Zur Authentizität kinematischer Zusammenhänge in der Differentialrechnung – eine Analyse ausgewählter Aufgaben

Frederik Dilling – Eduard Krause

Der positive Einfluss authentischer Bezüge zum Alltag und auch zu anderen Fächern auf das Lehren und Lernen von Mathematik ist allgemein anerkannt. Wenn aber konkretisiert werden soll, was die Authentizität einer Kontextualisierung eines mathematischen Inhalts ausmacht und wie diese praktisch umgesetzt werden kann, offenbaren sich zahlreiche Herausforderungen. Der vorliegende Artikel will aufzeigen, wie kinematische Zusammenhänge in Aufgaben zur Differentialrechnung aus einem ausgewählten Schulbuch hinsichtlich ihrer Authentizität zu werten sind. Anschließend wird eine Beispielaufgabe angeführt, die aus Sicht der Autoren die in der Fachliteratur verhandelten Kriterien zur Authentizität erfüllt. Es wird damit gezeigt, dass der Bezug des Mathematikunterrichts zur Physik, der aus didaktischer Sicht in vielerlei Hinsicht positiv bewertet werden kann, sehr anspruchsvoll ist. Dieser Herausforderung sollte auch die Lehrerausbildung Rechnung tragen.

1 Einführung

Schüler/innen sollen mithilfe der Mathematik Erscheinungen der Welt aus den Bereichen Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Weise wahrnehmen und verstehen. Diese Erfahrung ist laut Heinrich Winter (1996) eine der Grunderfahrungen, die zur Allgemeinbildung im Mathematikunterricht beiträgt. Leider offenbaren sich Anwendungskontexte im Mathematikunterricht aber allzu häufig als in außermathematische Situationen eingekleidete Standardtechniken (Baumann, 2011). Es zeigt sich, dass die authentische Kontextualisierung der Mathematik ein sehr mühsames Unterfangen ist, wenn die eröffneten Zusammenhänge nicht nur als „Sprungbrett" zum intendierten mathematischen Inhalt missbraucht werden sollen (Witzke & Krause, 2017). Die Synergien zu anderen Disziplinen oder die Verbindungen zum alltäglichen Leben werden erst dann authentisch erfahrbar, wenn sie nicht nur genannt, sondern auch konsequent zu Ende geführt werden.

Aspekte der Authentizität im Mathematikunterricht werden schon länger in der Fachdidaktik diskutiert. Ein detaillierter Vergleich des Authentizitätsbegriffs in der Mathematik- und Physikdidaktik ist in Stoffels (2017) zu finden. Neubrand et al. (2001) unterscheiden einen authentischen Kontext, bei dem die verwendeten Daten einer echten Situation entnommen sind und das Problem einer relevanten Fragestellung entspricht, von einem realitätsbezogenen Kontext, der reale Daten enthält, welche aber für die Aufgabenstellung konstruiert wurden. Daraus ergeben sich zwei Dimensionen der Authentizität, die Relevanz der Fragestellung auf der einen Seite und die Echtheit der Daten auf der anderen. Wiater (2004) sieht den Nutzen authentischer Aufgaben in der Ähnlichkeit zwischen Lernsituation und Verwendungssituation, die zu einem leichteren Anwenden des Wissens in der Realität führe. Nach Jahnke (2005) sind Aufgaben aber immer didaktische Konstrukte, in denen sich die Intentionen des Erstellers widerspiegeln. Daher gibt es „*keine oder* [...] *fast keine*" authentischen Aufgaben (Jahnke, 2005, 8).

Problemstellungen, die die Mathematik schon in ihrer Geschichte mit echten Daten vor relevante Fragen gestellt haben, sind häufig aus der Physik heraus entstanden. Auch beim Lehren und Lernen bieten sich naturwissenschaftliche Kontexte als authentisches Motivations- und Anwendungsfeld der Mathematik an. Aufgrund erkenntnistheoretischer Parallelen bieten sich physikalische Kontexte besonders an, um mit Mathematik Erscheinungen der Natur authentisch in spezifischer Art wahrzunehmen und zu verstehen (Krause, 2016). Speziell die Einführung des Ableitungsbegriffs durch die momentane Änderungsrate im Zusammenhang mit Bewegungsvorgängen wird in der Fachdidaktik schon seit langem ausgiebig diskutiert. Dieser Zugang hat nach Danckwerts & Vogel (2006) zwei Vorteile. Zum einen können die Schülerinnen und Schüler an ihre Alltagserfahrungen anknüpfen, zum anderen kann der Begriff der Momentanbeschleunigung als momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit adäquat verstanden werden. Kinematische Sachverhalte können nach Henn (2018) die Begriffe Grenzwert, Ableitung und Integral im Unterricht motivieren, um diese im Anschluss zu präzisieren.

Der folgende Artikel behandelt die Rolle kinematischer Zusammenhänge in der Differentialrechnung des Mathematikunterrichts in der Schule. Am Beispiel des Schulbuchs Lambacher Schweizer für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe wird der Frage nachgegangen, wie authentisch Bewegungsvorgänge im Mathematikunterricht dargestellt werden. Anschließend sollen anhand der angeführten Dimensionen von Authentizität exemplarisch physikalisch authentische Aufgaben entwickelt werden. Die Intention des Artikels besteht darin, aufzuzeigen, dass authentische Kontextualisierungen sehr anspruchsvoll sind. Wenn die erste Wintersche Grunderfahrung ernsthaft umgesetzt werden soll, muss Mathematikunterricht fachübergreifend bzw. fächerverbindend sein. Der Forderung, dass Lehren und Lernen in der Schule interdisziplinäre Aspekte beinhalten soll, muss auch die Lehrerausbildung Rechnung tragen. Dabei müssen die Fachdidaktiken (vor allem im MINT Bereich) zwangsläufig enger zusammenarbeiten. Im Folgenden soll speziell gezeigt werden, dass und wie physikalische und physikdidaktische Inhalte von hoher Relevanz für den Mathematikunterricht sind.

2 Analyse ausgewählter Aufgaben mit kinematischem Kontext

Zur Analyse der Darstellung kinematischer Zusammenhänge in Mathematikaufgaben zur Differentialrechnung wurde das Schulbuch Lambacher Schweizer Mathematik für die Einführungsphase (Giersemehl et al., 2014) ausgewählt, da es sich dabei um ein in Nordrhein-Westfalen häufig genutztes Lehrwerk handelt. In den Kapiteln „Schlüsselkonzept Ableitung“ und „Funktionsuntersuchung“, die die Einführung in die Differentialrechnung beinhalten, sind insgesamt 17 Aufgaben sowie drei ausführliche Einführungsbeispiele mit kinematischem Kontext zu finden. Einige dieser Aufgaben und Einführungsbeispiele werden im Folgenden exemplarisch analysiert.

Das Kapitel „Schlüsselkonzept Ableitung“ beginnt mit der Darstellung eines Zeit-Geschwindigkeits-Diagramms einer Trainingsfahrt auf dem Nürburgring (Einführungsaufgabe, S. 48). Die Schüler/innen sollen bestimmte Wegmarken des Streckenverlaufs mit dem Diagramm in Verbindung setzen und die Geschwindigkeit an diesen Stellen ablesen. Anschließend soll die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Wegmarken sowie die Durchschnittsbeschleunigung in geeigneten Intervallen berechnet werden.

Bei den im Diagramm visualisierten Daten handelt es sich durchaus um realistische Werte für die Fahrt eines Rennautos. Auch die Fragestellung, wie schnell das Auto in einzelnen Streckenabschnitten fährt, ist durchaus relevant im Kontext von Autorennen. Die Herangehensweise an den Geschwindigkeitsbegriff ist allerdings keineswegs authentisch. Durch das Diagramm wird den Schüler/inne/n die Veränderung der Momentangeschwindigkeit vorgegeben. Dabei wird verkannt, dass eine Momentangeschwindigkeit formal in der Realität gar nicht gemessen werden kann, es handelt sich lediglich um eine Durchschnittsgeschwindigkeit mit sehr kurzem Zeitintervall.

Der Begriff der momentanen Änderungsrate wird schließlich anhand einer Kugel eingeführt, die eine schiefe Ebene herunterrollt (Einführungsaufgabe, S. 54). Die Funktionsgleichung des zurückgelegten Wegs in Meter in Abhängigkeit von der Zeit in Sekunden wird mit $s(t) = 0{,}3\, t^2$ vorgegeben. Durch Verkürzen des Messintervalls soll dann die momentane Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt immer besser angenähert werden. Dabei handelt es sich in gewisser Weise um eine physikalisch authentischere Vorgehensweise als in der zuvor vorgestellten Aufgabe. Ein Problem entsteht allerdings dadurch, dass die Wegfunktion $s(t)$ als gemessene Größe interpretiert wird, da Messpunkte durch Einsetzen in diese bestimmt werden sollen. In Wirklichkeit handelt es sich bei der Wegfunktion aber um eine theoretische Vorhersage auf der Grundlage des Fallgesetzes. Die gegebene Funktion gibt physikalisch sinnvolle Werte an, die Entstehung dieser Formel bleibt aber offen. Die Verbindung des Vorfaktors 0,3 mit der Erdbeschleunigung und dem Winkel der schiefen Ebene wäre eine authentische und sinnvolle Ergänzung gewesen. Ein weiteres Problem ergibt sich durch den Umgang mit den Einheiten der Strecke und der Zeit. Sie werden zwar angegeben, mit der Funktionsgleichung wird allerdings einheitenlos gerechnet. Dies ist physikalisch nicht authentisch, da es den Blick auf die zugrundeliegenden Größen verdeckt und physikalische Analysemethoden, wie z. B. die Dimensionsanalyse, erschwert.

Auf die Einführungsbeispiele folgt eine Vielzahl anwendungsbezogener Aufgaben zur Kinematik. Eine dieser Aufgaben (Aufgabe 7, S. 57) beschäftigt sich mit dem Abbremsvorgang eines Autos. Die Funktion des zurückgelegten Wegs in Abhängigkeit von der Zeit wird mit $s(t) = 20t - t^2$ vorgegeben. Die Aufgabe besteht darin, den zurückgelegten Weg und die momentane Änderungsrate zu zwei Zeitpunkten zu bestimmen sowie zu begründen, warum die Funktion ab einem gewissen Zeitpunkt keine sinnvollen Werte liefert. Wie bereits im letzten diskutierten Beispiel ist die Funktionsgleichung sinnvoll, wird aber nicht mit Begriffen wie der Anfangsgeschwindigkeit und der Beschleunigung in Verbindung gesetzt. Die Einheiten werden ebenfalls nicht in die Funktionsgleichung integriert. Ein weiteres Problem ergibt sich durch die Aufgabenstellung selbst. Der Weg und die Geschwindigkeit nach einer bestimmten Zeit sind keine Problemstellungen, die sich im Alltag im Kontext Bremsen ergeben. Eine authentischere Aufgabenstellung wäre beispielsweise die Frage nach der Länge des Bremsweges.

In einer weiteren Aufgabe (Aufgabe 4, S. 61) ist die Situation eines Balls beschrieben, der von einem Garagendach auf den Boden fällt. Die Funktion der Höhe des Balls in Abhängigkeit von der Zeit ist in drei aufeinander folgenden Zeitintervallen durch

$H(t) = 3{,}2$ für $0 \le t \le 1$;
$H(t) = 3{,}2 - 5(t-1)^2$ für $1 \le t \le 1{,}8$;
$H(t) = 0$ für $1{,}8 \le t \le 3$)

angegeben. Zunächst soll die Ableitung an drei Stellen bestimmt werden und die Differenzierbarkeit an den zwei Intervallübergängen geprüft werden. Anschließend sollen die Ergebnisse im Sachkontext interpretiert und Grenzen des Modells beschrieben werden. Ähnlich wie in den vorherigen Aufgaben ist die angegebene Höhenfunktion durchaus sinnvoll, ihre Zusammensetzung hätte aber genauer erläutert werden können. So könnte z. B. der Vorfaktor 5 aus dem Fallgesetz $s(t) = 0{,}5\, g\, t^2 \approx 5\, \frac{m}{s^2}\, t^2$ bestimmt werden. Die Einheiten der Höhe und der Zeit werden gar nicht angegeben. In der Realität handelt es sich zudem um eine stetige Geschwindigkeitsänderung bei Stößen. Damit müsste die Höhenfunktion zu jedem Zeitpunkt differenzierbar sein. Diese Eigenschaft erfüllt die angegebene Funktion bewusst nicht, um den Begriff der Differenzierbarkeit mit einem physikalisch sinnvollen Vorgang in Verbindung zu setzen. Die Problematik löst sich aber in gewisser Hinsicht auf, wenn man bedenkt, dass die Schüler/innen die Grenzen des Modells benennen sollen. Hinzu kommt, dass das Bestimmen der Geschwindigkeit einer von einem Dach rollenden Kugel geschweige denn das Prüfen der Differenzierbarkeit in diesem Kontext keine sinnvolle Problemstellung darstellt, die in irgendeiner Form in der Realität auftritt.

In einer weiteren Aufgabe (Aufgabe 12, S. 65) wird das Skizzieren des Zeit-Beschleunigungs-Graphen ausgehend von einem Zeit-Geschwindigkeits-Graphen einer Autofahrt und das Erläutern der Zusammenhänge gefordert. Bei dem angegebenen Graphen handelt es sich allerdings offensichtlich nicht um reelle, nicht einmal idealisierte Daten. So ist es beispielsweise unrealistisch, dass das Auto in den ersten zehn Minuten beinahe linear von 0 auf 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beschleunigt wird. Hinzu kommt, dass das Problem, auf graphische Weise die Beschleunigung eines Autos aus einem Geschwindigkeitsdiagramm zu bestimmen, im Alltag keinerlei Relevanz hat.

In einer Aufgabe im Themenbereich Funktionsuntersuchung wird das Beispiel eines senkrecht in die Höhe geworfenen Gegenstands angeführt (Aufgabe 13, S. 95). Die Funktionsgleichung für die Höhe wird dabei allgemein mit $h(t) = v_0\,t - 0{,}5\,g\,t^2$ angegeben, wobei v_0 die Abwurfgeschwindigkeit und $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ die Fallbeschleunigung darstellen. Zunächst sollen die Graphen mit drei unterschiedlichen Abwurfgeschwindigkeiten mit dem GTR geplottet und verglichen sowie die maximalen Höhen berechnet werden. Anschließend soll die physikalische Bedeutung der Ableitung der Höhenfunktion erläutert werden. Schließlich sollen noch die Wurfzeit und die Endgeschwindigkeit bei einer Abwurfgeschwindigkeit von $v_0 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bestimmt werden. Bei der Beschreibung des Wurfvorgangs handelt es sich um eine physikalisch authentische Darstellung. Die Funktionsgleichung wird mit den Begriffen Abwurfgeschwindigkeit und Fallbeschleunigung allgemein dargestellt. Außerdem legt die Angabe von $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ nahe, die Dimensionen der einzelnen Größen zu vergleichen und mit Einheiten in der Funktionsgleichung zu rechnen. Auch die Problemstellungen, wie z. B. die Frage nach der Maximalhöhe bei einer bestimmten Geschwindigkeit, sind im physikalischen Kontext sinnvoll und realitätsnah.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Bild bezogen auf die Authentizität kinematischer Darstellungen im ausgewählten Lehrwerk. Ein Großteil der Aufgabe

- weist Funktionsgleichungen auf, die zwar physikalisch realistisch sind, deren Hintergrund aber nicht ausreichend erläutert wird, so dass ihre physikalische Bedeutung offenbleibt,
- stellt Funktionsgleichungen ohne die dazugehörigen Einheiten dar, was physikalisch unüblich ist und dazu führt, dass die Bedeutung der Einzelelemente der Funktionsgleichungen schwierig zu identifizieren sind,
- beinhaltet Problemstellungen, die physikalisch und in der Realität keinerlei Relevanz besitzen.

Damit sind die meisten Aufgaben sowohl in Hinblick auf die Daten als auch auf die Problemstellung nicht authentisch. Positive Beispiele, wie z. B. die zuletzt beschriebene Aufgabe, sind eher eine Seltenheit.

3 Exemplarische authentische Darstellungen kinematischer Zusammenhänge im Mathematikunterricht

Die eher ernüchternde Analyse kinematischer Darstellungen im Schulbuch Lambacher Schweizer für die Einführungsphase zeigt den Bedarf an authentischen Darstellungen für den Mathematikunterricht. Daher soll in diesem Artikel auch aufgezeigt werden, wie ein aus physikalischer Perspektive authentisches Einführungsbeispiel in die Differentialrechnung aussehen könnte.

In Kasten 1 befinden sich ein kurzer Textausschnitt über ein Experiment von Galileo Galilei sowie zwei Aufgaben, die sich hieran anschließen. In Kasten zwei sind Lösungsvorschläge für die Aufgaben zu finden.

Der geschilderte historische Sachverhalt ist auf Grund seiner Bedeutung für die Entwicklung der Physik besonders relevant. Die Genese der Formeln ist historisch direkt nachvollziehbar, sodass der Hintergrund der verwendeten Funktionen nicht offenbleibt. Zudem ist bei jeder Größe die dazugehörige Einheit aufgeführt. Der Grenzwert wird schließlich durch ein Verkürzen des Messintervalls eingeführt. Damit handelt es sich um eine (sofern es sie denn in vollem Umfang geben kann) authentische Aufgabe.

4 Fazit und Ausblick

Das Unterrichten von Mathematik mit authentischen außermathematischen Bezügen ist sehr anspruchsvoll. Die genauere Untersuchung von Schulbuchaufgaben hinsichtlich ihrer Authentizität zeigt, dass dabei auch fachliche und fachdidaktische Inhalte benachbarter Disziplinen relevant sind. Lehrerkräfte, die nicht zufälligerweise das relevante Fach als Zweitfach haben, sind mit diesem quasi-fachfremden Bezug vor Herausforderungen gestellt. Um das Lehrpersonal adäquat aus- oder auch weiterzubilden, sollten Fachdidaktiken miteinander kollaborieren. Dabei stellen sich interdisziplinäre Verbände (wie z. B. der MNU) als sehr wertvoll heraus. Nach Überzeugung der Autoren sollten aber auch interdisziplinäre Konzepte in der universitären Lehre der Lehrerausbildung angegangen werden. An der Universität Siegen wird seit einigen Jahren ein interdisziplinäres Seminar der Mathematik- und Physikdidaktik angeboten (Holten und Krause 2018). Durch den Vergleich fachdidaktischer Inhalte werden dabei das eigene Fach reflektiert und das Bewusstsein für die Relevanz des anderen Faches gestärkt. Um Querverbindungen zu benachbarten Fächern im Unterricht authentisch zu gestalten, ist die Zusammenarbeit der Fächer nicht nur hilfreich, sondern erforderlich.

Galileo Galileis Untersuchungen zum freien Fall

Der folgende Textausschnitt aus Galileo Galileis Werk „Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mathematik und die Fallgesetze betreffend" gibt sein Experiment zum freien Fall wieder.

„Auf einem Lineal oder, sagen wir, auf einem Holzbrett von zwölf Ellen Länge, bei einer halben Elle Breite und drei Zoll Dicke, war auf dieser letzten schmalen Seite eine Rinne von etwas mehr als einem Zoll Breite eingegraben. Dieselbe war sehr gerade gezogen, und um die Fläche recht glatt zu haben, war inwendig ein sehr glattes und reines Pergament aufgeklebt; in dieser Rinne ließ man eine sehr harte, völlig runde und glattpolierte Messingkugel laufen. Nach Aufstellung des Brettes wurde dasselbe einerseits gehoben, bald eine, bald zwei Ellen hoch; dann ließ man die Kugel durch den Kanal fallen und verzeichnete in sogleich zu beschreibender Weise die Fallzeit für die gesamte Strecke: häufig wiederholten wir den einzelnen Versuch, zur genaueren Ermittlung der Zeit, und fanden gar keine Unterschiede, auch nicht einmal von einem Zehntel eines Pulsschlages. Darauf ließen wir die Kugel nur durch ein Viertel der Strecke laufen und fanden stets genau die halbe Fallzeit gegen früher. Dann wählten wir andere Strecken und verglichen die gemessene Fallzeit mit der zuletzt erhaltenen und mit denen von ⅔ oder ¾ oder irgend anderen Bruchteilen; bei wohl hundertfacher Wiederholung fanden wir stets, daß die Strecken sich verhielten wie die Quadrate der Zeiten: und dieses zwar für jedwede Neigung der Ebene, d.h. des Kanals, in dem die Kugel lief. Hierbei fanden wir außerdem, daß auch die bei verschiedenen Neigungen beobachteten Fallzeiten sich genau so zueinander verhielten, wie es weiter unten unser Autor andeutet und beweist.

Zur Messung der Zeit stellten wir einen Eimer voll Wasser auf, in dessen Boden ein enger Kanal angebracht war, durch den sich ein feiner Wasserstrahl ergoß, der mit einem kleinen Becher während einer jeden beobachteten Fallzeit aufgefangen wurde: das dieserart aufgesammelte Wasser wurde auf einer sehr genauen Waage gewogen; aus den Differenzen der Wägung erhielten wir die Verhältnisse der Gewichte und die Verhältnisse der Zeiten, und zwar mit solcher Genauigkeit, daß die zahlreichen Beobachtungen niemals merklich voneinander abwichen." (zitiert nach Mudry (1987, 2, 393f.)

Auftrag 1

a) Beschreibe den Aufbau des Versuchs von Galilei.
b) Wie hat Galilei die Zeit gemessen?
c) Interpretiere das Ergebnis von Galilei. Was meint er, wenn er sagt *„daß die Strecken sich verhielten wie die Quadrate der Zeiten"*?

Auftrag 2

Wir betrachten nun einen aus 5 Meter Höhe herunterfallenden Gegenstand. Verwenden Sie die Formel des Fallgesetzes in heutiger Form: $s(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2$ mit $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$.

a) Wie lange braucht der Gegenstand, bis er auf dem Boden aufkommt?
b) Geschwindigkeiten geben immer das Verhältnis einer Streckendifferenz zu einer Zeitdifferenz an.
Diese lässt sich somit in einem Intervall $[t_1; t_2]$ mit der Formel $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ angeben.
Bestimme die Geschwindigkeit für die Intervalle [0s ; 0,2s], [0,2s ; 0,4s] usw.
c) Wie könnte man die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt möglichst genau bestimmen? Bestimme die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 0,5s möglichst genau?

Kasten 1. Aufgaben zu Galileos Untersuchungen zum freien Fall

<u>Lösung zu Auftrag 1:</u>

a) Der Versuch von GALILEI ist folgendermaßen aufgebaut. Auf einem ca. 14 Meter langen Holzbrett ist eine Rinne mit einem Durchmesser von etwa 2,5 cm über die gesamte Länge eingelassen. Die Rille ist mit Pergament ausgekleidet, um eine glatte Oberfläche zu erreichen. Auf einer Seite wird das Holzbrett um etwa ein bis zwei Meter angehoben. In die Rille wird eine Messingkugel gesetzt. Zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen Strecke und Zeit wird die Zeit für verschieden lange Strecken (ganze Rinne, halbe Rinne, ...) bestimmt.

b) Die Zeitmessung erfolgt bei GALILEI mit einem gefüllten Wassereimer in dem sich ein kleines Loch befindet. Durch dieses Loch fließt gleichmäßig Wasser in einen zweiten Behälter. Die sich im zweiten Behälter befindende Wassermenge ist proportional zur vergangenen Zeit und wird mit einer Waage bestimmt.

c) GALILEI beschreibt die Proportionalität von der Strecke s und der Zeit zum Quadrat t^2. Mit heutigen Mitteln lässt sich die Proportionalitätskonstante für den freien Fall unter Vernachlässigung der Luftreibung ungefähr mit $0{,}5\ g = 0{,}5 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beschreiben. Damit ergibt sich das Fallgesetz zu $s(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2$, wobei s(t) den zurückgelegten Weg und t die Fallzeit angibt.

<u>Lösung zu Auftrag 2</u>

a) $5\text{m} = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow t \approx \sqrt{\frac{10\text{m}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1\text{s}$

b) $v([0\text{s}\,;0{,}2\text{s}]) = \frac{s(0{,}2\text{s}) - s(0\text{s})}{0{,}2\text{s}} - 0\text{s} \approx \frac{0{,}1962\text{m}}{0{,}2\text{s}} \approx 0{,}98\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$v([0{,}2\text{s}\,;0{,}4\text{s}]) = \frac{s(0{,}4\text{s}) - s(0{,}2\text{s})}{0{,}4\text{s} - 0{,}2\text{s}} \approx \frac{0{,}7848\text{m} - 0{,}1962\text{m}}{0{,}2\text{s}} \approx 2{,}94\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeiten für die anderen Intervalle erfolgt analog.

c) Möchte man die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 möglichst genau bestimmen, so wählt man das Intervall $[t_1; t_i]$ möglichst kurz. Je näher t_i an t_1 heranrückt, desto genauer wird der Wert der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 angenähert. Man nennt diesen Wert auch Grenzwert. Er lässt sich für den freien Fall wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} v(t_1) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0{,}5\, g\, (t_1 + \Delta t)^2 - 0{,}5\, g\, t_1^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0{,}5\, g\, (t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2 - t_1^2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0{,}5\, g\, (2t_1\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 0{,}5\, g\, (2t_1 + \Delta t) = 0{,}5\, g\, 2t = g t_1\,. \end{aligned}$$

Somit ist die Geschwindigkeit $v(t)$ beim freien Fall proportional zur Zeit t, mit der Proportionalitätskonstanten $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Kasten 2. Lösungen zum Aufgabenblatt

Literatur

BAUMANN, A. (2011). Eine kritische Betrachtung zum Thema „Modellierungsaufgaben“ anhand von Beispielen aus dem hessischen Zentralabitur 2009. *Mathematikinformation 55*, 15–23.

GIERSEMEHL, I., JÖRGENS, T., JÜRGENSEN-ENGL, T., RIEMER, W., SONNTAG, R., & SPIELMANS, H. (2014). *Lambacher Schweizer Mathematik. Einführungsphase. Nordrhein-Westfalen.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

DANCKWERTS, R. & VOGEL, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten.* Berlin, Heidelberg: Springer.

HENN, H.-W. (2018). Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis. In: H.-S. SILLER, G. GREEFRATH, & W. BLUM, (Hg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4* (S.145–160). Wiesbaden: Springer.

HOLTEN, K. & KRAUSE, E. (2018). InForM PLUS vor der Praxisphase. Zwischenbericht eines interdisziplinären Elements in der Lehramtsausbildung an der Universität Siegen. In: M. DEGELING et al. (Hg.), *Herausforderung Kohärenz: Praxisphasen in der universitären Lehrerbildung. Bildungswissenschaftliche und fachdidaktische Perspektiven* (S. 260–274). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

JAHNKE, T. (2005). *Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. https://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user_upload/Prof-Dida/Jahnke/Juengere_Vortraege_und_Aufsaetze/pdf/15_Jahnke_Authentizitaet-von-Mathematikaufgaben.pdf* (29.11.2019).

KRAUSE, E. (2016). Erkenntnistheoretische Parallelen zwischen Schulmathematik und -physik. *Beiträge zum Mathematikunterricht, 49*, 581–584.

MUDRY, A. (1987). *Galileo Galilei. Schriften – Briefe – Dokumente.* München: Beck.

NEUBRAND, M., BIEHLER, R., BLUM, W., COHORS-FRESENBORG, E., FLADE, L., KNOCHE, N., LIND, D., LÖDLING, W., MÖLLER, G. & WYNANDS, A. (2001). Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. *ZDM 33(*2), 45–59.

STOFFELS, G. (2017). Tomaten Erzeugen Parabeln – Analyse einer Aufgabe mit nicht authentischem Realkontext aus authentischen Perspektiven. *Der Mathematikunterricht 63*(5), 41–49.

WIATER, W. (2004). Wege zum nachhaltigen Lernen. *Lehrerinfo 3*, 5–8.

WINTER, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *DMV Mitteilungen 2*, 35–41.

WITZKE, I., & KRAUSE, E. (Hrsg.) (2017). Mathematikunterricht im Kontext physikalischer Anwendungen – Grundlegungen und Konzepte zu fächerverbindendem Unterricht. *Der Mathematikunterricht 63*(5).

FREDERIK DILLING, dilling@mathematik.uni-siegen.de, ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Siegen.

DR. EDUARD KRAUSE, krause@physik.uni-siegen.de ist Akademischer Oberrat an der Universität Siegen.

PAUL WEISENHORN

Zu: Sangaku – Aufgaben aus der Japanischen Tempelgeometrie

(I. RUBIN in MNU-Journal 72/6 (2019), S. 478 ff)

In dem Artikel von Herrn RUBIN tritt im Lösungsweg auf Seite 482 beim Term (4) und Term (7) folgender Satz auf, „*dass der Inkreisradius die halbe Summe der Dreiecksseiten ist*“, was natürlich falsch ist. Richtig ist hingegen, dass im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c für den Inkreisradius r die Gleichung

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

gilt, wie sie auch in den Formeln (3) und (5) angewendet wird. In den Formeln (7) und (8) steht jedoch ein Pluszeichen vor der Hypotenusenlänge.

Nachfolgend ist ein alternativer Lösungsweg beschrieben.

$$x = 4r. \qquad (1)$$

Im Dreieck EBF gilt $FU = FV = 3r$ und $BV = BW = u$.

Die Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS ergibt

$$(3r+u)^2 = (4r)^2 + (r+u)^2 \Leftrightarrow u = 2r. \qquad (2)$$

Damit folgt

$$BE = 3r. \qquad (3)$$

Da $DF = 4r$ ist das Dreieck ADF um den Faktor 4/3 größer als das ähnliche Dreieck FEB. Daraus folgt

$$R = \tfrac{4}{3}r. \qquad (4)$$

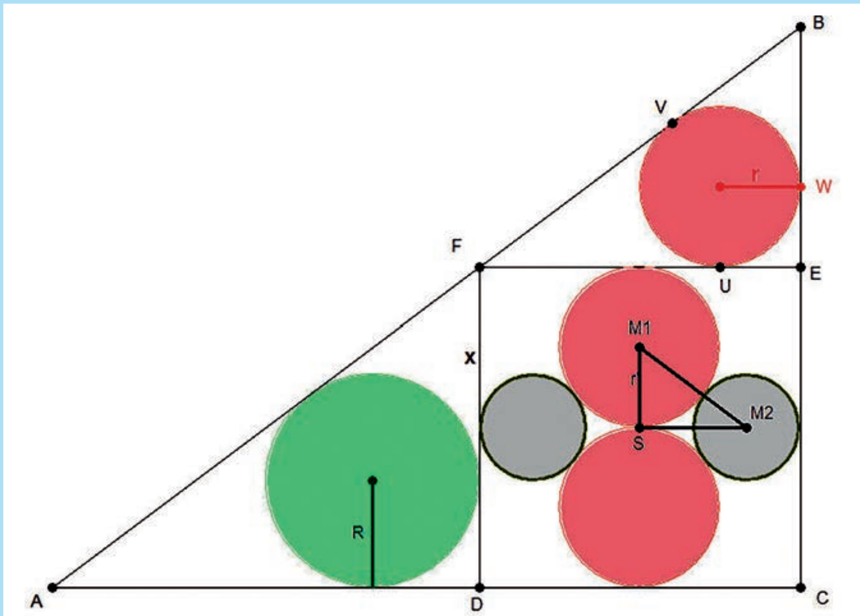

Abb. 1. Zur Lösung des Problems aus dem Akahagi-Tempel

Im Verbindungsdreieck der Mittelpunkte vom grauen und roten Kreis ergibt sich mit dem Satz von PYTHAGORAS

$$r^2 = (2r-t)^2 + r^2.$$

Auflösen führt zu $r = \tfrac{3}{2}t$. (5)
Einsetzen von (5) in (4) ergibt

$$R = \tfrac{4}{3}r = 2t.$$