VaR.

Portefeuille-Value at Risk

$$\mathbf{VaR_P} = \sqrt{\mathbf{VaR_1^2} + \mathbf{VaR_2^2} + 2 \cdot \mathbf{VaR_1} \cdot \mathbf{VaR_2} \cdot \mathbf{k_{1,2}}}$$

Erfassung des Risikoverbundes zwischen den Laufzeitbändern 1 und 2 über den Korrelationskoeffizienten $k_{1,2}$

Value at Risk im Laufzeitband 1

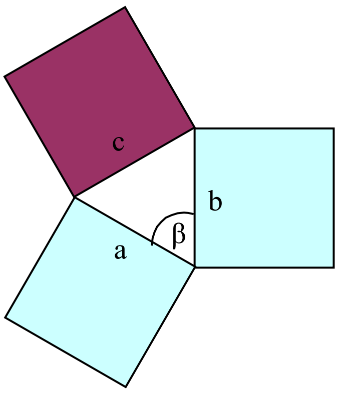
Value at Risk im Laufzeitband 2

Abbildung 14: Portefeuille-VaR

Die Wirkung des Korrelationskoeffizienten auf die Risikodiversifikation kann mithilfe des TriRisk-Konzeptes sehr anschaulich dargestellt werden. (Fußnote: Vgl. Schulte-Mattler/ Tysiak 1999) Bei der Betrachtung des Satzes von Pythagoras lässt sich eine Ähnlichkeit mit der soeben vorgestellten Formel zur Berechnung des Portefeuille-VaR feststellen (vgl. Abbildung 15).

Satz von Pythagoras

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \beta}$$



Portefeuille-VaR

$$\mathbf{VaR_p^2 = VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2 \cdot VaR_1 \cdot VaR_2 \cdot k_{1,2}}$$

$$\mathbf{k_{1,2} = -\cos \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos(-k_{1,2})}$$

Abbildung 15: TriRisk-Konzept

Grafisch lässt sich die Formel zur Berechnung des Portefeuille-VaR wie folgt interpretieren: Die Längen der Katheten bilden die Einzel-VaR (VaR in den einzelnen Laufzeitbändern) ab und die Länge der Hypotenuse stellt den Portefeuille-VaR dar. Der Korrelationskoeffizient zwischen den Einzel-VaR der Nullkuponanleihen kann in den Winkel zwischen den zwei Katheten des pythagoreischen Dreiecks umgerechnet werden. Für den Korrelationskoeffizienten von 0,8 beträgt der Winkel β 143,13°. Mithilfe eines Dreiecks lässt sich der Portefeuille-VaR als Ergebnis der Zusammenlegung der zwei Einzel-VaR unter Berücksichtigung der Risikodiversifikationseffekte veranschaulichen (vgl. Abbildung 16). Dabei wird der Diversifikationseffekt durch den Korrelationskoeffizienten, und der wiederum durch den Winkel β abgebildet.

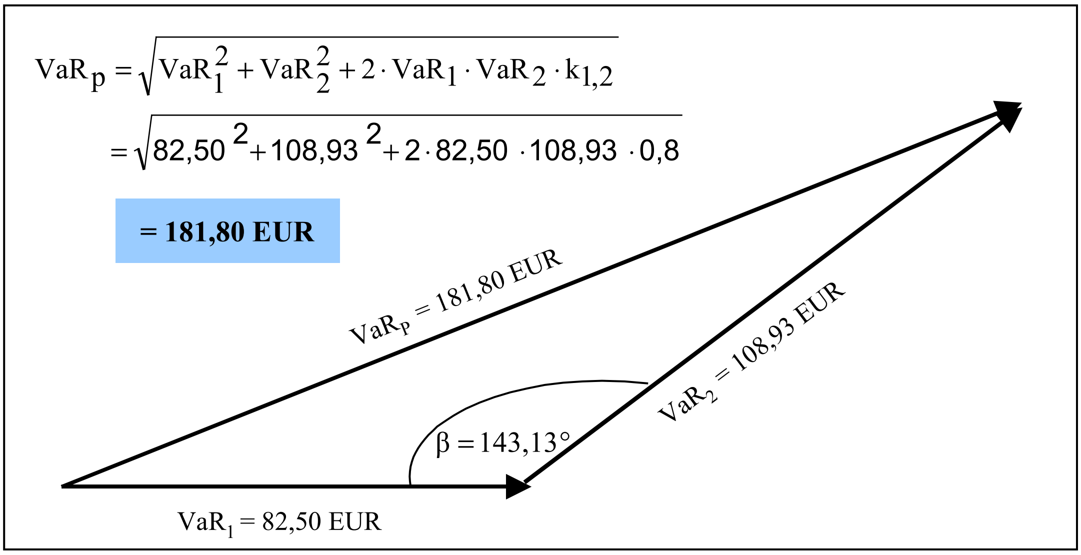


Abbildung 16: Veranschaulichung des diversifizierten VaR mithilfe von TriRisk

Die Wirkung verschiedener Risikoverbundeffekte lässt sich mit dem TriRisk-Konzept grafisch leicht nachvollziehen. Die Verringerung des Korrelationskoeffizienten hat einen kleineren Winkel zwischen den Einzel-VaR zur Folge. Damit wird der Abstand zwischen den Einzel-VaR und somit auch der Portefeuille-VaR kleiner. Bei einer vollständig negativen Korrelation (Korrelationskoeffizient von –1) liegen die Einzel-VaR genau übereinander, so dass der Portefeuille-VaR den geringst möglichen Wert aufweist. In Abbildung 17 wird die Wirkung eines Korrelationskoeffizienten von 0,5 gegenüber dem ursprünglichen Wert von 0,8 veranschaulicht.

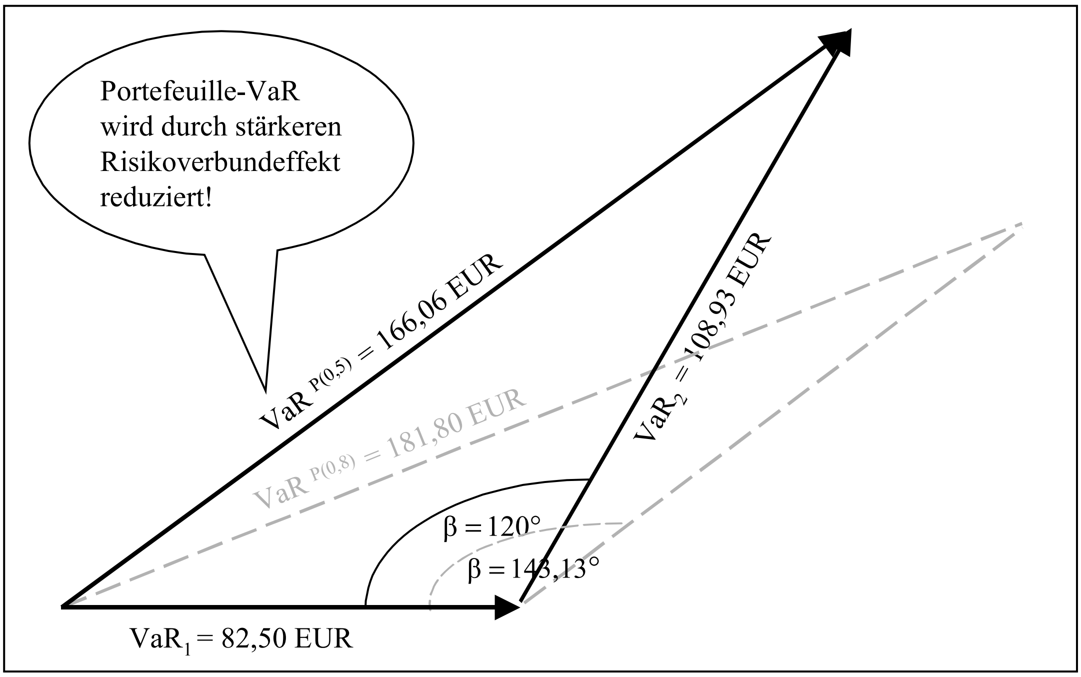


Abbildung 17: Visualisierung des Portefeuille-VaR bei k = 0,5

2. Berechnung des Value at Risk für komplexe Portefeuilles

Die bereits vorgestellte allgemeine Formel zur Berechnung der Portefeuille-Volatilität konnte im Falle von nur zwei Risikofaktoren zu einer Gleichung vereinfacht werden, die dem Anwender eine übersichtliche Darstellung aller Komponenten bietet (vgl. *Abbildung 12*). Die Notwendigkeit einer verschachtelten Summenbildung wird dadurch vermieden. Sofern Portefeuilles aber mehr als zwei Laufzeitbänder aufweisen, wird die VaR-Berechnung durch die Berücksichtigung mehrerer Kovarianzen erheblich komplexer. Hier hilft die Matrixdarstellung, die Übersichtlichkeit zu behalten (vgl. Abbildung 18).

Portefeuille-Volatilität

$$\sigma_P = \sqrt{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \mathrm{cov}_{1,2} & \cdots & \mathrm{cov}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{cov}_{n,1} & \mathrm{cov}_{n,2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Vektor mit Barwerten (**x'**)
in einzelnen Laufzeitbändern

Transponente des Barwert-Vektors (**x**)

Kovarianz-Matrix (**cov**) erfasst die Risikoverbundeffekte

Portefeuille-Value at Risk

$$\mathbf{VaR_P = (x' \cdot cov \cdot x) \cdot z}$$

Abbildung 18: Formel zur Berechnung des diversifizierten VaR in Matrixdarstellung

Die Kovarianz-Matrix (cov) fasst die Volatilitäten und Kovarianzen der Zerobond-Abzinsfaktoren zusammen. Alle hier notwendigen Informationen (Volatilitäten und Kovarianzen) können wie auch die übrigen Marktdaten von externen Anbietern abgerufen werden, so dass sich die VaR-Berechnungen erheblich vereinfachen lässt.

Die Verwendung der Kovarianz-Matrix für die VaR-Berechnung verdeutlicht Abbildung 19 anhand des bereits vorgestellten Beispiel-Portefeuilles mit den zwei bekannten Anleihen. Die Beispielrechnung zeigt die Ableitung der Kovarianz aus den Volatilitäten und dem gemeinsamen Korrelationskoeffizienten und anschließend die VaR-Berechnung mithilfe der Kovarianz-Matrix.

$$cov_{1,2} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot k_{1,2} = 0{,}7\,\% \cdot 0{,}5\,\% \cdot 0{,}8$$

$$= \mathbf{0{,}000028}$$

$$\sigma_P = \sqrt{(10.000;9.431{,}10) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}000025 & 0{,}000028 \\ 0{,}000028 & 0{,}000049 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10.000{,}00 \\ 9.431{,}10 \end{pmatrix}}$$

0,50 %^{2} **0,70 %^{2}**

$$VaR_P = 110{,}18 \cdot 1{,}65 = \boxed{181{,}80\ \text{EUR}}$$

Abbildung 19: VaR-Berechnung mithilfe der Kovarianz-Matrix für zwei Anleihen

Abschließend sei eine Beispielrechnung für ein Portefeuille durchgeführt, das aus drei Laufzeitbändern besteht. Hierzu wird das bisher verwendete Portefeuille mit den zwei Anleihen noch um eine 3-jährige Kuponanleihe erweitert. Die Kuponanleihe möge einen Nominalzins von 6% haben und am Ende der Laufzeit zum Nominalwert von 10.000 EUR getilgt werden. Die Zinszahlungen erfolgen jährlich. Die Anleihe generiert demnach im ersten und zweiten Jahr einen Zinsertrag von 600 EUR sowie im dritten Jahr einen nochmaligen Zinsertrag von 600 EUR plus die Kapitalrückzahlung von 10.000 EUR.

Der VaR wird beispielhaft für ein Konfidenzniveau von 95% und eine Haltedauer von 20 Tagen (1 Monat) bestimmt. Alle relevanten Marktdaten und die Berechnung des undiversifizierten VaR werden in Abbildung 20 dargestellt.

Laufzeit	1	2	3		1-J	2-J	3-J
Zins	5,00 %	5,50 %	5,70 %	1-J-ZB-AF	1	0,8	0,6
ZB-AF	0,9524	0,8982	0,8463	2-J-ZB-AF	0,8	1	0,7
20-Tage-Volatilität	0,50 %	0,70 %	0,85 %	3-J-ZB-AF	0,6	0,7	1

Laufzeit-band	1-J Nullku-ponanleihe	5%-Anleihe mit 2 J RLZ	6%-Anleihe mit 3 J RLZ	Cash-Flow-Barwerte	Volatilität	Undiversifi-zierter VaR $_{95\,\%}$
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)=[(1)+(2)+(3)]• ZB-AF(0,LZ)	(5)	(6)=(5)•(4)• 1,65
1	10.000	500	600	10.571,64	0,50 %	87,22
2		10.000	600	9.520,92	0,70 %	109,97
3			10.600	8.970,78	0,85 %	125,82
						323,01

Abbildung 20: Undiversifizierter VaR für das Beispiel-Portefeuille mit 3 Anleihen

In Abbildung 21 ist abschließend die Berechnung des diversifizierten VaR mithilfe der Kovarianz-Matrix und der daraus resultierende Diversifikationseffekt dargestellt.

	1-J	2-J	3-J
1-J-ZB-AF	σ_1^2	$cov_{1,2}$	$cov_{1,3}$
2-J-ZB-AF	$cov_{2,1}$	σ_2^2	$cov_{2,3}$
3-J-ZB-AF	$cov_{3,1}$	$cov_{3,2}$	σ_3^2

$$cov_{1,2} = cov_{2,1} = \sigma_1 \cdot k_{1,2} \cdot \sigma_2 = 0{,}5\% \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7\% = 28 \cdot 10^{-4}$$

$$cov_{1,3} = cov_{3,1} = \sigma_1 \cdot k_{1,3} \cdot \sigma_3 = 0{,}5\% \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}85\% = 25{,}5 \cdot 10^{-4}$$

$$cov_{2,3} = cov_{3,2} = \sigma_2 \cdot k_{2,3} \cdot \sigma_3 = 0{,}7\% \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}85\% = 41{,}65 \cdot 10^{-4}$$

$$\sigma_1^2 = 0{,}5\%^2 = 25 \cdot 10^{-4}; \sigma_2^2 = 0{,}7\%^2 = 49 \cdot 10^{-4}; \sigma_3^2 = 0{,}85\%^2 = 72{,}25 \cdot 10^{-4}$$

$$\sigma_P = \sqrt{x' \cdot \begin{pmatrix} 25 \cdot 10^{-4} & 28 \cdot 10^{-4} & 25{,}5 \cdot 10^{-4} \\ 28 \cdot 10^{-4} & 49 \cdot 10^{-4} & 41{,}65 \cdot 10^{-4} \\ 25{,}5 \cdot 10^{-4} & 41{,}65 \cdot 10^{-4} & 72{,}25 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \cdot x}$$

$$x' = (10.571{,}64;\ 3.520{,}92;\ 8.970{,}78)$$

$$x = \begin{pmatrix} 10.571{,}64 \\ 9.520{,}92 \\ 8.970{,}78 \end{pmatrix}$$

$$VaR_{35\,\%} = \sqrt{x' \cdot cov \cdot x} \cdot z = 175{,}04 \cdot 1{,}65 = \boxed{288{,}81\ \text{EUR}}$$

$$\text{Diversifikationseffekt: } \frac{288{,}81 - 323{,}01}{323{,}01} = \boxed{-10{,}59\ \%}$$

Abbildung 21: Diversifizierter VaR für das Beispiel-Portefeuille mit 3 Anleihen

Der diversifizierte VaR ist die zentrale Steuerungsgröße für das barwertige Zinsrisiko auf Gesamtbankebene. Mit dem Value at Risk-Ansatz werden Risikoverbundeffekte zwischen einzelnen Risikofaktoren in einem Portefeuille berücksichtigt. Somit wird es möglich, das gesamte Zinsrisiko einer Bank in einer einzigen Kennzahl zu erfassen. Das schafft Risikotransparenz und ist die Voraussetzung für wirkungsvolle Maßnahmen zur Risikovermeidung resp. Risikoübernahme. Das statistische Fundament des Value at Risk ermöglicht dabei eine Risikoeinschätzung, die frei ist von subjektiven Annahmen über die zukünftige Entwicklung der relevanten Risikofaktoren und führt so zu einer breiten Akzeptanz sowohl für die interne Risikomessung als auch für externe Risikomessung im Rahmen der aufsichtsrechtlichen Eigenmittelunterlegung.

Literaturempfehlungen:

Bosch, K.: Großes Lehrbuch der Statistik, Oldenbourg 1996.

Jorion, P.: Value at Risk, 2. Aufl., New York 2000.

Schierenbeck, H.: Ertragsorientiertes Bankmangement, Band 2: Risiko-Controlling und integrierte Rendite-/ Risikosteuerung, 7. Aufl., Wiesbaden 2001.

Schierenbeck, H./Wiedemann, A.: Marktwertrechnungen im Finanzcontrolling, Stuttgart 1996.

Schulte-Mattler H., Tysiak W.: TriRisk, in: Die Bank 02/1999, S. 84-88.

Wiedemann, A.: Die Risikotriade - Zins-, Kredit- und Operatives Risiko, Stuttgart 2002 (erscheint demnächst).