

3D-Druck im empirisch-gegenständlichen Mathematikunterricht



FREDERIK DILLING – FELICITAS PIELSTICKER – REBECCA SCHNEIDER – AMELIE VOGLER

In diesem Beitrag wird vor dem Hintergrund der Konzeption des empirisch-gegenständlichen Mathematikunterrichts ein praxistauglicher Ansatz für den Einsatz der 3D-Druck Technologie vorgestellt. Auf dieser Grundlage werden ausgewählte und erprobte Unterrichtsszenarien von der Grundschule bis in die Sekundarstufen skizziert und sowohl konkrete Einblicke in Möglichkeiten zur praktischen Umsetzung als auch spezifische Erkenntnisse aus den jeweiligen Unterrichtsversuchen aufgezeigt.

1 Einleitung

Innovative Technologien wie die 3D-Druck Technologie haben großes Potential, das Mathematiklernen nachhaltig weiter-

zuentwickeln. Sie stellen verschiedene Arten chancenreicher Szenarien für den Mathematikunterricht bereit, um das mathematische Lernen im praktischen Unterrichtsgeschehen tiefgreifend weiterzuentwickeln. Dieses Potential belegen auch ver-

schiedene einschlägige Forschungsergebnisse der letzten Jahre (u. a. PIELSTICKER, 2020; DILLING, 2019; DILLING & VOGLER, 2021; DILLING & WITZKE, 2020a), auf deren Basis praxistaugliche Konzepte und konkrete Unterrichtssequenzen entwickelt wurden (DILLING, MARX, PIELSTICKER, VOGLER & WITZKE, 2021). Im folgenden Beitrag wird dargelegt, wie ein sinnvoller Einsatz der 3D-Druck Technologie im Mathematikunterricht von der Grundschule bis in die Sekundarstufen gedacht und umgesetzt werden kann.

Es werden unterschiedliche Nutzungsszenarien für die 3D-Druck Technologie im Mathematikunterricht aufgezeigt und vor dem Hintergrund eines empirisch-gegenständlichen Mathematikunterrichts (ein Mathematikunterricht mit empirischen Objekten) ein praxistauglicher Ansatz vorgestellt. Auf dieser Grundlage werden ausgewählte, erprobte Unterrichtsszenarien skizziert und dabei sowohl konkrete Einblicke in unterrichtspraktische Umsetzungsmöglichkeiten gegeben als auch spezifische Erkenntnisse aus den jeweiligen Unterrichtsversuchen aufgezeigt. Aus Sicht der Autor/inn/en ist es von besonderer Bedeutung, dass beim Einsatz der 3D-Druck Technologie stets die mathematische Bildung der Schüler/innen im Vordergrund steht – sich der Einsatz der 3D-Druck Technologie im Mathematikunterricht also über die dadurch gewonnenen Chancen für die mathematischen Lernprozesse der Schüler/innen legitimiert.

2 Nutzungsszenarien des 3D-Drucks im Mathematikunterricht

Unter der 3D-Druck Technologie wird nicht nur der 3D-Drucker als Hardware zur Herstellung von Objekten gefasst. Hinzu kommt Software zur Erstellung von Objekten sowie zur Steuerung des Druckprozesses. Das Erlernen des technischen Umgangs sollte dabei nicht nur Teil des Informatik- oder Technikunterrichts sein, sondern auch im Mathematikunterricht diskutiert werden, damit Möglichkeiten und Grenzen der Technologie fachspezifisch kennengelernt werden können (DILLING & WITZKE, 2019).

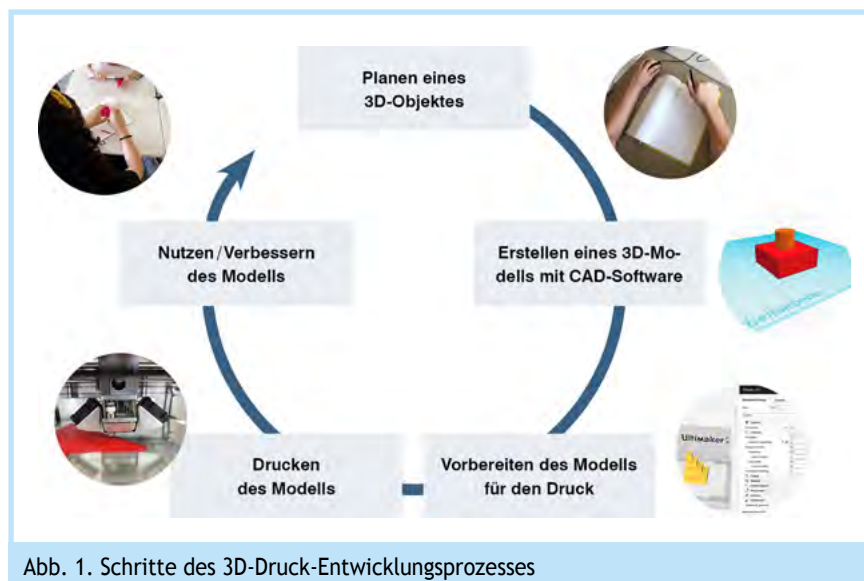


Abb. 1. Schritte des 3D-Druck-Entwicklungsprozesses

Der 3D-Druck-Entwicklungsprozess lässt sich in verschiedene Schritte unterteilen (Abb.1).

1. Zunächst sollte ein zu entwickelndes Objekt sorgfältig geplant werden - dadurch können viele Probleme im weiteren Prozess vermieden werden.
2. Auf die Planung folgt das Erstellen eines 3D-Modells mit Computer-Aided-Design Software (CAD-Software). Hier gibt es verschiedene Konstruktionsmethoden. Die Auswahl adäquater Software wird sowohl durch den Inhalt als auch die Lerngruppe bedingt.
3. Das konstruierte 3D-Modell wird als STL-Datei exportiert und kann dann in einer Slicer-Software für den Druck vorbereitet werden. Dabei werden verschiedene Einstellungen unter anderem in Bezug auf Größe und Qualität für einen konkreten Drucker vorgenommen. Die Daten können als gcode-Datei exportiert werden und sind damit durch den 3D-Drucker lesbar.
4. Nach dem eigentlichen Drucken des Objektes werden Haftungs- und Stützmaterialien entfernt.
5. Damit wird es im Unterricht nutzbar oder kann bei nicht zufriedenstellendem Ergebnis überarbeitet werden.

Die 3D-Druck Technologie kann den Mathematikunterricht auf verschiedene Weise beeinflussen. Es können insbesondere vier Nutzungsszenarien unterschieden werden (WITZKE & HOFFART, 2018; DILLING & WITZKE, 2020b).

1. Zunächst kann der 3D-Drucker zur Reproduktion existierender Materialien verwendet werden.
2. Alternativ kann die Lehrperson auch Arbeitsmittel zur Nutzung im Mathematikunterricht selbst entwickeln.
3. Die 3D-Druck Technologie kann zudem im Unterricht durch die Schüler/innen zur Entwicklung von Materialien eingesetzt werden.
4. Zuletzt ist die Technologie selbst auch ein interessantes Artefakt, dessen Untersuchung im Unterricht Anwendungen mathematischer Konzepte aufzeigen kann.

Die wohl größte Veränderung der Lernprozesse wird erreicht, wenn die Schüler/innen geeignete Materialien im Mathematik-

unterricht selbst entwickeln. Daher soll dieser Beitrag insbesondere Impulse für das dritte Szenario setzen. Der Einsatz im Unterricht kann entweder bei der Einführung in ein neues Thema oder in Übungsphasen bei der Anwendung von gelerntem Wissen geschehen. Die Aufgabenstellungen sollten dabei eng genug gefasst werden, sodass die Arbeit am mathematischen Inhalt erfolgt, aber den Lernenden bei der Gestaltung der Objekte dennoch genügend Raum gelassen wird, um ihre eigenen Ideen und Vorstellungen einbringen zu können. Dies kann erreicht werden, indem ein klares Ziel der Arbeitsphase formuliert bzw. gemeinsam mit den Schüler/innen identifiziert wird, gleichzeitig die Lösungswege und die konkrete Umsetzung aber offen gelassen werden.

Auf diese Weise entsteht eine Vielzahl von sehr unterschiedlichen Objekten, die zu interessanten Diskussionen und Aushandlungsprozessen zwischen den Schüler/innen führen können (PIELSTICKER, 2020). Beispielsweise in Bezug auf die Einheit zu den Binomischen Formeln (Abschnitt 3.2) können Schüler/innen je nach konkreter Aufgabenstellung 3D-gedruckte Plättchen mit unterschiedlichen Maßen entwickeln. Die Auseinandersetzung mit den 3D-gedruckten Plättchen zu den Binomischen Formeln kann im Unterricht zu einer Bedeutungsaushandlung über die Konzepte „Fläche“ und „Flächeninhalt“ führen. Auch könnte im Unterricht zur Diskussion gestellt werden, was beispielsweise alle erstellten 3D-gedruckten Plättchen zur 1. Binomischen Formel verbindet und worin diese unterschiedlich sind. Der Lehrperson bietet sich so ein Blick auf den Wissensstand und die Auffassungen der einzelnen Lernenden.

Unterricht wird durch den Einsatz der 3D-Druck Technologie gewissermaßen aufgebrochen und bietet Platz für innovative Schülerideen. Die Struktur des Unterrichts verlagert sich insbesondere weg von festen aufeinanderfolgenden Schritten für alle Schüler/innen hin zu einem vorher definierten Lernziel, hin zu einem eigenverantwortlichen Arbeiten über einen langen Zeitraum in Gruppen gemeinsam an einer Aufgabenstellung. Indem sie den gesamten Entwicklungsprozess von der Planung über die Konstruktion mit einem CAD-Programm und dem Drucken mit einem 3D-Drucker bis zur Nutzung oder Überarbeitung des Objekts durchlaufen, wird wesentlich die Auseinandersetzung mit dem Thema auf unterschiedlichen Ebenen fokussiert. Durch das Identifizieren und Lösen von Problemen und Herausforderungen während der Entwicklung wird zudem die Problemlösefähigkeit und das gemeinsame Arbeiten an einer Aufgabe gestärkt. Auf natürliche Weise entsteht eine Entwicklung weg von einem lehrerzentrierten hin zu einem schülerzentrierten Unterricht, in welchem Schüler/innen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozess übernehmen (PIELSTICKER, 2020).

3 Empirisch-gegenständlicher Mathematikunterricht mit 3D-Druck

Empirisch-gegenständlicher Mathematikunterricht basiert konzeptionell auf der theoretischen Rahmung und dem erkenntnistheoretischen Ansatz der empirischen Theorien (BURSCHEID & STRUVE, 2020) und den dort verankerten Begriffen. In diesem Abschnitt wird weniger auf eine theoretische Betrachtung als mehr auf eine Darstellung eines empirisch-gegenständlichen Mathematikunterrichts im Kontext digitaler Medien eingegangen. Das nachfolgende Schülerinnenzitat aus einer Erhebung zum empirisch-orientierten Mathematikunterricht mit der 3D-Druck Technologie demonstriert, worauf es in einem auf diese Weise entwickelten Mathematikunterricht ankommt: „*Endlich kann ich sehen und anfassen, was ich in Mathematik gemacht habe.*“ (Zitat der Schülerin Lisa, 13 Jahre, aus DILLING, PIELSTICKER & WITZKE, 2020a, 1). Empirisch-orientierter Mathematikunterricht unterscheidet sich insofern von einem empirisch-gegenständlichen Mathematikunterricht, als die Lehrkraft

die bewusste didaktische Entscheidung trifft, mit Objekten wie beispielsweise Würfeln in der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Zeichenblattfiguren in der Geometrie als den mathematischen Objekten des Unterrichts zu arbeiten. Die Objekte dienen dann „*nicht als Veranschaulichung eigentlich abstrakter mathematischer Begriffe, sondern die Objekte sind die Gegenstände des Unterrichts*“ (PIELSTICKER, 2020, 45).

Lisa und ihre Mitschüler/innen (8. Klasse einer Sekundarschule in NRW) hatten im Mathematikunterricht bereits zu Inhalten wie der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder zu Termen und Gleichungen mit der 3D-Druck Technologie gearbeitet. Lisa äußert obiges Zitat bei der Berechnung von Volumina und Oberflächeninhalten in Bezug auf zusammengesetzte Körper, die mit CAD-Software (Tinkercad™) entwickelt und mit 3D-Druck erstellt wurden. Die Schülerin bindet ihre mathematischen Begriffe an die im Kontext des Mathematikunterrichts mit der 3D-Druck Technologie entwickelten Objekte – empirische Objekte – die sie „*sehen und anfassen*“ kann. Eine Bedeutung entwickeln die mathematischen Begriffe (z. B. Oberflächeninhalt) für Lisa im Umgang mit den empirischen Objekten (z. B. zusammengesetzte 3D-gedruckte Körper). Dabei sind die empirischen Objekte Mathematik – eben Lisas Mathematik – was auch an ihrem Nachsatz „*was ich in Mathematik gemacht habe*“ deutlich wird. Die Schülerin bindet ihr Wissen an die empirischen (mathematischen) Objekte. HEFENDEHL-HEBEKER hält diesbezüglich fest: „*Im Sinne dieser Sprechweise haben die Begriffe und Inhalte der Schulmathematik ihre phänomenologischen Ursprünge überwiegend in der uns umgebenden Realität. [...] Jedoch bleibt insgesamt die ontologische Bindung an die Realität bestehen, wie es bildungstheoretisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgabe und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt ist.*“ (HEFENDEHL-HEBEKER, 2016, 16).

Der Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge, z. B. auch der 3D-Druck Technologie (DILLING et al., 2021), findet im heutigen Mathematikunterricht immer häufiger statt. Dies ist nicht zuletzt auch auf die herausgehobene Rolle der Technologien in den Bildungsstandards zurückzuführen: „*Das Potential dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen, durch Verständnisförderung mathematischer Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten, mit der Reduktion schematischer Abläufe und der Verarbeitung größerer Datenmengen, durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von Kontrollmöglichkeiten. Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung.*“ (KULTUSMINISTERKONFERENZ, 2012, 13).

Mit digitalen Medien und Werkzeugen scheint der Fokus dabei häufig auf einem Arbeiten mit empirischen Objekten zu liegen. Ein Mathematikunterricht mit empirischen Objekten (z. B. 3D-gedruckten Objekten) gibt dabei Anlass zu beispielgebundenen Begründungen und zu einer Reduzierung kalkülhafter

Arbeitens. Als digitale Fabrikationstechnologie ermöglicht die 3D-Druck Technologie die Entwicklung von individuellen dreidimensionalen Objekten und kann damit in Lernprozessen in ganz unterschiedlichen Themen Einsatz finden. Einige Themenfelder unterschiedlicher Schulstufen sind weiter unten beschrieben. Nach den bereits erwähnten Nutzungsszenarien kann die 3D-Druck Technologie den Mathematikunterricht auf unterschiedliche Weise beeinflussen. In verschiedenen Studien (NG, 2017; NG & SINCLAIR, 2018; DILLING & WITZE, 2020a; PIELSTICKER, 2020; PIELSTICKER & WITZKE, 2021; DILLING et al., 2021; PIELSTICKER, 2021) wird bereits der Einsatz der 3D-Druck Technologie zur mathematischen Wissensentwicklung beschrieben und untersucht. Als besonders vielversprechend hat sich dabei die eigenständige Entwicklung von (empirischen) Objekten durch die Schüler/innen herausgestellt. An den entstehenden 3D-gedruckten Objekten konstituieren die Schüler/innen ihr mathematisches Wissen und nutzen dieses zur Entwicklung und Begründung von Zusammenhängen. So haben Lernende mit der 3D-Druck Technologie beispielsweise die Möglichkeit, eigenständig Materialien zur Begründung der Binomischen Formeln (PIELSTICKER, 2020) und zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit (DILLING & WITZKE, 2020a) zu entwickeln. Entscheidend für die Begründungen sind in diesen Zusammenhängen die Aushandlungsprozesse zwischen den Schüler/innen (PIELSTICKER, 2020), die zu einer Präzisierung der Begriffe und Schülertheorien führen. Als herausfordernd kann dabei der „hohe Grad an kontextueller Bindung [(Bauersfeld, 1983)] des aufgebauten Wissens auf Grund der vielen verschiedenen Situationen im Entwicklungsprozess (analoge Entwicklungsphase, Arbeit im CAD-Programm, Verwendung der 3D-gedruckten Plättchen, etc.) und der sich ergebenden Einschränkungen des Materials (z. B. nur für die erste und zweite Binomische Formel geeignet)“ (DILLING, PIELSTICKER & WITZKE, 2020a, 15) beschrieben werden.

4 Unterrichtsbeispiele

4.1 Der Pantograph – 3D-Druck in der Primarstufe

Bereits in der Primarstufe kann die 3D-Druck Technologie Anwendung im Mathematikunterricht finden. Die Schüler/innen untersuchen zum Beispiel Parkettierungstechniken, entwickeln Kantenmodelle geometrischer Körper oder bauen einen Pantographen, ein historisches Zeichengerät, nach (siehe u.a. PIELSTICKER, HOFFART & WITZKE, 2021; DILLING & WITZKE, 2020b; DILLING, 2020; DILLING & WITZKE, 2020c; HOFFART & PIELSTICKER, 2018; RAHN & DILLING, 2020). An dieser Stelle wird die Idee des Pantographen als Anwendungsbeispiel der 3D-Druck Technologie im Mathematikunterricht der Primarstufe aufgegriffen, seine Funktionsweise kurz erläutert, erste Forschungsergebnisse zum Einsatz im Mathematikunterricht dargestellt und konkrete Umsetzungsideen für den Unterrichtsalltag vorgestellt.

Der Pantograph (griechisch: *Alleszeichner*) ist ein historisches Zeichengerät, welche um das Jahr 1603 von dem Optiker und Astronom CHRISTOPH SCHREINER zum maßstäblichen Kopieren, Verkleinern und Vergrößern verschiedenster Zeichenvorlagen erfunden wurde (Abb. 2). Bis in das 20. Jahrhundert fanden Weiterentwicklungen dieses Zeicheninstrumentes Anwendung in

Vermessungsämtern, Ingenieurs- oder Architekturbüros, beispielsweise zum Vergrößern oder Verkleinern von Karten oder Plänen.



Abb. 2. Pantograph der Firma Rumold aus Holz

Die Funktionsweise dieses Zeichengerätes basiert aus technischer Sicht auf einer speziellen Parallelogrammkonstruktion, welche eine zentrische Streckung der mit dem Fahrstift abgefahrenen Ursprungsfigur mittels des Zeichenstifts erstellt. Je nach Einstellung des Gelenkparallelogramms ändert sich der Streckfaktor der Zeichnung. Die schematische Darstellung (Abb. 3) zeigt einen Pantographen, für welchen der Streckfaktor 3 mittels Strahlensatz ($|\overline{ZA'}| : |\overline{ZA}| = |\overline{ZB'}| : |\overline{ZB}|$) bestimmt werden kann. Dies bedeutet, dass der der Punkt B' , an welchem der Zeichenstift verschraubt ist, um drei Längeneinheiten verschoben wird, während der Punkt B , an welchem dem Fahrstift befestigt ist, um eine Längeneinheit durch den Nutzer verschoben wird. Werden Fahrstift und Zeichenstift vertauscht, so entspricht der neue Streckfaktor dem Kehrwert des vorherigen Streckfaktors.

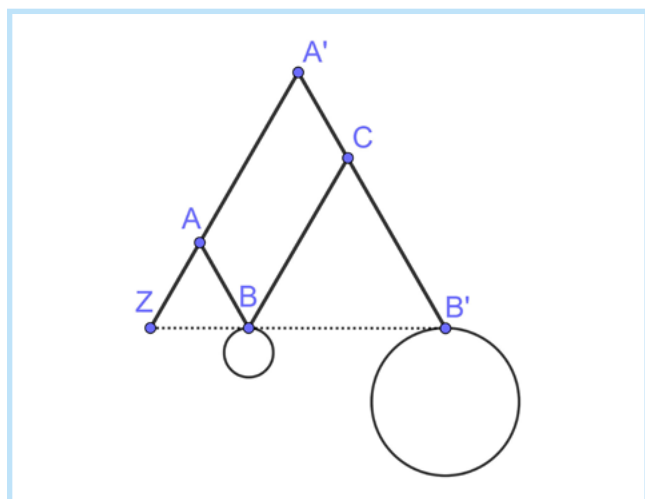


Abb. 3. Darstellung eines Pantographen

Gerade im Mathematikunterricht der Primarstufe wird eine möglichst handlungsorientierte Gestaltung des Lehrens und Lernens von Mathematik gefordert. Wie erste Erkenntnisse zur Implementation des 3D-Drucks in der Grundschule zeigen, bietet die Nachentwicklung des oben vorgestellten Pantographen mittels der 3D-Druck Technologie ein für Schüler/innen besonderes anregendes und motivierendes Lernszenario zur Untersuchung des historischen Zeichengerätes (DILLING & VOGLER, 2020). In der genannten empirischen Studie sollten die Lernenden zunächst einen Bausatz für einen Pantographen mit dem Streckfaktor 2 nachentwickeln, da solch ein Pantograph (Abb. 2) aufgrund der recht einfachen Längenvorgaben (zwei lange Schiene und zwei Schienen mit entsprechend halber Länge) leicht zu konstruieren und auch im anschließenden Erkundungsprozess der Strukturen und Eigenschaften beim Abbilden verschiedener Figuren für alle Schüler/innen zugänglich erscheint.

Die CAD-Software Tinkercad™ bietet für Schüler/innen intuitiv verständliche Funktionen wie das Gruppieren von Volumen- und Bohrkörpern und direktes Verändern der Parameter der per Drag and Drop auf die Arbeitsebene geschobenen Körper, welche sie zur Konstruktion der Schienen des Pantographen nutzen (Abb. 4). Zudem scheint es gewinnbringend zu sein, den Entwicklungsprozess eines Pantographen im Unterricht der dritten oder vierten Klassenstufe explizit in verschiedene Phasen zu unterteilen, welche durch entsprechende Instruktionen der Lehrkraft begleitet werden:

- Erkundung und Planung (hier z. B. auch Schreiben einer Bauanleitung),
- Konstruktion einzelner Bauteile im CAD-Programm,
- 3D-Druck der eigens entwickelten Bauteile,
- Zusammensetzen der 3D-gedruckten Bauteile,
- Zeichnen mit dem Pantographen (Testen der Funktionsweise),
- Reflexion des Entwicklungsprozesses sowie Begründung, warum der Pantograph eine Figur maßstäblich verkleinert oder vergrößert.

Bevor die Schüler/innen mit der Konstruktion der Schienen im CAD-Programm beginnen, können sie zunächst aufgefordert werden, einen Bausatz des Pantographen zu skizzieren. Forschungsergebnisse der Fallstudie von DILLING & VOGLER (2020)

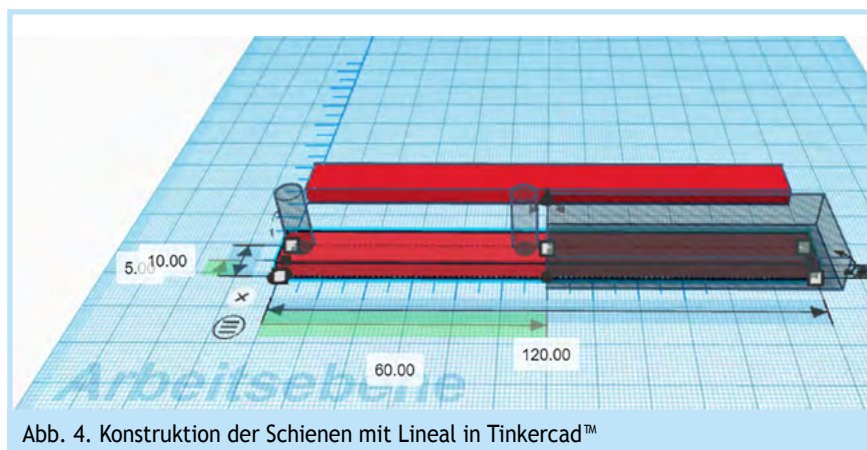


Abb. 4. Konstruktion der Schienen mit Lineal in Tinkercad™

zeigen, dass in der an die Planungsphase anknüpfende Konstruktionsphase im CAD-Programm „zuvor unpräzise skizzierte Bauteile [...] unter Beachtung weiterer Eigenschaften sorgfältig [durch die Lernenden] konstruiert [werden]“ (DILLING & VOGLER, 2020, 123). Dabei spielen insbesondere die im Programm verfügbaren Körper Quader und Zylinder sowie deren Eigenschaften (Länge und Breite bzw. Durchmesser und Höhe) eine besondere Rolle. Die Lernenden dieser Fallstudie erkannten und reflektierten, dass sie die Schienen im Programm entwickeln können, indem sie Quader konstruieren, deren Länge sich halbieren lässt, um die kürzere Schienen mit halber Länge zu erhalten, wie dieses Zitat zweier Schülerinnen zeigt: „Emma: ‚Also bei der Länge da mussten wir, ehm, ne Länge nehmen, die man durch Zwei teilen kann, denn da gab’s auch zwei kleine Quader und die sollten die Hälfte, ehm, ...‘ Marie: ‚Von den Großen‘ Emma: ‚Ja, von den Großen messen‘“ (ebd., 118). Außerdem nutzen sie den Bohrkörper eines Zylinders, um entsprechende Löcher für die Schrauben zu entwerfen.

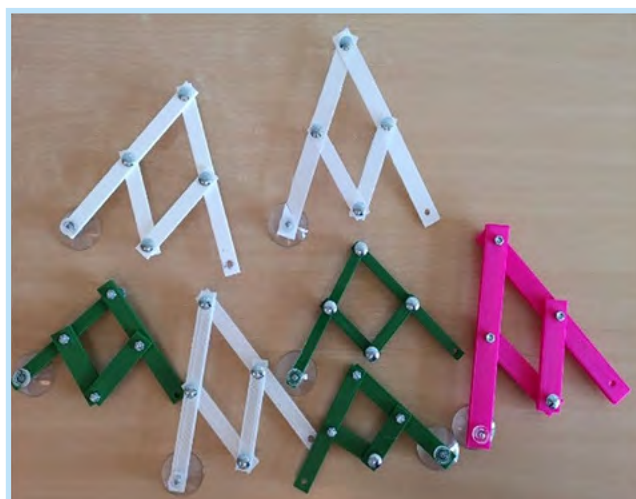


Abb. 5. Von Schüler/inne/n nachentwickelte Pantographen aus Fallstudie

In den Phasen des Zusammenbaus und Testen des selbstentwickelten Pantographen können die Schüler/innen dann tiefere Einsichten in die Funktionsweise erlangen. Die Schülerin Emma der Fallstudie berichtet in diesem Zusammenhang von einem erlebten „Aha-Moment“: „[...] und als ich den gebaut hab, hab ich auch eigentlich erst so richtig verstanden, wie das funktioniert. (lächelt)“ (ebd., 119). Daran anknüpfend können die Schüler/innen erste Begründungsansätze finden, warum der Pantograph ein, wie sie es beschreiben, „fließendes Nachzeichnen“ einer Figur ermöglicht. Sie argumentieren zum Beispiel damit, dass der Zeichenstift sich schneller bewegt als der Fahrstift. Die Lernenden erkennen, dass Fahrstift und Zeichenstift sich gleichzeitig bewegen, wobei der Zeichenstift stets einen weiteren Weg als der Fahrstift in derselben Zeit zurücklegt und somit eine größere Zeichnung erstellt. Die 3D-Druck

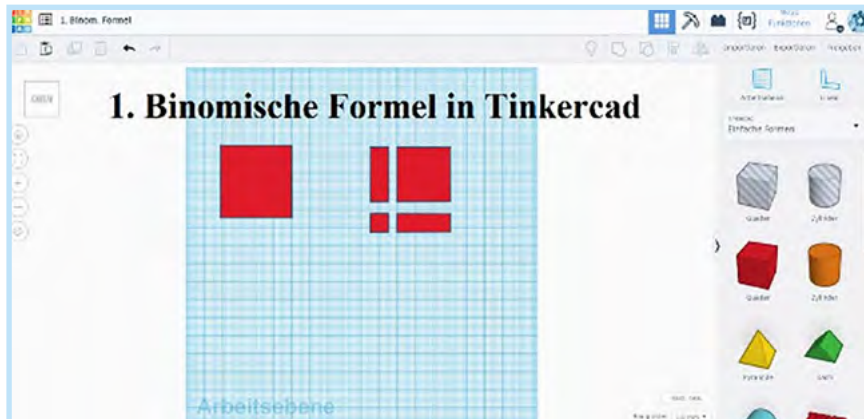


Abb. 6. Entwicklung der 3D-gedruckten Plättchen in Tinkercad™ für die 1. Binomische Formel

4.2 Die Binomischen Formeln – 3D-Druck in der Sekundarstufe I

Algebra bildet eine Grundlage für die Betrachtung und Beschreibung mathematischer Strukturen. Mithilfe von Variablen und Termen können Gesetze beschrieben, Formeln und Gleichungen hergeleitet und funktionale Abhängigkeiten untersucht werden (SCHIFFER, 2019). In der Sekundarstufe I liegt der Fokus daher nicht mehr auf Prozessen, Rechenoperationen und diskreten Ergebnissen, sondern auf Konzepten, Gleichungen, Beziehungen und mathematischen Strukturen. Die Schüler/innen sollen lernen, mit vorläufigen bzw. unbekanntem Größen auf symbolischer Ebene (BRUNER, 1974) flexibel und effektiv zu operieren und zu argumentieren. WITTMANN & MALLE (1993) beschreiben in diesem Zusammenhang zum Beispiel, dass Operationszeichen nicht notwendigerweise eine Handlungsaufforderung darstellen. PIELSTICKER (2020) beschreibt in diesem Zusammenhang auch, dass Operationszeichen von Schüler/innen als Teile eines Namens (z. B. im Term $x+3$) verstanden werden können. Die Bedeutung des Gleichheitszeichens als Zuweisungszeichen wird durch die Vorstellung eines Vergleichszeichens erweitert (SCHIFFER, 2019). Die Aushandlung des Begriffs „Variable“ ist nach WITTMANN & MALLE (1993) durch die Aspekte Gegenstands-, Einsetzungs- und Kalkülaspekt geprägt. Mit der 3D-Druck Technologie kann der Fokus dabei zunächst vor allem auf den Gegenstandsaspekt gelegt werden, bevor sich der Schwerpunkt im Mathematikunterricht auf Einsetzungs- und Kalkülaspekt verlagert.



Abb. 7. Entwicklung der 3D-gedruckten Plättchen im Slicer für die 1. Binomische Formel

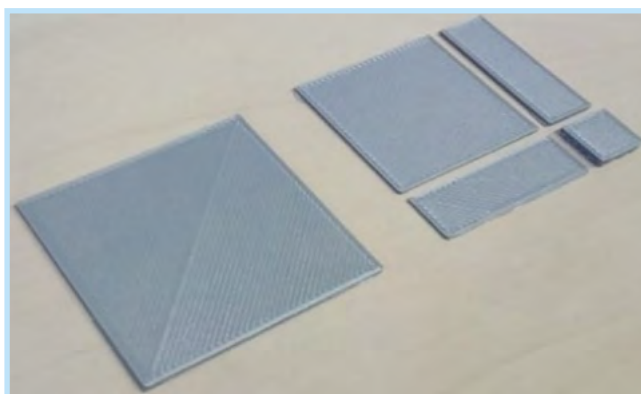


Abb. 8. Entwicklung der 3D-gedruckten Plättchen für die 1. Binomische Formel zur Weiterverwendung im Unterricht

Technologie stellt ein geeignetes Werkzeug dar, um eine selbstständige (Nach)Entwicklung eines Pantographen im Unterricht zu ermöglichen. Durch gezieltes Austesten der eigenen Pantographen (Abb. 5) erhalten die Lernenden erste, verständnisorientierte Einblicke in die mathematische sowie technische Idee (VOLLRATH, 2013) dieses historischen Zeichengerätes.

Das mathematische Denken hat seinen Ursprung nach TALL (2013) in dem praktischen Tun, und die Entwicklung mathematischen Wissens erfolgt immer kontextabhängig (BAUERSFELD, 1983). Viele algebraische Sachverhalte lassen sich beispielsweise durch geometrische Darstellungen unterstützen. Diese Querverbindungen – welche auch bereits in vielen Schulbüchern realisiert werden – sollen im Mathematikunterricht sinnvoll eingesetzt werden, um Algebra zu fordern und zu fördern (JASCHKE, 2009). Nachfolgend werden eine Vernetzung von Geometrie und Algebra am Fallbeispiel der Binomischen Formeln und zugehöriger 3D-gedruckter Plättchen vorgestellt und Möglichkeiten sowie potenzielle Herausforderungen des Einsatzes beschrieben.

Bei der Erstellung des Arbeitsmaterials für die 1. Binomische Formel werden die Plättchen zunächst mithilfe eines CAD-Programms entwickelt (Abb. 6), anschließend zum Druck vorbereitet (Abb. 7) und schließlich für die Weiterarbeit zu den Bino-

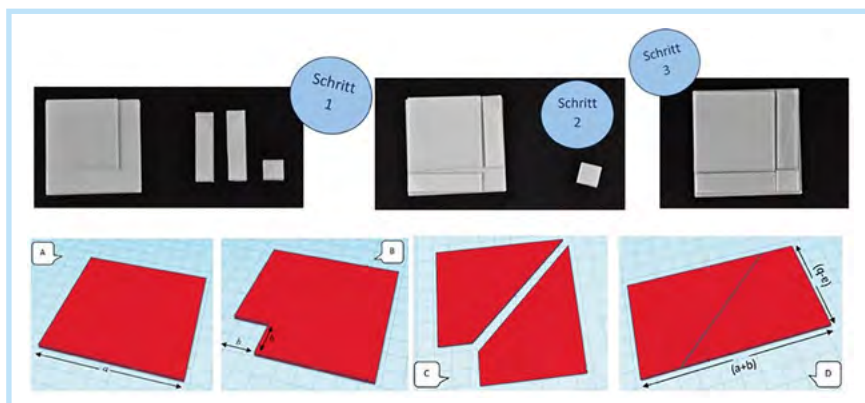


Abb. 9. Möglichkeiten 3D-gedruckter Plättchen zur 1. und 3. Binomischen Formel

mischen Formeln genutzt (Abb. 8). Für eine detailliertere Darstellung des Entwicklungsprozesses siehe DILLING et al. (2021).

Im Sinne des Nutzungsszenarios 3 (Abschnitt 2) könnten die Schüler/innen im Mathematikunterricht nach einer algebraischen Herleitung der 1. Binomischen Formel eigenständig an einer geometrischen Interpretation mithilfe von 3D-Druck Technologie (Abb. 9) überlegen. Insbesondere initiiert durch die selbstständige Entwicklung des Arbeitsmaterials kann eine vertiefte Auseinandersetzung mit z. B. der 1. Binomischen Formel, ihrer geometrisch-inhaltlichen Deutung und der Beziehung der Terme und Variablen erreicht werden.

In Abbildung 9 ist ebenfalls eine Möglichkeit zur 3. Binomischen Formel dargestellt. Die Entwicklung 3D-gedruckter Plättchen zur 2. Binomischen Formel kann als besonders herausfordernd gesehen werden und bietet sich als Knobelauftrag für Schüler/innen an.

Es gibt über die Beispiele hinaus auch weitere Möglichkeiten zur Erstellung der Plättchen zu den Binomischen Formeln. Daher wäre es im Mathematikunterricht gewinnbringend, die Schüler/innen ihre verschiedenen geometrischen Interpretationen und die zugehörigen 3D-gedruckten Plättchen vergleichen

zu lassen. Die Schüler/innen könnten dazu ihre 3D-gedruckten Plättchen tauschen und gegenseitig nachvollziehen bzw. zu der algebraischen Herleitung der Binomischen Formeln in Bezug setzen. Mit den Schüler/innen könnte zudem diskutiert werden, wo Schwächen und wo Stärken des erstellten Arbeitsmaterials liegen. Als weitergehende Problemstellung könnte gemeinsam mit den Schüler/innen im Mathematikunterricht überlegt werden, ob Arbeitsmaterial entwickelt werden kann, das für alle drei Binomischen Formeln nutzbar ist und wie dieses aussehen soll. Anknüpfend kann auch über den Fall

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ des Binomischen Lehrsatzes nachgedacht und auch dazu eine geometrische Interpretation (kubische Binomische Formel) entwickelt werden (Abb. 10).

Durch die eigene Herstellung des Arbeitsmaterials durch die Schüler/innen kann insbesondere eine Wissensvernetzung von Geometrie und Algebra initiiert werden. Die 3D-gedruckten Plättchen laden zum praktischen Tun (TALL, 2013) ein und ermöglichen gerade am Anfang eine Gewichtung hin zum Gegenstandsaspekt (WITTMANN & MALLE, 1993) und weg von einer Kalkülorientierung. Dabei entwickeln die Schüler/innen ihr Wissen im Umgang mit den empirischen 3D-gedruckten Plättchen, wodurch die Terme keine „bedeutungslosen Zeichen“ (WITTMANN & MALLE, 1993, 46) bleiben. Das Schülerwissen ist auf diese Weise ontologisch (an die physikalische Anwendungssituation der 3D-gedruckten Plättchen) gebunden. Dieser Aspekt stellt für die Wissensentwicklung im Mathematikunterricht neben den Chancen auch eine didaktische Herausforderung für die Lehrkraft dar. Das Wissen der Schüler/innen ist an die 3D-gedruckten Plättchen – kontextabhängig (BAUERSFELD, 1983) – gebunden. Für die Schüler/innen sind die 3D-gedruckten Objekte, mit denen im Mathematikunterricht umgegangen wird, „Mathematik“ (vgl. dazu auch obigen Abschnitt 3). In weiterführenden Untersuchungen wurde zudem beschrieben,

dass Schüler/innen Terme als Namen für bestimmte reale Objekte auffassen können (PIELSTICKER, 2020). Sie verstehen „ a^2 , ab und b^2 als Namen [...] und zwar als Namen von Plättchen“ (PIELSTICKER, 2020, 140).

4.3 3D-Druck-Stifte im Mathematikunterricht

Zur Einführung der 3D-Druck Technologie eignet sich unabhängig von der Vorerfahrung und dem Alter der Lernenden der Einsatz von 3D-Druck-Stiften. Ähnlich wie die durch den Rechner gesteuerte Düse eines 3D-Druckers extrudiert der 3D-Druck-Stift dünne Fäden von geschmolzenem Filament aus Kunststoff. Sobald das Material aus der Düse kommt, kühlt es ab und verhärtet. Dies ermöglicht dem Bediener des

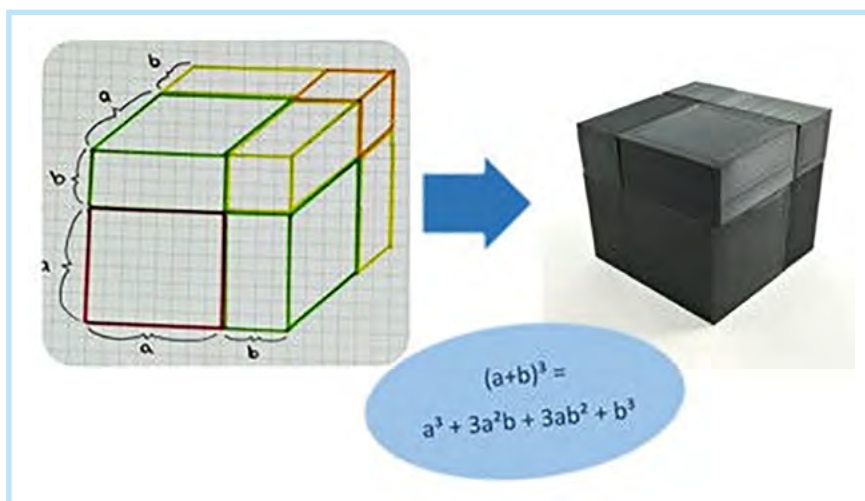


Abb. 10. Möglichkeit zur geometrischen Interpretation der kubischen Binomischen Formel

Stiftes, dreidimensionale Zeichnungen auf einer Oberfläche oder auch, mit etwas Übung und Geschick, frei in der Luft anzufertigen (Abb. 11). Im Mathematikunterricht können auf diese Weise mathematische Objekte wie Figuren, Körper, Geraden oder Funktionsgraphen bzw. Kurven als physische Objekte bzw. Modelle entwickelt werden. Stellvertretend für eine Vielzahl weiterer Anwendungsszenarien (DILLING et al., 2021) werden hier einerseits das Entwerfen zweidimensionaler Körpernetze sowie dreidimensionaler Kantenmodelle (Abb. 12) im Unterricht der Primarstufe und andererseits das Erkunden der Symmetrieeigenschaften von Funktionen im Unterricht der Sekundarstufe II (Abb. 13) vorgestellt.

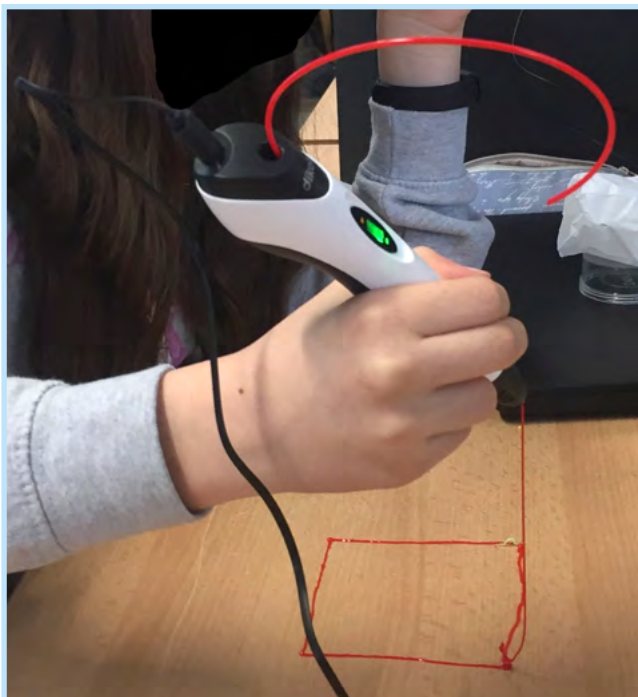


Abb. 11. Dreidimensionales Zeichnen

potenzial für 3D-Druck-Stifte gesehen werden. Die Schüler/innen können zunächst Modelle bekannter ebener Figuren (wie Rechtecke, Quadrate, Dreiecke und auch Kreise) mittels einer Vorlage anfertigen. Anschließend können sie erkunden, welche der im Unterricht eingeführten geometrischen Körper, sich aus den erstellten Modellen ebener Figuren zusammensetzen lassen, indem man z. B. Eckpunkte mit dem 3D-Druck-Stift verbindet. Dabei können sie Fragestellungen wie „Aus wie vielen Quadraten kann ich einen Würfel zusammensetzen?“ oder „Was müssen meine Dreiecke gemeinsam haben, damit ich mit ihnen eine Pyramide erstellen kann?“ bearbeiten. In Abbildung 12 sind Kantenmodelle abgebildet, welche im Rahmen eines Workshops zur 3D-Druck Technologie entstanden sind. Eine weitere Möglichkeit wäre es, Modelle verschiedener Körpernetze mit dem 3D-Druck-Stift zu drucken. Hier eignet sich der Einsatz flexiblen Filaments, sodass sich diese Modelle nach dem Druck zu einem Kantenmodell biegen lassen. Die Lernenden können sich hier unter anderem mit der Problemstellung beschäftigen, wie viele verschiedene Körpernetze es beispielsweise für einen Würfel gibt, und ihre Überlegung bezugnehmend auf ihre angefertigten Modelle begründen.

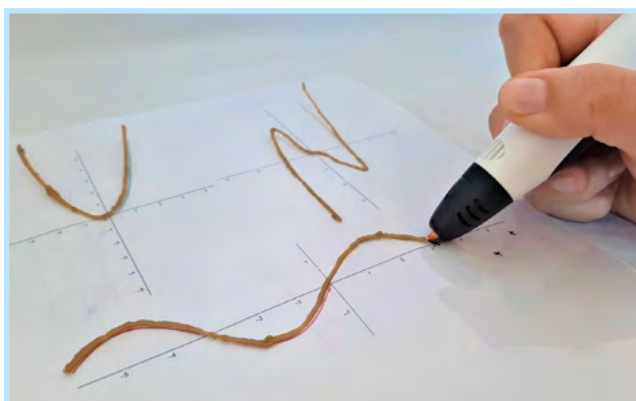


Abb. 13. Erkunden von Symmetrieeigenschaften von Funktionen

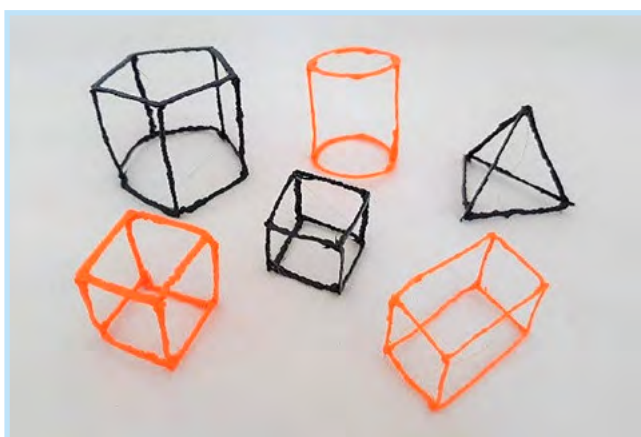


Abb. 12. Dreidimensionale Kantenmodelle

Ein bedeutender Schritt im Geometrieunterricht der Primarstufe ist der Übergang von Figuren der zweidimensionalen Ebene hin zu Figuren des dreidimensionalen Raumes. Insbesondere an dieser Schnittstelle kann zur Entwicklung und Unterstützung des räumlichen Vorstellungsvermögens hohes Einsatz-

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II können Schüler/innen die Symmetrieeigenschaften von Funktionen unter Verwendung des 3D-Druck-Stiftes erkunden. Arbeitsaufträge können hier beispielsweise das Nachzeichnen und Ergänzen eines Funktionsgraphen sein, sodass entweder eine zur y-Achse achsensymmetrische Funktion oder aber eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion entsteht (Abb. 13). Mit Hilfe der entstandenen Modelle können die Symmetrieeigenschaften durch Wenden bzw. Drehen enaktiv überprüft werden. Zudem können Untersuchungen vorgenommen werden, inwiefern die Symmetrieeigenschaften bei Verschiebung entlang der x- und/oder y-Achse erhalten bleiben sowie welche Symmetrieeigenschaften spezielle Funktionen wie die Sinus- oder Kosinusfunktion aufweisen. Hieran anknüpfend kann zur weiteren Erarbeitung wesentlicher Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion durch die Verwendung der 3D-Druck Technologie ein sogenannter „Sinusroller“ von den Lernenden entwickelt und mit dem 3D-Drucker gedruckt werden (DILLING et al., 2021).

An dieser Stelle soll darauf verwiesen werden, dass die 3D-Druck Technologie in der Sekundarstufe II, welche in diesem

Beitrag nicht im Fokus steht, neben dem Einsatz in der Funktionenlehre ebenfalls vielfältige und erprobte Anwendungsmöglichkeiten bereit hält wie beispielsweise die Nachentwicklung historischer Materialien der antiken Glücksspielkultur, um daran zentrale Begriffe der Stochastik weiterzuentwickeln, oder aber die Erstellung von Material zur inhaltlich-anschaulichen Begründung verschiedener Summenformeln in der Algebra (DILLING et al., 2021).

5 Ausblick

In diesem Beitrag konnte gezeigt werden, dass die 3D-Druck Technologie auf unterschiedliche Weise gewinnbringend für das Mathematiklernen von der Primarstufe bis in die Sekundarstufen hinein eingesetzt werden kann. Durch eine selbstständige Auseinandersetzung mit dem mathematischen Gegenstand in Design- und Entwicklungsprozessen zu gedruckten, mathematischen Objekten werden Lernprozesse tiefgreifend angeregt und mathematische Begriffe im Sinne des empirisch-gegenständlichen Mathematikunterrichts durch die Auseinandersetzung mit dem empirischen Gegenstand als tragfähiges Konzept (weiter-)entwickelt.

Mit der bisherigen Forschung und den daraus resultierenden unterrichtspraktischen Konzeptionen konnte innerhalb der letzten Jahre eine tragfähige Basis dafür entwickelt werden, die 3D-Druck Technologie langfristig in den regulären Mathematikunterricht zu implementieren. Dass der Einsatz einer neuen Technologie im Mathematikunterricht immer auch damit einhergeht, bestehende und vielleicht langjährig erfolgreich umgesetzte Unterrichtskonzepte ein Stück weit neu aufzubereiten,

liegt dabei auf der Hand und soll auch nicht verschwiegen werden. Erfahrungen aus ebenfalls fundierten Untersuchungen, Forschungsergebnissen und erprobten Lehrerfortbildungen zum Einsatz der 3D-Druck Technologie zeigen jedoch, dass der Einstieg in einen entsprechend innovativen Mathematikunterricht deutlich leichter ist, als es zuvor vermutet wurde, und dass die damit einhergehenden Veränderungen sowohl von Lehrer/innen/n als auch von Schüler/innen/n durchweg als Gewinn gewertet werden.

Literatur

Die umfangreiche Literaturliste befindet sich in der Online-Ergänzung zu diesem Artikel.



FREDERIK DILLING, dilling@mathematik.uni-siegen.de, ist wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Siegen.

Dr. FELICITAS PIELSTICKER, pielsticker@mathematik.uni-siegen.de, ist Studienrätin im Hochschuldienst an der Universität Siegen.

REBECCA SCHNEIDER, schneider@mathematik.uni-siegen.de, ist wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Universität Siegen.

AMELIE VOGLER, vogler2@mathematik.uni-siegen.de, ist wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Universität Siegen. ■