

# Über die Diskretisierung und Regularisierung schlecht gestellter Probleme

von Dipl. Math. **Robert Plato**

Vom Fachbereich Mathematik der  
Technischen Universität Berlin  
genehmigte Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
**Doktor der Naturwissenschaften**

Berlin 1990

D 83

# Über die Diskretisierung und Regularisierung schlecht gestellter Probleme

von Dipl. Math. **Robert Plato**

Vom Fachbereich Mathematik der  
Technischen Universität Berlin  
genehmigte Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
**Doktor der Naturwissenschaften**

Promotionsausschuß:

Vorsitzender: Prof. Dr. D. Ferus

Berichter: Prof. Dr. A. K. Louis  
Prof. Dr. H. Brakhage

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 3.5.1990

Berlin 1990  
D 83

## Abstract

Seien  $X$  und  $Y$  Hilberträume und  $A : X \rightarrow Y$  ein beschränkter linearer Operator mit nichtabgeschlossenem Bildbereich  $R(A)$  sowie  $y \in R(A)$ . Zur Lösung des Problems

$$(1) \quad Ax = y$$

kann man Projektionsverfahren verwenden. Seien dazu  $X_h \subset X$  und  $Y_h \subset Y$  lineare Unterräume mit endlicher Dimension. Man erhält dann die Petrov-Galerkin-Gleichung

$$(2) \quad A_h x_h = y_h.$$

Selbst wenn  $y$  in Gleichung (1) genau bekannt ist, muß eine Lösung  $x_h^*$  von (2) nicht eine gute Approximation einer Lösung  $x_*$  von (1) sein. In dieser Arbeit wird für einige Verfahren (etwa die Methode von Tikhonov, das Verfahren von Landweber beziehungsweise die Methode der konjugierten Gradienten), die sonst zur Lösung der Gleichung (2) gedacht sind, eine geeignete Parameterwahl angegeben (bei den beiden Iterationsverfahren ist damit ein Abbruchkriterium gemeint), so daß man eine gute Näherung für  $x_*$  erhält. Dabei werden auch gestörte Daten auf der rechten Seite der Gleichung (1) zugelassen.

Für diese, dem Diskrepanzprinzip von Ivanov-Morozov vergleichbare Parameterwahl wird Konvergenz bewiesen. Grob formuliert heißt dies, daß bei feinerer Diskretisierung und mit besseren Näherungen an die rechte Seite  $y$  der Gleichung (1) die angegebenen Verfahren mit dieser Parameterwahl bessere Approximationen an  $x_*$  liefern. Mithilfe einiger Resultate über gebrochene Potenzen von nichtnegativen selbstadjungierten Operatoren lassen sich schließlich auch Konvergenzraten nachweisen.

## Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	Seite 1
2.	Lineare Verfahren zur Lösung schlecht gestellter Probleme	Seite 5
2.1	Ein allgemeiner Zugang	Seite 5
2.2	Beispiele	Seite 6
2.3	Die Matrixdarstellung der einzelnen Verfahren	Seite 7
3.	Einige Resultate über gebrochene Potenzen von nichtnegativen selbstadjungierten Operatoren	Seite 11
4.	Parameterwahl bei linearen Verfahren	Seite 16
4.1	A priori-Parameterwahl	Seite 17
4.2	A posteriori-Parameterwahl	Seite 19
5.	Die Methode der konjugierten Gradienten	Seite 27
5.1	Eine Einführung	Seite 27
5.2	Der Beweis des Satzes 5.2	Seite 31
6.	Der Fall $A = A^* \geq 0$	Seite 41
6.1	Lineare Verfahren	Seite 41
6.2	Die Methode der konjugierten Gradienten	Seite 45
7.	Numerische Realisierungen	Seite 47
8.	Über die Optimalität von Regularisierungsverfahren	Seite 58
8.1	Eine Einführung	Seite 58
8.2	Das Hauptresultat	Seite 60
	Literaturverzeichnis	Seite 65

# 1 Einleitung

Seien  $X$  und  $Y$  Hilberträume über  $\mathbb{R}$ . Mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  werden wir das Skalarprodukt in  $X$  beziehungsweise  $Y$  bezeichnen, mit  $\|\cdot\|$  ist je nach Gebrauch die induzierte Norm in den Räumen  $X$ ,  $Y$  oder  $L_s(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y : A \text{ ist ein beschränkter linearer Operator}\}$  gemeint. Sei nun  $A \in L_s(X, Y)$ . Wir betrachten die Gleichung

$$Ax = y, \quad y \in R(A). \quad (1.1)$$

Hier ist  $R(A) = \{Ax : x \in X\}$ . Wir nehmen nun an, daß nur eine Näherung  $y_\epsilon \in Y$  für  $y$  bekannt ist mit  $\|y - y_\epsilon\| \leq \epsilon$ , wobei  $\epsilon > 0$  eine bekannte Fehlerschranke ist. Wir suchen nach Verfahren  $\mathcal{R}_\epsilon : Y \rightarrow X$ , die für eine gegebene Anfangsnäherung  $x_{an} \in X$  eine gute Approximation  $\mathcal{R}_\epsilon y_\epsilon$  an die Lösung  $x_* \in X$  von (1.1) liefern, die am nächsten bei  $x_{an}$  liegt. Genauer gesagt, wir suchen nach Regularisierungsverfahren im folgenden Sinne.

**Definition 1.1** *Seien  $A \in L_s(X, Y)$ ,  $x_{an} \in X$  und  $\mathcal{R}_\epsilon : Y \rightarrow X$ ,  $\epsilon > 0$ , gegeben.  $(\mathcal{R}_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  heißt Regularisierungsverfahren für  $A$  (bezüglich  $x_{an}$ ), falls*

$$\sup_{y_\epsilon \in Y, \|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon} \|x_* - \mathcal{R}_\epsilon y_\epsilon\| \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

für jedes  $x_* \in X$  mit  $x_* - x_{an} \in N(A)^\perp$  gilt.

Für injektives  $A$  stimmt diese Definition mit der in Tikhonov and Arsenin[37] überein, da es dann in Definition 1.1 nicht von  $x_{an}$  abhängt, ob  $(\mathcal{R}_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  ein Regularisierungsverfahren ist.

Zur Angabe eines Lösungsverfahrens muß das Problem zunächst diskretisiert werden. Wir beschränken uns hierbei auf Projektionsverfahren. Sei dazu für  $h > 0$  (damit ist in der Regel die Schrittweite der Diskretisierung gemeint)  $P_h$  beziehungsweise  $Q_h$  eine orthogonale Projektion in  $X$  beziehungsweise  $Y$ . Im folgenden nehmen wir an, daß

$$\|A(I - P_h)\| \rightarrow 0, \quad \|(I - Q_h)A\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0). \quad (1.2)$$

Hier bezeichnet  $I$  die identische Abbildung in  $X$  beziehungsweise  $Y$  sowie  $A^*$  den zu  $A$  konjugierten Operator. Wir werden diese und die anderen einmal erklärten Bezeichnungen auch im folgenden verwenden.

Wenn  $R(P_h)$  und  $R(Q_h)$  endlich-dimensional sind (dies ist auch der uns zumeist interessierende Fall), so ist für Bedingung (1.2) notwendig und hinreichend, daß (siehe Anselone[1], Proposition 1.8)  $A$  ein kompakter Operator ist, daß  $P_h \rightarrow I$  ( $h \rightarrow 0$ ) punktweise auf  $R(A^*)$  und daß  $Q_h \rightarrow I$  ( $h \rightarrow 0$ ) punktweise auf  $R(A)$ . Nun kann man zum Beispiel die Schrittweite  $h_\epsilon$  in Abhängigkeit von  $\epsilon$  wählen (das heißt, nicht zu fein und nicht zu grob diskretisieren) und die Lösung  $x_{h_\epsilon}^* \in R(P_{h_\epsilon})$  der Gleichung  $Q_{h_\epsilon} A x_{h_\epsilon} = Q_{h_\epsilon} y_\epsilon$  (für den Moment nehmen wir an, daß diese existiert und eindeutig bestimmt ist) als Approximation der Lösung  $x_*$  von (1.1) nehmen (siehe Natterer[24], Hämarik[12], Vainikko und Hämarik[41] oder Louis[21]). Bei geeigneter Wahl von  $h_\epsilon$  ist dann durch  $\mathcal{R}_\epsilon y_\epsilon = x_{h_\epsilon}$  ein Regularisierungsverfahren (bezüglich  $x_{an} = 0$ ) definiert.

Besser ist es jedoch, eher zu fein zu diskretisieren und Verfahren zu verwenden, die erzeugt werden durch borelmeßbare Funktionen

$$g_r : [0, a] \rightarrow \mathbb{R},$$

( $r \geq 0$ ,  $\|A\|^2 \leq a$ ) mit gewissen Eigenschaften (siehe Kapitel 2 für die linearen Verfahren und Kapitel 5 für das Verfahren der konjugierten Gradienten). Sei  $x_{an} \in X$  eine Anfangsnäherung für eine Lösung von (1.1) und  $h$  fest gewählt. Mit einer angemessenen Wahl von  $r$  (siehe dazu Kapitel 4 und 5) ist dann

$$x_r = (I - g_r(A_h^* A_h) A_h^* A_h) P_h x_{an} + g_r(A_h^* A_h) A_h^* y_\epsilon \quad (1.3)$$

(hier ist  $A_h = Q_h A P_h : X \rightarrow Y$ ) eine Näherung der Lösung  $x_*$  von (1.1), die am nächsten bei  $x_{an}$  liegt. Da  $h$  fest gewählt ist, haben wir auf Indizierung von  $x_r$  mit  $h$  verzichtet. Man sieht leicht, daß  $x_r \in X_h$  für alle  $r \geq 0$ .

Wir wollen Verfahren (1.3) noch kurz für den Fall  $x_{an} = 0$  erläutern, ohne dabei jedoch zu exakt zu werden. Dazu bezeichnen wir

mit  $B^+$  die verallgemeinerte Inverse für ein beliebiges  $B \in L_s(X, Y)$ , näheres hierzu findet man zum Beispiel in Louis[21]. Gleichung (1.3) wird für  $x_{an} = 0$  zu  $x_r = g_r(A_h^* A_h) A_h^* y_\epsilon$ . Wenn nun  $g_r(A_h^* A_h) \rightarrow (A_h^* A_h)^+$  ( $r \rightarrow \infty$ ) punktweise (dies wird sich schließlich aus den im folgenden Kapitel angegebenen Bedingungen (2.1) und (2.2) an  $g_r$  ergeben), so folgt  $g_r(A_h^* A_h) A_h^* \rightarrow (A_h^* A_h)^+ A_h^* = A_h^+$  ( $r \rightarrow \infty$ ) punktweise. Für große Parameter  $r$  wird  $x_r$  also  $A_h^+ y_\epsilon$  approximieren, falls  $y_\epsilon$  im Definitionsbereich von  $A_h^+$  liegt (was sicher immer dann der Fall ist, wenn  $P_h$  oder  $Q_h$  eine endlich-dimensionale Projektion ist). Selbst im Fall  $y = y_\epsilon$  kann nun aber  $A_h^+ y_\epsilon$  eine schlechte Näherung für die Lösung  $x_*$  der Gleichung (1.1) mit minimaler Norm sein, was dann an der durchgeführten Diskretisierung liegt, siehe Seidman[35]. Daher darf im allgemeinen der Parameter  $r$  nicht zu groß gewählt werden. Natürlich aber auch nicht zu klein; wie er nun gewählt werden soll, darum geht es in dieser Arbeit.

Wir fassen nun zusammen, was in den einzelnen Kapiteln behandelt wird. In Kapitel 2 werden lineare Verfahren zur Lösung von (1.1) vorgestellt. In Kapitel 3 werden Resultate über gebrochene Potenzen von positiven selbstadjungierten Operatoren geliefert, die für die Beweise von Konvergenz beziehungsweise Konvergenzraten benötigt werden. In Kapitel 4 schlagen wir sowohl eine a priori- als auch eine a posteriori-Parameterwahl für lineare Verfahren vor. Letztere ist vergleichbar mit dem Diskrepanzprinzip von Ivanov-Morozov (Ivanov[13], Morozov[22]): mit einer Konstanten  $d > 1$  und für festes  $h$  wähle man  $r$  so, daß  $\|A_h x_r - Q_h y_\epsilon\| = d\epsilon$  gilt. Wir werden allerdings eine weitere Bedingung an den Parameter  $r$  stellen. Für eine vergleichbare Parameterwahl beim nichtlinearen Verfahren der konjugierten Gradienten ( $g_r$  in (1.4) hängt von  $A_h$ ,  $x_{an}$  und  $y_\epsilon$  ab) werden in Kapitel 5 Konvergenzraten bewiesen.

Gilt für  $A \in L_s(X)$ , das heißt,  $A : X \rightarrow X$  ist ein beschränkter linearer Operator, außerdem  $A = A^* \geq 0$ , das heißt,  $A$  ist nichtnegativ und selbstadjungiert, so lassen sich obige Verfahren (mit weniger Aufwand) auf die Gleichung  $P_h A P_h x = P_h y_\epsilon$  anwenden. In Kapitel 6 werden für eine Kapitel 4 und 5 analoge Parameterwahl Konvergenz-

raten angeben, wenn die gesuchte Lösung in einem gewissen Sinne glatt ist. Die theoretischen Ergebnisse werden in Kapitel 7 numerisch illustriert. Schließlich gehen wir in Kapitel 8 auf die Optimalität von Verfahren ein und erhalten nebenbei auch als Ergebnis, daß das Verfahren der konjugierten Gradienten mit dem in Kapitel 5 angegebenen Abbruchkriterium bei genügend feiner Diskretisierung zu einem Regularisierungsverfahren wird.

Es soll abschließend nicht unerwähnt bleiben, daß die folgenden Betrachtungen auch den "klassischen" Fall  $A_h = A$  enthalten, für den die Ergebnisse der Kapitel 4, 5 und 6 bekannt sind (Vainikko[38], Vainikko und Veretennikov[42], Nemirovskii[25], Louis[21]).

Ich möchte Herrn Professor Dr. Louis herzlich danken für den Anstoß zu dieser Arbeit. Weiterhin gilt mein Dank Herrn Professor Dr. Vainikko für die Zusammenarbeit während seines Aufenthaltes in Kaiserslautern Anfang 1989, ohne die diese Arbeit in dieser Form nicht entstanden wäre.

## 2 Lineare Verfahren zur Lösung schlecht gestellter Probleme

### 2.1 Ein allgemeiner Zugang

Wie in der Einleitung angedeutet wollen wir zur Lösung von (1.1) lineare Verfahren erzeugen durch borelmeßbare Funktionen

$$g_r : [0, a] \rightarrow \mathbb{R},$$

$r \geq 0$ ,  $\|A\|^2 \leq a$ . An diese Funktionen  $g_r$  stellen wir die folgenden Bedingungen:

$$\sup_{0 \leq t \leq a} t^p |1 - tg_r(t)| \leq \gamma_p r^{-p}, \quad r > 0, \quad 0 \leq p \leq p_0, \quad (2.1)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq a} \sqrt{t} |g_r(t)| \leq \gamma_* r^{\frac{1}{2}}, \quad r \geq 0, \quad (2.2)$$

wobei  $p_0 > 0$ ,  $\gamma_p$  und  $\gamma_*$  Konstanten sind.

Sei  $x_{an} \in X$  eine Anfangsnäherung und  $x_*$  die (eindeutig bestimmte) Lösung von (1.1), welche den geringsten Abstand zu  $x_{an}$  hat.  $x_*$  ist charakterisiert durch die Bedingung  $Ax_* = y$ ,  $x_* - x_{an} \in N(A)^\perp$  oder auch durch die Bedingung  $x_* = x + P_{N(A)}x_{an}$ , wobei hier  $x$  die Lösung von (1.1) mit minimaler Norm ist.

Seien nun für  $h > 0$  orthogonale Projektionen  $P_h$  und  $Q_h$  in  $X$  beziehungsweise  $Y$  gegeben. Wir setzen  $A_h = Q_h A P_h : X \rightarrow Y$  und nehmen für den Rest dieses Kapitels  $h$  als fest gewählt an. Daher werden in diesem Kapitel neu eingeführte Variablen nicht mit  $h$  indiziert. Weiterhin sei  $y_\epsilon \in Y$  mit  $\|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon$  fest gewählt. Mit einer angemessenen Parameterwahl  $r$  (siehe dazu Kapitel 4 und 5) ist eine Approximation an  $x_*$  gegeben durch

$$x_r = (I - g_r(A_h^* A_h) A_h^* A_h) P_h x_{an} + g_r(A_h^* A_h) A_h^* y_\epsilon, \quad (2.3)$$

Bei festem  $r$  ist für  $P_h x_{an} \neq 0$  also  $x_r$  "nur" affin-linear in Abhängigkeit von  $y_\epsilon$ . Wir werden trotzdem von linearen Verfahren sprechen. Die Bedingungen (2.1) und (2.2) an  $g_r$  garantieren die Wohldefiniertheit von  $x_r$ .

Mehr zu den Folgerungen aus den Bedingungen (2.1) und (2.2) in Abschnitt 4.

## 2.2 Beispiele

1. *Die Methode von Tikhonov:* Bei diesem auf A. N. Tikhonov (siehe [36], aber auch Phillips[27]) zurückgehenden Verfahren ist die Lösung  $x_r$  der Gleichung

$$(A_h^* A_h + r^{-1} I)x = A_h^* y_\epsilon \quad (2.4)$$

zu bestimmen. Die Methode ist von der Form (2.3) mit  $x_{an} = 0$  und  $g_r(t) = (t+r^{-1})^{-1}$ ,  $r > 0$ . Die Bedingungen (2.1) und (2.2) sind erfüllt mit  $p_0 = 1$ ,  $\gamma_p = p^p(1-p)^{1-p}$  ( $0 < p \leq 1$ ) und  $\gamma_* = \frac{1}{2}$  (Vainikko und Veretennikov[42]).

Eine Verallgemeinerung der Methode von Tikhonov ist das folgende Verfahren.

2. *Die verallgemeinerte Methode von Tikhonov:* Sei  $q \geq -\frac{1}{2}$ . Hier ist im Falle  $q \geq 0$  die Lösung  $x_r$  der Gleichung

$$((A_h^* A_h)^{q+1} + r^{-q-1} I)x = (A_h^* A_h)^q A_h^* y_\epsilon \quad (2.5)$$

zu bestimmen, im Falle  $q < 0$  ist die Lösung  $x_r$  der Gleichung

$$(A_h^* A_h + r^{-q-1} (A_h^* A_h)^{-q})x = A_h^* y_\epsilon$$

zu bestimmen. Die Methode ist von der Form (2.3) mit  $x_{an} = 0$  und  $g_r(t) = t^q / (t^{q+1} + r^{-q-1})$ ,  $r > 0$ . Die Bedingungen (2.1) und (2.2) sind erfüllt mit  $p_0 = q + 1$ ,  $\gamma_* = \frac{(2q+1)^{\frac{q+1/2}{q+1}}}{2q+2}$  und

$$\gamma_p = (p/(q+1))^{(p/(q+1))} ((q+1-p)/(q+1))^{(q+1-p)/(q+1)} \quad (0 < p \leq q+1).$$

3. *Die Methode der sukzessiven Approximation (Explizites Verfahren):* Sei  $0 < \mu < \frac{2}{a}$ . Dieser von L. Landweber (siehe [20]) stammende Algorithmus ist gegeben durch  $x_0 = P_h x_{an}$ ,

$$x_r = (I - \mu A_h^* A_h)x_{r-1} + \mu A_h^* y_\epsilon, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Die Methode ist von der Form (2.3) mit  $g_r(t) = \frac{1}{t}[1 - (1 - \mu t)^r]$ ,  $t \neq 0$ . Die Bedingungen (2.1) und (2.2) sind erfüllt (siehe Vainikko und Veretennikov[42]) für jedes  $p_0 > 0$  mit  $\gamma_* = \frac{1}{2}$  und

$$\gamma_p = \max\left\{\frac{p^p}{\mu}, a^p \sup_{r \geq 1} |1 - \mu a|^r r^p\right\} \quad (0 < p).$$

4. *Implizites Verfahren:* Sei  $0 < \mu$  konstant. Dieser Algorithmus ist gegeben durch  $x_0 = P_h x_{an}$ ,

$$(A_h^* A_h + \mu I)x_r = \mu x_{r-1} + A_h^* y_\epsilon, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Die Methode ist von der Form (2.3) mit  $g_r(t) = \frac{1}{t}[1 - (\frac{\mu}{\mu+t})^r]$ ,  $t \neq 0$ . Die Bedingungen (2.1) und (2.2) sind erfüllt (siehe wieder Vainikko und Veretennikov[42]) für jedes  $p_0 > 0$  mit  $\gamma_* = \mu^{-\frac{1}{2}}$  und  $\gamma_p = (p\mu)^p$ .

Andere durch Funktionen  $(g_r)_{r \geq 0}$  erzeugte lineare Verfahren sind in Vainikko[38], Vainikko[39], Vainikko und Veretennikov[42] oder Louis[21] zu finden. Es soll nun die Matrixdarstellung der vier hier vorgestellten Verfahren angegeben werden.

### 2.3 Die Matrixdarstellung der einzelnen Verfahren

Sei die Familie  $\mathcal{A} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$  von Vektoren aus  $X$  eine Basis von  $R(P_h) =: X_h$ . Weiter sei die Familie von Vektoren  $\mathcal{B} = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m)$  aus  $Y$  eine Basis von  $R(Q_h) =: Y_h$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} G_\Phi &= (\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n}, \\ G_\Psi &= (\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle)_{i,j=1,\dots,m}, \\ B &= (\langle \Psi_i, A\Phi_j \rangle)_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}, \\ z &= (\langle \Psi_i, y_\epsilon \rangle)_{i=1,\dots,m}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Es ist dann, wie einige kleinere Rechnungen zeigen,  $G_\Psi^{-1}B$  die der linearen Abbildung  $A_h$  bezüglich der Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zugeordnete Matrix, wenn man  $A_h$  als Abbildung von  $X_h$  nach  $Y_h$  auffaßt. Analoges gilt für  $G_\Phi^{-1}B^T$  und  $A_h^*$ . Dies beides ist im folgenden kommutativen Diagramm dargestellt. Wir definieren dazu die beiden Abbildungen  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow X_h$ ,  $\alpha \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha_k \Phi_k$  und  $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow Y_h$ ,  $\alpha \mapsto \sum_{k=1}^m \alpha_k \Psi_k$ .

$$\begin{array}{ccccc}
X_h & \xrightarrow{A_h} & Y_h & \xrightarrow{A_h^*} & X_h \\
\uparrow \Phi & & \uparrow \Psi & & \uparrow \Phi \\
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{G_\Psi^{-1}B} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{G_\Phi^{-1}B^T} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

Wir betonen, daß die Matrix  $G_\Phi^{-1}B^TG_\Psi^{-1}B$ , die  $A_h^*A_h$  repräsentiert, nicht notwendigerweise selbstadjungiert ist. Daher macht der Ausdruck  $g_r(G_\Phi^{-1}B^TG_\Psi^{-1}B)$  im allgemeinen keinen Sinn. Allerdings wird der Operator  $p(A_h^*A_h)$  durch die Matrix  $p(G_\Phi^{-1}B^TG_\Psi^{-1}B)$  repräsentiert für jedes Polynom  $p$  und so sind die folgenden Aussagen ( $g_r$  ist in den hier angegebenen Beispielen immer rational) leicht einzusehen.

Zunächst betrachten wir die Methode von Tikhonov. Die Lösung von  $x_r$  der zugehörigen Gleichung (2.4) kann in der Form

$$x_r = \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j \quad (2.9)$$

dargestellt werden. Einige elementare Rechnungen zeigen, daß (2.4) und (2.9) äquivalent sind zu dem folgenden Gleichungssystem zur Bestimmung von  $c = (c_j)_{j=1,\dots,n}$ :

$$(B^TG_\Psi^{-1}B + r^{-1}G_\Phi)c = B^TG_\Psi^{-1}z. \quad (2.10)$$

Die auf der linken Seite des letzten Gleichungssystems stehende Matrix ist symmetrisch und positiv definit, daher kann man zur Lösung dieses Gleichungssystems das Choleskyverfahren verwenden.

Bei der verallgemeinerten Methode von Tikhonov entsteht mit der nichtnegativen ganzen Zahl  $q$  das lineare Gleichungssystem

$$(B^TG_\Psi^{-1}B(G_\Phi^{-1}B^TG_\Psi^{-1}B)^q + r^{-1}G_\Phi)c = G_\Phi(G_\Phi^{-1}B^TG_\Psi^{-1}B)^q G_\Phi^{-1}B^TG_\Psi^{-1}z.$$

Bei der Methode der sukzessiven Approximation (2.6) und dem impliziten Schema (2.7) kann, da alle Iterierten in  $X_h$  liegen,  $x_r$  wiederum

in der Form

$$x_r = \sum_{j=1}^n c_j^r \Phi_j \quad (2.11)$$

dargestellt werden. Einige elementare Rechnungen zeigen, daß (2.6) (beziehungsweise (2.7)) und (2.11) äquivalent ist zu dem Iterationsverfahren (2.12) (beziehungsweise (2.13)) zur Bestimmung von  $c^r = (c_j^r)_{j=1, \dots, n}$ ,  $r = 1, 2, \dots$  :

$$c^r = c^{r-1} - \mu(G_\Phi^{-1} B^T G_\Psi^{-1} B c^{r-1} - G_\Phi^{-1} B^T G_\Psi^{-1} z), \quad (2.12)$$

$$(B^T G_\Psi^{-1} B + \mu G_\Phi) c^r = \mu G_\Phi c^{r-1} + B^T G_\Psi^{-1} z. \quad (2.13)$$

In beiden Fällen ist  $c^0 = G_\Phi^{-1}((\langle \Phi_j, x_{an} \rangle)_{j=1, \dots, n})$ .

Wir möchten noch eines betonen: In allen Fällen werden die einzelnen Verfahren auf die Gleichung  $G_\Phi^{-1} B^T G_\Psi^{-1} B c = G_\Phi^{-1} B^T G_\Psi^{-1} z$  angewendet werden (dies ist die Matrixversion für die Gleichung  $A_h^* A_h x = A_h^* y_\epsilon$ , wenn  $c$  die Koordinaten von  $x$  sind) und nicht auf die äquivalente Gleichung  $B^T B c = B^T z$ . Diese letzte Gleichung erhält man durch Anwendung eines Projektionsverfahrens auf  $Ax = y_\epsilon$  und anschließender Normalisierung.

Was die Diskretisierung angeht, so möchten wir noch zwei Spezialfälle erwähnen. Wir betrachten zunächst (wegen des folgenden Begriffs siehe Natterer[24]) die *Fehlerquadratmethode*. Sei dazu  $P_h$  eine beliebige Orthogonalprojektion in  $X$ , so daß  $R(P_h)$  endliche Dimension hat, und sei  $Q_h$  die orthogonale Projektion auf  $A(R(P_h))$ . Weiterhin sei  $(\Phi_j)_j$  eine Basis von  $R(P_h)$  und  $\Psi_j = A\Phi_j$ . Wir verlangen hier nicht, daß  $(\Psi_j)_j$  eine Basis von  $R(Q_h)$  ist.

Wegen  $B = G_\Psi$  lassen sich die Algorithmen hier in einer einfacheren Form darstellen. Im übrigen hätte man wegen  $A_h = AP_h$  anstelle von  $Q_h$  auch den Einheitsoperator  $I$  nehmen können, es würden sich die gleichen Matrizen ergeben. Wir werden später jedoch auch den Defekt  $A_h x_r - Q_h y_\epsilon$  berechnen müssen, und da wir daran interessiert sind, daß sich alle Vorgänge in endlichdimensionalen Unterräumen abspielen, haben wir  $Q_h$  so und nicht anders gewählt.

Auch bei der *dualen Fehlerquadratmethode* lassen sich die Verfahren in einer einfacheren Form darstellen. Hier ist  $Q_h$  eine beliebige Orthogonalprojektion in  $Y$ , so daß  $R(Q_h)$  endliche Dimension hat. Sei  $P_h$  die orthogonale Projektion auf  $A^*(R(Q_h))$ . (Wenn  $x_{an} = 0$ , so kann man auch  $P_h = I$  wählen, es läuft auf das Gleiche hinaus.) Weiterhin sei  $(\Psi_j)_j$  eine Basis von  $R(Q_h)$ . Die einzelnen Gleichungen lassen sich auch hier knapper fassen. Es ist  $B = G_\Psi$ , wobei in (2.8)  $\Phi_j = A^*\Psi_j$  zu wählen ist.

Wir benötigen noch Ergebnisse über gebrochene Potenzen von selbstadjungierten nichtnegativen Operatoren, um die ersten Konvergenzresultate für die in diesem Kapitel angegebenen Verfahren beweisen zu können. Diese werden in dem nun folgenden Kapitel bereitgestellt.

### 3 Einige Resultate über gebrochene Potenzen von selbstadjungierten nichtnegativen Operatoren

Die Lemmata in diesem Abschnitt werden in den Kapiteln 4 bis 6 benötigt. Das erste Lemma kann man in ähnlicher Form in Gfrerer[9] und in King und Neubauer[18] finden, wir liefern hier einen kürzeren Beweis. Dazu benötigen wir die folgende, zum Beispiel in Louis[21] zu findende Interpolationsungleichung: Für  $x \in X$ ,  $p$  und  $\alpha$  positiv gilt

$$\| |A|^p x \| \leq \| |A|^{p+\alpha} x \|^{p+\alpha} \| x \|^{p+\alpha}. \quad (3.1)$$

Hierbei ist  $|A|$  die positive Quadratwurzel von  $A^*A$ , das heißt, es gilt  $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ .

**Lemma 3.1** *Sei  $p > 0$ ,  $A \in L_s(X, Y)$  und  $P \in L_s(X)$  eine orthogonale Projektion. Sei weiter  $b_p = 1$  für  $p \leq 1$  und  $b_p = \|A\|^{p-1}$  für  $p > 1$ . Dann gilt*

$$\|P|A|^p\| \leq b_p \|AP\|^{\min\{p,1\}}.$$

*Beweis.* a) Da  $|A|$  und  $P$  selbstadjungiert sind, gilt

$$\begin{aligned} \|P|A|\| &= \|(P|A|)^*\| = \| |A|^* P^* \| \\ &= \| |A| P \| = \|AP\|. \end{aligned}$$

Letzteres folgt, da  $\|Ax\| = \| |A|x \|$  für alle  $x \in X$  gilt. Für  $p = 1$  ist die Behauptung daher gezeigt.

b) Sei nun  $p > 1$ . Dann gilt

$$\|P|A|^p\| \leq \|P|A|\| \| |A|^{p-1} \| = \|A\|^{p-1} \|AP\|.$$

Also ist die Behauptung auch für  $p > 1$  gezeigt.

c) Sei schließlich  $p < 1$ : Wegen  $\|P|A|^p\| = \| |A|^p P \|$  folgt mit der "Momentenungleichung" (3.1) für  $x \in X$

$$\begin{aligned} \| |A|^p P x \| &\leq \| |A| P x \| \| P x \|^{1-p} = \|APx\|^p \|Px\|^{1-p} \\ &= \|AP^2x\|^p \|Px\|^{1-p} \leq \|AP\|^p \|Px\|. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.  $\square$

Lemma 3.1 ist nicht zu verschärfen (man betrachte die Aussage für die triviale orthogonale Projektion  $P \in L_s(X)$  mit  $R(P) = X$ ).

**Lemma 3.2** *Seien  $0 < p < 2$ ,  $A \in L_s(X, Y)$  und  $P \in L_s(X)$  eine orthogonale Projektion. Dann gilt*

$$\|P|A|^pP - |AP|^p\| \leq \frac{4}{\pi} \|A(I - P)\|^p.$$

*Beweis.* Wir benötigen die folgende, in Krasnoselskii et. al.[19] zu findende Integralformel für  $T \in L_s(X)$  mit  $T = T^*$  und  $T \geq 0$ : Für  $0 < \alpha < 1$  gilt

$$T^\alpha = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (tI + T)^{-1} T dt. \quad (3.2)$$

Wir wenden diese Formel auf  $B = A^*A$  und  $\bar{B} = PA^*AP$  an und erhalten die Abschätzung

$$\|\bar{B}^\alpha - PB^\alpha P\| \leq \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \|(tI + \bar{B})^{-1} \bar{B} - PB(tI + B)^{-1} P\| dt. \quad (3.3)$$

Nun läßt sich der Integrand der rechten Seite von (3.3) mit der Gleichung

$$\begin{aligned} & (tI + \bar{B})^{-1} \bar{B} - PB(tI + B)^{-1} P \\ &= (tI + \bar{B})^{-1} P[(tI + B) - (tI + \bar{B})] B(tI + B)^{-1} P \\ &= (tI + \bar{B})^{-1} PA^*A(I - P)A^*A(tI + B)^{-1} P. \end{aligned} \quad (3.4)$$

anders darstellen. Um die Norm von (3.4) abzuschätzen, verwenden wir die folgenden Ungleichungen, die man leicht mit spektraltheoretischen Methoden zeigen kann:

$$\|(tI + \bar{B})^{-1} PA^*\| \leq \frac{1}{2} t^{-1/2} \quad \text{und} \quad \|A(tI + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{2} t^{-1/2}, \quad (3.5)$$

$$\|(tI + \bar{B})^{-1} \bar{B}\| \leq 1 \quad \text{und} \quad \|(tI + B)^{-1} B\| \leq 1, \quad (3.6)$$

$$\|A(I - P)A^*\| \leq \|A(I - P)\|^2. \quad (3.7)$$

(3.5) und (3.7) implizieren

$$\|(tI + \bar{B})^{-1} \bar{B} - PB(tI + B)^{-1} P\| \leq \frac{1}{4} \|A(I - P)\|^2 t^{-1}, \quad (3.8)$$

mit (3.6) folgt

$$\|(tI + \bar{B})^{-1} \bar{B} - PB(tI + B)^{-1} P\| \leq 1. \quad (3.9)$$

(Hierbei wurde benutzt, daß für selbstadjungierte nichtnegative Operatoren  $S$  und  $T$  mit  $\|S\| \leq 1$  und  $\|T\| \leq 1$  gilt  $\|S - T\| \leq 1$ , siehe Vainikko und Veretennikov[42]).

Verwendet man die Abschätzung (3.9) für  $0 < t < \|A(I - P)\|^2$  und die Abschätzung (3.8) für  $\|A(I - P)\|^2 \leq t < \infty$ , so erhält man schließlich aus (3.3) und (3.4)

$$\begin{aligned} \|\overline{B}^\alpha - PB^\alpha P\| &\leq \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4(1-\alpha)} \right) \|A(I - P)\|^{2\alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha\pi}{4\pi\alpha(1-\alpha)} (4 - 3\alpha) \|A(I - P)\|^{2\alpha} \\ &= \left( \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\alpha(1-\alpha)} - \frac{3 \sin(1-\alpha)\pi}{4\pi(1-\alpha)} \right) \|A(I - P)\|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Da  $\frac{\sin \alpha\pi}{\pi\alpha(1-\alpha)} \leq \frac{4}{\pi}$  und  $\frac{\sin(1-\alpha)\pi}{\pi(1-\alpha)} \geq 0$ , sind wir fertig.  $\square$

**Bemerkung.** G.Vainikko (siehe Vainikko[38] und Vainikko und Veretennikov[42]) hat folgendes bewiesen: Seien  $p$  sowie  $\eta_0 > 0$ , es gelte  $p \neq 1$ . Weiter sei  $T : X \rightarrow Y$  ein stetiger linearer Operator. Dann gibt es ein  $a_p > 0$ , so daß für alle  $0 < \eta \leq \eta_0$  und alle stetigen linearen  $T_\eta : X \rightarrow Y$  mit  $\|T - T_\eta\| \leq \eta$  gilt

$$\| |T|^p - |T_\eta|^p \| \leq a_p \eta^{\min\{p,1\}}.$$

Für  $p = 1$  gilt dies nicht (siehe hierzu Kato[17]). Für  $p$  um 1 liefern also die Lemmata 3.1 und 3.2 eine Verschärfung des eben zitierten Ergebnisses, wenn man nur spezielle Störungen zuläßt. Es folgt nämlich mit der bisher üblichen Notation

$$\| |A|^p - |AP|^p \| = O(\|A - AP\|^{\min\{p,1\}}). \quad (3.10)$$

Es gibt noch eine weitere Klasse von Operatoren, für die eine Verschärfung des eben zitierten Ergebnisses möglich ist, wie das folgende Lemma zeigt. Dieses kann man im übrigen auch zum Beweis von (3.10) verwenden, indem man es auf  $|A|$  und  $P|A|P$  sowie auf  $(P|A|P)^2$  und  $|AP|^2$  anwendet. Einen Beweis dieses folgenden Lemmas findet man in Vainikko und Veretennikov[42].

**Lemma 3.3** Sei  $B \in L_s(X)$ , es gelte  $B = B^* \geq 0$ . Weiter seien  $p > 0$  und  $a > 0$ . Dann gilt für jedes  $\overline{B} \in L_s(X)$  mit  $\overline{B} = \overline{B}^* \geq 0$ ,  $\|\overline{B}\| \leq a$ ,

$$\|B^p - \overline{B}^p\| \leq a_p \|B - \overline{B}\|^{\min\{p,1\}}.$$

Hier ist  $a_p = \frac{4}{\pi}$ , wenn  $p \leq 1$ , und  $p \mapsto a_p$  ist beschränkt in  $(0, p_0]$  für jedes  $p_0 > 0$ .

**Korollar 3.4** Seien  $A \in L_s(X, Y)$  und  $p > 0$ . Für jede orthogonale Projektion  $Q \in L_s(Y)$  gilt

$$\| |A|^p - |QA|^p \| \leq a_{\frac{p}{2}} \|(I - Q)A\|^{\min\{p,2\}}.$$

Hier ist  $a_p = \frac{4}{\pi}$ , wenn  $p \leq 1$ , und  $p \mapsto a_p$  ist beschränkt in  $(0, p_0]$  für jedes  $p_0 > 0$ .

*Beweis.* Dies folgt sofort mit Lemma 3.3 mit  $B = A^*A$  und  $\overline{B} = A^*QA$ , da  $\|B - \overline{B}\| \leq \|(I - Q)A\|^2$ .  $\square$

**Lemma 3.5** Seien  $A \in L_s(X, Y)$  und  $p > 0$ . Dann gilt für orthogonale Projektionen  $P \in L_s(X)$  und  $Q \in L_s(Y)$

$$\|P|A|^p - |QAP|^p\| \leq c_p (\|A(I - P)\|^{\min\{p,1\}} + \|(I - Q)A\|^{\min\{p,2\}}).$$

$p \mapsto c_p$  ist beschränkt in  $(0, p_0]$  für jedes  $p_0 > 0$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\|P|A|^p - |QAP|^p\| \leq \|P|A|^p - |AP|^p\| + \| |AP|^p - |QAP|^p \|.$$

Die beiden Summanden auf der rechten Seite der letzten Gleichung lassen sich leicht weiter abschätzen. Zum einen erhalten wir mit Korollar 3.4, angewendet auf  $AP$  anstelle von  $A$ , die Ungleichung  $\| |AP|^p - |QAP|^p \| \leq a_{\frac{p}{2}} \|(I - Q)A\|^{\min\{p,2\}}$ . Zum anderen erhält man mit den Lemma 3.1 und 3.2 für den Fall  $p \leq 2$

$$\|P|A|^p - |AP|^p\| = O(\|A(I - P)\|^{\min\{p,1\}}).$$

Wenn  $p > 2$ , so gilt

$$P|A|^p - |AP|^p = P|A|(|A|^{p-1} - |AP|^{p-1}) + (P|A| - |AP|)|AP|^{p-1}$$

und wieder mit Lemma 3.1 und Lemma 3.2 sowie vollständiger Induktion erhalten wir eine ausreichende Abschätzung.  $\square$

Mit Lemma 3.1 und Lemma 3.5 erhält man das folgende Korollar.

**Korollar 3.6** *Seien  $A \in L_s(X, Y)$  und  $p > 0$ . Dann gilt für orthogonale Projektionen  $P \in L_s(X)$  und  $Q \in L_s(Y)$*

$$\| |A|^p - |QAP|^p \| \leq c_p (\|A(I - P)\|^{\min\{p,1\}} + \|(I - Q)A\|^{\min\{p,2\}}).$$

$p \mapsto c_p$  ist beschränkt in  $(0, p_0]$  für jedes  $p_0 > 0$ .

## 4 Parameterwahl für lineare Verfahren

In diesem Kapitel werden wir eine Wahl des Parameters  $r$  in Abhängigkeit der Diskretisierung und des Datenfehlers für die in Kapitel 2 eingeführten linearen Verfahren angeben. Die angegebenen Ergebnisse sind teilweise in Plato[29] (dort mit einer anderen Beweistechnik als der in diesem Kapitel verwendeten) und in Plato und Vainikko[30] zu finden.

Zunächst ein paar Vorbemerkungen, die man leicht mit spektraltheoretischen Methoden beweisen kann. Ausgehend von den Definitionen und Annahmen der Einleitung und unter der Voraussetzung, daß die Funktionen  $g_r$  die Bedingungen (2.1) und (2.2) erfüllen, definieren wir

$$S_{h,r} = I - g_r(A_h^* A_h) A_h^* A_h, \quad (4.1)$$

$$R_{h,r} = S_{h,r} P_h x_{an} + g_r(A_h^* A_h) A_h^*. \quad (4.2)$$

Dann ist  $S_{h,r} : X \rightarrow X$  ein beschränkter linearer Operator mit (siehe (2.1))

$$\|S_{h,r}|A_h|^p\| \leq \gamma_{\frac{p}{2}} r^{-\frac{p}{2}}, \quad 0 < p \leq 2p_0, \quad r > 0, \quad (4.3)$$

und  $R_{h,r} : Y \rightarrow X$  ist der affin-lineare Approximationsoperator. Weiter ist (siehe (2.2))  $g_r(A_h^* A_h) A_h^* : Y \rightarrow X$  ein beschränkter linearer Operator mit  $\|g_r(A_h^* A_h) A_h^*\| = \|g_r(A_h A_h^*)|A_h^*|\|$ , es gilt

$$\|g_r(A_h^* A_h) A_h^*\| \leq \gamma_* r^{\frac{1}{2}}, \quad r > 0. \quad (4.4)$$

Die letzte Ungleichung können wir verwenden, um  $\|x_* - R_{h,r}y_\epsilon\|$  abzuschätzen. Zunächst gilt

$$x_* - R_{h,r}y_\epsilon = S_{h,r}P_h(x_* - x_{an}) + g_r(A_h^*A_h)A_h^*(AP_hx_* - y_\epsilon) + (I - P_h)x_*. \quad (4.5)$$

Wir setzen nun wieder  $\|A(I - P_h)\| \leq \xi_h$  voraus. Mit Ungleichung (4.4) und Gleichung (4.5) folgt dann

$$\begin{aligned} \|x_* - R_{h,r}y_\epsilon\| &\leq \|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\| + \gamma_* r^{\frac{1}{2}}(\xi_h \|(I - P_h)x_*\| + \epsilon) \\ &\quad + \|(I - P_h)x_*\|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Diese Abschätzung ist ganz wesentlich bei dem Beweis der folgenden beiden Sätze. Wir beginnen mit dem Fall der a priori-Parameterwahl. Zuvor jedoch noch die

**Definition 4.1** Sei  $A \in L_s(X, Y)$ . Wir setzen für  $p \geq 0$  und  $\rho \geq 0$

$$M_{p,\rho} := \{|A|^p z : z \in X, \|z\| \leq \rho\}.$$

#### 4.1 A priori-Parameterwahl

Der erste Teil des folgenden Satzes liefert ein Konvergenzresultat. Im zweiten Teil geben wir Konvergenzraten an für Lösungen des Problems  $Ax = y$ , die in einem gewissen Sinne glatt sind.

**Satz 4.2** Sei  $A \in L_s(X, Y)$ ,  $\|A\|^2 \leq a$ . Weiter sei  $y \in R(A)$ ,  $x_{an} \in X$  und  $x_*$  die Lösung von  $Ax = y$ , die am nächsten bei  $x_{an}$  liegt. Seien  $P_h \in L_s(X)$  und  $Q_h \in L_s(Y)$  orthogonale Projektionen und  $A_h = Q_h A P_h$ . Es gelte  $\|A(I - P_h)\| \leq \xi_h$  und  $\|(I - Q_h)A\| \leq \eta_h$ . Weiter seien die Bedingungen (2.1) und (2.2) gültig und  $R_{h,r}$  wie in (4.2) definiert.

1. (Konvergenz) Wenn  $P_h \rightarrow I$  punktweise,  $\xi_h \rightarrow 0$ ,  $\eta_h \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) und

$$r_{(h,\epsilon)}^{1/2} \epsilon \rightarrow 0, \quad r_{(h,\epsilon)}^{1/2} \xi_h \leq C \quad \text{und} \quad r_{(h,\epsilon)} \rightarrow \infty \quad (h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0),$$

so gilt

$$\sup_{y_\epsilon \in Y, \|y - y_\epsilon\| \leq \epsilon} \|x_* - R_{h,r_{(h,\epsilon)}}y_\epsilon\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0).$$

2. (Konvergenzordnung) Wenn  $0 < p \leq 2p_0$ ,  $x_* - x_{an} \in M_{p,\rho}$ ,  $x_* \in M_{p,\rho}$  und

$$C_1\left(\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{\frac{1}{p+1}} + \xi_h\right) \leq r^{-1/2} \leq C_2\left(\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{\frac{1}{p+1}} + \xi_h^{\min\{\frac{1}{p},1\}}\right)$$

mit positiven Konstanten  $C_1, C_2$ , so folgt

$$\|x_* - R_{h,r}y_\epsilon\| \leq e_p\left((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho(\xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}})\right).$$

$e_p$  ist unabhängig von  $\epsilon$ ,  $h$  und  $\rho$ .  $p \mapsto e_p$  ist beschränkt in  $(0, p_1]$  für jedes endliche  $p_1 > 0$ .

**Bemerkung.** Mit der Schreibweise " $r_{(h,\epsilon)} \rightarrow \infty$  ( $h \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ )" in Satz 4.2 ist folgendes gemeint: Für jede Folge  $(h_n, \epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $h_n \geq 0$ ,  $\epsilon_n \geq 0$ ,  $h_n + \epsilon_n \neq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $h_n + \epsilon_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gilt  $r_{(h_n, \epsilon_n)} \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Genauso sind vergleichbare Schreibweisen für Konvergenz im Hilbertraum  $X$  zu interpretieren.

*Beweis von Satz 4.2.* 1. Wegen der Abschätzung (4.6) ist Konvergenz schon bewiesen, wenn

$$\|S_{h,r(h,\epsilon)}P_h(x_* - x_{an})\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0) \quad (4.7)$$

gezeigt ist. Nun, wegen (4.3) ist  $\|S_{h,r}P_h\| \leq \gamma_0$ , die Familie  $(S_{h,r}P_h)_{h,r}$  ist also gleichmäßig beschränkt. Weiter gilt wieder wegen (4.3) und Lemma 3.5 (mit  $p := \min\{2p_0, 1\}$ )

$$\begin{aligned} \|S_{h,r}P_h|A|^p\| &\leq \|S_{h,r}|A_h|^p\| + \|S_{h,r}P_h(|A|^p - |A_h|^p)\| \\ &\leq \gamma_{\frac{p}{2}}r^{-\frac{p}{2}} + \gamma_0c_p(\xi_h^p + \eta_h^p) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty, h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Jetzt folgt aber schon (4.7) wegen  $x_* - x_{an} \in N(A)^\perp = N(|A|^p)^\perp = \overline{R(|A|^p)}$  mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus.

2. Um die Fehlerabschätzung zu beweisen, müssen wir (siehe wieder Ungleichung (4.6)) wegen  $r^{\frac{1}{2}}\xi_h \leq C_1^{-1}$ ,  $r^{\frac{1}{2}}\epsilon \leq C_1^{-1}(\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}$  und  $\|(I - P_h)x_*\| \leq b_p\rho\xi_h^{\min\{p,1\}}$  (Lemma 3.1) nur noch  $\|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\|$  abschätzen. Nun, mit Lemma 3.5 und (4.3) folgt

$$\begin{aligned} \|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\| &\leq \|S_{h,r}P_h|A|^p\|\rho \\ &\leq (\|S_{h,r}|A_h|^p\| + \gamma_0\|P_h|A|^p - |A_h|^p\|)\rho \\ &\leq (\gamma_{\frac{p}{2}}r^{-\frac{p}{2}} + \gamma_0c_p(\xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}}))\rho. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Jetzt ist die zweite Aussage des Satzes eine leichte Konsequenz aus der Parameterwahl.  $\square$

**Bemerkung 1.** Liegt der Startvektor  $x_{an}$  in  $N(A)^\perp$  (wenn also zum Beispiel  $x_{an} = 0$ ), so gilt  $x_* \in N(A)^\perp$ , im ersten Teil des Satzes muß dann nur " $P_h \rightarrow I$  punktweise auf  $N(A)^\perp$ " verlangt werden, man muß also nicht im Nullraum von  $A$  diskretisieren.

**2.** Es ist durchaus möglich, daß neben  $\|(I - P_h)A^*\| \leq \xi_h$  auch noch  $\|(I - P_h)A^*A\| \leq \xi_h^2$  gilt. Dann ergibt sich unter den Voraussetzungen des Satzes 4.2 Teil 2 die Fehlerabschätzung

$$\|x_* - R_{h,r}y_\epsilon\| \leq e_p((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho(\xi_h^{\min\{p,2\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}})).$$

Dies liegt daran, daß sich unter diesen Voraussetzungen die Lemmata in Kapitel 3 verschärfen lassen.

**3.** Bei Verwendung der Fehlerquadratmethode ( hier ist  $R(Q_h) = A(R(P_h))$  ) ergibt sich mit der gleichen Beweistechnik unter den Voraussetzungen des Satzes 4.2 Teil 2 die Fehlerabschätzung

$$\|x_* - R_{h,r}y_\epsilon\| \leq e_p((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho\xi_h^{\min\{p,1\}}).$$

Dies liegt an  $Q_hAP_h = AP_h$ .

**4.** Ähnliches läßt sich bei Verwendung der dualen Fehlerquadratmethode ( $R(P_h) = A^*(R(Q_h))$ ) sagen. Hier ergibt sich unter den Voraussetzungen des Satzes 4.2 Teil 2 mit der gleichen Beweistechnik die Fehlerabschätzung

$$\|x_* - R_{h,r}y_\epsilon\| \leq e_p((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho\eta_h^{\min\{p,2\}}).$$

Dies liegt an  $Q_hAP_h = Q_hA$  und an  $\|(I - P_h)A^*A\| \leq \eta_h^2$ .

**5.** Es ist eine angemessene Diskretisierung in Abhängigkeit der bekannten Fehlerschranke  $\epsilon$  zu wählen. Ist keine Informationen über die Glattheit von  $x_*$  und  $x_* - x_{an}$  bekannt, so ist eine Wahl von  $h_\epsilon$ , so daß  $\xi_{h_\epsilon} + \eta_{h_\epsilon} \approx \epsilon$  gilt, vernünftig. Mit  $\mathcal{R}_\epsilon = R_{h_\epsilon, r_\epsilon}$  erhalten wir dann ein Regularisierungsverfahren im Sinne der Definition 1.1. Wenn jedoch die Bedingungen des zweiten Teils von Satz 4.2 erfüllt sind mit bekanntem  $p$  und  $\rho$ , so sollte man  $h$  am so wählen, daß  $\xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}} \approx (\frac{\epsilon}{\rho})^{\frac{p}{p+1}}$ .

## 4.2 A posteriori-Parameterwahl

Wir schlagen die folgenden beiden Diskrepanzprinzipien vor. Dazu nehmen wir an, daß die Bedingungen des Satzes 4.2 erfüllt sind. Sei  $h > 0$  fest gewählt.

**Regel 1.** Sei  $1 < d_1 \leq d_2$ .

1. Wenn  $\|A_h x_{an} - Q_h y_\epsilon\| \leq d_2 \epsilon$ , so wähle  $r = 0$ , das heißt, man nehme  $P_h x_{an}$  als Näherung.

2. Sei nun  $\|A_h x_{an} - Q_h y_\epsilon\| > d_2 \epsilon$ .

a) Wähle  $0 < r \leq \xi_h^{-2} =: r_{\max}$ , so daß

$$d_1 \epsilon \leq \|(I - A_h R_{h,r}) Q_h y_\epsilon\|, \quad (4.9)$$

$$d_2 \epsilon \geq \|(I - A_h R_{h,r}) Q_h y_\epsilon\|. \quad (4.10)$$

b) Gibt es kein  $r \leq r_{\max}$ , so daß (4.10) gilt, so wähle  $r = r_{\max}$ .

Wir wollen noch kurz auf die bei der Parameterwahl (durch die im übrigen  $r$  nicht eindeutig festgelegt ist, was aber nichts macht) so wichtige "Defektfunktion" def:  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $r \mapsto \|(I - A_h R_{h,r}) Q_h y_\epsilon\|$  eingehen. Wegen (2.1) gilt  $\text{def}(0) = \|A_h x_{an} - Q_h y_\epsilon\|$ . Sei  $r \mapsto |1 - tg_r(t)|$  eine monoton fallende Funktion für alle  $t \geq 0$ . Dann ist auch die Defektfunktion eine monoton fallende Funktion in  $r$ , was mit spektraltheoretischen Methoden gezeigt werden kann. Ist weiterhin  $r \mapsto |1 - tg_r(t)|$  stetig, so ist auch die "Defektfunktion" eine stetige Funktion. Diese beiden Eigenschaften haben zum Beispiel die zur Methode von Tikhonov oder allgemeiner die zur verallgemeinerten Methode von Tikhonov gehörenden Funktionen  $(g_r)_{r \geq 0}$ .

Wenn also  $\text{def}(r_{\max}) \leq d_2 \epsilon$ , so gibt es auch wirklich ein  $r \geq 0$ , so daß (4.9) und (4.10) gilt.

Weiter ist das Verhalten von  $\text{def}(r)$  für  $r \rightarrow \infty$  interessant. Dazu eine kleine Vorbemerkung. Mit (2.1) und mit dem Satz von Banach-Steinhaus folgt (wie eine ähnliche Aussage im Beweis von Satz 4.2) für jedes selbstadjungierte nichtnegative  $B \in L_s(Y)$  und  $y \in Y$

$$(I - g_r(B)B)y \rightarrow P_{N(B)}y, \quad r \rightarrow \infty.$$

Mit Lemma 3.1 ergibt sich wegen  $N(A_h A_h^*) = N(A_h^*) = R(A_h)^\perp$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{def}(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \|(I - g_r(A_h A_h^*) A_h A_h^*) Q_h y_\epsilon\| \\ &= \|P_{N(A_h A_h^*)} Q_h y_\epsilon\| = \|P_{R(A_h)^\perp} Q_h y_\epsilon\| \\ &= \text{dist}(Q_h y_\epsilon, \overline{R(A_h)}) \leq \epsilon + c_p \xi_h^{\min\{p, 1\}+1}. \end{aligned}$$

Damit ist diese Parameterwahl praktikabel auch im Fall  $\xi_h = 0$ . (An dieser Stelle sei nochmals an die duale Fehlerquadratmethode erinnert, die zum Ende des Abschnitts 2.3 vorgestellt wurde.)

Für lineare Iterationsverfahren (unter praktischen Gesichtspunkten nicht nur für iterative Verfahren, sondern auch für die Methode von Tikhonov) ist das folgende Abbruchkriterium interessant. Die Parameter  $r$  und  $s$  können dort eingeschränkt sein auf die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen.

**Regel 2.** Seien  $1 < d$ ,  $0 < \theta < 1$  und  $k > 0$ .

1. Wenn  $\|A_h x_{an} - Q_h y_\epsilon\| \leq d\epsilon$ , so wähle  $r = 0$ , das heißt, man nehme  $P_h x_{an}$  als Näherung.
2. Sei nun  $\|A_h x_{an} - Q_h y_\epsilon\| > d\epsilon$ .
  - a) Wähle  $0 < r \leq \xi_h^{-2} := r_{\max}$  so, daß

$$d\epsilon \geq \|(I - A_h R_{h,r}) Q_h y_\epsilon\|. \quad (4.11)$$

und weiter folgendes gilt:  $r \leq k$  oder es gibt ein  $s \in [\theta r, r]$  mit

$$d\epsilon \leq \|(I - A_h R_{h,s}) Q_h y_\epsilon\|, \quad (4.12)$$

- b) Wenn es kein  $r \leq r_{\max}$  gibt, so daß (4.11) gilt, so wähle  $r = r_{\max}$  oder  $r = [r_{\max}] + 1$ . Hier bezeichnen wir mit  $[x]$  die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

Die Fallunterscheidung "  $r \leq k$  oder es gibt ein  $s \in [\theta r, r]$  mit..." ist aus folgenden Gründe gemacht worden: Es ist bei Iterationsverfahren durchaus möglich, daß der Defekt für die 0-te Iterierte oberhalb der Schranke  $d\epsilon$ , der Defekt für die 1-te Iterierte aber schon unterhalb dieser Schranke liegt, das heißt, es gilt  $\|(I - A_h R_{h,0}) Q_h y_\epsilon\| = \|A_h x_{an} -$

$\|Q_h y_\epsilon\| > d\epsilon$ , aber  $\|(I - A_h R_{h,1})Q_h y_\epsilon\| \leq d\epsilon$ . Hier ist  $r = 1$ , aber  $s = 0 \notin [\theta r, r]$ .

Wir werden den durch Regel 1 oder Regel 2 erhaltenen Parameter immer mit  $r(h, \epsilon)$  bezeichnen, möchten aber betonen, daß hier der Parameter zudem noch (im Gegensatz zur a priori-Parameterwahl) von den Daten  $y_\epsilon$  abhängt.

Die Idee, das folgende Lemma beim Beweis von Satz 4.4 zu verwenden, stammt von G. Vainikko (private Kommunikation). Die Aussage dieses Lemmas basiert auf einer Idee von T. Raus (Raus[33], Raus[34]).

**Lemma 4.3** *Seien  $g_r : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, so daß (2.1) und (2.2) gilt. Dann gibt es ein  $\kappa \geq 0$ , so daß für  $0 \leq r \leq r_1$  und  $0 \leq t \leq a$  gilt*

$$(1 - tg_r(t))^2 \leq \kappa((1 - tg_{r_1}(t))^2 + r_1 t(1 - tg_r(t))^2).$$

*Beweis.* (2.2) zeigt  $|1 - tg_{r_1}(t)| \geq 1 - t|g_{r_1}(t)| \geq 1 - \gamma_*(tr_1)^{\frac{1}{2}}$ . Deshalb ist  $|1 - tg_r(t)| \leq \gamma_0 \leq 2\gamma_0|1 - tg_{r_1}(t)|$  für  $r_1 t \leq (2\gamma_*)^{-2}$ . Wenn andernfalls  $r_1 t > (2\gamma_*)^{-2}$ , so gilt  $|1 - tg_r(t)|^2 \leq 4\gamma_*^2 r_1 t |1 - tg_r(t)|^2$ .  $\square$

Der erste Teil des folgenden Satzes liefert ein Konvergenzresultat für die in Regel 1 beziehungsweise 2 angegebene Parameterwahl. Wie in Satz 4.2 ist im zweiten Teil des Satzes eine Konvergenzrate für "glatte" Lösungen von  $Ax = y$  angegeben.

**Satz 4.4** *Sei  $A \in L_s(X, Y)$ ,  $\|A\|^2 \leq a$ ,  $y \in R(A)$ ,  $x_{an} \in X$  und  $x_*$  die Lösung von  $Ax = y$ , die am nächsten bei  $x_{an}$  liegt. Seien  $P_h \in L_s(X)$  und  $Q_h \in L_s(Y)$  orthogonale Projektionen und  $A_h = Q_h A P_h$ . Es gelte  $\|A(I - P_h)\| \leq \xi_h$  und  $\|(I - Q_h)A\| \leq \eta_h$ .*

*Weiter seien die Bedingungen (2.1) und (2.2) gültig für Funktionen  $g_r$  mit  $p_0 > \frac{1}{2}$ ,  $r \mapsto |1 - tg_r(t)|$  sei monoton fallend für jedes  $t \geq 0$ .*

*$R_{h,r}$  sei wie in (4.2) definiert. Der Parameter  $r = r(h, \epsilon)$  sei gemäß Regel 1 oder Regel 2 gewählt.*

1. (Konvergenz) *Wenn  $P_h \rightarrow I$  punktweise,  $\xi_h \rightarrow 0$ ,  $\eta_h \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ), so gilt*

$$\sup_{y_\epsilon \in Y, \|y - y_\epsilon\| \leq \epsilon} \|x_* - R_{h,r(h,\epsilon)} y_\epsilon\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0).$$

2. (Konvergenzordnung) Wenn  $0 < p \leq 2p_0 - 1$ ,  $x_* - x_{an} \in M_{p,\rho}$ ,  $x_* \in M_{p,\rho}$  und  $\|y - y_\epsilon\| \leq \epsilon$ , so gilt

$$\|x_* - R_{h,r}y_\epsilon\| \leq e_p((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho(\xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}})).$$

$e_p$  ist unabhängig von  $\epsilon$ ,  $h$  und  $\rho$ .

*Beweis.* Zunächst betrachten wir wieder die Ungleichung (siehe (4.6))

$$\begin{aligned} \|x_* - R_{h,r}y_\epsilon\| &\leq \|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\| + \gamma_* r^{\frac{1}{2}}(\xi_h\|(I - P_h)x_*\| + \epsilon) \\ &\quad + \|(I - P_h)x_*\| \end{aligned}$$

(wegen der Definition von  $S_{h,r}$  siehe (4.1)). Da  $\|(I - P_h)x_*\| \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) nach Voraussetzung,  $\|(I - P_h)x_*\|$  sich für "glattes"  $x_*$  gut abschätzen läßt (siehe Lemma 3.1) und  $r^{\frac{1}{2}}\xi_h \leq 1$  gilt, reicht es, die Ausdrücke

$$\|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\| \quad \text{und} \quad r^{\frac{1}{2}}\epsilon \quad (4.13)$$

zu untersuchen. Dazu benötigen wir zwei Ungleichungen, die jetzt hergeleitet werden. Wendet man  $A_h$  auf Gleichung (4.5) an, so erhält man

$$\begin{aligned} A_h x_* - A_h R_{h,r}y_\epsilon &= A_h(x_* - R_{h,r}y_\epsilon) \\ &= A_h S_{h,r}(x_* - x_{an}) + A_h g_r(A_h^* A_h) A_h^*(A P_h x_* - y_\epsilon) \\ &= A_h S_{h,r}(x_* - x_{an}) + (I - g_r(A_h A_h^*)) A_h A_h^* Q_h(A P_h x_* - y_\epsilon). \end{aligned}$$

Eine einfache Umformung liefert

$$\begin{aligned} A_h S_{h,r}(x_* - x_{an}) \\ &= A_h x_* - A_h R_{h,r}y_\epsilon - g_r(A_h A_h^*) A_h A_h^*(A P_h x_* - y_\epsilon). \end{aligned}$$

Erweitern wir die rechte Seite mit  $Q_h y_\epsilon$ , so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} A_h S_{h,r}(x_* - x_{an}) \\ &= (I - A_h R_{h,r}) Q_h y_\epsilon + (I - g_r(A_h A_h^*) A_h A_h^*) Q_h(A P_h x_* - y_\epsilon). \end{aligned}$$

Eine Abschätzung dieser Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \|A_h S_{h,r}(x_* - x_{an})\| &\leq \|(I - A_h R_{h,r}) Q_h y_\epsilon\| \\ &\quad + \xi_h \|(I - P_h)x_*\| + \epsilon, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \|A_h S_{h,r}(x_* - x_{an})\| &\geq \|(I - A_h R_{h,r}) Q_h y_\epsilon\| \\ &\quad - \xi_h \|(I - P_h)x_*\| - \epsilon. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Hier wurde ausgenutzt, daß  $\|I - g_r(A_h A_h^*) A_h A_h^*\| \leq 1$ . Dies folgt aus der Tatsache, daß  $|1 - tg_r(t)|$  monoton fallend in  $r$  ist und weiterhin  $1 - tg_0(t) = 1$  gilt, deshalb ist  $|1 - tg_r(t)| \leq 1$  ( $0 \leq t \leq a$ ,  $0 < r$ ) und damit  $\|I - g_r(A_h A_h^*) A_h A_h^*\| \leq \sup_{0 \leq t \leq a} |1 - tg_r(t)| \leq 1$ .

1. Es soll nun der Konvergenzbeweis durchgeführt werden, das heißt (man beachte die Bemerkung vor (4.13)),

$$r^{\frac{1}{2}}\epsilon \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0), \quad (4.16)$$

$$\|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0), \quad (4.17)$$

gezeigt werden. Hierbei sei der Parameter  $r = r(h, \epsilon)$  gemäß Regel 1 beziehungsweise Regel 2 gewählt.

(i) Wir beweisen zuerst (4.16) und nehmen zunächst an, daß der Parameter  $r$  entsprechend Regel 1 gewählt worden ist. Wenn  $r \neq 0$ , so gilt (4.9), wegen der Ungleichungen (4.15) und  $r^{\frac{1}{2}}\xi_h \leq 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} (d_1 - 1)\epsilon &\leq \|A_h S_{h,r}(x_* - x_{an})\| + \xi_h \|(I - P_h)x_*\| \\ \Rightarrow r^{\frac{1}{2}}(d_1 - 1)\epsilon &\leq r^{\frac{1}{2}}\|A_h S_{h,r}(x_* - x_{an})\| + \|(I - P_h)x_*\|. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nun gilt nach Voraussetzung  $\|(I - P_h)x_*\| \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ). Wegen des Satzes von Banach-Steinhaus folgt aber auch

$$r^{\frac{1}{2}}\|A_h S_{h,r}(x_* - x_{an})\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0)$$

(mit dem gleichen Argument wie bei dem Beweis der Konvergenz in Satz 4.2; hier ist die Bedingung  $p_0 > \frac{1}{2}$  wichtig). Damit ist (4.16) gezeigt, wenn der Parameter nach Regel 1 gewählt worden ist. Nun noch kurz zu Regel 2. Auch hier ist (4.16) zu zeigen. Wenn es ein  $s = s(h, \epsilon) \in [\theta r, r]$  gibt, so daß (4.12) gilt, so läßt sich für  $s^{\frac{1}{2}}\epsilon$  wie eben eine konvergente Majorante angeben, wegen  $r \leq \theta^{-1}s$  also auch für  $r^{\frac{1}{2}}\epsilon$ . Wenn aber  $r \leq k$ , so folgt  $r^{\frac{1}{2}}\epsilon \leq k\epsilon \rightarrow 0$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). Insgesamt ist also (4.16) auch für den Fall gezeigt, daß  $r$  entsprechend Regel 2 gewählt worden ist.

(ii) Nun der Beweis von (4.17). Dazu schätzen wir  $\|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\|^2$  durch eine konvergente Majorante ab. Wir definieren  $r_1 = r_1(h, \epsilon) := (\epsilon^{\frac{1}{2}} + \xi_h)^{-2}$ .

(ii<sub>1</sub>) Wenn  $r = r(h, \epsilon) < r_1$ , so folgt mit Lemma 4.3

$$\begin{aligned}
\|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\|^2 &= \|(I - g_r(A_h^*A_h)A_h^*A_h)P_h(x_* - x_{an})\|^2 \\
&\leq \kappa(\|(I - g_{r_1}(A_h^*A_h)A_h^*A_h)P_h(x_* - x_{an})\|^2 \\
&\quad + r_1\|A_h(I - g_r(A_h^*A_h)A_h^*A_h)(x_* - x_{an})\|^2) \\
&= \kappa(\|S_{h,r_1}P_h(x_* - x_{an})\|^2 + r_1\|A_hS_{h,r}(x_* - x_{an})\|^2). \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Nun gilt aber  $\|S_{h,r_1}P_h(x_* - x_{an})\| \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ) (siehe (4.7) im Beweis von Satz 4.2;  $r_1$  erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 4.2). Weiter gilt (wenn  $r$  nach Regel 1 gewählt worden ist, sonst ist  $d_2$  durch  $d$  zu ersetzen), siehe (4.14),

$$r_1\|A_hS_{h,r}(x_* - x_{an})\|^2 \leq (\epsilon^{\frac{1}{2}} + \xi_h)^{-2}((d_2 + 1)\epsilon + \xi_h\|(I - P_h)x_*\|)^2 \rightarrow 0$$

für  $h \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ . Dabei war zu beachten, daß aus  $r < r_1$  folgt  $r < \xi_h^{-2}$ , deshalb gilt (4.9). Damit ist der Fall  $r < r_1$  geklärt.

(ii<sub>2</sub>) Gilt  $r \geq r_1$ , so folgt  $\|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\| \leq \|S_{h,r_1}P_h(x_* - x_{an})\|$ , da  $\|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\|$  monoton fallend in  $r$  ist. (4.17) folgt nun wiederum wegen  $\|S_{h,r_1}P_h(x_* - x_{an})\| \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

2. (Konvergenzordnung) Wir müssen nur noch die Ausdrücke in (4.13) abschätzen.

(i) Zunächst soll  $r^{\frac{1}{2}}\epsilon$  abgeschätzt werden und wiederum beschäftigen wir uns zunächst mit Regel 1. Wenn  $r \leq (\frac{\epsilon}{\rho})^{-\frac{2}{p+1}}$ , so folgt schon  $r^{\frac{1}{2}}\epsilon \leq (\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}$ . Gilt aber  $r > (\frac{\epsilon}{\rho})^{-\frac{2}{p+1}}$ , so folgt mit (4.18), Lemma 3.1 und Lemma 3.5.

$$\begin{aligned}
r^{\frac{1}{2}}(d_1 - 1)\epsilon &\leq \{ r^{\frac{1}{2}}[ \|(I - g_r(A_h^*A_h)A_h^*A_h)|A_h|^{p+1}\| \\
&\quad + \|A_hS_{h,r}(|A_h|^p - |A|^p)\| ] + b_p\xi_h^{\min\{p,1\}} \} \rho \\
&\leq \{ r^{\frac{1}{2}}[ \gamma_{\frac{p+1}{2}}r^{-\frac{p+1}{2}} + c_p\gamma_{\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}(\xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}}) ] + b_p\xi_h^{\min\{p,1\}} \} \rho \\
&\leq \{ \gamma_{\frac{p+1}{2}}(\frac{\epsilon}{\rho})^{\frac{p}{p+1}} + (c_p\gamma_{\frac{1}{2}} + b_p)\xi_h^{\min\{p,1\}} + c_p\gamma_{\frac{1}{2}}\eta_h^{\min\{p,2\}} \} \rho. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist gut genug. Mit dem gleichen Argument wie beim Beweis der Konvergenz erhalten wir eine hinreichende Abschätzung auch für Regel 2.

(ii) Nun schätzen wir  $\|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\|$  ab. Für

$$r \geq \left( \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right)^{\frac{1}{p+1}} + \xi_h^{\min\{1, \frac{1}{p}\}} \right)^{-2} =: r_1$$

ergibt sich wegen  $\|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\| \leq \|S_{h,r_1}P_h(x_* - x_{an})\|$  eine hinreichend gute Abschätzung, wenn man  $r_1$  in Abschätzung (4.8) im Beweis von Satz 4.2 einsetzt. Wenn jedoch  $r < \left( \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right)^{\frac{1}{p+1}} + \xi_h^{\min\{1, \frac{1}{p}\}} \right)^{-2} = r_1$ , so folgt mit (4.19), Lemma 3.1 und Lemma 3.5

$$\begin{aligned} & \|S_{h,r}P_h(x_* - x_{an})\|^2 \\ & \leq \kappa \left( \|S_{h,r_1}P_h(x_* - x_{an})\|^2 + r_1 \|A_h S_{h,r}(x_* - x_{an})\|^2 \right) \\ & \leq \kappa \left\{ \left[ \|S_{h,r_1}|A_h|^p z\| + c_p (\xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}}) \rho \right]^2 \right. \\ & \quad \left. + r_1 [(d_2 + 1)\epsilon + \rho b_p \xi_h^{\min\{p,1\}+1}]^2 \right\} \\ & \leq \kappa \left\{ \left[ \gamma_{\frac{p}{2}} \left( \left( \frac{\epsilon}{\rho} \right)^{\frac{1}{p+1}} + \xi_h^{\min\{1, \frac{1}{p}\}} \right)^p + c_p (\xi_h^{\min\{p,1\}} + \eta_h^{\min\{p,2\}}) \right]^2 \rho^2 \right. \\ & \quad \left. + [(d_2 + 1)(\rho \epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho b_p \xi_h^{\min\{p,1\}}]^2 \right\}. \end{aligned}$$

(Für Regel 2 ist  $d_2$  durch  $d$  zu ersetzen). Jetzt folgt die Behauptung leicht.  $\square$

**Bemerkung 1.** Die Bemerkungen nach dem Beweis des Satzes 4.2 lassen sich auf Satz 4.4 übertragen.

**2.** Die Resultate, die man erhält, wenn man Satz 4.4 auf die Methode von Tikhonov und die Fehlerquadratmethode anwendet und  $h_\epsilon$  so wählt, daß  $\xi_{h_\epsilon} = o(\epsilon)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  gilt, sind vergleichbar Ergebnissen in Groetsch[11], Kapitel 4.2.

Eine andere a posteriori-Parameterwahl wurde in letzter Zeit untersucht (siehe z.B Raus[33], Raus[34], Gfrerer[9], Engl und Gfrerer[6] und King und Neubauer[18]).

## 5 Die Methode der konjugierten Gradienten

### 5.1 Eine Einführung

In diesem Kapitel soll ein Diskrepanzprinzip für das Verfahren der konjugierten Gradienten angegeben werden. Wir wollen dieses Ver-

fahren wie bisher auch auf die endlichdimensionalen Gleichungen anwenden und machen dazu folgende Annahmen.

**Voraussetzung 5.1** *Seien  $X$  und  $Y$  Hilberträume und  $A \in L_s(X, Y)$  mit  $\|A\|^2 \leq a$  sowie  $\xi_0$  und  $\eta_0$  fest vorgegeben. Seien  $p \geq 0$ ,  $x_*$  und  $x_{an} \in N(A)^\perp$  mit  $x_* - x_{an} \in M_{p,\rho}$ ,  $x_{an} \in M_{p,\rho}$ . Weiter seien  $P \in L_s(X)$  und  $Q \in L_s(Y)$  orthogonale Projektionen mit  $\|A(I - P)\| \leq \xi \leq \xi_0$  und  $\|(I - Q)A\| \leq \eta \leq \eta_0$ . Wir setzen  $\tilde{A} = QAP$ ,  $\tilde{B} = \tilde{A}^* \tilde{A}$  und  $\tilde{C} = \tilde{A} \tilde{A}^*$ ,  $\kappa = c_p(\xi^{\min\{p,1\}} + \eta^{\min\{p,2\}})$  ( $c_p$  wie in Korollar 3.6) und  $\Psi = \epsilon + b_p \rho \xi^{\min\{p,1\}+1}$  ( $b_p$  wie in Lemma 3.1). Sei  $y_\epsilon \in Y$  mit*

$$\|APx_* - y_\epsilon\| \leq \Psi. \quad (5.1)$$

*Wir bezeichnen mit  $(E_t)_{t \in \mathbb{R}}$  die Spektralschar von  $\tilde{B}$  und mit  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$  die Spektralschar von  $\tilde{C}$ .*

Wir bemerken, daß unter der bisher üblichen Annahme  $\|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon$  mit Lemma 3.1 schon (5.1) folgt. Wir lassen hier deshalb eine größere Menge von Störungen zu, da wir alle Ergebnisse in diesem Kapitel zunächst nur für die Anfangsnäherung  $x_{an} = 0$  erhalten und später auf den Fall " $x_{an} \in M_{p,\rho}$  beliebig" verallgemeinern wollen.

Wir wollen nun zunächst einmal das CG-Verfahren vorstellen. Für ein beliebige, aber feste Anfangsnäherung  $x_{an} \in X$  erzeugt die Methode der konjugierten Gradienten iterativ (möglicherweise endliche) Folgen  $x_r, u_r, d_r \in X$ ,  $\alpha_r, \beta_r \in \mathbb{R}$ , ( $r \in \mathbb{N}_0$ ) durch

$$\begin{aligned} u_0 &= -d_0 = \tilde{A}^*(\tilde{A}x_0 - y_\epsilon), \\ \alpha_r &= \frac{\|u_r\|^2}{\|\tilde{A}d_r\|^2}, \quad x_{r+1} = x_r + \alpha_r d_r, \\ u_{r+1} &= \tilde{A}^*(\tilde{A}x_{r+1} - y_\epsilon), \\ \beta_r &= \frac{\|u_{r+1}\|^2}{\|u_r\|^2}, \quad d_{r+1} = -u_{r+1} + \beta_r d_r. \end{aligned}$$

Hier ist  $x_0 = Px_{an}$ . Tritt der Fall  $u_r = 0$  das erste Mal auf, so setzen wir  $x_k = x_r$  und  $u_k = u_r$  für alle  $k \geq r$ .

Wie schon in Kapitel 3 geben wir auch hier zunächst die Matrixdarstellung dieses Verfahrens an. Seien dazu wieder  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  eine Basis von  $R(P)$  und  $\Psi_1, \dots, \Psi_m$  eine Basis von  $R(Q)$ . Dann kann  $x_r$  in der Form

$$x_r = \sum_{j=1}^n c_{rj} \Phi_j. \quad (5.2)$$

dargestellt werden. Sei weiter  $a_r$  beziehungsweise  $b_r$  der Koordinatenvektor von  $u_r$  beziehungsweise  $d_r$  bezüglich der angegebenen Basis von  $R(P)$ . Mit der Notation aus Kapitel 2 (siehe (2.8)) und Startvektor  $c_0 = G_{\Phi}^{-1}(\langle \Phi_j, x_{an} \rangle_{j=1, \dots, n})$  ist das CG-Verfahren zusammen mit (5.2) äquivalent zu dem folgenden Iterationsverfahren zur Bestimmung von  $c_r = (c_{rj})_{j=1, \dots, n}$ ,  $r = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= -b_0 = G_{\Phi}^{-1} B^T G_{\Psi}^{-1} (B c_0 - z), \\ c_{r+1} &= c_r + \alpha_r b_r, \\ a_{r+1} &= G_{\Phi}^{-1} B^T G_{\Psi}^{-1} (B c_r - z), \\ b_{r+1} &= -a_{r+1} + \beta_r b_r. \end{aligned}$$

Hier seien  $\alpha_r$  und  $\beta_r$  wie auf Seite 27 gewählt. Es werden nun die grundlegenden Eigenschaften des CG-Verfahrens angegeben. Sei dazu zunächst  $r \geq 1$  fest, so daß  $u_{r-1} \neq 0$ . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes (von  $\tilde{A}$ ,  $x_0$  und  $y_{\epsilon}$  abhängiges) Polynom  $g_r \in \Pi_{r-1} = \{p : p \text{ ist ein Polynom vom Grade kleiner gleich } r-1\}$  mit  $x_r = s_r(\tilde{B})x_0 + g_r(\tilde{B})\tilde{A}^*y_{\epsilon}$ . Hier ist  $s_r(t) = 1 - t g_r(t)$ . Die folgenden Eigenschaften von  $x_r$ ,  $s_r$  und  $g_r$  kann man in Nemirovskii[25] oder Louis[21] finden.

**1.**  $s_r \in \Pi_r$  und  $s_r$  hat einfache Nullstellen  $(t_{k,r})_{k=1, \dots, r}$  mit  $0 < t_{1,r} < t_{2,r} < \dots < t_{r,r} \leq a$ . Wegen  $s_r(0) = 1$  gilt

$$s_r(t) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{t}{t_{k,r}}\right). \quad (5.3)$$

Es gilt

$$S_r := g_r(0) = \sum_{k=1}^r t_{k,r}^{-1}. \quad (5.4)$$

Wegen  $S_1 = \alpha_0$  sowie

$$S_r = \left(1 + \frac{\alpha_{r-1}\beta_{r-2}}{\alpha_{r-2}}\right)S_{r-1} - \frac{\alpha_{r-1}\beta_{r-2}}{\alpha_{r-2}}S_{r-2} + \alpha_{r-1}$$

für  $r \geq 2$  (nur für diese Rekursionsformel sei  $S_0 = 0$ ) läßt sich  $S_r$  leicht berechnen. Weiter gilt  $t_{k-1,r} < t_{k,r+1} < t_{k,r}$  und deshalb  $S_r \leq S_{r+1}$ , wenn  $u_r \neq 0$ . Wir halten zwei weitere wichtige Eigenschaften fest. Zum einen gilt  $s_r(t) \in [0, 1]$  für alle  $t \in [0, t_{1,r}]$ , wie man auch leicht an der Produktdarstellung (5.3) erkennen kann. Zum zweiten gilt  $g_r(t) \geq 0$  für alle  $t \in [0, t_{1,r}]$  und

$$S_r = g_r(0) = \sup_{t \in [0, t_{1,r}]} g_r(t) \geq t_{1,r}^{-1}, \quad (5.5)$$

wobei die letzte Ungleichung mit (5.4) folgt.

Wir setzen noch (abweichend von der Rekursionsformel für  $S_r$ )  $S_0 = a^{-1}$ . Wenn  $u_0 \neq 0$ , so gilt  $S_0 \leq t_{1,1}^{-1} = S_1$ .

**2. Orthogonalität.** Es gilt für  $0 \leq k < r$  (mit  $s_0(t) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ )

$$\int_{0-0}^a t s_r(t) s_k(t) d\|F_t(\tilde{A}x_0 - Qy_\epsilon)\|^2 = 0. \quad (5.6)$$

Dies folgt aus  $u_r = \tilde{A}^*(\tilde{A}x_r - Qy_\epsilon) = \tilde{A}^*s_r(\tilde{C})(\tilde{A}x_0 - y_\epsilon)$  und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_r, u_k \rangle = \langle \tilde{C}(s_r s_k)(\tilde{C})(\tilde{A}x_0 - y_\epsilon), \tilde{A}x_0 - y_\epsilon \rangle \\ &= \int_{0-0}^a t s_r(t) s_k(t) d\|F_t(\tilde{A}x_0 - Qy_\epsilon)\|^2. \end{aligned}$$

**3. Minimaleigenschaft.** Wir setzen zunächst

$$\omega_r := \|\tilde{A}x_r - Qy_\epsilon\|.$$

Es gilt  $\omega_r = \|(I - \tilde{C}g_r(\tilde{C}))(\tilde{A}x_0 - Qy_\epsilon)\| \leq \|(I - \tilde{C}p(\tilde{C}))(\tilde{A}x_0 - Qy_\epsilon)\|$  für alle  $p \in \Pi_{r-1}$  oder äquivalent

$$\omega_r \leq \|s(\tilde{C})(\tilde{A}x_0 - Qy_\epsilon)\|, \text{ wenn } s \in \Pi_r \text{ mit } s(0) = 1. \quad (5.7)$$

(5.7) gilt trivialerweise auch für  $r = 0$ . Wir wollen nun ein Abbruchkriterium für das CG-Verfahren angeben.

**Stopregel.** Es gelte die Voraussetzung 5.1. Weiter sei  $(x_r)_{r \in \mathbb{N}_0}$  durch das CG-Verfahren erzeugt. Sei  $d > 1$ .

1. Wenn  $\omega_0 \leq d\epsilon$  oder  $u_0 = 0$ , so stoppe man das Verfahren mit  $\bar{r} = 0$  und wähle  $\bar{x} = x_0$  als Näherung.

2. Seien nun  $\omega_0 > d\epsilon$  und  $u_0 \neq 0$ . Man stoppe das Verfahren mit  $\bar{r}$ , wenn  $\omega_{\bar{r}} \leq d\epsilon$  oder  $\xi^{-2} \leq S_{\bar{r}}$  oder  $u_{\bar{r}} = 0$ . Dann nehme man als Näherung

$$\bar{x} = \begin{cases} x_{\bar{r}-1}, & \text{wenn } \xi^{-2} \leq S_{\bar{r}}, \\ x_{\bar{r}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bevor wir zeigen, daß das CG-Verfahren mit dieser Stopregel auch wirklich einmal abbricht, wollen wir noch eines festhalten. Es gilt (siehe Gilyazov[7] oder Gilyazov[8])

$$\inf_{r \in \mathbb{N}_0} \|\tilde{A}x_r - Qy_\epsilon\| = \text{dist}(\overline{R(\tilde{A})}, Qy_\epsilon)$$

und damit wegen  $\text{dist}(\overline{R(\tilde{A})}, Qy_\epsilon) \leq \Psi$

$$\inf_{r \in \mathbb{N}_0} \|\tilde{A}x_r - Qy_\epsilon\| \leq \Psi. \quad (5.8)$$

Es ist jedoch durchaus möglich, daß  $\|\tilde{A}x_r - Qy_\epsilon\| > d\epsilon$  für alle  $r \in \mathbb{N}_0$ , daß also der Defekt nie unter die in der Stopregel angegebene Schranke fällt. Auch der Fall  $u_r = 0$  (was äquivalent zu der Identität  $\|\tilde{A}x_r - Qy_\epsilon\| = \text{dist}(\overline{R(\tilde{A})}, Qy_\epsilon)$  ist) und  $\|\tilde{A}x_r - Qy_\epsilon\| > d\epsilon$  ist möglich.

Nun soll aber gezeigt werden, daß diese Stopregel dennoch immer zum Abbruch führt. Sei zunächst  $\xi \neq 0$ . Wenn dann für alle  $r \geq 0$   $u_r \neq 0$  und  $\|\tilde{A}x_r - Qy_\epsilon\| > d\epsilon$  ist, so gilt wegen  $t_{k,r} \leq \|\tilde{A}\|^2$  für alle  $r \geq 1$  und alle  $1 \leq k \leq r$   $S_r \rightarrow \infty$  ( $r \rightarrow \infty$ ) und damit gibt es ein  $r \in \mathbb{N}_0$  mit  $\xi^{-2} \leq S_r$ . Ist andererseits  $\xi = 0$ , so gilt  $\Psi = \epsilon$ , wegen (5.8) gibt es also ein  $r \in \mathbb{N}_0$  mit  $\omega_r \leq d\epsilon$ , das CG-Verfahren wird also nach endlich vielen Schritten abgebrochen.

Es gilt das nun folgende Hauptergebnis, welches wir im nächsten Abschnitt beweisen.

**Satz 5.2** *Es gelte die Voraussetzung 5.1 und die weiteren Notationen aus Sektion 5.1. Die Approximation  $\bar{x}$  sei gemäß der eben angegebenen Regel gewählt worden. Dann gilt mit einer nur von  $p$  abhängigen Konstanten  $e_p$*

$$\|x_* - \bar{x}\| \leq e_p((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho(\xi^{\min\{p,1\}} + \eta^{\min\{p,2\}})).$$

**Bemerkung.** Die in Abschnitt 4.1 nach dem Beweis von Satz 4.2 gemachten Bemerkungen lassen sich (bis auf die erste) auf Satz 5.2 übertragen.

Es ist zu erwähnen, daß für  $x_* - x_{an} \in N(A)^\perp \setminus \cup_{p>0} R(|A|^p)$  Konvergenzaussagen, so wie sie in Satz 4.2 und Satz 4.4 gemacht wurden, nicht mit den nun folgenden Lemmata gemacht werden können. Auf die Frage der Konvergenz kommen wir in Kapitel 8 zurück.

Jedenfalls gibt es für das CG-Verfahren im allgemeinen keine vernünftige a priori-Parameterwahl. Damit meinen wir, daß es keine (auch wirklich nur von  $h$  und  $\epsilon$  abhängende) Familie  $(r_{h,\epsilon})_{h,\epsilon}$  gibt, von der man  $x_{r_{h,\epsilon}} \rightarrow x_*$  ( $h \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ ) erwarten kann. Dies ist in Eicke, Louis, Plato[5] (ohne Berücksichtigung einer Diskretisierung) begründet. Man beachte, daß bei der in diesem Kapitel angegebenen Stopregel der gefundene Parameter  $r$  auch noch von der rechten Seite  $y_\epsilon$  abhängt.

## 5.2 Der Beweis des Satzes 5.2

Zur besseren Orientierung wird in dem folgenden Diagramm dargestellt, wie die einzelnen Lemmata und Korollare in diesem Abschnitt zusammenhängen.

$$\text{Lemma 5.3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Lemma 5.4} \Rightarrow \text{Korollar 5.5} \\ \text{Lemma 5.6} \\ \text{Lemma 5.7} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Korollar 5.8} \Rightarrow \text{Lemma 5.9}$$

Dabei liefert Korollar 5.5 eine Aussage über den Fehler  $\|x_* - x_r\|$ , während Korollar 5.8 eine Aussage über den Defekt  $w_{r-1}$  macht. Mit Korollar 5.8 und Lemma 5.9 kann man dann schließlich Satz 5.2 beweisen.

**Lemma 5.3** Sei  $A \in L_s(X, Y)$ ,  $(E_t)_{t \in \mathbb{R}}$  die Spektralschar von  $A^*A$  und  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$  die Spektralschar von  $AA^*$ . Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$   $E_t A^* = A^* F_t$ .

*Beweis.* Mit Satz 7.17 und Aufgabe 7.25 aus Weidmann[44] folgt leicht  $\langle x, E_t A^* y \rangle = \langle x, A^* F_t y \rangle$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ .  $\square$

Die Beweisideen der folgenden Lemmata findet man in Nemirovskii[25]. Die einzelnen Aussagen sind dort in größerer Allgemeinheit formuliert, die Abschätzungen sind dafür schwächer. Das nächste Lemma hat nichts mit dem CG-Verfahren zu tun. Wir werden es in größtmöglicher Allgemeinheit angeben, da es an anderer Stelle einsetzbar ist. So kann man es auch zum Beweis von Satz 4.4 verwenden und dort dann auf Lemma 4.3 verzichten.

**Lemma 5.4** Es gelte die Voraussetzung 5.1. Sei  $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  borelmeßbar und beschränkt und  $\omega = \|(I - \tilde{C}g(\tilde{C}))Qy_\epsilon\|$ . Dann gilt für alle  $0 < \tau \leq a$

$$\begin{aligned} \|x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_\epsilon\| &\leq \tau^{-\frac{1}{2}}(\omega + \Psi) + \Psi \sup_{0 \leq t \leq \tau} (t^{\frac{1}{2}}|g(t)|) \\ &\quad + \rho \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \tau} (|1 - tg(t)|t^{\frac{\beta}{2}}) + \kappa \sup_{0 \leq t \leq \tau} |1 - tg(t)| \right\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Es gilt

$$\|x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_\epsilon\| \leq \|(I - E_\tau)(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_\epsilon)\| + \|E_\tau(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_\epsilon)\|.$$

Wir werden nun die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite nacheinander abschätzen.

1. Es ist  $|\tilde{A}|^+|\tilde{A}| = P_{N(\tilde{A})^\perp} = I - E_0$ . Hier ist  $|\tilde{A}|^+$  die verallgemeinerte Inverse (dieser Begriff ist zum Beispiel in Louis[21] erklärt) von  $|\tilde{A}|$ . Wegen  $R(I - E_\tau) \subset R(I - E_0)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(I - E_\tau)(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_\epsilon)\|^2 &= \| |\tilde{A}|^+|\tilde{A}|(I - E_\tau)(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_\epsilon)\|^2 \\ &= \| |\tilde{A}|^+(I - E_\tau)|\tilde{A}|(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_\epsilon)\|^2 \\ &= \int_{0-0}^a t^{-1} d\|E_t(I - E_\tau)|\tilde{A}|(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_\epsilon)\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\tau}^a t^{-1} d\|(E_t - E_{\tau})\tilde{A}|(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_{\epsilon})\|^2 \\
&\leq \tau^{-1} \int_{\tau}^a d\|(E_t - E_{\tau})\tilde{A}|(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_{\epsilon})\|^2 \\
&\leq \tau^{-1} \|\tilde{A}|(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_{\epsilon})\|^2 \\
&\leq \tau^{-1}(\epsilon + b_p\rho\xi^{\min\{p,1\}+1} + \omega)^2 = \tau^{-1}(\Psi + \omega)^2.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei aus der folgenden Ungleichung (5.9), die sich wiederum aus Lemma 3.1 ergibt:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{A}|(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_{\epsilon})\| &= \|\tilde{A}x_* - g(\tilde{C})\tilde{C}y_{\epsilon}\| \leq \|\tilde{A}x_* - Qy_{\epsilon}\| + \omega \\
&\leq \epsilon + b_p\rho\xi^{\min\{p,1\}+1} + \omega. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

2. Es gilt mit  $x_* = |A|^p z$ ,  $\|z\| \leq \rho$ ,

$$\begin{aligned}
x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_{\epsilon} &= (I - g(\tilde{B})\tilde{B})\tilde{A}|^p z + (I - g(\tilde{B})\tilde{B})(|A|^p - |\tilde{A}|^p)z \\
&\quad + g(\tilde{B})\tilde{A}^*(\tilde{A}x_* - y_{\epsilon}),
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
&\|E_{\tau}(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_{\epsilon})\| \\
&\leq \|(I - g(\tilde{B})\tilde{B})\tilde{A}|^p E_{\tau}z\| + \|(I - g(\tilde{B})\tilde{B})E_{\tau}(|A|^p - |\tilde{A}|^p)z\| \\
&\quad + \|g(\tilde{B})\tilde{A}^*F_{\tau}(\tilde{A}x_* - Qy_{\epsilon})\|. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Wir schätzen die Summanden der rechten Seite von (5.10) weiter ab. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|(I - g(\tilde{B})\tilde{B})\tilde{A}|^p E_{\tau}z\|^2 &= \int_{0-0}^a |1 - tg(t)|^2 t^p d\|E_t E_{\tau}z\|^2 \\
&\leq \rho^2 \sup_{0 \leq t \leq \tau} (|1 - tg(t)|^2 t^p).
\end{aligned}$$

Analog schätzt man die anderen beiden Summanden der rechten Seite von (5.10) ab und erhält mit den Lemmata 3.1 und 3.6 insgesamt

$$\begin{aligned}
\|E_{\tau}(x_* - g(\tilde{B})\tilde{A}^*y_{\epsilon})\| &\leq \Psi \sup_{0 \leq t \leq \tau} (t^{\frac{1}{2}}|g(t)|) + \rho \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \tau} (|1 - tg(t)|t^{\frac{p}{2}}) \right. \\
&\quad \left. + \kappa \sup_{0 \leq t \leq \tau} |1 - tg(t)| \right\}. \quad \square
\end{aligned}$$

Nun zurück zum Verfahren der konjugierten Gradienten. Wegen der recht umfangreichen Darstellung wollen wir zunächst  $x_{an} = 0$  annehmen. Wegen der in Sektion 5.1 gemachten Bemerkungen erhält man aus dem vorausgegangenem Lemma 5.4 das folgende Korollar.

**Korollar 5.5** *Es gelte die Voraussetzung 5.1 mit  $x_{an} = 0$ . Mit den Notationen aus Sektion 5.1 gilt für alle  $r > 0$  mit  $u_{r-1} \neq 0$  und für alle  $\tau \in (0, t_{1,r}]$*

$$\|x_* - x_r\| \leq \tau^{-\frac{1}{2}}(\Psi + \omega_r) + \Psi S_r^{\frac{1}{2}} + \rho(\tau^{\frac{p}{2}} + \kappa).$$

*Beweis.* Sei  $0 \leq t \leq \tau$  beliebig, aber fest. Es ist, wie in Abschnitt 5.1 begründet ist,  $0 \leq s_r(t) = 1 - tg_r(t) \leq 1$ . Eine einfache Anwendung von Lemma 5.4 ergibt die Behauptung, wenn wir  $t^{\frac{1}{2}}g_r(t) \leq S_r^{\frac{1}{2}}$  zeigen können. Nun gilt aber wegen (5.5)  $t^{\frac{1}{2}}g_r(t) = (tg_r(t))^{\frac{1}{2}}g_r(t)^{\frac{1}{2}} \leq g_r(t)^{\frac{1}{2}} \leq S_r^{\frac{1}{2}}$ .  $\square$

Damit ist ein erstes Teilziel erreicht, wir haben eine Abschätzung für den Fehler  $x_* - x_r$  erhalten. Die nun folgenden beiden Lemmata liefern, wie eingangs dieses Abschnitts schon erwähnt, Abschätzungen für den Defekt  $\omega_r$ . Die Ergebnisse dieser Lemmata werden dann zusammengefaßt in Korollar 5.8.

**Lemma 5.6** *Es gelte die Voraussetzung 5.1 mit  $x_{an} = 0$ . Mit den Notationen aus Sektion 5.1 gilt für  $r \in \mathbb{N}_0$  mit  $u_{r-1} \neq 0$  (falls  $r \neq 0$ )*

$$\omega_r \leq \Psi + \rho((p+1)^{\frac{p+1}{2}} S_r^{-\frac{p+1}{2}} + \kappa S_r^{-\frac{1}{2}}).$$

*Beweis.* Der Fall  $r = 0$  ist schnell erledigt: Es gilt  $\omega_0 = \|Qy_\epsilon\| \leq \|QAx_* - Qy_\epsilon\| + \|Ax_*\| \leq \Psi + \|A\|^{p+1}\rho \leq \Psi + \rho S_0^{-\frac{p+1}{2}}$ . Sei nun  $r \geq 1$ . Es ist

$$w_r^2 = \int_{0-0}^a s_r^2(t) d\|F_t Qy_\epsilon\|^2 \tag{5.11}$$

abzuschätzen. Dazu definieren wir  $p(t) = s_r(t)(1 - \frac{t}{t_{1,r}})^{-1}$ . Dann gilt  $p \in \Pi_{r-1}$ , mit der Orthogonalitätseigenschaft (5.6) folgt

$$\int_{t_{1,r}}^a t s_r^2(t) \left(\frac{t}{t_{1,r}} - 1\right)^{-1} d\|F_t Qy_\epsilon\|^2 = \int_{0-0}^{t_{1,r}} t s_r(t) p(t) d\|F_t Qy_\epsilon\|^2.$$

Damit erhalten wir wegen  $t(\frac{t}{t_{1,r}} - 1)^{-1} \geq t_{1,r}$  für  $t_{1,r} < t$

$$\begin{aligned} \int_{t_{1,r}}^a s_r^2(t) d\|F_t Q y_\epsilon\|^2 &\leq t_{1,r}^{-1} \int_{t_{1,r}}^a t s_r^2(t) (\frac{t}{t_{1,r}} - 1)^{-1} d\|F_t Q y_\epsilon\|^2 \\ &= \int_{0-0}^{t_{1,r}} \frac{t}{t_{1,r} - t} s_r^2(t) d\|F_t Q y_\epsilon\|^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Insgesamt ergibt sich mit (5.11) und (5.12)

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &\leq \int_{0-0}^{t_{1,r}} s_r^2(t) (1 + \frac{t}{t_{1,r} - t}) d\|F_t Q y_\epsilon\|^2 \\ &= \int_{0-0}^{t_{1,r}} s_r^2(t) \frac{t_{1,r}}{t_{1,r} - t} d\|F_t Q y_\epsilon\|^2 \\ &= \int_{0-0}^{t_{1,r}} s_r^2(t) (1 - \frac{t}{t_{1,r}})^{-1} d\|F_t Q y_\epsilon\|^2 = \|v_r^{\frac{1}{2}}(\tilde{C}) F_{t_{1,r}} Q y_\epsilon\|^2 \end{aligned}$$

mit (siehe (5.3))

$$v_r(t) = \left( \prod_{k=2}^r (1 - \frac{t}{t_{k,r}})^2 \right) (1 - \frac{t}{t_{1,r}}).$$

Zu beachten ist, daß  $v_r(t) \in [0, 1]$  für alle  $0 \leq t \leq t_{1,r}$  gilt, denn für  $\tau > 0$  gilt  $0 \leq 1 - \frac{t}{\tau} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \tau$ . Mit  $x_* = |A|^p z$ ,  $\|z\| \leq \rho$ , gilt nun aber

$$Q y_\epsilon = \tilde{A} |\tilde{A}|^p z + \tilde{A} (|A|^p - |\tilde{A}|^p) z - \tilde{A} x_* + Q y_\epsilon. \quad (5.13)$$

Ähnlich wie beim Beweis von Lemma 5.5 folgt

$$\omega_r \leq \rho \left\{ \sup_{0 \leq t \leq t_{1,r}} (v_r(t) t^{p+1})^{\frac{1}{2}} + \kappa \sup_{0 \leq t \leq t_{1,r}} (t v_r(t))^{\frac{1}{2}} \right\} + \Psi \sup_{0 \leq t \leq t_{1,r}} v_r(t)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.14)$$

Es muß nun zur weiteren Abschätzung von (5.14) für festes  $s > 0$  der Ausdruck  $\phi(t) = t^s v_r(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_{1,r}$ , abgeschätzt werden. An der Darstellung von  $\phi$  erkennt man sofort  $\phi(0) = \phi(t_{1,r}) = 0$  und  $\phi(t) > 0$ . Weiter ist

$$v_r'(t) = -v_r(t) \left( 2 \sum_{k=2}^r \frac{1}{t_{k,r} - t} + \frac{1}{t_{1,r} - t} \right).$$

Sei nun  $0 < \bar{t} < t_{1,r}$  mit

$$\phi(\bar{t}) = \sup_{0 \leq t \leq t_{1,r}} \phi(t).$$

Dann gilt also  $0 = \phi'(\bar{t})$  und damit

$$\begin{aligned} s\bar{t}^{s-1}v_r(\bar{t}) &= \bar{t}^s v_r(\bar{t}) \left( 2 \sum_{k=2}^r \frac{1}{t_{k,r} - \bar{t}} + \frac{1}{t_{1,r} - \bar{t}} \right) \\ &\geq \bar{t}^s v_r(\bar{t}) S_r, \end{aligned}$$

es folgt  $\bar{t} \leq sS_r^{-1}$  und damit

$$\sup_{0 \leq t \leq t_{1,r}} \phi(t) = \phi(\bar{t}) = \bar{t}^s v_r(\bar{t}) \leq \bar{t}^s \leq (sS_r^{-1})^s. \quad (5.15)$$

Setzt man (5.15) in (5.14) ein und nutzt wieder aus, daß  $v_r(t) \in [0, 1]$  für alle  $0 \leq t \leq t_{1,r}$ , erhält man die Behauptung.  $\square$

**Lemma 5.7** *Es gelte die Voraussetzung 5.1 mit  $x_{an} = 0$ . Es werden wieder die Notationen aus Sektion 5.1 verwendet. Sei  $r \in \mathbb{N}$  mit  $u_{r-1} \neq 0$ ,  $\theta_2 > 2$  und  $2 < \tau \leq 2(\theta_2 - 1)$ . Falls dann  $\theta_2 S_{r-1} \leq S_r$ , so gilt mit  $\alpha := \frac{1 - \theta_2^{-1}}{\tau}$*

$$\frac{\tau - 2}{\tau - 1} w_{r-1} \leq \Psi + \rho((\alpha S_r)^{-\frac{p+1}{2}} + \kappa(\alpha S_r)^{-\frac{1}{2}}).$$

*Beweis.* Sei  $s(t) = s_r(t)(1 - \frac{t}{t_{1,r}})^{-1}$ . Dann gilt  $s \in \Pi_{r-1}$  und  $s(0) = 1$ , mit der Minimaleigenschaft (5.7) folgt

$$\begin{aligned} \omega_{r-1}^2 &\leq \|s(\tilde{C})Qy_\epsilon\|^2 = \int_{0-0}^{\tau t_{1,r}} s^2(t) d\|F_t Qy_\epsilon\|^2 + \int_{\tau t_{1,r}}^a s^2(t) d\|F_t Qy_\epsilon\|^2 \\ &\leq \int_{0-0}^{\tau t_{1,r}} s^2(t) d\|F_t Qy_\epsilon\|^2 + (\tau - 1)^{-2} \int_{\tau t_{1,r}}^a s_r^2(t) d\|F_t Qy_\epsilon\|^2 \\ &\leq \|s(\tilde{C})F_{\tau t_{1,r}} Qy_\epsilon\|^2 + (\tau - 1)^{-2} \omega_r^2, \end{aligned} \quad (5.16)$$

denn für  $t \geq \tau t_{1,r}$  gilt  $(1 - \frac{t}{t_{1,r}})^{-2} \leq (\tau - 1)^{-2}$ . Wenn wir jetzt noch im Fall  $r \geq 2$  die beiden Ungleichungen

$$\tau t_{1,r} \leq 2t_{2,r}, \quad (5.17)$$

$$t_{1,r} \leq (1 - \theta_2^{-1})^{-1} S_r^{-1}, \quad (5.18)$$

((5.18) wird auch für  $r = 1$  benötigt) zeigen können, so liefert eine weitere Abschätzung von (5.16) wegen  $|s(t)| \leq 1$  für alle  $t \leq 2t_{2,r}$  (letzteres kann man wieder aus der Produktdarstellung von  $s$  folgern) und (5.13)

$$\begin{aligned}
\omega_{r-1} &\leq \rho \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \tau t_{1,r}} |s(t)t^{\frac{p+1}{2}}| + \kappa \sup_{0 \leq t \leq \tau t_{1,r}} |s(t)t^{\frac{1}{2}}| \right\} \\
&\quad + \Psi \sup_{0 \leq t \leq \tau t_{1,r}} |s(t)| + (\tau - 1)^{-1} \omega_r \\
&\leq \Psi + \rho \left\{ (\tau t_{1,r})^{\frac{p+1}{2}} + \kappa (\tau t_{1,r})^{\frac{1}{2}} \right\} + (\tau - 1)^{-1} \omega_{r-1} \\
&\leq \Psi + \rho \left\{ (\tau(1 - \theta_2^{-1})^{-1} S_r^{-1})^{\frac{p+1}{2}} + \kappa (\tau(1 - \theta_2^{-1})^{-1} S_r^{-1})^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\quad + (\tau - 1)^{-1} \omega_{r-1}. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Hier wurde  $\omega_r \leq \omega_{r-1}$  ausgenutzt. Im übrigen ist zu erwähnen, daß bei der eben durchgeführten Rechnung der Fall  $r = 1$  trivial ist: Es gilt in diesem Fall  $s(t) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Mit einer einfachen Umformung der Ungleichung (5.19) ist dann die Behauptung gezeigt.

Es ist also nur noch (5.17) und (5.18) für  $r > 1$  zu zeigen. Nun gilt nach Voraussetzung (wegen der Eigenschaften der  $(t_{k,r})_{k,r}$  siehe Sektion 5.1)

$$\theta_2 S_{r-1} \leq S_r = t_{1,r}^{-1} + \sum_{k=2}^r t_{k,r}^{-1} \leq t_{1,r}^{-1} + \sum_{k=1}^{r-1} t_{k,r-1}^{-1} = t_{1,r}^{-1} + S_{r-1}. \tag{5.20}$$

Damit folgt zum einen  $S_r \leq t_{1,r}^{-1} + S_{r-1}$  (dies gilt wegen  $S_1 = t_{1,1}^{-1}$  trivialerweise auch für  $r = 1$ ), wegen der Voraussetzung  $\theta_2 S_{r-1} \leq S_r$  folgt (5.18). Andererseits folgt aus den Abschätzungen in (5.20)  $(\theta_2 - 1)t_{1,r-1}^{-1} \leq (\theta_2 - 1)S_{r-1} \leq t_{1,r}^{-1}$  und damit  $\tau t_{1,r} \leq \frac{\tau}{\theta_2 - 1} t_{1,r-1} \leq 2t_{2,r}$  wegen  $t_{1,r-1} \leq t_{2,r}$ , damit ist auch (5.17) gezeigt.  $\square$

Lemma 5.6 und Lemma 5.7 zusammen liefern

**Korollar 5.8** *Es gelte die Voraussetzung 5.1 mit  $x_{an} = 0$ . Es werden wieder die Notationen aus Sektion 5.1 verwendet. Für alle  $0 < \theta < 1$  gibt es ein  $u_\theta > 0$ , so daß für alle  $r \geq 1$  mit  $u_{r-1} \neq 0$  gilt  $\theta \omega_{r-1} \leq \Psi + u_\theta \rho (S_r^{-\frac{p+1}{2}} + \kappa S_r^{-\frac{1}{2}})$ .  $u_\theta$  hängt neben  $\theta$  nur noch von  $p$  ab.*

*Beweis.* Sei  $\tau > 2$  so, daß  $\theta = \frac{\tau-2}{\tau-1}$  gilt. Weiter sei  $\theta_2 > 2$  so, daß  $\tau = 2(\theta_2 - 1)$  gilt. Die Lemmata 5.6 und 5.7 ergeben mit der Fallunterscheidung " $\theta_2 S_{r-1} \leq S_r$ " und " $\theta_2 S_{r-1} > S_r$ " die Behauptung.  $\square$

Mit Korollar 5.5 und Korollar 5.8 läßt sich nun das folgende Lemma beweisen, mit dem wir fast am Ziel sind. Es wird in genügend großer Allgemeinheit formuliert, so daß es sowohl mit  $r = \bar{r}$  als auch mit  $r = \bar{r} - 1$  angewendet werden kann, wenn die anderen Bedingungen in diesem Lemma erfüllt sind.

**Lemma 5.9** *Es gelte die Voraussetzung 5.1 mit  $x_{an} = 0$ . Es werden wieder die Notationen aus Sektion 5.1 verwendet. Seien  $d > 1$  und  $r \geq 1$  mit  $u_{r-1} \neq 0$ ,  $S_r \leq \xi^{-2}$ ,  $d\epsilon \leq \omega_{r-1}$  und  $\omega_r \leq d\epsilon + C\rho\xi\kappa$  ( $C$  konstant). Dann gilt mit einer von  $p$  abhängigen Konstanten  $e_p$*

$$\|x_* - x_r\| \leq e_p((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho(\xi^{\min\{p,1\}} + \eta^{\min\{p,2\}})).$$

*Beweis.* Mit Korollar 5.5 folgt für  $0 < \tau \leq t_{1,r}$

$$\|x_* - x_r\| \leq C_1\tau^{-\frac{1}{2}}(\epsilon + \rho\xi\kappa) + \rho(\tau^{\frac{p}{2}} + \kappa) + \Psi S_r^{\frac{1}{2}} \quad (5.21)$$

mit einer Konstanten  $C_1$ . (5.21) soll nun weiter abgeschätzt werden. Sei dazu  $\delta := ((\frac{\epsilon}{\rho})^{\frac{1}{p+1}} + \xi)^2$  und  $\tau := \min\{\delta, S_r^{-1}\}$ . Es gilt dann  $\tau \leq S_r^{-1} \leq t_{1,r}$ , Ungleichung (5.21) gilt also mit diesem  $\tau$ . Wir haben nur noch die einzelnen Größen der rechten Seite von (5.21) abzuschätzen.

a) Es gilt

$$\rho\tau^{\frac{p}{2}} \leq \rho\delta^{\frac{p}{2}} \leq \rho C_2((\frac{\epsilon}{\rho})^{\frac{p}{p+1}} + \xi^p) \leq C_2((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho\xi^p)$$

mit einer von  $p$  abhängigen Konstanten  $C_2$ .

b) Da  $\xi^2 \leq \delta$  und  $\xi^2 \leq S_r^{-1}$  nach Voraussetzung, gilt auch  $\xi^2 \leq \tau$  und damit  $\tau^{-\frac{1}{2}}\xi \leq 1$ .

c) Es muß noch  $\tau^{-\frac{1}{2}}\epsilon$  genügend gut abgeschätzt werden. Wir machen dazu eine Fallunterscheidung. Wenn  $\delta \leq S_r^{-1}$ , so gilt  $\tau = \delta \geq (\frac{\epsilon}{\rho})^{\frac{2}{p+1}}$  und damit  $\tau^{-\frac{1}{2}}\epsilon \leq (\frac{\epsilon}{\rho})^{-\frac{1}{p+1}}\epsilon = (\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}$ . Diese Abschätzung ist gut genug. Sei also nun  $\delta > S_r^{-1}$ . Mit Korollar 5.8 folgt

$$d\theta\epsilon < \theta\omega_{r-1} \leq \epsilon + b_p\xi^{\min\{p,1\}+1} + u_\theta\rho(S_r^{-\frac{p+1}{2}} + \kappa S_r^{-\frac{1}{2}})$$

(wobei  $0 < \theta < 1$  so gewählt ist, daß  $d\theta > 1$ , und  $u_\theta$  entsprechend Korollar 5.8 gewählt ist). Subtrahiert man bei der letzten Ungleichung auf beiden Seiten  $\epsilon$  und multipliziert anschließend mit  $\tau^{-\frac{1}{2}}$ , so erhält man schließlich

$$(\theta d - 1)\tau^{-\frac{1}{2}}\epsilon \leq b_p \xi^{\min\{p,1\}} + u_\theta \rho(S_r^{-\frac{p}{2}} + \kappa) \leq b_p \xi^{\min\{p,1\}+1} + u_\theta \rho(\delta^{\frac{p}{2}} + \kappa),$$

wobei die Voraussetzung  $\tau = S_r^{-1} \leq \delta$  und noch einmal  $\tau^{-\frac{1}{2}}\xi \leq 1$  (siehe b)) ausgenutzt wurden. Also kann  $\tau^{-\frac{1}{2}}\epsilon$  auch diesem Fall ausreichend gut abgeschätzt werden.

d) Abschließend ist  $\Psi S_r^{\frac{1}{2}}$  abzuschätzen. Da aber  $S_r^{\frac{1}{2}} \leq \tau^{-\frac{1}{2}}$  gilt, erhält man mit den Ergebnissen aus b) und c) genügend gute Abschätzungen.  $\square$

Nun sind wir endlich in der Lage, das Hauptresultat zu beweisen.

*Beweis von Satz 5.2.* I. Sei zunächst  $x_{an} = 0$ .

1) Wir betrachten zuerst den Fall  $\bar{x} = x_0 = 0$ . Dies kann in den drei Fällen "  $u_0 = 0$ ", "  $\omega_0 = \|Qy_\epsilon\| \leq \Psi$ " und "  $\bar{r} = 1$  und  $S_1 \geq \xi^{-2}$ " passieren. In allen drei Fällen jedoch kann man  $\|Qy_\epsilon\|$  gut genug abschätzen und dann mit der Interpolationsgleichung (3.1) zum Ziel kommen. Dies soll noch konkretisiert werden. Wenn  $u_0 = 0$ , so folgt (siehe Sektion 5.1)  $\|Qy_\epsilon\| \leq \Psi$ . Der zweite Fall ist der, daß der Defekt schon im 0-ten Schritt unter die kritische Grenze fällt, das heißt, es gilt  $\|\tilde{A}x_0 - Qy_\epsilon\| = \|Qy_\epsilon\| \leq d\epsilon$ . Der dritte Fall ist, wie gesagt,  $\bar{r} = 1$  und  $S_1 \geq \xi^{-2}$ . Dann folgt mit Korollar 5.8  $\theta\|Qy_\epsilon\| = \theta\omega_0 \leq \Psi + u_\theta \rho(\xi^{p+1} + \xi\kappa)$ , wobei  $0 < \theta < 1$  beliebig und  $u_\theta$  wie in Korollar 5.8 gewählt. In jedem Fall gilt also  $\|Qy_\epsilon\| \leq C(\epsilon + \rho\xi\kappa)$  mit einer Konstanten  $C$ . Weiter ist  $\|(I - Q)y_\epsilon\| \leq \|QAx_* - Qy_\epsilon\| \leq \|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \|APx_* - y_\epsilon\| + \|A(I - P)x_*\| \leq \epsilon + 2b_p \xi^{\min\{p,1\}}$ , es folgt  $\|Ax_*\| \leq \|Ax_* - y_\epsilon\| + \|y_\epsilon\| \leq C_1(\epsilon + \rho\xi\kappa)$  mit einer Konstanten  $C_1$ . Mit der Interpolationsungleichung 3.1 folgt

$$\begin{aligned} \|x_* - \bar{x}\| &= \|x_*\| = \| |A|^p z \| \leq \| |A|^{p+1} z \| \frac{p}{p+1} \|z\|^{\frac{1}{p+1}} \\ &= \|Ax_*\|^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}} \leq (C_1(\epsilon + \rho\xi\kappa))^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq C_2((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho\xi\kappa)^{\frac{p}{p+1}} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $C_2$ . Es folgt nun die Behauptung, da

$$(\xi(\xi^{\min\{p,1\}} + \eta^{\min\{p,2\}}))^{\frac{p}{p+1}} \leq C_3 \max\{\xi^{\min\{p,1\}}, \eta^{\min\{p,2\}}\}$$

mit einer Konstanten  $C_3$  gilt, wie man mit einigen Fallunterscheidungen schnell einsehen kann.

2. Sei also jetzt  $\bar{r} > 0$  und  $S_1 < \xi^{-2}$ . Es gilt damit  $u_{\bar{r}-1} \neq 0$  und  $d\epsilon < \omega_{\bar{r}-1}$ .

a) Wenn  $S_{\bar{r}} < \xi^{-2}$ , so gilt  $\omega_{\bar{r}} \leq d\epsilon$  oder  $u_{\bar{r}} = 0$ , in jedem Fall also  $\omega_{\bar{r}} \leq d\Psi$ , die Voraussetzungen des Lemmas 5.9 sind mit  $r = \bar{r}$  erfüllt, die Behauptung folgt mit diesem Lemma.

b) Sei jetzt  $S_{\bar{r}} \geq \xi^{-2}$ . Dann ist  $\bar{r} \geq 2$  und  $\bar{x} = x_{\bar{r}-1}$ . Mit Korollar 5.8 folgt für beliebiges  $0 < \theta < 1$  die Ungleichung  $\theta\omega_{\bar{r}-1} \leq \Psi + u_{\theta}\rho(\xi^{p+1} + \xi\kappa)$ . Hierbei ist  $u_{\theta}$  wie in Korollar 5.8 gewählt. Wegen  $d\epsilon < \omega_{\bar{r}-2}$  folgt die Behauptung, wenn man Lemma 5.9 mit  $r = \bar{r} - 1$  anwendet.

II. Sei nun  $x_{an} \in X$  beliebig. Wir wenden die bisher erzielten Resultate auf  $\tilde{x}_* := x_* - x_{an}$  und  $\tilde{y}_\epsilon := y_\epsilon - APx_{an}$  an. Nach Voraussetzung gilt  $x_* - x_{an} \in M_{p,\rho}$  und  $\|AP\tilde{x}_* - \tilde{y}_\epsilon\| \leq \Psi$ , die Voraussetzungen des Satzes 5.2 sind erfüllt, das CG-Verfahren liefert also mit Startvektor 0 und rechter Seite  $\tilde{y}_\epsilon$  eine Approximation  $\bar{x}$  an  $\tilde{x}_*$ , die einer Fehlerabschätzung der Form

$$\|\tilde{x}_* - \bar{x}\| \leq e_p((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho(\xi^{\min\{p,1\}} + \eta^{\min\{p,2\}})) \quad (5.22)$$

genügt.

Wir nutzen nun aus, daß für  $Px_{an} = x_0 \in R(P)$  die Gleichung  $x_0 + x_r(0, \tilde{y}_\epsilon) = x_r(x_0, y_\epsilon)$  gilt. Dabei bezeichnet für beliebiges  $x_{st} \in R(P)$  und  $y \in Y$   $x_r(x_{st}, y)$  die durch das CG-Verfahren erzeugte  $r$ -te Iterierte bei Startwert  $x_{st}$  und rechter Seite  $y$ . Da deshalb  $\tilde{A}x_r(x_0, y_\epsilon) - Qy_\epsilon = \tilde{A}x_r(0, \tilde{y}_\epsilon) - Q\tilde{y}_\epsilon$  gilt und auch die Größen  $S_r$  in beiden Fällen übereinstimmen, brechen das mit Startvektor 0 und rechter Seite  $\tilde{y}_\epsilon$  gestartete CG-Verfahren sowie das mit Startvektor  $x_0$  und rechter Seite  $y_\epsilon$  gestartete CG-Verfahren im gleichen Schritt ab und liefern Approximationen  $\bar{x}$  sowie  $\bar{x}$ , für die  $x_0 + \bar{x} = \bar{x}$  gilt. Damit folgt schließlich

$$x_* - \bar{x} = x_* - x_0 - \bar{x} = \tilde{x}_* - \bar{x} + (I - P)x_{an},$$

also  $\|x_* - \bar{x}\| \leq \|\tilde{x}_* - \bar{x}\| + \|(I - P)x_{an}\|$ . Mit (5.22) und Lemma 3.1 folgt die Behauptung.  $\square$

## 6 Der Fall $A = A^* \geq 0$

Wieder sei  $X$  ein Hilbertraum. Für  $A \in L_s(X)$  betrachten wir wieder die Gleichung  $Ax = y$ ,  $y \in R(A)$ . Sei nun  $A_h = P_h A P_h$ , wobei  $P_h$ ,  $h > 0$ , eine orthogonale Projektion in  $X$  sei. Wir setzen im folgenden  $A = A^* \geq 0$ , das heißt,  $A$  ist ein selbstadjungierter nichtnegativer Operator, voraus. Dann können wir die in den Abschnitten 2 und 5 angegebenen Verfahren direkt auf die Gleichung  $A_h x_h = P_h y$  anwenden und nicht wie bisher auf die normalisierte Gleichung  $A_h^2 x_h = A_h y$ . Dies soll im folgenden konkretisiert werden. Allerdings werden Bemerkungen hier nur knapp kommentiert und die Beweise der Sätze völlig entfallen, die Argumente lassen sich vollständig aus Sektion 4 und Sektion 5 übertragen. Zumindest die Ergebnisse des Abschnitts 6.1 sind in Plato und Vainikko[31] detailliert begründet.

Wir nehmen wieder an, daß nur eine Näherung  $y_\epsilon \in X$  für  $y$  bekannt ist mit  $\|y - y_\epsilon\| \leq \epsilon$ , wobei  $\epsilon > 0$  eine bekannte Fehlerschranke ist. Um eine Approximation einer Lösung von (1.1) zu erhalten, verwenden wir wieder Funktionen

$$g_r : [0, a] \rightarrow \mathbb{R},$$

$r \geq 0$ ,  $\|A\| \leq a$ . Sei nun wieder  $x_{an} \in X$  eine Anfangsnäherung. Mit einer angemessenen Wahl von  $r$  (dies wird in den Sätzen in den Abschnitten 6.2 und 6.3 präzisiert) ist dann

$$x_r = (I - g_r(A_h)A_h)P_h x_{an} + g_r(A_h)P_h y_\epsilon. \quad (6.1)$$

eine Näherung der Lösung  $x_*$  von (1.1), die am nächsten bei  $x_{an}$  liegt. Wieder ist zu sagen, daß hier noch  $g_r$  von  $A_h$ ,  $x_{an}$  und  $y_\epsilon$  abhängen darf.

## 6.1 Lineare Verfahren

Sei  $(g_r)_{r \geq 0}$  fest vorgegeben. Wir nehmen an, daß Bedingung (2.1) erfüllt ist und außerdem

$$\sup_{0 \leq t \leq a} |g_r(t)| \leq \gamma r, \quad r \geq 0, \quad (6.2)$$

gilt mit einer Konstanten  $\gamma$ . Wir bemerken, daß (6.2) eine schärfere Bedingung ist als (2.2). Zunächst wieder einige Beispiele.

1. *Die Methode von Lavrentiev:* Hier ist die Lösung  $x_r$  der Gleichung

$$(A_h + r^{-1}I)x = P_h y_\epsilon \quad (6.3)$$

zu bestimmen. Die Methode ist von der Form (6.1) mit  $x_{an} = 0$  und  $g_r(t) = (t + r^{-1})^{-1}$ ,  $r > 0$ . Die Bedingungen (2.1) und (6.2) sind erfüllt mit  $p_0 = 1$ .

2. *Die verallgemeinerte Methode von Lavrentiev:* Sei  $q \geq 0$ . Hier ist die Lösung  $x_r$  der Gleichung

$$(A_h^{q+1} + r^{-q-1}I)x = A_h^q P_h y_\epsilon \quad (6.4)$$

zu bestimmen. Die Methode ist von der Form (6.1) mit  $x_{an} = 0$  und  $g_r(t) = t^q / (t^{q+1} + r^{-q-1})$ ,  $r > 0$ . Die Bedingungen (2.1) und (6.2) sind erfüllt mit  $p_0 = q + 1$ .

3. *Die Methode der sukzessiven Approximation (Explizites Verfahren):* Sei  $0 < \mu < \frac{2}{a}$ . Dieser Algorithmus ist gegeben durch  $x_0 = P_h x_{an}$ ,

$$x_r = (I - \mu A_h)x_{r-1} + \mu P_h y_\epsilon, \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

Die Methode ist von der Form (6.1) mit  $g_r(t) = \frac{1}{t}[1 - (1 - \mu t)^r]$ ,  $t \neq 0$ . Die Bedingungen (2.1) und (6.2) sind erfüllt für jedes  $p_0 > 0$ .

4. *Implizites Verfahren:* Sei  $0 < \mu$  konstant. Dieser Algorithmus ist gegeben durch  $x_0 = P_h x_{an}$ ,

$$(A_h + \mu I)x_r = \mu x_{r-1} + P_h y_\epsilon, \quad r = 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

Die Methode ist von der Form (6.1) mit  $g_r(t) = \frac{1}{t}[1 - (\frac{\mu}{\mu+t})^r]$ ,  $t \neq 0$ . Die Bedingungen (2.1) und (6.2) sind erfüllt für jedes  $p_0 > 0$ .

Sei nun  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n \in X$  eine Basis von  $R(P_h)$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} G_{\Phi} &= (\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n}, \\ B &= (\langle \Phi_i, A\Phi_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n} \\ z &= (\langle \Phi_i, y_{\epsilon} \rangle)_{i=1,\dots,n}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Zunächst betrachten wir die Methode von Lavrentiev. Die Lösung  $x_r$  der zugehörigen Gleichung (6.3) kann in der Form

$$x_r = \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j.$$

ausgedrückt werden. Dann sind (6.3) und (6.7) äquivalent zu dem folgenden System von Gleichungen zur Bestimmung des Vektors  $c = (c_j)_{j=1,\dots,n}$ :

$$(B + r^{-1}G_{\Phi})c = z.$$

Nun zur verallgemeinerten Methode von Lavrentiev. Die Lösung  $x_r$  der zugehörigen Gleichung (6.4) kann in der Form

$$x_r = \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j.$$

ausgedrückt werden. Dann sind (6.4) und (6.7) äquivalent zu dem folgenden System von Gleichungen zur Bestimmung des Vektors  $c = (c_j)_{j=1,\dots,n}$ :

$$(B(G_{\Phi}^{-1}B)^q + r^{-1}G_{\Phi})c = (BG_{\Phi}^{-1})^q z.$$

Bei der Methode der sukzessiven Approximation (6.5) und dem impliziten Schema (6.6) kann  $x_r$  wiederum in der Form

$$x_r = \sum_{j=1}^n c_j^r \Phi_j.$$

dargestellt werden.  $(c^r)_{r \in \mathbb{N}_0}$  ist für (6.5) beziehungsweise (6.6) iterativ bestimmt durch

$$\begin{aligned} c^r &= c^{r-1} - \mu(G_{\Phi}^{-1}Bc^{r-1} - G_{\Phi}^{-1}z), \\ (B + \mu G_{\Phi})c^r &= \mu G_{\Phi}c^{r-1} + z. \end{aligned} \quad (6.8)$$

In beiden Fällen gilt  $c^0 = G_{\Phi}^{-1}((\langle \Phi_j, x_{an} \rangle)_{j=1, \dots, n})$ . Wir geben nun die zu den Sätzen 4.2 und 4.4 analogen Ergebnisse an. Wir setzen dazu

$$R_{h,r} = (I - g_r(A_h)A_h)P_h x_{an} + g_r(A_h)P_h y_{\epsilon}. \quad (6.9)$$

Der nun folgende Satz betrifft die a priori-Parameterwahl, während in Satz 6.2 zwei Diskrepanzprinzipien behandelt werden.

**Satz 6.1** *Sei  $A \in L_s(X)$ ,  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq a$ . Weiter sei  $y \in R(A)$ ,  $\|y - y_{\epsilon}\| \leq \epsilon$ ,  $x_{an} \in X$  und  $x_*$  die Lösung von  $Ax = y$ , die am nächsten bei  $x_{an}$  liegt. Sei  $P_h \in L_s(X)$  eine orthogonale Projektion mit  $\|A(I - P_h)\| \leq \xi_h$ . Wir setzen  $A_h = P_h A P_h$ . Es gelte (2.1), (6.2) und (6.9).*

1. (Konvergenz) Wenn  $P_h \rightarrow I$  punktweise,  $\xi_h \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ),

$$r_{(h,\epsilon)}\epsilon \rightarrow 0, \quad r_{(h,\epsilon)}\xi_h \leq C \text{ und } r_{(h,\epsilon)} \rightarrow \infty \text{ (} h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0\text{),}$$

mit einer Konstanten  $C$ , so gilt

$$\sup_{y_{\epsilon} \in Y, \|y - y_{\epsilon}\| \leq \epsilon} \|x_* - R_{h,r_{(h,\epsilon)}} y_{\epsilon}\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0).$$

2. (Konvergenzordnung) Wenn  $0 < p \leq p_0$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $x_* - x_{an} \in M_{p,\rho}$ ,  $x_* \in M_{p,\rho}$  und

$$C_1\left(\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{\frac{1}{p+1}} + \xi_h\right) \leq r^{-1} \leq C_2\left(\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{\frac{1}{p+1}} + \xi_h^{\min\{\frac{1}{p}, 1\}}\right)$$

mit positiven Konstanten  $C_1, C_2$ , so gilt

$$\|x_* - R_{h,r} y_{\epsilon}\| \leq e_p\left((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho\xi_h^{\min\{p, 1\}}\right).$$

$e_p$  ist unabhängig von  $\epsilon$ ,  $h$  und  $\rho$ .

**Satz 6.2** Sei  $A \in L_s(X)$ ,  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq a$ . Weiter sei  $y \in R(A)$ ,  $\|y - y_\epsilon\| \leq \epsilon$ ,  $x_{an} \in X$  und  $x_*$  die Lösung von  $Ax = y$ , die am nächsten bei  $x_{an}$  liegt. Sei  $P_h \in L_s(X)$  eine orthogonale Projektion mit  $\|A(I - P_h)\| \leq \xi_h$ . Wir setzen  $A_h = P_h A P_h$ . Weiter sei (2.1), (6.2) und (6.9) gültig für Funktionen  $g_r$  mit  $p_0 > 1$  in (2.1).  $r \mapsto |1 - tg_r(t)|$  sei monoton fallend für jedes  $t \geq 0$ . Der Parameter  $r = r(h, \epsilon)$  sei gemäß Regel 1 oder Regel 2 (siehe Abschnitt 4) gewählt, wobei dort  $Q_h$  durch  $P_h$  ersetzt wird und  $r_{\max}$  gleich  $\xi_h^{-1}$  beziehungsweise  $[\xi_h^{-1}] + 1$  zu setzen ist.

1. Wenn  $P_h \rightarrow I$  punktweise,  $\xi_h \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ), so gilt

$$\sup_{y_\epsilon \in Y, \|y - y_\epsilon\| \leq \epsilon} \|x_* - R_{h,r(h,\epsilon)} y_\epsilon\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0).$$

2. Wenn  $0 < p \leq p_0 - 1$ ,  $x_* - x_{an} \in M_{p,\rho}$  und  $x_* \in M_{p,\rho}$ , so gilt

$$\|x_* - R_{h,r} y_\epsilon\| \leq e_p((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho\xi_h^{\min\{p,1\}}).$$

$e_p$  ist unabhängig von  $\epsilon$ ,  $h$  und  $\rho$ .

## 6.2 Die Methode der konjugierten Gradienten

Wir machen die üblichen Annahmen.

**Voraussetzung 6.3** Sei  $X$  ein Hilbertraum,  $A \in L_s(X)$ ,  $\|A\| \leq a$ ,  $p \geq 0$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $x_*$  und  $x_{an} \in X$  mit  $x_* - x_{an} \in M_{p,\rho}$  und  $x_{an} \in M_{p,\rho}$ . Weiter sei  $P \in L_s(X)$  eine orthogonale Projektion mit  $\|A(I - P)\| \leq \xi \leq \xi_0$ . Wir setzen  $\tilde{A} = PAP$  und  $\Psi = \epsilon + b_p \rho \xi^{\min\{p,1\}+1}$  ( $b_p$  wie in Lemma 3.1). Sei  $y_\epsilon \in X$  mit  $\|APx_* - y_\epsilon\| \leq \Psi$ .

Für ein beliebige, aber feste Anfangsnäherung  $x_{an} \in X$  erzeugt die Methode der konjugierten Gradienten iterativ (möglicherweise endliche) Folgen  $x_r, u_r, d_r \in X, \alpha_r, \beta_r \in \mathbb{R}$ , ( $r \in \mathbb{N}_0$ ) durch

$$\begin{aligned} u_0 &= -d_0 = \tilde{A}x_0 - Py_\epsilon, \\ \alpha_r &= \frac{\|u_r\|^2}{\langle \tilde{A}d_r, d_r \rangle}, \quad x_{r+1} = x_r + \alpha_r d_r, \\ u_{r+1} &= \tilde{A}x_{r+1} - Py_\epsilon, \\ \beta_r &= \frac{\|u_{r+1}\|^2}{\|u_r\|^2}, \quad d_{r+1} = -u_{r+1} + \beta_r d_r. \end{aligned}$$

Hier ist  $x_0 = Px_{an}$ . Wir setzen außerdem  $w_r = \|u_r\|$ . Tritt der Fall  $u_r = 0$  das erste Mal auf, so setzen wir  $x_k = x_r$  und  $u_k = u_r$  für  $k \geq r$ .

Wie schon in Kapitel 5 geben wir auch hier zunächst die Matrixdarstellung dieses Verfahrens an. Mit der Notation aus (6.7) kann man  $x_r$  in der Form

$$x_r = \sum_{j=1}^n c_{rj} \Phi_j. \quad (6.10)$$

darstellen. Sei nun  $a_r$  bzw.  $b_r$  der Koordinatenvektor von  $u_r$  bzw.  $d_r$  bezüglich der Basis  $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  von  $R(P)$ . Das CG-Verfahren ist zusammen mit  $c_0 = G_{\Phi}^{-1}(\langle \Phi_j, x_{an} \rangle)_{j=1, \dots, n}$  und (6.10) äquivalent zu dem folgenden Iterationsverfahren zur Bestimmung von  $c_r = (c_{rj})_{j=1, \dots, n}$ ,  $r = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= -b_0 = G_{\Phi}^{-1} B c_0 - G_{\Phi}^{-1} z, \\ c_{r+1} &= c_r + \alpha_r b_r, \\ a_{r+1} &= G_{\Phi}^{-1} B c_r - G_{\Phi}^{-1} z, \\ b_{r+1} &= -a_{r+1} + \beta_r b_r. \end{aligned}$$

Dabei seien  $\alpha_r$  und  $\beta_r$  wie auf der vorangegangenen Seite. Wir benötigen noch ein paar weitere Eigenschaften des CG-Verfahrens. Sei dazu  $r \geq 1$  mit  $u_{r-1} \neq 0$ . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes (von  $\tilde{A}$ ,  $x_0$  und  $y_\epsilon$  abhängiges) Polynom  $g_r \in \Pi_{r-1}$  mit  $x_r = s_r(\tilde{A})x_0 + g_r(\tilde{A})Py_\epsilon$ . Hier ist  $s_r(t) = 1 - tg_r(t)$ .

Es gilt  $s_r \in \Pi_r$  und  $s_r$  hat Nullstellen  $(t_{k,r})_{k=1, \dots, r}$  mit  $0 < t_{1,r} < t_{2,r} < \dots < t_{r,r} \leq a$ . Weiter ist  $S_r := g_r(0) = \sum_{k=1}^r t_{k,r}^{-1}$ .

Wegen  $S_1 = \alpha_0$  sowie

$$S_r = \left(1 + \frac{\alpha_{r-1}\beta_{r-2}}{\alpha_{r-2}}\right)S_{r-1} - \frac{\alpha_{r-1}\beta_{r-2}}{\alpha_{r-2}}S_{r-2} + \alpha_{r-1}$$

für  $r > 1$  (nur für diese Rekursionsformel sei  $S_0 = 0$ ) läßt sich  $S_r$  leicht berechnen. Sei jetzt  $S_0 = a^{-1}$ . Wir wollen nun das Abbruchkriterium für das CG-Verfahren angeben.

**Stopregel.** Es gelte die Voraussetzung 6.3. Weiter sei  $(x_r)_{r \in \mathbb{N}_0}$  durch das CG-Verfahren erzeugt. Sei  $d > 1$ .

1. Wenn  $\omega_0 \leq d\epsilon$  oder  $u_0 = 0$ , so stoppe man das Verfahren mit  $\bar{r} = 0$  und wähle  $\bar{x} = x_0$  als Näherung.
2. Seien nun  $\omega_0 > d\epsilon$  und  $u_0 \neq 0$ . Man stoppe das Verfahren mit  $\bar{r}$ , wenn  $\omega_{\bar{r}} \leq d\epsilon$  oder  $\xi^{-1} \leq S_{\bar{r}}$  oder  $u_{\bar{r}} = 0$ . Dann nehme man als Näherung

$$\bar{x} = \begin{cases} x_{\bar{r}-1}, & \text{wenn } \xi^{-1} \leq S_{\bar{r}}, \\ x_{\bar{r}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt der folgende Satz.

**Satz 6.4** *Es gelte die Voraussetzung 6.3 und die weiteren Notationen aus Sektion 6.2. Die Approximation  $\bar{x}$  sei entsprechend der eben angegebenen Regel gewählt worden. Dann gilt mit einer nur von  $p$  abhängigen Konstanten  $e_p$*

$$\|x_* - \bar{x}\| \leq e_p((\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho\xi^{\min\{p,1\}}).$$

## 7 Numerische Realisierungen

Die nun folgenden Beispiele sind Fredholmsche Integralgleichungen der 1. Art auf  $[0,1]$ ,

$$Ax(t) := \int_0^1 k(t,s)x(s) ds = y(t),$$

wobei  $k \in L^2([0,1]^2)$  und  $x, y \in L^2([0,1])$ . Hier ist  $L^2([0,1])$  der Raum der quadratintegrablen Funktionen auf  $[0,1]$ . Es gilt dann  $A \in L_s(L^2([0,1]))$  mit

$$\|A\|^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^2 ds dt.$$

$A$  ist ein kompakter Operator.

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $P_h$  die orthogonale Projektion auf den  $(n+1)$ -dimensionalen Raum der stetigen Funktionen, die auf  $[ih, (i+1)h]$  linear sind für alle  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $h = \frac{1}{n}$ . Weiter sei  $Q_h = P_h$ . Um die Theorie überprüfen zu können, benötigen wir noch eine Abschätzung für  $\|A(I - P_h)\|$ . Dazu dienen die beiden folgenden Lemmata. Das erste folgt leicht mit Satz 6.2 in Graf Finck von Finckenstein[10].

**Lemma 7.1** *Sei  $A \in L_s(L^2([0, 1]))$  ein Integraloperator mit  $R(A^*) \subset H^2([0, 1]) = \{y \in C^1([0, 1]) : y' \text{ ist absolutstetig, } y'' \in L^2([0, 1])\}$ , so daß  $D^2 \circ A^* \in L_s(L^2([0, 1]))$ .  $D$  sei hier der Differentiationsoperator. Weiter sei  $P_h$  die Orthogonalprojektion auf den Raum der stetigen Funktionen, die auf  $[ih, (i+1)h]$  linear sind für alle  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $h = \frac{1}{n}$ . Dann gilt*

$$\|A(I - P_h)\| \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \|D^2 \circ A^*\|.$$

Um Lemma 7.1 anwenden zu können, müssen wir für  $y \in L^2([0, 1])$  die Funktion  $(A^*y)''$  berechnen. Das nächste Lemma gibt an, wie dies bei nichtdifferenzierbarem Kern zu tun ist. Den einfachen Beweis findet man zum Beispiel in Walter[43], Paragraph 26.

**Lemma 7.2** Sei  $k \in C([0, 1])$ . Weiter sei für festes  $s \in [0, 1]$   $k(\cdot, s)|_{\{t \in [0, 1] : t \leq s\}} \in C^2(\{t \in [0, 1] : t \leq s\})$  und  $k(\cdot, s)|_{\{t \in [0, 1] : t \geq s\}} \in C^2(\{t \in [0, 1] : t \geq s\})$ . A sei der Integraloperator mit Kern  $k$ . Für jedes  $x \in L_2([0, 1])$  ist dann  $Ax$  zweimal differenzierbar, es gilt für  $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} (Ax)'(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} k(t, s) x(s) ds, \\ (Ax)''(t) &= \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} k(t, s) x(s) ds \\ &\quad + x(t) \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial t} k(t, t-h) - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial t} k(t, t+h) \right). \end{aligned}$$

Wir erläutern jetzt die Diskretisierung, beschreiben anschließend, welche Verfahren getestet werden und gehen danach darauf ein, wie die Daten gestört werden und wie die Ergebnisse der Kapitel 4, 5 und 6 numerisch überprüft werden.

1. Zunächst gehen wir auf die grundlegenden Matrizen und den Vektor ein (siehe (2.8) beziehungsweise (6.7)), die bei allen Verfahren benötigt werden. Für  $h^{-1} = n = 2^k$ ,  $k = 2, 3, 4, 5, 6$ , seien  $P_h$  und  $Q_h$  wie eingangs dieses Kapitels beschrieben. Wir verwenden immer die Standardbasis von  $R(P_h) = R(Q_h)$  (siehe Prenter[32] oder Graf Finck von Finckenstein[10]). Es gilt dann  $G_\Phi = G_\Psi$  mit

$$G_\Phi = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $B$  und der Vektor  $z$  werden mit Quadraturformeln exakt berechnet. Dies ist bei unseren Beispielen möglich. Bei schwierigeren Problemen ist dies jedoch unter Umständen nicht möglich. Dort

auftretende Fehler sind in dieser Arbeit ebensowenig berücksichtigt wie Rundungsfehler.

**2.** Wir untersuchen das Verfahren von Tikhonov beziehungsweise das verallgemeinerte Verfahren von Lavrentiev im selbstadjungierten Fall. Die (einfache) Methode von Lavrentiev wird nicht betrachtet; sie erfüllt wegen  $p_0 = 1$  in Bedingung (2.1) die Voraussetzungen des Satzes 6.2 nicht. Weiter werden die Iterationverfahren von Landweber und Fakeev-Lardy sowie die Methode der konjugierten Gradienten untersucht. Dabei nehmen wir als Anfangsnäherung immer  $x_{an} = 0$ .

**3.** Wir gehen jetzt auf die Störung der Daten ein. Dazu sei jetzt die Gleichung und das Verfahren (Tikhonov, CG etc.) fest gewählt. Wir setzen für  $h^{-1} = n = 2^k$ ,  $k = 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $\epsilon_h := \xi_h$ . Für jedes  $n$  wird  $y$  zufällig zwanzig mal gestört, wobei für die gestörten Daten  $y_{\epsilon_h}$  immer  $\|Ax_* - y_{\epsilon_h}\| \leq \epsilon_h$  gilt. Sei nun  $e_h := \max \|x_* - \bar{x}\|$  der maximale aufgetretene Fehler, den man nach Anwendung des Diskrepanzprinzips erhält.  $x_*$  bezeichnet hier bei der jeweiligen Gleichung die Lösung mit minimaler Norm und  $\bar{x}$  die durch das jeweilige Diskrepanzprinzip erhaltene Näherung an  $x_*$ . Für  $x_* \in R(|A|^p)$  lassen dann die Ergebnisse der Kapitel 4, 5 und 6 bei der oben angegebenen Wahl von  $\epsilon_h$  die Konvergenzordnung  $e_h = O(\epsilon_h^{\frac{p}{p+1}})$  für  $h \rightarrow 0$  erwarten.

Zur besseren Illustration wird zudem  $\epsilon - \% := 100 \frac{\epsilon_h}{\|Ax_*\|}$  berechnet.

Wir stellen nun die Ergebnisse der einzelnen Verfahren dar, die mit PASCAL-Programmen auf einer MICRO - VAX erzielt wurden. Es ist noch zu erwähnen, daß in allen Beispielen das Verfahren abgebrochen wurde, weil der Defekt klein genug geworden war. Die Nebenbedingung  $r \leq \xi_h^{-2}$  (beziehungsweise  $r \leq \xi_h^{-1}$  im selbstadjungierten Fall) bei den linearen Verfahren und die entsprechende Nebenbedingung beim CG-Verfahren kam also nicht zum Tragen.

**Beispiel 7.3** Sei  $A$  der Integraloperator mit Kern

$$k(t, s) = \begin{cases} t(1 - s), & \text{wenn } t \leq s, \\ s(1 - t), & \text{wenn } t > s. \end{cases}$$

Mit Lemma 7.2 folgt, daß für  $x, y \in L^2([0, 1])$   $Ax = y$  genau dann gilt, wenn  $y \in H^2([0, 1])$ ,  $y(0) = 0 = y(1)$  und  $y'' = -x$ . (Eigentlich ist der Weg gewöhnlich der Umgekehrte: Zu einem Anfangs- oder Randwertproblem konstruiert man die Greensche Funktion  $k$  und damit den Operator  $A$ .) Weiter gilt  $N(A) = \{0\}$  und  $A = A^* \geq 0$ , es lassen sich also die in Kapitel 6 gewonnenen Resultate anwenden. Mit Lemma 7.1 folgt  $\|A(I - P_h)\| \leq (\frac{h}{\pi})^2$ .

Zur Berechnung einer Konvergenzordnung müssen wir  $R(A^p)$  kennen. Nun, wenn  $(\sigma_k, x_k, x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Singulärwertzerlegung von  $A$  ist, so gilt  $x_* \in R(A^p)$  genau dann, wenn  $x_* \in N(A)^\perp$  und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-2p} \langle x, x_k \rangle^2 < \infty$$

gilt (siehe Louis[21]).

In diesem Beispiel hat der Operator  $A$  die Singulärwertzerlegung  $((\pi k)^{-2}, x_k, x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_k(s) = \sqrt{2} \sin(k\pi s)$ ,  $s \in [0, 1]$  (siehe Courant und Hilbert[4]), es gilt also insbesondere  $\|A\| = \pi^{-2}$ . Es sollen im folgenden zwei Gleichungen mit dieser Abbildung  $A$  untersucht werden.

**a)** Sei zuerst  $x_*(s) = s$ ,  $s \in [0, 1]$ . Es ist  $\|x_*\| \approx 0.577$  und  $x_* \in R(P_h)$  für alle  $h = n^{-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt  $x_* \in R(A^p)$  für alle  $p < \frac{1}{4}$ , wie mit der oben angegebenen Singulärwertzerlegung leicht eingesehen werden kann. Mit  $\epsilon_h = \xi_h = (\frac{h}{\pi})^2$  läßt die Theorie also  $e_h = O(\xi_h^u)$  ( $h \rightarrow 0$ ) für alle  $u < 0.2$  erwarten.

**(i) Die verallgemeinerte Methode von Lavrentiev.** Hier wird Gleichung (6.4) gelöst mit  $q = 1$  und  $r_n = \theta^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Es wird abgebrochen entsprechend Regel 2 in Kapitel 4 mit  $d = 2$ , wobei dort wieder  $Q_h$  durch  $P_h$  ersetzt und  $r_{\max}$  gleich  $[\xi_h] + 1$  gesetzt wird. Hier die Ergebnisse, die die Theorie bestätigen. Dabei geben wir für jedes  $h$  den kleinsten unter den 20 Störungen auftretenden Parameter  $\gamma = r^{-1}$  an, mit dem abgebrochen wurde.

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-0.2}$	$\gamma_{\min}$	$\epsilon - \%$
4	0.3580	0.99	0.0404	13.765
8	0.2766	1.00	0.0138	3.441
16	0.1940	0.93	0.0047	0.860
32	0.1478	0.93	0.0016	0.215
64	0.1126	0.94	0.0006	0.054

(ii) **Die Methode der sukzessiven Approximation** (siehe (6.5)). Wir wählen hier  $\mu = 10 \leq 2\pi^2$ . Das Iterationsverfahren wird wieder entsprechend Regel 2 mit  $d = 2$  abgebrochen. Dabei geben wir für jedes  $h$  den größten unter den 20 Störungen auftretenden Iterationsschritt  $r$  an, mit dem abgebrochen wurde.

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-0.2}$	$r_{\max}$
4	0.3175	0.87	2
8	0.2586	0.94	4
16	0.1982	0.95	12
32	0.1497	0.95	34
64	0.1137	0.95	101

(iii) **Das implizite Verfahren** (siehe (6.6)). Wir wählen hier  $\mu = 0.01$ . Die Matrix in Gleichung (6.8) ist symmetrisch und positiv definit, sie wird daher einmalig mit dem Choleskyverfahren zerlegt. Das Iterationsverfahren wird wieder entsprechend Regel 2 mit  $d = 2$  abgebrochen.

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-0.2}$	$r_{\max}$
4	0.5226	1.44	2
8	0.2841	1.03	3
16	0.1732	0.83	6
32	0.1216	0.77	15
64	0.0890	0.74	43

(iv) **Die Methode der konjugierten Gradienten** (siehe Abschnitt 6.2 mit  $d = 2$ ).

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-0.2}$	$r_{\max}$
4	0.3309	0.91	1
8	0.2385	0.87	2
16	0.1772	0.85	3
32	0.1409	0.89	4
64	0.1033	0.86	7

Die Methode der konjugierten Gradienten ist wegen der Konvergenzgeschwindigkeit (siehe die letzte Spalte der Tabellen der Iterationsverfahren) wohl das beste Verfahren.

b) Wir wollen innerhalb des Beispiels 7.3 noch eine Gleichung mit anderer rechter Seite betrachten. Sei  $x_*(s) = s - s^3$ ,  $s \in [0, 1]$ .

Es gilt  $\|x_*\| \approx 0.276$  und  $x_* \in R(A^p)$  für alle  $p < \frac{5}{4}$ , mit  $\epsilon_h = \xi_h = (\frac{h}{\pi})^2$  läßt die Theorie also  $e_h = O(\xi_h^u)$  für alle  $u < \frac{5}{9}$  (im Falle des verallgemeinerten Verfahrens von Lavrentiev nur  $e_h = O(\xi_h)$ ) für  $h \rightarrow 0$  erwarten.

Die folgende Tabelle gibt die bestmögliche Approximation von  $x_*$  durch Elemente von  $R(P_h)$  an.

$n$	4	8	16	32	64
$\ (I - P_h)x_*\ $	0.01283	0.00319	0.00080	0.00020	0.00005
$\ (I - P_h)x_*\ /\xi_h$	2.025	2.018	2.016	2.016	2.016

Die einzelnen Verfahren werden hier nicht mehr erläutert; es gelten die in a) gemachten Bemerkungen.

(i) **Die verallgemeinerte Methode von Lavrentiev.**

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-\frac{5}{9}}$	$\gamma_{\min}$	$\epsilon - \%$
4	0.1218	1.53	0.0824	22.827
8	0.0352	0.88	0.0282	5.707
16	0.0135	0.68	0.0138	1.427
32	0.0055	0.55	0.0068	0.357
64	0.0022	0.45	0.0033	0.089

(ii) **Die Methode der sukzessiven Approximation.**

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-\frac{5}{9}}$	$r_{\max}$
4	0.0610	1.01	2
8	0.0290	1.04	2
16	0.0225	1.74	3
32	0.0799	1.34	7
64	0.0040	1.44	13

(iii) **Das implizite Verfahren.**

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-\frac{5}{9}}$	$r_{\max}$
4	0.3829	6.37	2
8	0.1243	4.47	2
16	0.0431	3.35	3
32	0.0152	2.54	4
64	0.0047	1.70	5

(iv) **Die Methode der konjugierten Gradienten.**

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-\frac{5}{9}}$	$r_{\max}$
4	0.0437	0.73	1
8	0.0314	1.13	1
16	0.0283	2.20	1
32	0.0067	1.13	2
64	0.0025	0.92	3

An einem Beispiel sollen die Ergebnisse graphisch erläutert werden. Wir betrachten wieder die Funktion in b) und wenden das Verfahren von Landweber an auf gestörte Daten ( $\epsilon - \% = 3$ ).

Im ersten Diagramm sehen wir das Ergebnis, wenn entsprechend dem Diskrepanzprinzip abgebrochen wird (die Parameter  $\mu$  und  $d$  sind die weiter oben angegebenen). Hier ist die Schrittweite  $h = n^{-1} = \frac{1}{64}$  und  $r = 2$ , das heißt, es wurde nach 2 Schritten abgebrochen.

## **Diagramm 1**

(Diagramm existiert nicht mehr; RP, 10.11.2003)

Im nächsten Diagramm ist das Ergebnis dargestellt, das man erhält, wenn man nach 10 Schritten abbricht.

## **Diagramm 2**

(Diagramm existiert nicht mehr; RP, 10.11.2003)

Im nächsten Diagramm ist das Ergebnis dargestellt, das man erhält, wenn man nach 20 Schritten abbricht.

### Diagramm 3

(Diagramm existiert nicht mehr; RP, 10.11.2003)

Soviel nun zu diesem ersten Beispiel. Wir wollen nun noch einen Integraloperator betrachten, der nicht selbstadjungiert ist.

**Beispiel 7.4** Sei  $A$  der Integraloperator mit Kern

$$k(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t \leq s, \\ t - s, & \text{wenn } t > s. \end{cases}$$

Mit Lemma 7.2 folgt, daß  $Ax = y$  genau dann gilt, wenn  $y \in H^2([0, 1])$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$  und  $y'' = x$ . Weiter gilt  $N(A) = \{0\}$ . Es lassen sich die in den Kapiteln 4 und 5 gewonnenen Resultate anwenden. Mit Lemma 7.1 folgt  $\|A(I - P_h)\| \leq (\frac{h}{\pi})^2$ .

Sei  $x_*(s) = (s - 1)^2$ ,  $s \in [0, 1]$ . Dann gilt  $\|x_*\| \approx 0.447$  und  $x_* \in R(A^*) = R(|A|)$ , mit  $\epsilon_h = \xi_h = (\frac{h}{\pi})^2$  läßt die Theorie also  $e_h = O(\xi_h^{0.5})$  für  $h \rightarrow 0$  erwarten.

Wieder geben wir die bestmögliche Approximation von  $x_*$  durch Elemente von  $R(P_h)$  an.

$n$	$\ (I - P_h)x_*\ $	$\ (I - P_h)x_*\ /\xi_h$
4	0.000828	0.13
8	0.000206	0.13
16	0.000052	0.13
32	0.000013	0.13
64	0.000003	0.13

Wieder werden die einzelnen Verfahren nicht mehr erläutert; es gelten im wesentlichen die in Beispiel 7.3 Teil a) gemachten Bemerkungen.

(i) **Die Methode von Tikhonov.** (siehe (2.4))

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-0.5}$	$\gamma_{\min}$	$\epsilon - \%$
4	0.0525	0.66	0.01384	9.997
8	0.0197	0.50	0.00332	2.499
16	0.0079	0.40	0.00080	0.625
32	0.0031	0.32	0.00019	0.156
64	0.0013	0.26	0.00005	0.039

(ii) **Die Methode der sukzessiven Approximation.** (siehe (2.6))

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-0.5}$	$r_{\max}$
4	0.0242	0.30	3
8	0.0199	0.50	3
16	0.0180	0.91	12
32	0.0056	0.57	78
64	0.0031	0.63	185

(iii) **Das implizite Verfahren.** (siehe (2.7))

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-0.5}$	$r_{\max}$
4	0.0369	0.46	1
8	0.0183	0.46	2
16	0.0124	0.62	3
32	0.0053	0.53	9
64	0.0031	0.62	20

(iv) **Die Methode der konjugierten Gradienten.** (Kapitel 5)

$n$	$e_h$	$e_h \xi_h^{-0.5}$	$r_{\max}$
4	0.0213	0.27	1
8	0.0200	0.50	1
16	0.0046	0.23	2
32	0.0040	0.41	2
64	0.0027	0.55	4

**Bemerkung.** Es lassen sich zur Lösung der Gleichung in Beispiel 7.4 einfachere Algorithmen in Erwägung ziehen, wie im folgenden begründet ist. Bei der dort angegebenen Abbildung handelt es sich um einen Volterraoperator. Da solche Operatoren  $A$  nicht selbstadjungiert sind, wenn der zugehörige Kern  $k$  nichttrivial ist, lassen sich die Ergebnisse aus Kapitel 6 nicht anwenden. Es gilt jedoch  $\sigma(A) = \{0\}$ , daher existiert  $(A + \gamma I)^{-1}$ , ist auf  $L^2([0, 1])$  definiert und stetig für alle  $\gamma \neq 0$ . Wenn nun die Abbildung  $A$  zusätzlichen Voraussetzungen genügt (etwa  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  für alle  $x \in X$ ), so gilt mit einem  $c \geq 0$  die Ungleichung  $\|(A + \gamma I)^{-1}\| \leq c\gamma^{-1}$  für  $\gamma > 0$ . Bei geeigneter a priori-Wahl von  $\gamma$  lassen sich dann Ergebnisse wie Konvergenz und Konvergenzraten nachweisen. Dies soll hier nicht weiter konkretisiert werden, das wäre ein Kapitel für sich. Ob man in diesem Fall auch bei den anderen Algorithmen (Landweber, Fakeev-Lardy) auf den Übergang zur Normalengleichung verzichten und die Algorithmen gleich auf die Gleichung  $Ax = y$  anwenden kann, ist offen.

## 8 Über die Optimalität von Regularisierungsverfahren

### 8.1 Eine Einführung

In diesem Abschnitt seien wieder  $X$  und  $Y$  reelle Hilberträume und  $A \in L_s(X, Y)$  mit nichtabgeschlossenem  $R(A)$ . Wir betrachten wieder die Gleichung (1.1). Ein Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß die Methode der konjugierten Gradienten zusammen mit der in Abschnitt 5 angegebenen Parameterwahl (bei genügend feiner Diskretisierung) ein Regularisierungsverfahren im Sinne der Definition 1.1 ist. Dabei meinen wir aus Bequemlichkeit in diesem Abschnitt ein Regularisierungsverfahren bezüglich Startvektor  $x_{an} = 0$ ; die Aussagen ließen sich jedoch leicht verallgemeinern.

Zur Erinnerung: In Abschnitt 5 erhielten wir Fehlerabschätzungen, falls für die Lösung von (1.1) mit minimaler Norm  $x_*$  gilt  $x_* \in R(|A|^p)$  für ein  $p > 0$  gilt. Unklar ist jedoch noch der Fall  $x_* \in N(A)^\perp \setminus \bigcup_{p>0} R(|A|^p)$ .

Dieser Fall soll in einer allgemeineren Form in Abschnitt 8.2 behandelt werden. Dabei benötigen wir den Begriff der Optimalität, der in verschiedenen Arbeiten in aller Ausführlichkeit diskutiert wird. Wir wollen diesen Begriff zunächst erklären. Sei dazu  $M \subset X$  und  $\epsilon > 0$  beliebig. Den "besten schlimmstmöglichen Fehler"  $E(M, \epsilon)$  definieren wir durch

$$E(M, \epsilon) = \inf_{\mathcal{R}: Y \rightarrow X} \sup \{ \|x_* - \mathcal{R}y_\epsilon\| : x_* \in M, y_\epsilon \in Y, \|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon \}.$$

Wir betrachten im folgenden immer den Spezialfall (siehe Definition 4.1)  $M = M_{p,\rho}$ .  $E(M_{p,\rho}, \epsilon)$  wird in Ivanov und Korolyuk[15] (diese Arbeit ist auch in Morozov[23] zu finden) für kompakte Operatoren  $A$  berechnet, später in Ivanov[14] auch für beliebige  $A \in L_s(X, Y)$ . Wir wollen daraus ein Teilergebnis zitieren: Es gilt

$$E(M_{p,\rho}, \epsilon) \leq (\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}$$

für alle  $p, \rho$  und  $\epsilon > 0$ , und diese Abschätzung ist scharf bei festem  $p$ , denn es gilt  $E(M_{p,\rho}, \epsilon) = (\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}$  für alle  $\rho$  und  $\epsilon > 0$  mit  $(\frac{\epsilon}{\rho})^{\frac{1}{p+1}} \in \sigma(|A|) = \{ \lambda \in \mathbb{R} : |A| - \lambda I \text{ ist nicht stetig invertierbar auf } X \}$ .

Diese Eigenschaften veranlassen uns zu den folgenden Definitionen.

**Definition 8.1** *Seien  $A \in L_s(X, Y)$  mit nichtabgeschlossenem  $R(A)$  und  $\mathcal{R}_\epsilon : Y \rightarrow X$ ,  $\epsilon > 0$ , gegeben.  $(\mathcal{R}_\epsilon)_{\epsilon>0}$  heißt ordnungsoptimal bezüglich  $p > 0$  (und  $A$ ), wenn es eine Konstante  $c_p$  gibt, so daß für jedes  $\rho, \epsilon > 0$ ,  $x_* \in M_{p,\rho}$  und jedes  $y_\epsilon \in Y$  mit  $\|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon$  gilt*

$$\|x_* - \mathcal{R}_\epsilon y_\epsilon\| \leq c_p (\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Für  $\xi_h = \eta_h = 0$  in den Abschnitten 4, 5 und 6 liefern die angegebenen Diskrepanzprinzipien (nicht jedoch die a priori-Parameterwahlverfahren) ordnungsoptimale Verfahren im Sinne der Definition 8.1. Berücksichtigt man jedoch die Diskretisierung, so erhält man bei noch so kleiner Wahl von  $h$ , so daß  $A(I - P_h) \neq 0$  ( $P_h$  wie gehabt) gilt, kein ordnungsoptimales Verfahren im Sinne der Definition 8.1. Dies liegt daran, daß alle Approximationen  $x_{app}$  in  $R(P_h)$  liegen (unabhängig

von dem konkreten Verfahren und dem gewählten Parameter), somit gilt für  $p > 0$

$$\sup_{x_* \in M_{p,\rho}} \inf_{x_{app} \in R(P_h)} \|x_* - x_{app}\| = \|(I - P_h)|A|^p\| \rho.$$

Es gibt jedoch kein  $c > 0$  mit  $\rho \leq c(\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}$  für jedes  $\rho, \epsilon \geq 0$ .

Aber es ist leicht einzusehen, daß man mit den in den Kapiteln 4 bis 6 angegebenen Verfahren bei einer Wahl von  $h_\epsilon$ , so daß  $\xi_{h_\epsilon} + \eta_{h_\epsilon} \leq \epsilon$  gilt, schwach ordnungsoptimale Verfahren erhält im folgenden Sinne.

**Definition 8.2** Seien  $A \in L_s(X, Y)$  mit nichtabgeschlossenem Bildraum  $R(A)$  und  $\mathcal{R}_\epsilon : Y \rightarrow X$ ,  $\epsilon > 0$ , gegeben.  $(\mathcal{R}_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  heißt schwach ordnungsoptimal bezüglich  $p > 0$  (und  $A$ ), wenn es für jedes  $x_* \in R(|A|^p)$  und jedes  $\epsilon_0 > 0$  eine Konstante  $c$  gibt, so daß für jedes  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$  und jedes  $y_\epsilon \in Y$  mit  $\|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon$  gilt

$$\|x_* - \mathcal{R}_\epsilon y_\epsilon\| \leq c\epsilon^{\frac{p}{p+1}}.$$

Leicht einzusehen ist, daß ordnungsoptimale Verfahrenen auch schwach ordnungsoptimal sind. Die schwache Ordnungsoptimalität genügt jedoch nicht zum Beweis des Hauptresultats im Abschnitt 8.2, dort wird die (starke) Ordnungsoptimalität benötigt.

Eine weitere Diskussion der Optimalität findet man zum Beispiel in Ivanov, Vasin und Tanana[16], Vainikko und Veretennikov[42], Vainikko[40] oder Louis[21], wir wollen daher diesen Begriff nicht weiter erläutern. Nun kommen wir zu dem Hauptresultat dieses Kapitels, welches auch in Plato[28] zu finden ist.

## 8.2 Das Hauptresultat

Ein Teilergebnis des folgenden Satzes ist, daß ein bezüglich  $p > 0$  ordnungsoptimales Verfahren (dies liefert im schlechtgestellten Fall  $R(A) \neq \overline{R(A)}$  Fehlerabschätzungen für Elemente  $x_*$  einer echten Teilmenge von  $N(A)^\perp$ ) mit einer kleinen Modifikation schon ein Regularisierungsverfahren ist (dies liefert eine Konvergenzaussage für alle  $x_* \in N(A)^\perp$ ).

**Satz 8.3** Sei  $A \in L_s(X, Y)$  mit nichtabgeschlossenem  $R(A)$ . Weiter seien  $\mathcal{R}_\epsilon : Y \rightarrow X$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $p_0 > 0$  und  $\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon = \mathcal{R}_{b\epsilon}$  mit einer Konstanten  $b > 1$  gegeben. Wenn  $(\mathcal{R}_\epsilon)_{\epsilon>0}$  ordnungsoptimal bezüglich  $p_0$  ist, so ist  $(\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon)_{\epsilon>0}$  ordnungsoptimal bezüglich  $p$  für jedes  $0 < p \leq p_0$  und außerdem ein Regularisierungsverfahren (siehe Definition 1.1) für  $A$  und Anfangsnäherung  $x_{an} = 0$ .

*Beweis.* Sei  $b > 1$ . Wir werden beweisen, daß  $(\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon)_{\epsilon>0}$  erstens ordnungsoptimal bezüglich  $0 < p \leq p_0$  ist unter der zusätzlichen Voraussetzung  $p_0 - 2 \leq p$  und zweitens ein Regularisierungsverfahren ist, falls  $p_0 \leq 2$ . Die allgemeine Behauptung des Satzes folgt dann induktiv.

Zunächst soll nun die fundamentale Beweisidee präsentiert werden. Sei dazu  $x_* \in R(|A|^{p_0-2})$ , falls  $2 < p_0$ , beziehungsweise  $x_* \in N(A)^\perp$ , falls  $p_0 \leq 2$ . Wir werden im folgenden eine Familie von "genügend glatten" Elementen  $(x_\epsilon)_{\epsilon>0}$  konstruieren, die nahe genug bei  $x_*$  liegen. Dies soll noch weiter konkretisiert werden. Wir suchen nach einer Familie  $(x_\epsilon)_{\epsilon>0} \subset R(|A|^{p_0})$  mit

$$x_\epsilon = |A|^{p_0} z_\epsilon \quad \text{mit} \quad \|z_\epsilon\| \leq \rho_\epsilon, \quad (8.1)$$

$$\|A(x_* - x_\epsilon)\| \leq (b-1)\epsilon. \quad (8.2)$$

Im Fall  $p_0 \leq 2$  fordern wir

$$x_\epsilon \rightarrow x_* \quad (\epsilon \rightarrow 0), \quad (8.3)$$

$$\rho_\epsilon \epsilon^{p_0} \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0). \quad (8.4)$$

Weiterhin soll im Fall  $x_* \in M_{p,\rho}$ ,  $0 < p \leq p_0 \leq p+2$ , folgendes gelten:

$$(\rho_\epsilon \epsilon^{p_0})^{\frac{1}{p_0+1}} \leq C_1 (\rho \epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}, \quad (8.5)$$

$$\|x_* - x_\epsilon\| \leq C_2 (\rho \epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (8.6)$$

Hier sind  $C_1$  und  $C_2$  Konstanten, die von  $p$  abhängen.

Wir nehmen für den Moment an, daß diese Familie, die im übrigen unabhängig sowohl von gestörten Daten als auch von dem Verfahren  $(\mathcal{R}_\epsilon)_{\epsilon>0}$  ist, bereits konstruiert ist. Nun folgt für beliebiges  $y_\epsilon \in Y$

mit  $\|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon$  aus (8.2) die Ungleichung  $\|Ax_\epsilon - y_\epsilon\| \leq b\epsilon$ , (8.1) liefert

$$\begin{aligned} & \sup_{y_\epsilon \in Y, \|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon} \|x_* - \mathcal{R}_{b\epsilon} y_\epsilon\| \\ & \leq \|x_* - x_\epsilon\| + \sup_{y_\epsilon \in Y, \|Ax_\epsilon - y_\epsilon\| \leq b\epsilon} \|x_\epsilon - \mathcal{R}_{b\epsilon} y_\epsilon\| \\ & \leq \|x_* - x_\epsilon\| + b^{\frac{p_0}{p_0+1}} c_{p_0} (\rho_\epsilon \epsilon^{p_0})^{\frac{1}{p_0+1}}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Für  $p_0 \leq 2$  folgt mit (8.3) und (8.4) aus der letzten Ungleichung (8.7)

$$\sup_{y_\epsilon \in Y, \|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon} \|x_* - \mathcal{R}_{b\epsilon} y_\epsilon\| \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

Wenn  $x_* \in M_{p,\rho}$  ( $p_0 - 2 \leq p \leq p_0$ ,  $\rho \geq 0$ ), so folgt aus (8.5), (8.6) und (8.7)

$$\sup_{y_\epsilon \in Y, \|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon} \|x_* - \mathcal{R}_{b\epsilon} y_\epsilon\| \leq (C_2 + C_1 b^{\frac{p_0}{p_0+1}} c_{p_0}) (\rho \epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}}$$

und wir wären fertig.

Es soll jetzt die Familie  $(x_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  konstruiert werden. Dazu verwenden wir Funktionen  $g_r : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , wie sie auch schon in den Kapiteln 4 und 6 benutzt wurden. Wir setzen voraus, daß  $g_r$  der Bedingung (2.1) mit  $p_0 = \infty$  und der Bedingung (6.2) genügt:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq a} |1 - t g_r(t)| t^p & \leq \gamma_p r^{-p}, \quad 0 \leq p, \quad r > 0, \\ \sup_{0 \leq t \leq a} |g_r(t)| & \leq \gamma r, \quad r \geq 0. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\sup_{0 \leq t \leq a} t^q |g_r(t)| \leq \beta_q r^{1-q}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq q \leq 1. \quad (8.8)$$

Hier ist  $a = \|A\|^2$  und  $\beta_q$  eine Konstante. Für jedes  $y_\delta \in Y$  erzeugen diese Funktionen eine Familie  $(x_r(y_\delta))_{r \geq 0}$ , die definiert sei durch  $x_r(y_\delta) = g_r(A^* A) A^* y_\delta$ . Sei nun  $k > 1$  konstant. Wenn  $(g_r)_{r \geq 0}$  die

oben genannten Bedingungen erfüllt und außerdem  $|1 - tg_r(t)|$  monoton fallend in  $r$  ist für jedes  $t \geq 0$ , so folgt mit Satz 4.4, daß für festes  $x \in N(A)^\perp$  und jedes  $y_\delta \in Y$  mit  $\|Ax - y_\delta\| \leq \delta$  ein  $r(\delta, y_\delta) \geq 0$  mit

$$\|Ax_{r(\delta, y_\delta)}(y_\delta) - y_\delta\| \leq k\delta, \quad (8.9)$$

$$x_{r(\delta, y_\delta)}(y_\delta) \rightarrow x \quad (\delta \rightarrow 0) \quad \text{und} \quad r(\delta, y_\delta)^{\frac{1}{2}}\delta \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0), \quad (8.10)$$

existiert. Dabei ist die zweite Konvergenzaussage in (8.10) nicht Teil der Aussage des Satzes 4.4, sondern Folgerung aus dem Beweis von Satz 4.4. Falls weiter  $x \in M_{p, \rho}$ , so gilt

$$\|x - x_{r(\delta, y_\delta)}(y_\delta)\| \leq C_3(\rho\epsilon^p)^{\frac{1}{p+1}} \quad \text{und} \quad r(\delta, y_\delta) \leq C_4\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{-\frac{2}{p+1}}. \quad (8.11)$$

Hier sind  $C_3$  und  $C_4$  Konstanten, die nur von  $p$  abhängen. Analog zu (8.10) ist die zweite Abschätzung in (8.11) nicht Teil der Aussage des Satzes 4.4, sondern Folgerung aus dem Beweis von Satz 4.4.

Wir wenden dies nun an mit  $x = x_*$ ,  $\delta_\epsilon = \frac{b-1}{k}\epsilon$  und  $y_{\delta_\epsilon} = Ax_*$ . Daher gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $r_\epsilon = r(\delta_\epsilon, Ax_*)$ , so daß für  $x_\epsilon = x_{r_\epsilon}(Ax_*)$  die Bedingungen (8.2), (8.3) und

$$r_\epsilon^{\frac{1}{2}}\epsilon \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (8.12)$$

gelten. Wenn  $x_* \in M_{p, \rho}$ , so gilt weiterhin (8.6) und

$$r_\epsilon \leq C_5\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{-\frac{2}{p+1}}. \quad (8.13)$$

Hier ist  $C_5$  eine Konstante. Dies folgt mit (8.9), (8.10) und (8.11). Für die so konstruierte Familie  $(x_\epsilon)_{\epsilon>0}$  verbleibt unter den entsprechenden Voraussetzungen noch (8.1), (8.4) und (8.5) zu zeigen.

Zunächst zum Beweis von (8.5), was ja dann Ordnungsoptimalität bezüglich  $p$  nach sich zieht. Dazu nehmen wir wieder  $x_* \in M_{p, \rho}$  an für  $p_0 - 2 \leq p \leq p_0$ , das heißt, es gilt  $x_* = |A|^p z$  mit einem  $z \in X$ ,  $\|z\| \leq \rho$ . Es gilt dann  $x_\epsilon = g_{r_\epsilon}(A^*A)A^*A|A|^p z = |A|^{p_0} z_\epsilon$  mit  $z_\epsilon = g_{r_\epsilon}(A^*A)(A^*A)^{1+\frac{p-p_0}{2}} z$ , daher (siehe (8.8))

$$\rho_\epsilon := \|z_\epsilon\| \leq \|g_{r_\epsilon}(A^*A)(A^*A)^{1+\frac{p-p_0}{2}}\| \|z\| \leq \beta_{1+\frac{p-p_0}{2}} \rho r_\epsilon^{\frac{p_0-p}{2}}. \quad (8.14)$$

Mit (8.13) und  $C_6 := \beta_{1+\frac{p-p_0}{2}} C_5^{\frac{p_0-p}{2}}$  erhalten wir die Ungleichung  $\rho_\epsilon \leq C_6(\rho^{p_0+1}\epsilon^{p-p_0})^{\frac{1}{p+1}}$ , also

$$\rho_\epsilon \epsilon^{p_0} \leq C_6 \rho^{\frac{p_0+1}{p+1}} \epsilon^{\frac{p-p_0}{p+1}+p_0} = C_6 \rho^{\frac{p_0+1}{p+1}} \epsilon^{p\frac{p_0+1}{p+1}} = C_6(\rho\epsilon^p)^{\frac{p_0+1}{p+1}}.$$

Also ist (8.5) gezeigt und  $(\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon)_{\epsilon>0}$  ist ordnungsoptimal für jedes  $p > 0$  mit  $p_0 - 2 \leq p \leq p_0$ .

Nun bleibt nur noch zu zeigen, daß im Falle  $p_0 \leq 2$  (8.4) gilt (woraus ja dann folgt, daß  $(\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon)_{\epsilon>0}$  ein Regularisierungsverfahren ist). Nun gilt aber (siehe (8.12) und (8.14) mit  $p = 0$ )  $\rho_\epsilon \leq \|x_*\| \beta_{1-\frac{p_0}{2}} r_\epsilon^{\frac{p_0}{2}}$ , daher  $\rho_\epsilon \epsilon^{p_0} \leq \|x_*\| \beta_{1-\frac{p_0}{2}} (r_\epsilon^{\frac{1}{2}} \epsilon)^{p_0} \rightarrow 0$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), und wir sind fertig.  $\square$

Satz 8.3 zeigt, daß das CG-Verfahren mit dem Abbruchkriterium in Kapitel 5 (beziehungsweise Kapitel 6 im selbstadjungierten Fall) im "klassischen" Fall  $\xi_h = \eta_h = 0$  und mit Startwert  $x_{an} = 0$  ein Regularisierungsverfahren definiert. Dies löst ein offenes Problem, siehe Bertero[3] oder Bakushinskii und Trushnikov[2]. Wir möchten abschließend die Diskretisierung berücksichtigen.

**Korollar 8.4** *Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in Satz 5.2 (beziehungsweise Satz 6.4 im selbstadjungierten Fall), wobei  $x_{an} = 0$  sei. Weiter sei für  $\epsilon > 0$   $h_\epsilon$  so gewählt, daß  $\xi_{h_\epsilon} + \eta_{h_\epsilon} \leq \epsilon$ . Die in den entsprechenden Kapiteln angegebene Parameterwahl definiert dann ein Verfahren  $(\mathcal{R}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ . Für  $b > 1$  definieren wir  $\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon = \mathcal{R}_{b\epsilon}$ . Dann ist  $(\tilde{\mathcal{R}}_\epsilon)_{\epsilon>0}$  ein Regularisierungsverfahren (bezüglich  $x_{an} = 0$ ).*

*Beweis.* Die Sätze 5.2 (beziehungsweise Satz 6.4 im selbstadjungierten Fall) zeigen, daß

$$\|x_* - \mathcal{R}_\epsilon y_\epsilon\| \leq c_{p_0} ((\rho\epsilon^{p_0})^{\frac{1}{p_0+1}} + \rho\epsilon^{p_0})$$

für jedes  $\rho, \epsilon \geq 0, 0 < p_0 \leq 1, x_* \in M_{p_0,\rho}$  und jedes  $y_\epsilon \in Y$  mit  $\|Ax_* - y_\epsilon\| \leq \epsilon$  gilt. Damit erfüllt zwar  $(\mathcal{R}_\epsilon)_\epsilon$  die Voraussetzungen des Satzes 8.3 nicht. Im Beweis des Satzes wirkt sich das zuerst in Abschätzung (8.7) aus. Dort muß "( $\rho\epsilon^{p_0}$ ) $^{\frac{1}{p_0+1}}$ " durch "( $\rho\epsilon^{p_0}$ ) $^{\frac{1}{p_0+1}} + \rho\epsilon^{p_0}$ " ersetzt

werden. Da jedoch die Aussage (8.4) ihre Gültigkeit behält, das heißt,  $\rho_\epsilon \epsilon^{p_0} \rightarrow 0$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) weiterhin gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung** In der Aussage des Korollars wäre auch der Fall  $b = 1$  zulässig. Dies liegt daran, daß bei dem Diskrepanzprinzip für das CG-Verfahren (auch bei den anderen Verfahren, um die es hier aber nicht geht) die Schranke für den Defekt immer  $k\epsilon$  ist mit einer Konstanten  $k$ , die größer ist als 1.

## Literaturverzeichnis

1. Anselone, P.M.: Collectively compact operator approximation theory, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall 1971
2. Bakushinskii, A.B., und Trushnikov, V.N.: Coarsened methods of conjugate directions, U.S.S.R. Comp. Maths. Math. Phys. 27 No.6, 105-109 (1987)
3. Bertero, M.: Regularization methods for linear inverse problems. In G. Talenti (ed.), Inverse Problems, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1986
4. Courant, R., und Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik 1, Berlin: Springer 1968
5. Eicke, B., Louis, A.K., und Plato, R.: The instability of some gradient methods for ill-posed problems. Eingereicht
6. Engl, H.W., und Gfrerer, H.: A posteriori parameter choice for generalized regularization methods for solving linear ill-posed problems. Applied Numerical Mathematics 4, 395-417 (1988)
7. Gilyazov, S.F.: Regularizing algorithms based on the conjugate-gradient method. U.S.S.R. Comp. Maths. Math. Phys. 26 No.1, 8-13 (1986)
8. Gilyazov, S.F.: Methoden zur Lösung schlecht gestellter Probleme (in russisch), Moskau: Nauka 1986
9. Gfrerer, H.: An a-posteriori parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. Math. Comp. 49, 507-522, S5-S12 (1987)
10. Graf Finck von Finckenstein, K.: Einführung in die numerische Mathematik, Band 1, München Wien: Carl Hanser Verlag 1977
11. Groetsch, C.W.: The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind, Boston: Pitman 1984

12. Hämarik, U.A.: Das Diskrepanzprinzip zur Wahl der Dimension bei der Lösung schlecht gestellter Probleme durch Projektionsverfahren (in russisch). Uch. Zap. Tartu Gos. Univ. 672, 27-34 (1984)
13. Ivanov, V.K.: Approximate solution of operator equations of the first kind. U.S.S.R. Comp. Maths. Math. Phys. 6 No. 6, 197-205 (1966)
14. Ivanov, V.K.: On estimation of the stability of quasi-solutions on noncompact sets. Iz. VUZ. Mat. 18 No. 5, 97-103 (1974)
15. Ivanov, V.K., und Korolyuk, T.I.: Error estimates for solutions of incorrectly posed linear problems. U.S.S.R. Comp. Maths. Math. Phys. 9 No. 3, 35-49 (1969)
16. Ivanov, V.K., Vasin, V.V., und Tanana, V.P.: Die Theorie der linearen schlecht gestellten Probleme (in russisch), Moskau: Nauka 1978
17. Kato, T.: Continuity of the map  $S \mapsto |S|$  for linear operators. Proc. Japan Acad. 49, 157-160 (1973)
18. King, J.T., und Neubauer, A.: A variant of finite-dimensional Tikhonov regularization with a-posteriori parameter choice. Computing 40, 91-109 (1988)
19. Krasnoselski, M. et al: Integral operators in spaces of summable functions, Leydem: Noordhoff Int. Publ. 1976
20. Landweber, L.: An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. Amer. J. Math. 73, 615-624 (1951)
21. Louis, A.K.: Inverse und schlecht gestellte Probleme, Stuttgart: Teubner 1989
22. Morozov, V.A.: On the solution of functional equations by the method of regularization. Soviet Math. Doklady 7, 414-417 (1966)

23. Morozov, V.A.: Methods for solving incorrectly posed problems, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag 1984
24. Natterer, F.: Regularisierung schlecht gestellter Probleme durch Projektionsverfahren. Numer. Math. 28 No. 3, 511-522 (1977)
25. Nemirovskii, A.S.: The regularizing properties of the adjoint gradient method in ill-posed problems. U.S.S.R. Comp. Maths. Math. Phys. 26 No.2, 7-16 (1986)
26. Neubauer, A.: An a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization in the presence of modeling error. Applied Numerical Mathematics 4, 507-519 (1988)
27. Phillips, T.: A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. Journal of the ACM 9, 84-97 (1962)
28. Plato, R.: Optimal algorithms for linear ill-posed problems yield regularization methods. Erscheint in der Zeitschrift Numerical Functional Analysis and Optimization
29. Plato, R.: Discretization and regularization of ill-posed problems. Eingereicht
30. Plato, R., und Vainikko, G.M: On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems. Numer. Math. 57, 63-79 (1990)
31. Plato, R., und Vainikko, G.M: On the regularization of the Ritz-Galerkin method for solving ill-posed problems. Uch. Zap. Tartu Gos. Univ. 863, 3-18 (1989)
32. Prenter, P.M.: Splines and variational methods, Pure and applied mathematics, New York: John Wiley and Sons 1975
33. Raus, T.: Über das Diskrepanzprinzip zur Lösung schlecht gestellter Probleme (in russisch). Uch. Zap. Tartu Gos. Univ. 672, 16-26 (1984)

34. Raus, T.: Über das Diskrepanzprinzip zur Lösung schlecht gestellter Probleme mit nichtselbstadjungiertem Operator (in russisch). Uch. Zap. Tartu Gos. Univ. 715, 12-20 (1985)
35. Seidman, T.I.: Nonconvergence results for the application of least-squares estimation to ill-posed problems. J. Optimiz. Th. Appl. 30, 535-547 (1980)
36. Tikhonov, A.N.: Regularization of incorrectly posed problems. Soviet Math. Doklady 4, 1624-1627 (1963)
37. Tikhonov, A.N., und Arsenin, V.Y.: Solutions of ill-posed problems, New York Toronto London: John Wiley and Sons 1977
38. Vainikko, G.M.: The discrepancy principle for a class of regularization methods. U.S.S.R. Comp. Maths. Math. Phys. 22 No. 3, 1-19 (1982)
39. Vainikko, G.M.: The critical level of discrepancy in regularization methods. U.S.S.R. Comp. Maths. Math. Phys. 23 No. 6, 1-9 (1983)
40. Vainikko, G.M.: On the optimality of regularization methods, in H.W. Engl and C.W. Groetsch (eds.) Proc. of the Alpine-U.S. Seminar on Inverse and Ill-Posed Problems, Academic Press, Boston 1986
41. Vainikko, G.M., und Hämarik, U.A.: Projection methods and self-regularization in ill-posed problems. Iz. VUZ. Mat. 29 No. 10, 1-17 (1985)
42. Vainikko, G.M., und Veretennikov, A.Yu.: Iterationsverfahren zur Lösung schlecht gestellter Probleme (in russisch), Moskau: Nauka 1986
43. Walter, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag 1976
44. Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen, Stuttgart: Teubner 1976