Vorkurs Mathematik für Bauingenieure

Dr. Theo Overhagen
Fachbereich 6 Mathematik
Universität Siegen

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkung

In folgendem Kurs sollen die für die Hochschul-Mathematik-Ausbildung für Bauingenieure wichtigen Bestandteile der Schulmathematik wiederholt werden. Dazu gehören z.B. die Fähigkeiten, mit Mitteln der Bruch- und Potenzrechnung und der binomischen Formeln Ausdrücke umzuformen und zu vereinfachen, lineare und quadratische Gleichungen zu lösen und die Eigenschaften von Funktionsgraphen zu untersuchen. Weiter werden die wichtigsten elementaren Funktionen wie Polynome, gebrochen rationale Funktionen, Exponentialfunktion, Logarithmus sowie die trigonometrischen Funktionen (am Einheitskreis) eingeführt.

Das Skript soll einen Überblick über den dabei behandelten Stoff geben. Als Literatur kann jedes gängige Mathematik-Buch für die gymnasiale Oberstufe oder z.B. Teile von *Schäfer/Georgi: Mathematik-Vorkurs, Teubner-Verlag* hinzugezogen werden.

2 Die reellen Zahlen

2.1 Die verschiedenen Zahlenmengen

Während der Schulzeit werden allmählich - ausgehend von den natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ - die verschiedenen Mengen der positiven rationalen, der ganzen, der rationalen und der reellen Zahlen eingeführt. Man kann diese Zahlenmengen sehr gut auf der *Zahlengeraden* anschaulich darstellen, indem man jede dieser Zahlen umkehrbar eindeutig einem Punkt einer festen Geraden zuordnet.

Zum Zählen genügen die

$$\textbf{natürlichen Zahlen} \qquad 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

zu denen man noch die Null dazu nehmen kann.

Die Menge der natürlichen Zahlen wird i.a. mit $\mathbb{N}$ (ohne die Null bzw. mit $\mathbb{N}_0$ mit der Null) bezeichnet.

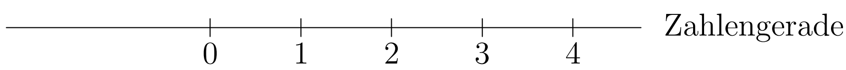
Sie wird in der Mathematik durch die *Peano-Axiome* charakterisiert, die im wesentlichen ausdrücken, daß es

- eine kleinste natürliche Zahl 1 gibt,
- daß man durch Weiterzählen die nächste natürliche Zahl erhält, und zwar eindeutig,
- daß keine natürliche Zahl zwei verschiedene Zahlen als „Vorgänger“ hat,
- und daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, da der Prozeß des Weiterzählens nicht aufhört.

Aus dem Zählprozeß kann man die **Addition** und die **Multiplikation** herleiten, die jeweils zwei natürlichen Zahlen, den **Summanden** bzw. **Faktoren**, auf eindeutige Weise eine dritte Zahl zuordnet, nämlich die **Summe** bzw. das **Produkt**.

Weiter sind die natürlichen Zahlen durch den Zählprozeß **vollständig geordnet**: Eine natürliche Zahl a heißt **kleiner** als b, wenn a beim Zählen vor b auftritt. Bezeichnung: $a < b$.

Die Null wird einem (beliebigen) festen Punkt der Zahlengeraden zugeordnet. Bei waagrechter Anordnung der Zahlengeraden wird der 1 ein weiterer Punkt rechts von der Null zugeordnet und dann die weiteren Zahlen in der Reihenfolge des Weiterzählens rechts von der 1 im gleichen Abstand.



Ist c die Summe von a und b (d.h. $a + b = c$), dann nennt man b auch **Differenz** von c und a (Schreibweise $b = c - a$). Die Differenz zweier beliebiger natürlicher Zahlen x und y existiert aber nur dann (in $\mathbb{N}$), wenn $x > y$ gilt (bzw. in $\mathbb{N}_0$, wenn $x \geq y$).

Um auch in den anderen Fällen die Differenz angeben zu können, erweitert man $\mathbb{N}$ um die *negativen ganzen Zahlen* zur

Menge der **ganzen Zahlen** $\quad \mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ldots\}$.

Dabei definiert man die Differenz z der natürlichen Zahlen x und y mit $x < y$ durch $z := -(y-x)$. Weiter legt man Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$ so fest, daß die entsprechenden Rechenregeln wie in $\mathbb{N}_0$ gelten.

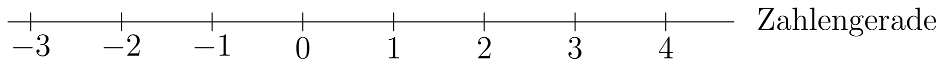
Durch die Erweiterung von $\mathbb{N}_0$ um die negativen ganzen Zahlen auf $\mathbb{Z}$ hat man erreicht, daß die Gleichung

$$a + x = b$$

für jede beliebige Wahl von a und b aus $\mathbb{Z}$ eine Lösung x in $\mathbb{Z}$ hat. x ist durch a und b eindeutig festgelegt, aber umgekehrt gilt das nicht. Z.B. gilt

$$4 + (-3) = 1, \qquad 5 + (-3) = 2, \qquad 6 + (-3) = 3 \qquad \text{usw.}$$

Anschaulich stellt man die negativen ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden durch Spiegelung der natürlichen Zahlen am Nullpunkt dar, d.h. z.B. -3 symmetrisch zu 3.



Wie der Wunsch nach uneingeschränkter Subtraktion (als Umkehrung der Addition) zu der Erweiterung auf $\mathbb{Z}$ führt die Division als Umkehrung der Multiplikation zu der Menge der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$.

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ hat die Gleichung

$$a \cdot x = b$$

genau dann eine Lösung x in $\mathbb{Z}$, wenn b ganzzahliges Vielfaches von a ist, d.h. wenn die Division $b : a$ „aufgeht“. Man kann also x auch durch das geordnete Zahlenpaar (b, a) darstellen.

Wieder ist x durch das Zahlenpaar eindeutig bestimmt, aber zu verschiedenen Zahlenpaaren kann dasselbe x gehören. Z.B. gehört zu den Zahlenpaaren $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(6, 3)$ die Zahl 2.

Man erkennt leicht, daß zu einem Zahlenpaar $(b, 0)$ keine Zahl gehört, denn für $b \neq 0$ ist die Gleichung

$$0 \cdot x = b$$

für kein x lösbar, und für $b = 0$ ist jede Zahl Lösung.

Weiter gehört zu zwei solchen Zahlenpaaren (b, a) und (d, c) genau dann die gleiche Zahl, wenn

$$b \cdot c = a \cdot d$$

gilt.

Wir erweitern nun $\mathbb{Z}$ zu der

Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$,

indem wir alle geordneten Zahlenpaare (b, a) mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, betrachten und zwei solcher Zahlenpaare als gleich ansehen, wenn die obige Beziehung gilt. Wir stellen die rationale Zahl, die zu dem Zahlenpaar (b, a) gehört, wie üblich in der Form $\dfrac{b}{a}$ (d.h. als *Bruch* mit *Zähler* b und *Nenner* a) dar.

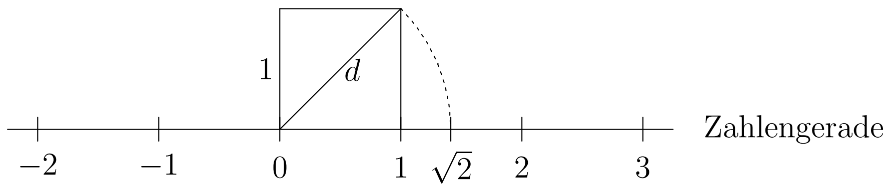
Beschränkt man sich auf Paare, bei denen Zähler und Nenner teilerfremd sind und der Nenner positiv ist, dann gibt es zu jeder rationalen Zahl genau ein solches Paar, und den ganzen Zahlen entsprechen die Paare mit Nenner 1.

Für rationale Zahlen ist auch eine gemischte Darstellung als ganze Zahl plus Bruch kleiner 1 üblich, z.B. $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Da diese Darstellung leicht mit dem Produkt $2 \cdot \frac{2}{3}$, vor allem bei Weglassen des Multiplikationspunktes, verwechselt werden kann, sollte man diese Darstellung möglichst vermeiden.

Man kann die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden einordnen, aber nicht in ihrer Gesamtheit darstellen, denn sie liegen auf der Zahlengeraden dicht, d.h. in jedem noch so kleinem Intervall auf der Zahlengeraden liegt mindestens eine rationale Zahl (und damit unendlich viele). (Z.B. ist für je zwei rationale Zahlen das arithmetische Mittel wieder rational und liegt auf der Zahlengeraden genau in der Mitte.)

Da für zwei rationale Zahlen in Bruchdarstellung nicht sofort erkennbar ist, welche die größere ist, ist auch die Darstellung durch **Dezimalbrüche** üblich. Die Menge der rationalen Zahlen entspricht dann der Menge der endlichen und unendlichen periodischen Dezimalbrüche.

Mit Hilfe der (positiven) rationalen Zahlen kann man die Länge jeder beliebigen Strecke beliebig genau angeben. Aber es gibt Strecken, deren Länge nicht genau durch eine rationale Zahl angegeben werden kann, z.B. die Länge der Diagonalen eines Quadrates mit Kantenlänge 1.



Die Zahl, die diese Diagonallängen darstellt, müßte nach dem Satz des Pythagoras Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

sein, und die Lösung ist innerhalb $\mathbb{Q}$ nicht möglich. Aus der Anschauung folgt, daß x zwischen 1 und 2 liegen muß, und man erhält z.B. durch Probieren genauere untere und obere Schranken, insgesamt z.B. eine **Intervallschachtelung** der Form

$$\begin{aligned} 1 &< x < 2 \\ 1,4 &< x < 1,5 \\ 1,41 &< x < 1,42 \\ 1,414 &< x < 1,415 \\ 1,4142 &< x < 1,4143 \\ &\vdots \\ 1,414213562 &< x < 1,414213563 \\ &\vdots \end{aligned} \quad .$$

Man erweitert wieder die Menge der rationalen Zahlen so, daß jedem Punkt der Zahlengeraden genau eine rationale oder neue Zahl entspricht. Die neuen Zahlen heißen **irrational**.

Man kann sie z.B. durch die Intervallschachtelungen mit rationalen Intervallgrenzen beschreiben, wobei zwei Intervallschachtelungen, die sich auf denselben Punkt zusammenziehen, als gleichwertig angesehen werden. Die neue Zahlenmenge, die alle rationalen und irrationalen Zahlen enthält, heißt

Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Zur genauen Untersuchung der unterschiedlichen Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ benötigt man den Grenzwertbegriff.

Auch jede reelle Zahl läßt sich als Dezimalbruch darstellen, wobei die irrationalen Zahlen genau den unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüchen entsprechen.

Auch nach Einführung der reellen Zahlen ist nicht jede Gleichung lösbar. Da (wie man leicht überlegt) das Quadrat keiner reellen Zahl negativ sein darf, kann die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

keine reelle Zahl als Lösung haben. Um Probleme dieser Art zu lösen, erweitert man $\mathbb{R}$ zur Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Übungen

(1) In welchen Zahlenbereichen sind für die Zahlen a und b die vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) ausführbar?

(a) $a = 8, \quad b = 2$ (b) $a = 5, \quad b = 8$

(c) $a = 7, \quad b = 0$ (d) $a = -6, \quad b = 1$

(2) Geben Sie an, welche der Zahlen a und b die größere ist!

(a) $a = \frac{13}{17}, \quad b = \frac{169}{289}$ (b) $a = \frac{11}{21}, \quad b = \frac{121}{231}$

(c) $a = \frac{888}{901}, \quad b = \frac{896}{911}$ (d) $a = -\frac{13}{12}, \quad b = -\frac{143}{130}$

(3) Geben Sie den Wert folgender irrationaler Zahlen durch Intervallschachtelung näherungsweise auf mindestens 5 Stellen hinter dem Komma genau an!

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{18}$ (c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2.2 Rechenregeln

Im folgenden werden die wesentlichen Regeln für die vier Grundrechenarten in $\mathbb{R}$ zusammengefaßt.

2.2.1 Anordnung

(1) Zwischen je zwei reellen Zahlen a und b besteht genau eine der Beziehungen $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

(2) Die Ordnungsrelation ist transitiv, d.h. aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

2.2.2 Addition und Subtraktion

(1) Zu je zwei reellen Zahlen a und b existiert stets eindeutig die Summe $a+b$ und die Differenz $a-b$ in $\mathbb{R}$.

(2) Man kann Summanden vertauschen, d.h. es gilt $a+b = b+a$. (Kommutativgesetz)

(3) Die Reihenfolge der Summationen bei mehreren Summanden ist für das Ergebnis unwichtig, d.h. es gilt $a + (b+c) = (a+b) + c$. (Assoziativgesetz)

(4) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$. (Monotoniegesetz)
Aus $a < b$ und $c < d$ folgt damit $a + c < b + d$. Man kann also gleichartige Ungleichungen addieren.

(5) Die Subtraktion von a und b ist gleichbedeutend mit der Addition von a und $-b$, d.h. es gilt $a - b = a + (-b)$. Weiter gilt $-(-a) = a$.

(6) Die Subtraktion ist weder kommutativ noch assoziativ.
Steht vor einer Summe oder Differenz in Klammern ein $+$, dann kann man die Klammern weglassen. Steht davor ein $-$, dann muß man bei Weglassen der Klammern die Vorzeichen der einzelnen Ausdrücke oder Zahlen innerhalb der Klammer umkehren.

(7) Summen mit vielen Summanden werden oft in der Form $\displaystyle\sum_{n=l}^{k} a_n$ dargestellt. Dabei bedeutet a_n einen Summanden, der von dem „Summationsindex“ n abhängt, und n „durchläuft“ alle natürlichen Zahlen von l bis k.

Beispiele: $\sum_{n=1}^{5} n = 1+2+3+4+5, \qquad \sum_{n=4}^{7} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49}.$

Aus der Kommutativität und der Assoziativität der Addition folgt sofort

$$\sum_{n=l}^{k} a_n + \sum_{n=l}^{k} b_n = \sum_{n=l}^{k} (a_n + b_n).$$

Um zwei Summen auf diese Weise zusammenzufassen, müssen für die Summationsindizes jeweils Anfangs- und Endwert übereinstimmen. Stimmt die Anzahl der Summanden überein, dann läßt sich das durch Austausch eines der Summationsindizes erreichen, ansonsten spaltet man bei der einen Summe eine geeignete Anzahl von Summanden ab.

Übungen

(1) Lösen Sie folgende Klammern auf:

(a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$ (b) $5a + \Big(7c - (2a - 3b)\Big) - (4c - a + b)$

(2) Schreiben Sie ausführlich ohne Summenzeichen:

(a) $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{(n+1)^2}$ (b) $\sum_{k=0}^{6} 3^k$ (c) $\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{i+1}$ (d) $\sum_{m=1}^{n} 1^m$ (e) $\sum_{n=2}^{2} n^2$

(3) Schreiben Sie folgende Summen mit dem Summenzeichen:

(a) $\frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{9} + \frac{16}{16} + \ldots + \frac{512}{81}$ (b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{200}$

(c) $a^{10} + a^9 b + a^8 b^2 + \ldots + b^{10}$

(4) Zeigen Sie durch ausführliches Hinschreiben: $\sum_{i=l}^{m} a_i = \sum_{j=l+p}^{m+p} a_{j-p} = \sum_{k=l-q}^{m-q} a_{k+q}.$

(5) Fassen Sie $s = \sum_{k=3}^{35} 2^{k-1} + \sum_{j=0}^{32} 2^{j+1} + \sum_{i=1}^{33} 2^i$ so weit wie möglich zu einer Summe zusammen.

2.2.3 Multiplikation

(1) Zu je zwei reellen Zahlen a und b existiert stets eindeutig das Produkt $a \cdot b$ (oder kurz ab) in $\mathbb{R}$.

(2) Man kann Faktoren vertauschen, d.h. es gilt $ab = ba$. (Kommutativgesetz)

(3) Die Reihenfolge der Multiplikationen bei mehreren Faktoren ist für das Ergebnis unwichtig, d.h. es gilt $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. (Assoziativgesetz)

(4) Um unnötige Klammernsetzung zu vermeiden, legt man fest, daß Multiplikation immer vor Addition erfolgen muß („Punktrechnung vor Strichrechnung").
Für beliebige reelle a, b, c gilt $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. (Distributivgesetz)
Damit folgt $c \cdot \sum_{n=l}^{k} a_n = \sum_{n=l}^{k} (c \cdot a_n)$.

(5) Zwei jeweils durch Klammern zusammengefaßte Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der 1. Summe mit jedem Summanden der 2. Summe multipliziert.
Als Spezialfall erhält man die binomischen Formeln

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

(6) Ein Produkt reeller Zahlen ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, d.h.
$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$. (Nullteilerfreiheit)

(7) Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$. (Monotoniegesetz)
Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl dreht das Ungleichungszeichen um, d.h. aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$.
Speziell folgt: Ein Produkt zweier Faktoren ist genau dann positiv, wenn die Faktoren beide positiv oder beide negativ sind, und negativ, wenn einer positiv und der andere negativ ist.
Vorsicht: Man darf Ungleichungen nicht ohne weiteres miteinander multiplizieren!

(8) Produkte mit vielen Faktoren werden analog zu den Summen in der Form $\prod_{n=l}^{k} a_n$ dargestellt.
Beispiele: $\prod_{n=1}^{5} n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$.

Übungen

(1) Lösen Sie folgende Klammern auf:

(a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$ (b) $(a+b)(c-d) - (a-b)(c+d)$

(c) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$ (d) $(a + b - c - d)^2$

(2) Formen Sie folgende Ausdrücke mittels quadratischer Ergänzung um:

(a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$ (b) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\, a + 2\sqrt{6}\, b = 0$

(3) Zerlegen Sie folgende Ausdrücke in Faktoren:

(a) $a^2 + 2ab + b^2$ (b) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$ (c) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

2.2.4 Division und Bruchrechnung

Der Begriff des Bruchs war ursprünglich nur für die Darstellung rationaler Zahlen durch ganzzahlige Zähler und Nenner definiert. Man kann ihn aber auch als Darstellung des Ergebnisses einer Division von reellen Zahlen oder von allgemeinen Ausdrücken auffassen. Damit werden auch Brüche sinnvoll, deren Zähler oder Nenner wieder Brüche sind. Allerdings muß bei diesen Mehrfachbrüchen der Hauptbruchstrich deutlich erkennbar sein, denn es gilt z.B. $\dfrac{3}{\frac{2}{5}} \neq \dfrac{\frac{3}{2}}{5}$.

(1) Es sind nur Brüche zulässig, bei denen der Nenner nicht Null ist.

(2) Man kann jeden Bruch mit einer Zahl ungleich Null **erweitern**, d.h. Zähler und Nenner mit dieser Zahl multiplizieren, sowie **kürzen**, d.h. Zähler und Nenner mit dieser Zahl dividieren, ohne den Wert des Bruches zu verändern, d.h.

$$\text{für alle} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad b,c,d \neq 0 \quad \text{gilt} \quad \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{\frac{a}{d}}{\frac{b}{d}}.$$

Man kürzt i.a., um die Darstellung des Bruches zu vereinfachen. Es müssen aber sowohl der Zähler als auch der Nenner vollständig dividiert werden. Brüche, deren Zähler und Nenner aus Summen von Ausdrücken bestehen, können nur gekürzt werden, wenn aus Zähler und Nenner gleiche Faktoren ausgeklammert werden können.

(3) Brüche mit verschiedenen Nennern kann man nicht direkt addieren. Vor einer **Addition** müssen die Brüche „gleichnamig“ gemacht werden, d.h. so erweitert werden, daß sie gleiche Nenner haben. Anschließend werden die Zähler addiert. Der kleinste gemeinsame Nenner heißt **Hauptnenner**.

Beispiele: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{77}{60}, \qquad \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{e}{f} = \dfrac{adf + cbf + ebd}{bdf}.$

Um das Ergebnis nicht unnötig kompliziert darzustellen, erweitert man mit möglichst kleinen Zahlen bzw. Ausdrücken.

(4) Brüche werden miteinander **multipliziert**, indem man jeweils die Zähler und Nenner multipliziert, d.h.

$$\text{für} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad b,d \neq 0 \quad \text{gilt} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Um unnötigen Rechenaufwand zu sparen, ist es oft sinnvoll, vor dem Ausmultiplizieren des neuen Zählers bzw. Nenners zu kürzen.

(5) Zu jeder reellen Zahl $c \neq 0$ gibt es genau ein $d \in \mathbb{R}$ mit $c \cdot d = 1$.

d heißt **Inverse** von c bezüglich der Multiplikation oder **Kehrwert** von c und wird mit $\dfrac{1}{c}$ bezeichnet.

Division durch $c \neq 0$ ist gleichbedeutend mit der Multiplikation mit dem Kehrwert.

Man erhält den Kehrwert eines Bruches, indem man Zähler und Nenner vertauscht, und eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man die Zahl mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert, d.h.

$$\text{für} \quad a,b,c,d, \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad b,c,d \neq 0 \quad \text{gilt} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Übungen

(1) Vereinfachen Sie möglichst folgende Brüche:

(a) $\frac{6732}{20196}$ (b) $\frac{27a^2b - 63ab^2}{-18ab}$ (c) $\frac{3a^2 + 5ab + 2b^2}{3a + 3b}$ (d) $\frac{a^3 + b^3}{a + b}$

(e) $\frac{35ac - 50bc}{7a - 10b}$ (f) $\frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2}{ab(a + b)}$ (g) $\frac{(\frac{1}{9}a^2 + b^2 + \frac{2}{3}ab)(x^3 - 27y^3)}{(2b + \frac{2}{3}a)(x - 3y)}$ (h) $\frac{a - \sqrt{a}\, b}{b - \sqrt{a}}$

(2) Bestimmen Sie folgende Summen, Produkte und Quotienten:

(a) $\frac{14}{39} + \frac{4}{13} + \frac{5}{6} - \frac{19}{72}$ (b) $\frac{4c - 3a}{12ac} + \frac{5b - 2c}{10bc} - \frac{b^2 - c}{4b^2c} + \frac{4b^2 - 5a}{20ab^2} + \frac{2}{3a} + \frac{a - b}{5ab}$

(c) $\frac{a - 2}{a - 3} - \frac{a - 1}{a - 2}$ (d) $\frac{3a + b}{2a^2 + 2ab} - \frac{a^2 + b^2}{2a^2b + 2ab^2} + \frac{2a - 5b}{4ab + 4b^2}$

(e) $\frac{16a^4 - a^2}{24a^3 + 8a^2} \cdot \frac{36a^2 + 24a + 4}{4a + 1}$ (f) $\frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}}$

2.2.5 Potenzen und Wurzeln

Ursprünglich ist die Potenz einer reellen Zahl a als Abkürzung des n-fachen Produktes der **Basis** a mit sich selbst, also nur mit natürlichen Zahlen als **Exponenten**, definiert:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

Aus den folgenden Rechenregeln ergibt sich als weitere sinnvolle Festlegung die Definition der Potenzen mit Basis $a \neq 0$ und Exponenten 0 bzw. $z \in \mathbb{Z}$ mit $z < 0$:

$$a^0 := 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Aus der Definition folgt sofort:

(1) Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert (dividiert), indem man die Exponenten addiert (subtrahiert), d.h. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$.

(2) Potenzen mit verschiedener Basis und gleichem Exponenten werden multipliziert (dividiert), indem man die Basen multipliziert (dividiert), d.h. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

(3) Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert, d.h. $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Die Potenz eines Summenausdrucks kann i.a. nur durch fortgesetztes Ausmultiplizieren der Summen berechnet werden.

Sei a eine beliebige reelle Zahl, n eine natürliche Zahl und x die Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Da eine gerade Potenz einer reellen Zahl immer positiv ist, hat die Gleichung für gerades n und negatives a keine Lösung.

Für ungerades n hat sie grundsätzlich genau eine Lösung, für positives a und gerades n genau zwei Lösungen x_1 und x_2 mit $x_1 = -x_2$. Im 1. Fall bezeichnet man die Lösung und im 2. Fall die positive Lösung als ***n*-te Wurzel von *a***. Schreibweise: $\sqrt[n]{a}$. a heißt **Radikand** und n **Wurzelexponent**.

Bei Betrachtung der Potenzrechenregeln bietet sich die

Darstellung der n-ten Wurzel $\quad \sqrt[n]{a} \quad$ als Potenz der Form $\quad a^{\frac{1}{n}}$

an. Da die Regeln für das Rechnen mit Wurzeln vollständig denen für die Potenzen mit ganzzahligen Exponenten entsprechen, ist es sinnvoll, Wurzeln grundsätzlich in Potenzschreibweise darzustellen. Die m-te Potenz einer n-ten Wurzel (mit $m, n \in \mathbb{N}$) führt auf Potenzen mit rationalen Exponenten $\frac{m}{n}$ (wobei dann aber die Basis positiv vorausgesetzt werden muß). Mit Hilfe des Grenzübergangs kann man auch Potenzen mit reellen Exponenten definieren.

Für die folgenden Rechenregeln seien die Werte der reellen Zahlen $a, b, c, \ldots$ so, daß die Wurzeln definiert sind.

(1) Multiplikation bzw. Division von Wurzeln mit gleicher Basis:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}} \qquad \text{bzw.} \qquad a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}.$$

(2) Wurzeln mit gleichem Exponenten werden multipliziert (dividiert), indem man die Radikanden multipliziert (dividiert), d.h.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \text{bzw.} \qquad a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}.$$

(3) Die n-te Wurzel einer m-ten Wurzel von a wird berechnet, indem man die Exponenten multipliziert:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}.$$

(4) $\sqrt[n]{a \cdot c^n} = c \cdot \sqrt[n]{a} \qquad$ bzw. $\qquad (a \cdot c^n)^{\frac{1}{n}} = c \cdot a^{\frac{1}{n}}$.

(5) Die Wurzel eines Summenausdrucks kann i.a. nicht vereinfacht werden.

(6) Durch geeignetes Kürzen oder Erweitern kann man oft erreichen, daß im Nenner eines Bruches keine Wurzel vorkommt, was für viele Berechnungen nützlich ist.

Beispiel: $\quad \dfrac{5}{2\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{2}, \qquad \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}.$

Übungen

(1) Berechnen Sie folgende Wurzeln:

(a) $\sqrt{1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{(-2)^2}$, (b) $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{9+16}$, $\sqrt{9}+\sqrt{16}$,

(c) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$ (d) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

(2) Vereinfachen Sie:

(a) $\sqrt{\sqrt{81}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$, (c) $\frac{\sqrt[6]{a^5\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\sqrt[6]{a^4}}} : \frac{\sqrt{a^3\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\sqrt{a}}}$

(3) Formen Sie so um, daß im Nenner keine Wurzelausdrücke stehen:

(a) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{10}{3\sqrt{8}}$, $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$ (b) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$, $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(4) Vereinfachen Sie:

(a) $\sqrt{1-x}+\frac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$ (b) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\sqrt{x^2+a^2}}$

(c) $\sqrt{6x^2-6}\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ (d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2\,(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

2.2.6 Logarithmen

Wie bei der Einführung von Wurzeln geht man von einer Gleichung der Form

$$b^x = a$$

aus, nur nimmt man diesmal a und b als gegeben an, d.h. man sucht den Exponenten x, so daß zu einer vorgegebenen Basis b die entsprechende Potenz den Wert a annimmt. Da wir x zumindest als rational zulassen wollen, muß die Basis b und damit auch a als positiv vorausgesetzt werden.

Aus Monotonieüberlegungen und den Eigenschaften reeller Zahlen folgt, daß die Gleichung für jede Wahl von positiven a und $b \neq 1$ genau eine reelle Lösung x hat, die **Logarithmus von a zur Basis b** genannt wird. Bezeichnung: $\log_b a$.

Die Logarithmusberechnung ist also analog zur Wurzelberechnung eine Umkehrung der Potenzrechnung, und damit ergeben sich aus den Potenzrechenregeln entsprechende Regeln für den Logarithmus.

Für die folgenden Rechenregeln seien immer $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$.

(1) Für jedes b gilt $\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$.

(2) Der Logarithmus eines Produktes wird berechnet, indem man die Logarithmen der Faktoren addiert, d.h.

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y.$$

(Diese „Funktionalgleichung“ war Grundlage für den Rechenschieber.)

(3) Der Logarithmus eines Quotienten wird berechnet, indem man den Logarithmus des Nenners vom Logarithmus des Zählers subtrahiert, d.h.

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y.$$

(4) Der Logarithmus einer Potenz wird berechnet, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliziert, d.h.

$$log_b(x^y) = y \log_b x.$$

(5) Der Logarithmus einer n-ten Wurzel wird berechnet, indem man den Logarithmus des Radikanden mit dem Kehrwert des Wurzel-Exponenten multipliziert, d.h.

$$log_b \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \log_b x.$$

(6) Der Logarithmus eines Summenausdrucks kann i.a. nicht vereinfacht werden.

(7) Man kann Logarithmen zu einer Basis b in Logarithmus zu einer beliebigen anderen Basis $d > 0$ umrechnen, es gilt nämlich

$$\log_d a = (\log_b a) \cdot (\log_d b).$$

Daher beschränkt man sich auf die Berechnung von Logarithmen bezüglich zweier ausgewählter Basen, nämlich der Basis 10 (**dekadische Logarithmen**, Bezeichnung $\log_{10} a =: \lg a$) und der Basis $e = 2,71828182845\ldots$ (**natürliche Logarithmen**, Bezeichnung $\log_e a =: \ln a$).

Übungen

(1) Berechnen Sie:

(a) $\lg\sqrt{10}$ (b) $\lg \frac{0,1}{\sqrt{100}}$ (c) $\ln\sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$ (d) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$

(2) Bestimmen Sie x:

(a) $\log_7 49 = x$ (b) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ (c) $\log_3 1 = x$ (d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

(e) $\log_x 8 = 3$ (f) $\log_x 1024 = 10$ (g) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ (h) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

(i) $\lg x = -2$ (j) $\log_{0,5} x = 4$ (k) $\ln x = -\frac{1}{2}$ (l) $\log_{7,25834} x = 0$

(m) $x = 3 \cdot 10^{(-2\lg 3)}$ (n) $x = \left(\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right)^{\ln 8}$ (o) $x = \sqrt[3]{e^{\left(\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 32)\right)}}$

(3) Wenden Sie die Logarithmen-Rechenregeln an und geben Sie an, für welche Werte von a, b, c, d folgende Ausdrücke definiert sind:

(a) $\ln \sqrt[7]{a^5}$ (b) $\ln \dfrac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}$ (c) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ (d) $\ln \left(2 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}\right)$

(e) $\lg a + n\lg(a+b) + n\lg(a-b)$ (f) $\ln(a^2 - b^2) + \ln(a-b) - \ln(a+b)$

(g) $\dfrac{1}{3}(\ln a + 3\ln b) - \dfrac{1}{2}(4\ln c - 2\ln d)$ (h) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{b}{a} + \sqrt{\dfrac{b^2}{a^2} - 1}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{b - \sqrt{b^2 - a^2}} + \ln\sqrt{a}$

3 Geometrische Grundlagen, lineare und quadratische Gleichungen

3.1 Analytische Geometrie in der Ebene

Um geometrische Objekte in der Ebene beschreiben zu können, legt man in die Ebene ein *kartesisches (rechtwinkliges) Koordinatensystem* mit Ursprung, x- und y-Achse. Jeder Punkt der Ebene wird dann eindeutig beschrieben durch ein reelles Zahlenpaar (x, y).

(1) Die kürzeste Verbindung zweier Punkte mit Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist als geradlinige Verbindung die Strecke mit der Länge $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (Satz des Pythagoras).

(2) Die Geraden parallel zur y-Achse, die die x-Achse in $(x_1, 0)$ schneiden, haben die Darstellung $x \equiv x_1$.
Für die anderen Geraden ergeben sich folgende Darstellungen:

(a) Zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) sind bekannt:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{(Zwei-Punkte-Form)}$$

Die rechte Seite ergibt unabhängig von der Auswahl der beiden Punkte bei einer festen Geraden immer den gleichen Wert, die **Steigung** der Geraden. Für $x_1 < x_2$ heißt das rechtwinklige Dreieck mit den Ecken (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2) **Steigungsdreieck** der Geraden. Zwei parallele Geraden haben dieselbe Steigung. Für zwei zueinander senkrechte Geraden ist das Produkt ihrer Steigungen -1.

(b) Ein Punkt (x_1, y_1) und die Steigung m sind bekannt:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \qquad \text{(Punkt-Steigungs-Form)}$$

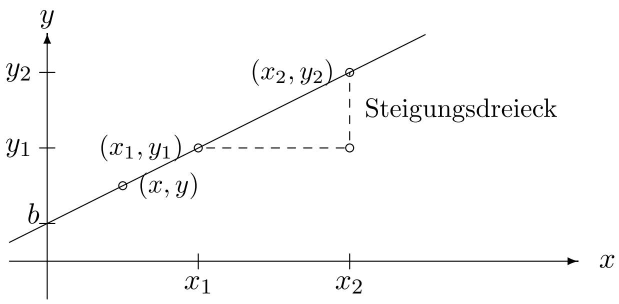
(c) Der Schnittpunkt $(0, b)$ mit der y-Achse und die Steigung m sind bekannt:

$$y = mx + b \qquad \text{(Normalform)}$$

Jede Gerade, auch eine Parallele zur y-Achse, läßt sich in der Form

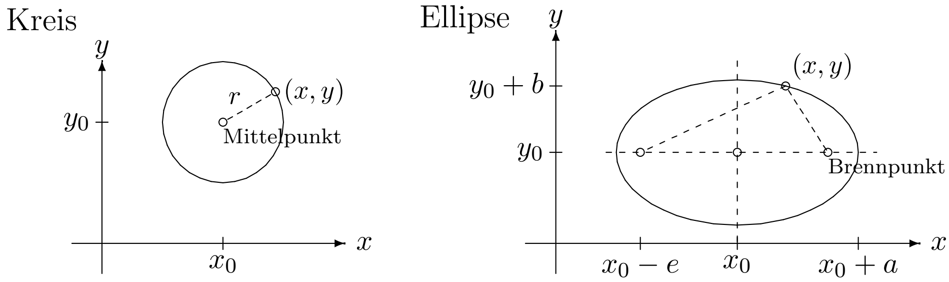
$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0, \qquad \text{(allgemeine Form)}$$

darstellen. Bei allen Darstellungen ist (x, y) immer die Koordinatendarstellung eines beliebigen Geradenpunktes, d.h. die Gerade ist z.B. die Menge $\{(x, y) |\, y = mx + b\}$.



(3) (a) Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt, dem **Mittelpunkt**, gleichen Abstand haben. Der Abstand heißt **Radius**. Liegt der Mittelpunkt in (x_0, y_0), dann hat der Kreis die Gleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad \text{(Mittelpunktsform der Kreisgleichung)}$$



(b) Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten, den **Brennpunkten**, die konstante Summe $2a$ haben. Der halbe Abstand $e < a$ der Brennpunkte heißt **lineare Exzentrität**, a **große Halbachse**, $b := \sqrt{a^2 - e^2}$ **kleine Halbachse**. Ist (x_0, y_0) der Mittelpunkt der Brennpunkte und liegen diese auf der Geraden $y = y_0$, dann hat die Ellipse die Gleichung

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(Mittelpunktsform der Ellipsengleichung).}$$

(x_0, y_0) heißt **Mittelpunkt** und die Punkte $(x_0 \pm a, y_0)$ **Hauptscheitel**, die Punkte $(x_0, y_0 \pm b)$ **Nebenscheitel** der Ellipse.

(c) Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten, den **Brennpunkten**, die konstante Differenz $2a$ haben. Der halbe Abstand $e > a$ der Brennpunkte heißt **lineare Exzentrität**. Sei nun $b := \sqrt{e^2 - a^2}$. Ist (x_0, y_0) der Mittelpunkt der Brennpunkte und liegen diese auf der Geraden $y = y_0$, dann hat die Hyperbel die Gleichung

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(Mittelpunktsform der Hyperbelgleichung).}$$

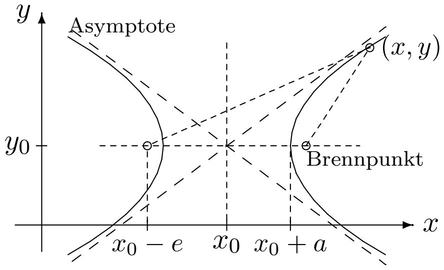
(x_0, y_0) heißt **Mittelpunkt** und die Punkte $(x_0 \pm a, y_0)$ **Hauptscheitel** der Hyperbel. Die Hyperbel ist nicht beschränkt und zerfällt in zwei zusammenhängende Kurven, die sich für wachsende und fallende x-Werte den Geraden durch den Mittelpunkt mit Steigung $\pm\frac{b}{a}$, den **Asymptoten**.

(d) Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, die sowohl von einer festen Geraden, der **Leitlinie**, als auch von einem festen Punkt, dem **Brennpunkt**, gleichen Abstand haben. Der Abstand von Brennpunkt und Leitlinie sei p. Ist die Gerade $y = y_0 - \frac{p}{2}$ die Leitlinie, $(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$ der Brennpunkt, dann hat die Parabel die Gleichung

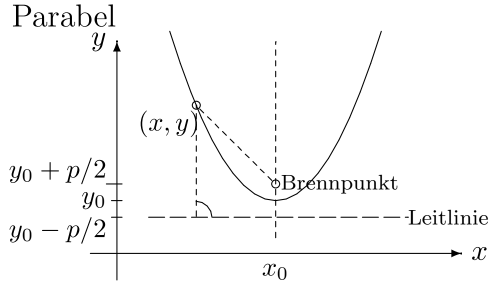
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \qquad \text{(Scheitelpunktsform der Parabelgleichung).}$$

(x_0, y_0) heißt **Scheitel** der Parabel.
Die Parabel ist ebenfalls nicht beschränkt. Sie ist eine zusammenhängende Kurve, die in der vorliegenden Scheitelpunktsform „nach oben geöffnet“ ist.

Hyperbel



Parabel



Schneidet man einen geraden Kreiskegel mit einer Ebene, dann ergibt sich je nach Lage der Ebene als Schnittkurve ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel. Diese Kurven heißen daher *Kegelschnitte*. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erhält man: Eine Menge von Punkten (x, y), deren Koordinaten einer festen Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0,$$

genügen, bildet einen Kegelschnitt.

Übungen

(1) Bestimmen Sie Länge folgender Strecken $\overline{P_1P_2}$, die Gleichung der Geraden durch P_1 und P_2 in Punkt-Steigungsform und Normalform sowie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen!

(a) $P_1 = (0; 0), P_2 = (2; 1)$, (b) $P_1 = (1; 0), P_2 = (-2; -4)$, (c) $P_1 = (2; 1), P_2 = (-3; -3)$.

(2) Bestimmen Sie die Gleichung der Senkrechten zur Geraden g durch P:

(a) $g : y = 2x - 2,\ P = (5; 3)$, (b) $g : 2x + 6 = 3y,\ P = (1, y_0)$.

(3) Im 1. Quadranten liegt ein Quadrat mit den zwei benachbarten Ecken $P_1 = (3; 0)$ und $P_2 = (0; 3)$. Bestimmen Sie die Seitenlänge des Quadrats, die Koordinaten der übrigen Eckpunkte und die Gleichungen aller Geraden durch je zwei Ecken (Seiten und Diagonalen) in Normalform.

(4) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden $x + y = 4$ mit

(a) $P = (1; 1)$ (b) $P = (-1; 1)$, (c) $P = (2; 4)$.

(5) Bestimmen Sie den Abstand der (parallelen) Geraden

(a) $4x + 3y + 10 = 0$ und $4x + 3y - 5 = 0$, (b) $y = 1 - x$ und $y + 1 = -x$.

(6) Geben Sie die Normalform der Geraden $y = 2x + 2$ in einem neuen Koordinatensystem an, dessen Ursprung im ursprünglichen System die Koordinaten $(-2; 1)$ hat.

(7) Bestimmen Sie Radius, Mittelpunkt und Mittelpunktsform der Kreise:

(a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = \dfrac{9}{2}$ (b) $2x^2 + 2y^2 - 32(x + y) + 208 = 0$ (c) $3x^2 + 3y^2 - 12x - y = 0$

(8) Bestimmen Sie für die folgenden Ellipsen Mittelpunkt, Halbachsen und Brennpunkte, bzw. für die Hyperbeln Mittelpunkt, Halbachsen, Brennpunkte und Asymptoten bzw. für die Parabeln Scheitelpunkt, Öffnungsrichtung und Halbparameter p sowie für alle die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

(a) $4x^2 + 12y^2 - 8x - 48y + 4 = 0$

(b) $16x^2 + 9y^2 + 96x - 72y + 144 = 0$

(c) $3x^2 + 5y^2 - 6x + 2y = 0$

(d) $x^2 + 3y^2 + 10x + 30y + 30 = 0$

(e) $y^2 - x^2 + 2x - 2y = 4$

(f) $4x^2 - 9y^2 - 24x = 0$

(g) $4y^2 - 3x^2 + 8y - 12x = 4$

(h) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 24y = 27$

(i) $y^2 - 3x - 4y + 1 = 0$

(j) $y^2 - 4x + 2y + 21 = 0$

(k) $y^2 + x + 9 = 0$

(l) $x^2 - 10x - 7y + 32 = 0$

(m) $x^2 - 6x + 4y + 17 = 0$

(n) $x^2 + 2y + 6 = 0$

(9) Skizzieren Sie folgende 4 Hyperbeln! Was ist ihnen allen gemeinsam?
$x^2 - y^2 = 1, \quad y^2 - x^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4, \quad y^2 - x^2 = 4.$

3.2 Analytische Geometrie im Raum, Vektorrechnung

Zur Beschreibung der Punkte des Raumes benutzen wir ein kartesisches Koordinatensystem mit 3 zueinander senkrechten Achsen, nämlich x-, y- und z-Achse. Jeder Punkt ist dann eindeutig beschrieben durch ein reelles Tripel (x, y, z).

Um Geraden im Raum darzustellen, führen wir **Vektoren** ein: Jedem Punkt P mit Koordinaten (x, y, z) wird der **Ortsvektor** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zugeordnet mit Ursprung als Anfangspunkt und mit Endpunkt P. Weiter betrachtet man verschobene Ortsvektoren als **Richtungsvektoren** $\vec{r}$ mit einem Anfangspunkt P_1 und einem Endpunkt P_2 (natürlich sind die Ortsvektoren auch spezielle Richtungsvektoren).

Vektoren sind also im Prinzip „gerichtete Strecken“ und werden daher graphisch als Strecken mit Pfeil dargestellt. Ein Vektor wird eindeutig festgelegt durch Anfangs- und Endpunkt oder durch seine Länge, nämlich die Länge der zugehörigen Strecke, und seine Richtung.

Die Länge wird auch als **Betrag** $|\vec{a}|$ des Vektors bezeichnet. Für einen Ortsvektor ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Auf der Menge der Ortsvektoren wird durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

eine kommutative und assoziative Addition eingeführt. Für den Summenvektor ergeben sich zwei Fälle:

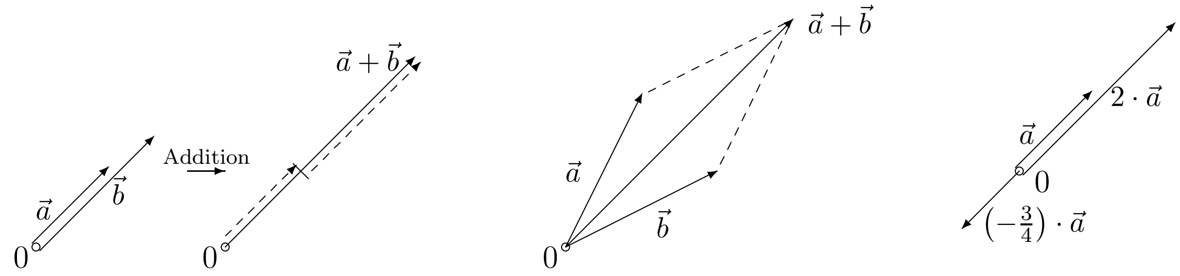
(1) Sind die Summanden parallel (d.h. sie haben dieselbe Richtung), dann hat der Summenvektor dieselbe Richtung und seine Länge ist Summe der einzelnen Längen.

(2) Sind die Summanden nicht parallel, dann kann man die zugehörigen Strecken zu einem Parallelogramm ergänzen, und der Summenvektor ergibt sich als gerichtete Diagonale des Parallelogramms mit Anfangspunkt $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Weiter wird eine **Skalarmultiplikation** eines Ortsvektors mit einer reellen Zahl λ definiert durch

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}.$$

Für $\lambda > 0$ hat der Vektor $\lambda\vec{a}$ dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ und den Betrag $\lambda \cdot |\vec{a}|$, für $\lambda = 0$ den Betrag 0 (und keine Richtung) und für $\lambda < 0$ die entgegengesetzte Richtung von $\vec{a}$ und Betrag $|\lambda| \cdot |\vec{a}| = (-\lambda) \cdot |\vec{a}|$.



Die Addition aller Ortsvektoren mit einem festen Vektor $\vec{a}$ entspricht einer Verschiebung des Raums (mit Verschiebungsvektor $\vec{a}$), und die Hintereinanderausführung von zwei Verschiebungen des Raums kann man durch Addition der zugehörigen Verschiebungsvektoren beschreiben.

Kann man einen Vektor als Summe von Produkten anderer Vektoren mit reellen Zahlen darstellen,d.h. z.B.

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3,$$

dann nennt man ihn **Linearkombination** dieser Vektoren. Im Raum läßt sich jeder Vektor eindeutig als Linearkombination der speziellen **Einheitsvektoren**

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

in Richtung der Koordinatenachsen darstellen.

(1) Eine Gerade im Raum ist gegeben durch zwei verschiedene Punkte A und B. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die zugehörigen Ortsvektoren und $\vec{r} := \vec{b} - \vec{a}$, dann gilt für den Ortsvektor $\vec{x}$ eines beliebigen Punktes

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{r}, \qquad t \in \mathbb{R}. \qquad \text{(Parametergleichung)}$$

$\vec{r} \neq \vec{0}$ heißt **Richtungsvektor** der Geraden. Die Vektorgleichung ist gleichwertig zu dem (skalaren) linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot r_1 \\ y &= a_2 + t \cdot r_2, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &= a_3 + t \cdot r_3 \end{aligned}$$

Eliminiert man den Parameter t, dann ergibt sich die Gerade als Menge aller Punkte (x, y, z), für die das sich ergebende entsprechende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z &= \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z &= \delta_2 \end{aligned}$$

erfüllt ist.

(2) Zwei Geraden sind entweder identisch (d.h. stimmen in allen Punkten überein), oder sie schneiden sich in genau einem Punkt oder sie haben keinen Punkt gemeinsam. Sind im letzteren Fall die Richtungsvektoren proportional, dann heißen die Geraden **parallel**, sonst **windschief**.

Man berechnet einen etwaigen Schnittpunkt durch Gleichsetzen der zugehörigen Parameterdarstellungen und Berechnen der Parameter.

(3) Eine Ebene wird durch zwei nichtproportionale Richtungsvektoren $\vec{r} \neq \vec{0}$ und $\vec{s} \neq \vec{0}$ sowie einen festen Punkt $\vec{a}$ eindeutig bestimmt. Für den Ortsvektor $\vec{x}$ eines beliebigen Punktes gilt

$$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{r} + u \cdot \vec{s}, \qquad t, u \in \mathbb{R}. \qquad \text{(Parametergleichung)}$$

$\vec{r}$ und $\vec{s}$ sind **Richtungsvektoren** der Ebene. Die Vektorgleichung ist gleichwertig zu dem (skalaren) linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot r_1 + u \cdot s_1 \\ y &= a_2 + t \cdot r_2 + u \cdot s_2, \qquad t, u \in \mathbb{R}. \\ z &= a_3 + t \cdot r_3 + u \cdot s_3 \end{aligned}$$

Eliminiert man die Parameter t und u, dann ergibt sich die Ebene als Menge aller Punkte (x, y, z), für die die lineare Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

erfüllt ist.

(4) Zwei Ebenen sind entweder identisch (d.h. stimmen in allen Punkten überein), oder sie schneiden sich in genau einer Geraden oder sie haben keinen Punkt gemeinsam, d.h. sie

sind **parallel**.
Im ersten und letzten Fall sind die Richtungsvektoren in der Parameterdarstellung der einen Ebene Linearkombinationen der Richtungsvektoren in der Parameterdarstellung der anderen Ebene.
Man berechnet die etwaige Schnittgerade durch Gleichsetzen der zugehörigen Parameterdarstellungen und Berechnen z.B. des Parameters t als Funktion von u.

(5) Ein **Kugel** ist die Menge aller Punkte im Raum, die von einem festen Punkt, dem **Mittelpunkt**, gleichen Abstand haben. Der Abstand heißt **Radius**. Liegt der Mittelpunkt in (x_0, y_0, z_0), dann hat die Kugel die Gleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \qquad \text{(Mittelpunktsform der Kugelgleichung)}$$

Analog erhält man durch

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

die Mittelpunktsform der Gleichung eines Ellipsoids mit den Halbachsen a, b und c.

Allgemein bilden die Punkte, deren Koordinaten Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

sind, eine „Fläche 2. Ordnung“, also eine Kugel, Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid, Kegel- oder Zylinderfläche.

Übungen

(1) Gegeben sind die Punkte $A = (2; -1; 4)$, $B = (-1; -2; 2)$ und $C = (1; 1; -1)$. Stellen Sie die Seiten und die Seitenhalbierenden des Dreiecks als Vektoren dar! Geben Sie die Parameterdarstellungen der Geraden durch A und B, B und C sowie A und C sowie der Ebene durch A, B und C an!

(2) Geben Sie die Vektoren an, die vom Punkt $C = (3; -4; -2)$ aus

(a) nach $A = (7; -4; 6)$ (b) zum Koordinatenursprung

(c) senkrecht auf die Koordinatenachsen bzw. Koordinatenebenen zeigen.

(3) Bestimmen Sie die Beträge folgender Vektoren:

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(4) Wo liegt die Spitze des Vektors mit Anfangspunkt A, der in Richtung des Punktes B zeigt und die Länge d hat?

(a) $A = (7; 3; -2),\ B = (6; -1; 4),\ d = 640,$ (b) $A = (6; 1; 5),\ B = (-2; 7; 3),\ d = 400.$

(5) Untersuchen Sie, ob die Punkte $A = (3; 5; 1)$ und $B = (-5; 11; 8)$ auf der Geraden durch $C = (-1; 8; 6)$ und $D = (11; -1; -9)$ liegen. Geben Sie ein parameterfreies lineares Gleichungssystem an, das die Gerade beschreibt.

(6) Die Gerade g sei gegeben durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2 \\ 2x - y + z &= 1 \end{aligned} \quad .$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden an.

(7) Die Ebene E enthalte

(a) die Punkte $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$,

(b) den Punkt $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie Parameter- und Gleichungsdarstellung der Ebene und untersuchen Sie, ob die Punkte $F = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf der Ebene liegen.

(8) Bestimmen Sie, wenn möglich, die Ebene, die die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

enthält. Welche Bedingung müssen g_1 und g_2 erfüllen, damit es eine solche Ebene gibt?

(9) Die Ebene E sei gegeben durch die lineare Gleichung $\quad x + y + z = 1. \quad$ Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene an.

3.3 Lineare und quadratische Gleichungen, lineare Gleichungssysteme

In den vorigen Abschnitten wurde der enge Zusammenhang zwischen den linearen und quadratischen Gleichungen und geometrischen Objekten wie Gerade, Ebene oder Kreis deutlich.

(1) Die Lösung einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten

$$ax + b = 0 \qquad \text{mit } a \neq 0$$

entspricht geometrisch der Bestimmung der gemeinsamen Punkte der Geraden mit Gleichungsdarstellung $\; y = ax + b \;$ und der x-Achse. Die Gerade schneidet die x-Achse in genau einem Punkt, d.h. $x = \frac{-b}{a}$ ist Lösung.
($a = 0$ entspricht dem Fall, daß die Gerade identisch ($b = 0$) oder parallel ($b \neq 0$) zur x-Achse ist.)

(2) Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten und mindestens zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_nx + b_ny + c_n &= 0 \end{aligned}$$

entspricht geometrisch der Bestimmung der gemeinsamen Punkte der n zugehörigen Geraden. Die Geraden sind entweder alle Vielfache einer der Gleichungen (d.h. es gibt unendlich viele Lösungen) oder es gibt genau einen gemeinsamen Punkt oder es gibt keinen gemeinsamen Punkt. Die möglichen Lösungen erhält man durch folgende Vorgehensweise:

(a) Einsetzungsverfahren: Auflösen nach x in einer geeigneten Gleichung (z.B. in der 1. Gleichung, wenn $a_1 \neq 0$), Einsetzen in einer anderen Gleichung und Bestimmung von y (falls möglich). Anschließend Einsetzen der gefundenen Koordinaten in die anderen Gleichungen (d.h. Probe, ob die gefundenen Punkte auf den anderen Geraden liegen).

(b) Additionsverfahren: Multipliziert man eine der Gleichungen mit einer Zahl ungleich Null oder addiert man auf beiden Seiten eine Zahl, dann verändert sich die Lösungsmenge des Gleichungssystem nicht, also auch nicht, wenn man zu einer der Gleichungen das Vielfache einer anderen addiert und die erste (und nur die erste) durch die neue Gleichung ersetzt. Durch geschickte Wahl kann man erreichen, daß sich das Gleichungssystem vereinfacht.

(3) Die Lösung einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten $ax + by + c = 0$ mit $a \neq 0$, $b \neq 0$, entspricht geometrisch der Bestimmung des Schnittpunktes der Ebenen mit Gleichungsdarstellung $z = ax + by + c$ mit der (x, y)-Ebene. Wegen $a \neq 0$, $b \neq 0$ ist die Ebene weder identisch noch parallel zur (x, y)-Ebene, schneidet sie also in einer Geraden, d.h. die Gleichung hat unendlich viele Lösungen (x, y) mit $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, $x \in \mathbb{R}$.

(4) Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit drei Unbekannten und mindestens zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n &= 0 \end{aligned}$$

entspricht geometrisch der Bestimmung der gemeinsamen Punkte der n zugehörigen Ebenen. Es gibt also entweder unendlich viele Lösungen (die eine Ebene oder eine Gerade bilden), genau eine Lösung oder keine Lösung. Die etwaigen Lösungen erhält man mit demselben Verfahren wie bei Gleichungssystemen mit zwei Variablen.

(5) Die Lösung einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit } a \neq 0$$

entspricht geometrisch der Bestimmung der gemeinsamen Punkte der Parabel mit Gleichungsdarstellung $y = ax^2 + bx + c$ und der x-Achse. Die Parabel schneidet die x-Achse entweder gar nicht (z.B. $y = x^2 + 1$), in zwei Punkten (z.B. $y = x^2 - 1$) oder in genau einem Punkt (z.B. $y = x^2$). Die möglichen Lösungen erhält man durch quadratische Ergänzung aus

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

oder direkt mit der daraus abgeleiteten (p, q)-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Ist die **Diskriminante** $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ negativ, dann gibt es keine Lösung, ist sie Null, dann gibt es genau eine Lösung.

Übungen

(1) Bestimmen Sie die Schnittpunkte folgender Geraden g_1 und g_2:

(a) $g_1 :\ 21x - 19y + 13 = 0$ und $g_2 :\ 35x - 38y + 47 = 0$,

(b) $g_1 :\ y = 3x + 5$ und $g_2 :\ \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y + 1 = 0$,

(c) g_1 Gerade durch $A = (2; 3)$ und $B = (6; 1)$ und $g_2 :\ x + 2y = 4$.

(2) Welche Lage nehmen folgende Geradenpaare zueinander ein (Schnittpunkt, Identität, Parallelität)?

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, (d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

(e) g_1 durch $A_1 = (-3; -1; -1)$, $B_1 = (4; 3; 2)$, g_2 durch $A_2 = (2; 1; -2)$, $B_2 = (5; -1; 1)$,

(f) g_1 durch $A_1 = (1; -2; 1)$, $B_1 = (-2; 3; 5)$, g_2 durch $A_2 = (1; -5; -2)$, $B_2 = (10; -11; 5)$.

(3) Gegeben seien die Ebenen

E_1 durch die Punkte $A = (6; -2; 0)$, $B = (-3; -6; 1)$ und $C = (3; 2; 3)$,

$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E_3 : \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x + 2y + 2z = 3 \}$,

$E_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_5 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

und die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \qquad g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die gemeinsamen Punkte von

(a) E_1 und g_1 (b) E_2 und g_2 (c) E_3 und g_3 (d) E_4 und E_5.

(4) Wir setzen als bekannt voraus, daß eine Gerade einen Kreis genau dann *berührt*, d.h. in genau einem Punkt schneidet, wenn die Gerade senkrecht zu der Verbindungsgeraden durch Mittel- und Berührpunkt ist.
Geben Sie die Gleichungen folgender Kreise an! Der Kreis

(a) gehe durch die Punkte $P_1 = (5; 20)$ und $P_2 = (12; 13)$ und habe seinen Mittelpunkt auf der Geraden $5y + 6x = 29$,

(b) habe den Mittelpunkt $M = (5; 11)$ und berühre die Gerade $y = 17 - 7x$,

(c) habe den Radius $r = 2\sqrt{5}$, gehe durch den Ursprung und habe den Mittelpunkt auf der Geraden $x + 3y = 10$,

(d) gehe durch $P = (3; 1)$ und berühre die x-Achse im Ursprung,

(e) gehe durch $P = (3; 1)$ und berühre die y-Achse im Ursprung.

(5) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurven, die durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

(a) $x + 2y = 8$ mit $3x^2 + 8y^2 + 6x - 32y = 0$,

(b) $3x - y + 6 = 0$ mit $9x^2 - 4y^2 = 36$,

(c) $5x^2 - 4y^2 = 5$ mit dem Kreis um $(4; 0)$ mit Radius $r = 3$,

(d) $x^2 + y^2 + 2x - 5y = -7$ mit $x^2 + 2x - y = -3$,

(e) $x^2 - y = 1$ mit $y^2 - x = 1$.

4 Funktionen

4.1 Funktionen

Mit Hilfe des Funktionsbegriffes werden in der Mathematik Abhängigkeiten gewisser Größen von anderen beschrieben.

Beispiele:

(1) Beim freien Fall hängt der Weg s, den ein Körper (bei Vernachlässigung der Reibung) zurücklegt, von der Fallzeit t ab. Die Abhängigkeit wird beschrieben durch die Funktion $s = \frac{1}{2}gt^2$ (mit Erdbeschleunigung g).

(2) Die Schwingungsdauer t eines „mathematischen Pendels“ wird bei kleinen Ausschlägen von der Pendellänge l bestimmt: $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

(3) Der Druck p eines Gases ist abhängig von seinem Volumen V und seiner Temperatur T: $p = \frac{c \cdot T}{V}$ (mit Materialkonstanten c).

(4) Der Preis einer Theater- oder Konzertkarte hängt i.a. von der Sitzreihe ab. Diese Abhängigkeit wird durch z.B. eine Preistabelle beschrieben:

Reihe	1 bis 5	6 bis 10	11 bis 20	21 bis 30
Preis	65 DM	55 DM	40 DM	25 DM

(5) Das Porto eines Briefes innerhalb Deutschlands hängt vom Gewicht (und der Größe) des Briefes ab. Ist P das Porto in DM, G das Gewicht in Gramm, dann gilt zur Zeit

$$P = \begin{cases} 1,10 & \text{falls } 0 < G \leq 20 \\ 2,20 & \text{falls } 20 < G \leq 50 \\ 3,00 & \text{falls } 50 < G \leq 500 \\ 4,40 & \text{falls } 500 < G \leq 1000 \end{cases}$$

(6) Die Anzahl X der Permutationen (Vertauschungen) von n verschiedenen Objekten hängt von ihrer Zahl n ab: $X = n!$.

(7) Die Länge l eines Intervalls $[a, b]$ auf der reellen Zahlengeraden hängt von den Intervallenden ab: $l = b - a$.

Gemeinsam ist allen diesen Beispielen, daß es eine gewisse Menge X gibt (die möglichen Fallzeiten, Pendellängen, Volumina und Temperaturen, Reihen, Briefgrößen, Anzahlen bzw. Intervallenden), und zu jedem $x \in X$ läßt sich in eindeutiger Weise ein Element y aus einer zweiten Menge Y bestimmen.

X heißt **Definitionsbereich** oder **Definitionsmenge**, Y **Wertebereich**.

Die Zuordnung wird durch $y = f(x)$ beschrieben, und y heißt **Funktionswert** an der Stelle x oder **Bild** von x und x **Argument** oder **Urbild** von y.

Beispiele: (Es seien a, b, c, a_k, b_k, c_k reelle Zahlen, k, m, n natürliche Zahlen oder Null.)

(1) Die **konstante Funktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wird oft auch kurz mit $f \equiv c$ bezeichnet. Ihr Graph ist eine Parallele zur x-Achse (falls $c \neq 0$) oder die x-Achse.

(2) Für eine beliebige nichtleere Menge M heißt $f : M \to M$ mit $f(x) := x$ für alle $x \in M$
identische Funktion oder **Identität** auf M. Speziell für $M = \mathbb{R}$ ist der Graph die erste Winkelhalbierende.

(3)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit } f(x) := a \cdot x + b \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$
heißt **lineare Funktion**. Ihr Graph ist eine Gerade mit Steigung a, die die y-Achse in $(0, b)$ schneidet. Manchmal werden nur die Funktionen mit $b = 0$ (durch den Ursprung) als lineare Funktionen bezeichnet. Die anderen Funktionen heißen dann *affin*.

(4)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit } f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m =: \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$
heißt **Polynom** oder **ganzrationale Funktion**. Die Konstanten $a_0, \ldots, a_m$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms. Der höchste auftretende Exponent von x (mit zugehörigem Koeffizient ungleich Null) heißt **Grad** des Polynoms.
Konstante Funktionen, die Identität und lineare Funktionen sind sämtlich Polynome. Die Funktion $f \equiv 0$ nennt man auch **Nullpolynom**. Es hat in diesem Sinn keinen Grad. Man weist ihm manchmal als Grad den Wert -1 zu. Die anderen konstanten Funktionen haben Grad 0, die linearen Funktionen Grad 1.
Weitere spezielle Polynome sind die **quadratischen Funktionen**, deren Graph eine Parabel ist, sowie die **Potenzfunktionen** $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(5) Durch die Vorschrift $f(x) := \dfrac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

wird eine **gebrochen rationale Funktion** auf der Menge aller reellen Zahlen definiert, für die der Nenner nicht Null wird.

Z.B. ist $f(x) = \dfrac{1}{x}$ eine gebrochen rationale Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph ist eine Hyperbel, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind.

(6) Durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

wird die **Betragsfunktion** definiert. Sie beschreibt den Abstand einer reellen Zahl vom Ursprung und spielt bei der Definition der Begriffe „Grenzwert", „stetig", „differenzierbar" eine wesentliche Rolle.

Oft ergibt sich ein „natürlicher" Definitionsbereich für Funktionen reeller Variabler aus der Funktionsvorschrift. Wir wollen darunter im folgenden die Teilmenge aller reeller Zahlen verstehen, für die die Funktionsvorschrift erfüllbar ist. Zum Beispiel ist der natürliche Definitionsbereich für die Funktion $f(x) := \dfrac{x^2}{\sqrt{x+2}}$ das offene reelle Intervall $(-2, \infty)$ und für die Funktion $f(x) := \sqrt[4]{|x| + \frac{1}{x}}$ die Menge $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$.

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion (mit beliebigem Definitionsbereich X), dann heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = 0$ **Nullstelle** der Funktion. Ist X Teilmenge von $\mathbb{R}$, dann „schneidet" der Graph der Funktion die x-Achse in den Nullstellen von f.

Da man in $\mathbb{R}$ addieren, multiplizieren und mit Einschränkungen dividieren kann, kann man reellwertige Funktionen ebenfalls addieren, multiplizieren und mit entsprechenden Einschränkungen dividieren. Die meisten Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen übertragen sich direkt auf die Funktionen, so z.B. das Kommutativ- und das Assoziativgesetz für Addition sowie das Distributivgesetz.

Man spart sich bei der Untersuchung von reellwertiger Funktionen einer reellen Variablen oft Arbeit, wenn man **Symmetrieeigenschaften** des Graphen kennt:

Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, zum Nullpunkt symmetrische Menge (d.h. aus $x \in X$ folgt $-x \in X$). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade** auf X, wenn für alle $x \in X$ gilt $f(-x) = f(x)$, und **ungerade**, wenn für alle $x \in X$ gilt $f(-x) = -f(x)$.
Die Bezeichnungen orientieren sich am Symmetrieverhalten spezieller Polynome: Ein Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, bei dem nur Potenzen mit geradem Exponenten auftreten, d.h. alle Koeffizienten mit ungeradem Index Null sind, ist gerade. Analog ist ein Polynom, bei dem nur Potenzen mit ungeradem Exponenten auftreten, d.h. alle Koeffizienten mit geradem Index Null sind, ungerade.
Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y-Achse (Beispiele: die konstanten Funktionen oder $y = x^2$), der Graph einer ungeraden Funktion liegt symmetrisch zum Nullpunkt (Beispiele: die linearen Funktionen $y = ax$ oder $y = x^3$). Es reicht bei derartigen Funktionen also aus, die Funktion für nichtnegative Urbilder zu untersuchen.

Ist $f(x)$ eine reellwertige Funktion, I ein reelles Intervall, C eine reelle Zahl und gilt

$$f(x) \leq C \qquad \text{für alle } x \in I,$$

dann heißt f im Intervall I **nach oben beschränkt** und C **obere Schranke** von f in I. (Analog definiert man **nach unten beschränkt**.) Der Graph von f liegt im Bereich des Intervalls I unterhalb der Parallelen $y \equiv C$ zur x-Achse. Ist C obere Schranke von f in I, dann ist jede größere reelle Zahl ebenfalls dort obere Schranke.

Beispiel: -3 ist (größte) untere Schranke der Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 2$ in $\mathbb{R}$, 0 ist (kleinste) obere Schranke von f im Intervall $[-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}]$.

Ist $f(x)$ eine reellwertige Funktion, I ein reelles Intervall und gilt

$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x_2,$$

dann heißt f im Intervall I **monoton wachsend**. Gilt sogar

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{für alle} \qquad x_1, x_2 \in I \quad \text{mit } x_1 < x_2,$$

dann heißt f im Intervall I **streng monoton wachsend**.
(Analog definiert man **monoton fallend** und **streng monoton fallend**.)

Beispiele: Eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ mit $a > 0$ ist in $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Ist $a < 0$, dann ist f in $\mathbb{R}$ streng monoton fallend. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist in $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und in $[0, \infty)$ streng monoton wachsend. Jede konstante Funktion ist im Definitionsgebiet sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend.

Natürlich können verschiedene Urbilder einer Funktion dasselbe Bild besitzen. Spezielle Funktionen, bei denen verschiedene Urbilder immer auch verschiedene Bilder haben, heißen **umkehrbar eindeutig**. Zu jedem $y \in f(X)$ gibt es dann genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$, d.h. es gibt eine Funktion $g : f(X) \to X$ mit $g(f(x)) = x$. g nennt man **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** von f und bezeichnet sie mit f^{-1} bzw. ausführlich mit $f^{-1} : f(X) \to X$. Offenbar gilt

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \text{für alle } x \in X, \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Man bestimmt die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, indem man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auflöst und dann die Variablennamen x und y vertauscht. Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ist das Bild des Graphen von f bei Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.

Ist f streng monoton wachsend, dann auch ihre Umkehrfunktion. Gleiches gilt auch für streng monoton fallend.

Beispiele:
Jede streng monotone Funktion hat eine Umkehrfunktion, z.B. ist für eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ die Funktion $g(x) = \frac{x-b}{a}$ die zugehörige Umkehrfunktion.
Die konstanten Funktionen haben keine Umkehrfunktion.
Die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ hat jeweils in den Intervallen $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$ eine Umkehrfunktion, nämlich die **Wurzelfunktionen** $g_1(x) = -\sqrt{x}$ und $g_2(x) = \sqrt{x}$. Beide Funktionen sind nur für nichtnegative x definiert.

Neben den üblichen Rechenoperationen (Addition, Multiplikation usw.) gibt es eine weitere Operation, um aus zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eine dritte zu konstruieren, die **Verkettung** oder **Komposition** von Funktionen:

$$(f \circ g)(x) := f\Big(g(x)\Big).$$

Eine Verkettung ist nur möglich, wenn der Definitionsbereich der **äußeren Funktion** f den Wertebereich der **inneren Funktion** g umfaßt. Man bestimmt die Verkettung, indem man an jeder Stelle, an der in der Funktionsgleichung von f die Variable x auftritt, $g(x)$ einsetzt.

Beispiel:

$$h(x) = (2x^2 - x)^2$$

ist Verkettung der Funktionen

$$g(x) = 2x^2 - x \qquad \text{und} \qquad f(x) = x^2,$$

d.h. $h = f \circ g$. Vertauscht man innere und äußere Funktion, dann erhält man i.a. eine andere Funktion, hier z.B.

$$(g \circ f)(x) = 2(x^2)^2 - (x^2) = 2x^4 - x^2.$$

Hat eine Funktion f eine Umkehrfunktion, dann gilt $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Übungen

(1) Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen mit Hilfe der Nullstellen und der Schnittpunkte mit der y-Achse und untersuchen Sie, ob die Funktionen nach oben oder nach unten beschränkt sind!

(a) $y = x^2 + 4x - 5$ (b) $y = -\frac{2}{3}(x+7)(x+1)$

(c) $y = x^4 - 2$ (d) $y = -x^5 + 2$

(2) Untersuchen Sie das Monotonie- bzw. Symmetrieverhalten folgender Funktionen:

(a) $y = \frac{2}{x}$ (b) $y = \frac{2}{2+x^2}$ (c) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ (d) $y = x^2(1-x^4)$

(e) $y = x^3 + x - 2$ (f) $y = \frac{x^2-2}{x^4+x^2-6}$ (g) $y = \frac{2x}{x^5-4x^3+x}$ (h) $y = \frac{x^2+4}{x^5-2x^3+x}$

(3) Bilden Sie zu den folgenden Funktionen $f(x)$ die Umkehrfunktionen $f^{-1}(x)$ und skizzieren Sie jeweils die Graphen von f und f^{-1}. Geben Sie jeweils Definitions- und Wertebereich an!

(a) $y = 2x - 1$ (b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ (c) $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$

(d) $y = x^4 + 2$ (e) $y = x^5$

(4) Bilden Sie für folgende Funktionen f, g und h die Verkettungen $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g \circ h$ bzw. $h \circ g \circ f$:

(a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x - 4$ (b) $f(x) = 2^x, \quad g(x) = 3x^2$

(c) $f(x) = 5^x, \quad g(x) = -x, \quad h(x) = x^2 - 3$ (d) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2}, \quad h($

4.2 Polynome

Zu den wichtigsten reellwertigen Funktionen einer reellen Variablen gehören die Polynome. Ihre Funktionswerte lassen sich für jeden Wert von $x \in \mathbb{R}$ allein durch Addition und Multiplikation errechnen.

Ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Es läßt sich in der Form

$$f(x) = (x - x_1)^{s_1}(x - x_2)^{s_2} \cdots (x - x_m)^{s_m} \cdot q(x)$$

darstellen (Zerlegung in Linearfaktoren). Dabei ist $q(x)$ ein Polynom vom Grad $n - (s_1 + s_2 + \ldots + s_m)$, das keine Nullstellen hat. x_k nennt man **s_k-fache Nullstelle**.

Die Aussage des Satzes beruht im wesentlichen auf der Tatsache, daß es in der Menge der Polynome wie in $\mathbb{Z}$ eine Division mit Rest, die **Polynomdivision** gibt:

Ist g ein beliebiges festes Polynom, aber nicht das Nullpolynom, dann gibt es zu jedem Polynom f eindeutig bestimmte Polynome q und r mit $f = q \cdot g + r$ und $r \equiv 0$ oder $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} g$.

Ist das Restpolynom r gleich dem Nullpolynom, dann nennt man g **Teilerpolynom** von f. Jede Nullstelle von g ist dann auch Nullstelle von f. Da beim Multiplizieren von Polynomen sich die Grade addieren, erhält man für $\operatorname{Grad} f < \operatorname{Grad} g$ die Polynome $q \equiv 0$ und $r = f$. Im anderen Fall sortiert man sowohl bei f als auch bei g die Summanden absteigend nach Höhe des Exponenten von x und dividiert den 1. Summanden von f durch den 1. Summanden von g. Kommt eine Potenz, z.B. x^4, in einem der Polynome nicht vor, dann ist es nützlich, an ihre Stelle z.B. den Ausdruck $0 \cdot x^4$ zu setzen.

Beispiel:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(18x^4 & +15x^3 & +0x^2 & -2x & +1) & :(3x^2+x-1) = 6x^2+3x+1+\dfrac{2}{3x^2+x-1} \\
18x^4 & +\ \ 6x^3 & -6x^2 & & & \\
\hline
 & 9x^3 & +6x^2 & -2x & +1 & \\
 & 9x^3 & +3x^2 & -3x & & \\
\hline
 & & 3x^2 & +\ x & +1 & \\
 & & 3x^2 & +\ x & -1 & \\
\hline
 & & & & 2 &
\end{array}
$$

Hat das Zählerpolynom einer gebrochen rationalen Funktion $f(x)$ einen größeren oder gleich großen Grad wie das Nennerpolynom, dann kann man mit Hilfe der Polynomdivision $f(x)$ als Summe eines Polynoms $q(x)$ und einer **echt gebrochen rationalen Funktion** $r(x)$ (bei dem der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners ist) darstellen. Für sehr große und sehr kleine Werte von x (d.h. $x \to \pm\infty$) nähert sich $f(x)$ dem Polynom $q(x)$.

Übungen

(1) Zerlegen Sie folgende Polynome in ein Produkt von Linearfaktoren:

(a) $f(x) = x^6 - x^4 - 16x^2 + 16$, (b) $f(x) = x^6 - 1$, (c) $f(x) = x^4 + 1$, (d) $f(x) =$

(2) Zerlegen Sie folgende gebrochen rationale Funktionen in ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion:

(a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 7x^2 + 2x - 1}{x^2 + 4x + 7}$ (b) $\dfrac{4x^5 - 5x^3 + 4x^2 - x + 1}{2x^3 - 3x^2 - 2}$

4.3 Wurzel-, Exponential- und Logarithmusfunktion

Als Umkehrfunktion der für ungerades $n \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ und für gerades n in $\{x \in \mathbb{R};, x \geq 0\}$ streng monoton wachsenden Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ergibt sich die

$$\textbf{Wurzelfunktion} \qquad g(x) := \sqrt[n]{x},$$

die in ihrem Definitionsgebiet ($\mathbb{R}$ für ungerades n und $\{x \in \mathbb{R};, x \geq 0\}$ für gerades n) ebenfalls streng monoton wachsend ist.

Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, ist für jedes $x := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, die Potenz a^x definiert durch $a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}$. Durch z.B. Intervallschachtelungen kann man die Potenzen a^x auf reelle x ausdehnen.

Aus den Eigenschaften der Potenzen mit rationalen Exponenten ergeben sich entsprechende Eigenschaften der

Exponentialfunktion $\quad f(x) = a^x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1:$

(1) $f(x) = a^x$ hat nur positive Funktionswerte und erfüllt die **Funktionalgleichung**

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

(2) Sei $a \neq 1$. Die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := a^x$ ist für $a > 1$ streng monoton steigend, für $a < 1$ streng monoton fallend. Zu $f(x) = a^x$ existiert also die Umkehrfunktion.

(3) Für alle a gilt $a^0 = 1$, d.h. $(0, 1)$ ist gemeinsamer Punkt aller Exponentialfunktionen.

(4) Zu jeder reellen Zahl $y \in (0, \infty)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x = y$.

Entsprechend ergibt sich für $a > 0$, $a \neq 1$, als Umkehrfunktion die **Logarithmusfunktion** $f(x) = \log_a x$ zur Basis a. Aus den Eigenschaften von a^x folgt:

Die Logarithmusfunktion ist für alle positive x definiert, hat (für alle a) die Nullstelle 1, ist streng monoton (wachsend für $a > 1$ bzw. fallend für $0 < a < 1$), und genügt der Funktionalgleichung

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Übungen

Stellen Sie die folgenden Funktionen sowie, wenn möglich, ihre Umkehrfunktionen, für $x \in [-3, 3]$ graphisch dar:

(a) $y = 3^x$ (b) $y = 3^{-x}$ (c) $y = 4^{|x|}$ (d) $y = 4^{-|x|}$ (e) $y = 4^{-\sqrt{|x|}}$

4.4 Die Winkelfunktionen

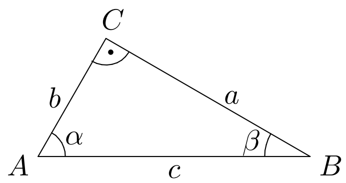
Haben zwei rechtwinklige Dreiecke (neben dem rechten Winkel) einen weiteren Winkel α (und damit auch den dritten Winkel) gemeinsam, dann sind sie ähnlich. Nach dem Strahlensatz bzw. den Ähnlichkeitssätzen sind entsprechende Seiten zweier Dreiecke zueinander proportional, d.h. für jedes dieser ähnlichen Dreiecke mit Winkel α sind die Quotienten

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}, \qquad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}, \qquad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}, \qquad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

jeweils gleich, hängen also nur vom Winkel α ab.

Man definiert daher für einen beliebigen Winkel α, $0 < \alpha < 90°$, und ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit rechtem Winkel bei C, Winkel α bei A und β bei B und Seiten $a = BC$, $b = AC$ und $c = AB$:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}.$$



Aus der Definition, $\beta = 90° - \alpha$ und dem Satz von Pythagoras folgt sofort

(1) $\sin\beta = \cos\alpha, \quad \cos\beta = \sin\alpha, \quad \tan\beta = \cot\alpha, \quad \cot\beta = \tan\alpha,$

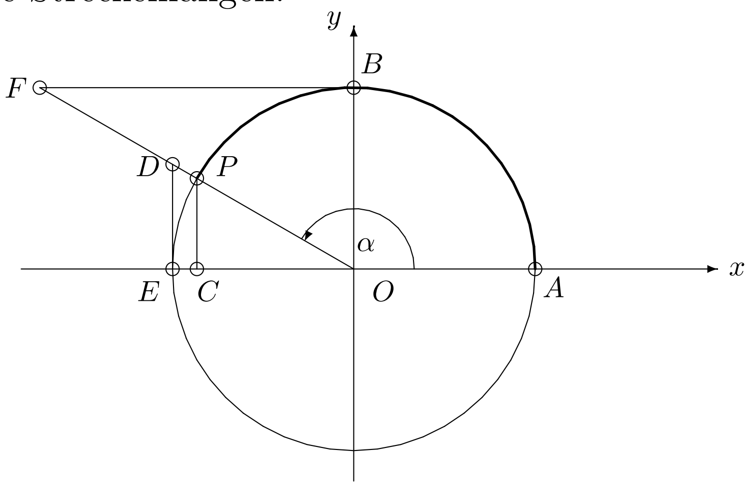
(2) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$

(3) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}.$

Die Winkelfunktionen sind bisher nur für $\alpha \in (0°, 90°)$ definiert.

Betrachtet man nur rechtwinklige Dreiecke mit Hypothenusenlänge 1, dann stellen Sinus und Kosinus ebenfalls Längen dar, nämlich von Gegenkathete und Ankathete.

Wir betrachten nun in einem Koordinatensystem den Kreis um den Ursprung mit Radius 1 (Einheitskreis) und definieren Sinus und Kosinus durch mit Vorzeichen versehene Streckenlängen:



P ist ein beliebiger Punkt des Einheitskreises und α der Winkel zwischen der positiven x-Achse ($\overrightarrow{OA}$) und dem Ortsvektor zu P ($\overrightarrow{OP}$).

Da der Winkel α und die Länge AP des zugehörigen Kreisbogens proportional sind, mißt man den Winkel oft im **Bogenmaß**.

Es entsprechen also 90° dem Bogenmaß $\frac{\pi}{2}$, 180° dem Bogenmaß π und allgemein α in Grad dem Bogenmaß $\alpha \cdot \dfrac{\pi}{180°}$.

Wir definieren $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ als y- bzw. y-Koordinate von P. Dann hat D für $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$ die y-Koordinate $\tan\alpha$ und F für $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$, die x-Koordinate $\cot\alpha$.

Für die Vorzeichen der Winkelfunktionen ergibt sich

	1. Quadrant $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	2. Quadrant $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	3. Quadrant $\alpha \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	4. Quadrant $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$

und außerdem

(1) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$, $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$,

(2) $\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$, $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$, $\tan(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\cot\alpha$, $\cot(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\tan\alpha$,

(3) $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$, $\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$, $\cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha$,

(4) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$.

Für spezielle Winkel ergeben sich folgende Funktionswerte:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert
$\cot\alpha$	nicht definiert	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Mit der Definition

$$\sin(\alpha + 2k\pi) := \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2k\pi) := \cos\alpha,$$

$$\tan(\alpha + 2k\pi) := \tan\alpha, \quad \cot(\alpha + 2k\pi) := \cot\alpha$$

für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ kann man die Winkelfunktionen auf $\mathbb{R}$ ausdehnen.

Sinus- und Kosinusfunktionen sind also (2π)-*periodisch*, Tangens- und Kotangensfunktion π-periodisch.

Weiter sind Sinus, Tangens und Kotangens ungerade Funktionen und Kosinus ist eine gerade Funktion.

Für ein allgemeines Dreieck mit Seiten a, b, c und Winkel α, β und γ gilt

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \qquad \textbf{(Sinussatz)}$$

und als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\ . \qquad \textbf{(Kosinussatz)}$$

Von großer Wichtigkeit sind weiter die **Additionstheoreme**:

(1) $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y, \qquad \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$

speziell $\qquad \sin(2x) = 2\sin x\cos y,$

(2) $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y, \qquad \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y,$

speziell $\qquad \cos(2x) = \cos^2 y - \sin^2 x,$

(3) $\sin x + \sin y = 2\,\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \sin x - \sin y = 2\,\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$

(4) $\cos x + \cos y = 2\,\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \cos x + \cos y = -2\,\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$

Übungen:

(1) Berechnen Sie die nicht angegebenen Seiten und Winkel der rechtwinkligen Dreiecke (mit $\gamma = 90°$):

(a) $a = 50, \quad b = 78,1$ (b) $a = 40, \quad \alpha = 43°36'$

(c) $b = 70, \quad \alpha = 18°55'$ (d) $c = 65, \quad \beta = 59°29'$

(2) Berechnen Sie die nicht angegebenen Seiten und Winkel der allgemeinen Dreiecke:

(a) $a = 179, \quad b = 208,3 \quad \beta = 106°$ (b) $c = 107,6, \quad \alpha = 70,4°, \quad \beta = 30,3°$

(c) $a = 205,4, \quad b = 252,8, \quad \gamma = 47,5°$ (d) $a = 135,8, \quad b = 191, \quad c = 73,9$

(3) Berechnen Sie die drei anderen Winkelfunktionswerte zu dem gegebenen Winkelfunktionswert ohne Verwendung des Taschenrechners:

(a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, (b) $\tan\alpha = \sqrt{3}$, (c) $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

(4) Beweisen Sie folgende Beziehungen:

(a) $1 + 2\cos\alpha = 4\,\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1,$ (b) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2},$

(c) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2},$ (d) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$

(e) $\cot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},$ (f) $\sin(3\alpha) = 3\,\sin\alpha - 4\,\sin^3\alpha,$

(g) $\cos(3\alpha) = 4\,\cos^3\alpha - 3\,\cos\alpha,$ (h) $\tan(3\alpha) = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha},$

(i) $\cot(3\alpha) = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1},$ (j) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha) = \dfrac{1}{4}\,\sin(4\alpha),$

(k) $\dfrac{\cos(2\alpha)}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos\alpha + \sin\alpha),$

(l) $\sin\alpha + \sin\big(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\big) + \sin\big(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}\big) = 0$

(m) $\sin^2\big(3\pi - \alpha\big) + \sin^2(6,5\pi + \alpha) = 1.$

Index