Forschungs- und Entwicklungsprojekt

Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt

gefördert durch die Deutsche Telekom Stiftung
als Leuchtturmprojekt zur Innovation in der Lehrerbildung

Leitung:
Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher (Universität Gießen)
Prof. Dr. Rainer Danckwerts (Universität Siegen)

Gießen / Siegen Januar 2005

Programmatische Vorstudie

1. Probleme und Ursachen

2. Zielsetzungen

3. Maßnahmen

3.1 Das Gießener Teilprojekt

3.2 Das Siegener Teilprojekt

1. Probleme und Ursachen

Die fachwissenschaftliche Ausbildung ist
in einer Reihe von Fächern (insbesondere auch
in der Mathematik und den Naturwissenschaften)
vielfach in hohem Maße dysfunktional."

(G. Müller, H. Steinbring, E. Ch. Wittmann 2002, S. 21)

Es ist lange bekannt, dass „das Selbstverständnis des Mathematiklehrers vorrangig durch sein Verhältnis zur Fachwissenschaft Mathematik bestimmt ist."[1] In einer vielbeachteten empirischen Studie über Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik aus dem Jahre 2002 konnte belegt werden, was viele einschlägig Beteiligte schon lange wussten und beobachtet haben: Lehramtsstudierende für die Sekundarstufe II haben im Vergleich zu Diplomstudierenden in nur geringem Umfang eine "belastbare, affektiv unterstützte Beziehung zur Mathematik". Sie erleben, so die Studie, ihr Studium deutlich weniger als Chance für vielseitige Lernerfahrungen und empfinden den Studienaufbau und die Lehrenden als viel weniger hilfreich[2]. Lehramtskandidaten fühlen sich vielfach als Studierende zweiter Klasse. Kurz: Im gymnasialen Lehramtsstudiengang für das Fach Mathematik mangelt es an sinn- und identitätsstiftenden Erfahrungen.[3]

Diese Sinnkrise hat vor allem inhaltliche und methodische Ursachen:

Durch den klassischen axiomatisch-deduktiven Aufbau der Fachveranstaltungen an der Universität wird den Studierenden die Wissenschaft Mathematik in der Regel als fertiges, in sich geschlossenes System vermittelt. Damit verbunden ist der Irrglaube, „man

[1] Bromme 1981, S. 260; vgl. hierzu auch den aktuellen Beitrag Merzyn 2004.

[2] vgl. Pieper-Seier 2002, S. 396-397

[3] Dieser Befund wird auch durch die Studie Bungartz/Wynands 1998 gestützt, in der Referendare rückblickend ihr Mathematikstudium für das Lehramt der Sekundarstufe II beurteilt haben.

könne mathematisches Verständnis allein durch eine logisch lückenlose Beschreibung des Stoffes mit Hilfe einer präzisen mathematischen Sprache herbeiführen.“[1] Die ursprünglichen Problemstellungen sowie die Prozesse der Begriffsbildung und der Theorieentwicklung in den jeweiligen Gebieten spielen höchstens eine untergeordnete Rolle. Zudem wird unzureichend thematisiert, wie die Inhalte der Hochschulmathematik mit der später zu unterrichtenden Schulmathematik in Verbindung gebracht werden können:

> „Nach semesterlanger Begegnung mit deduktiv durchorganisierter Hochschulmathematik (Fachwissenschaft) empfindet der Student zunehmend eine Kluft zwischen dieser Mathematik und der, die er einmal unterrichten soll.“ (Danckwerts 1983, S. 177)

Bereits Anfang des 20. Jahrhunderts beklagte der für die gymnasiale Schulreform einflussreiche Mathematiker Felix Klein die Defizite der Lehrerausbildung und beschrieb die inzwischen berühmte „doppelte Diskontinuität“:

> „Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; …Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen“ (Klein 1924).

Der Befund ist unverändert aktuell, wie auch die Bemerkung eines profilierten fachbezogenen Lehrerausbilders aus jüngster Zeit zeigt:

> „Es ist eine durch empirische Studien erhärtete Tatsache, daß Lehrer, von der Universität entlassen, ihren Unterricht in der Regel nach dem Muster des eigenen, seinerzeitigen Unterrichts gestalten. Das fachliche Mathematikstudium hat in der Regel wenig Spuren hinterlassen; das Studium wurde sehr oft nur als lästiges Zwischenstadium zwischen Schule und Schule empfunden.“ (Reichel 2000, S. 33)

Erschwerend kommt hinzu: Die Methoden der Vermittlung an der Universität sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung, und die „Übungen“ folgen in der Regel noch immer dem selben Instruktionsmuster, nicht selten sind sie reduziert auf ritualisiertes Vorrechnen von ‚perfekten’ Musterlösungen.

[1] Hefendehl-Hebeker 1998, S. 194

Die so akzentuierte, traditionelle Fachausbildung ist eher produkt- und weniger prozessorientiert[1], und sie setzt eher auf die Instruktion durch die Lehrenden als auf die aktive Konstruktion des Wissens durch die Lernenden[2]. In der Balance von *Produkt* und *Prozess* sowie von *Instruktion* und *Konstruktion* liegt der Schlüssel für eine Verbesserung der fachbezogenen Lehrerausbildung.
In ihrer Denkschrift zur Lehrerbildung[3] haben sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) und die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) gemeinschaftlich für Reformen der universitären Lehrerausbildung ausgesprochen. Der fachmathematische Teil der Ausbildung angehender Gymnasiallehrer hat hier eine Schlüsselrolle, weil man sich zunehmend bewusst wird, wie stark die eigenen Lernerfahrungen im Studium auch die Vorstellungen vom schulischen Mathematiklernen und -lehren prägen.

Darüber hinaus wird seit langem beklagt, dass die ohnehin nicht gerade üppig verankerte fachdidaktische Ausbildungskomponente oft isoliert neben den fachwissenschaftlichen Anteilen steht. In der Denkschrift heißt es hierzu:

> „Eine enge Verzahnung von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildung erscheint uns essenziell. Gegenwärtig ist der Abstand zwischen der konkreten fachinhaltlichen Ausbildung und der fachdidaktischen Umsetzung oft zu groß. Es sollte angestrebt werden, dass Fachwissenschaft und Fachdidaktik möglichst stark miteinander verzahnt werden und in Teilen sogar parallel laufen.“[4]

Ganz aktuell wird diese Einschätzung von der jüngsten Lehrerstudie der OECD unterstützt:

> „Das deutsche System der Lehrerbildung ist stark fachwissenschaftlich orientiert, und wenngleich es empfehlenswert und notwendig ist, dass Lehrkräfte über eine solide fachbezogene Wissensbasis verfügen, fehlt es doch häufig an einer Verbindung zum didaktischen Repertoire eines Lehrers.“ (OECD 2004, S.33)

Fazit: Die Defizite der gymnasialen Lehrerbildung im Fach Mathematik sind alt, gut beschrieben und unverändert aktuell.

---

[1] Jedes echte Verstehen ist prozesshaft.

[2] Gerade dieses Defizit wird in enger Verbindung zu den Befunden der PISA-Studie gesehen. Vgl. hierzu Hefendehl-Hebeker 2004.

[3] Stroth et al 2001

[4] Stroth et al 2001, S.5

2. Zielsetzungen

Die von den einschlägigen Verbänden und der OECD angemahnte Verbindung zwischen fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildungskomponente setzt eine passende Sicht auf die Fachwissenschaft Mathematik voraus. So wie angehende Industriemathematiker oder Forschungsmathematiker spezifische Sichtweisen auf das Fach haben müssen und in ihrem Studium auch entwickeln, braucht der angehende Gymnasiallehrer diese Möglichkeit ebenso. Nur dann kann er eine positiv besetzte Haltung gegenüber seinem Fach gewinnen, und diese ist entscheidend für seinen beruflichen Erfolg als Fachlehrer[1].

Vor diesem Hintergrund formulieren wir pointiert ***Desiderate*** einer verbesserten universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik[2] :

Inhaltlich

1. Zur prozessorientierten Auffassung der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin kann die **historisch-genetische Sicht** in besonderem Maße beitragen. Daher muss die Geschichte der Mathematik (ideengeschichtlich orientiert und curricular integriert) ihren festen Platz in den Fachstudien haben.[3]

2. Zu einem gültigen prozessorientierten Bild von Mathematik gehört zwingend die Wechselwirkung zwischen der deduktiv organisierten Mathematik und ihren außermathematischen Anwendungen. Die **Anwendungen im Sinne modellbildender**

---

[1] Vgl. Pehkonen 1994, S. 186

[2] Vgl. hierzu die programmatische Erklärung Danckwerts/Prediger/Vasarhelyi 2004, die im Auftrag der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) entstanden ist.
Die Desiderate gelten unabhängig von der Schulstufe, für die ausgebildet wird. Für die Sekundarstufen – und hier im besonderen für die Sekundarstufe II – ist der Reformbedarf allerdings am größten. Zu den erfolgreichen Ansätzen für die Primarstufe vgl. etwa Bender et al. 1999, Müller 1997, Selter 1999.

[3] zur Begründung vgl. Tobies 1998

Aktivitäten müssen die inhaltliche Auseinandersetzung mit den kanonischen Wissensbeständen der Mathematik durchdringen.

3. Ein fachlich souveräner Umgang mit den Themen des Mathematikunterrichts bahnt sich nicht von selbst an. Hierzu bedarf es eigener elementarmathematischer Lehrveranstaltungen, die die **Schulmathematik vom höheren** (aber nicht primär strukturmathematischen) **Standpunkt** behandeln und sich insbesondere der Analyse ihres Sinns und ihrer Bedeutung widmen.[1]

4. Die Erstbegegnung mit der **fachdidaktischen Ausbildungskomponente** ist früh zu integrieren und muss eine Brückenfunktion erfüllen: Sie gibt den hier beschriebenen fachwissenschaftlichen Anteilen eine fachdidaktische Dimension und ist anschlussfähig für das künftige didaktische Handlungsrepertoire des Fachlehrers.[2]

Es wird darauf ankommen, die hier eingeforderten inhaltlichen Aspekte nicht additiv, sondern integrativ zu realisieren, d.h. Lehrangebote zu konzipieren, in denen diese Aspekte als sich ergänzende Sichtweisen des selben mathematischen Inhalts auftreten.

Methodisch

1. Guter Mathematikunterricht bedarf der fruchtbaren **Balance zwischen Instruktion** (der Schüler durch den Lehrer) **und Konstruktion** (durch den Schüler selbst). Angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer müssen diese Balance selbst erfahren; sie müssen in ihrem eigenen Lernprozess erleben, wie mathematische Wissensbildung geschieht. Daher gilt es, insbesondere die klassischen Übungen zu den Vorlesungen zu restrukturieren: Sie müssen der identitätsstiftende Ort für die Thematisierung von fachlichen Lern*prozessen* sein.

---

[1] „Der Einwand, mit der Ausweisung elementarmathematischer Veranstaltungen sei ein Niveauverlust verbunden, ist unbegründet. Das Gegenteil ist der Fall.“ (Siehe Müller/Steinbring/Wittmann 2002, S. 23)

[2] Klar ist, dass sich die fachdidaktische Ausbildung im weiteren Studienverlauf nicht in der Brückenfunktion erschöpfen kann, da es unverzichtbare fachdidaktische Einsichten gibt, die nicht allein von der Mathematik her gedacht werden können, sondern von anderen Bezugsdisziplinen leben; ganz zu schweigen von den schulpraktischen Studien.

2. Für eine aktive Konstruktion des mathematischen Wissens spielen die **heuristischen Fähigkeiten** eine zentrale Rolle.[1] Geeignete Lehr- und Lernveranstaltungen, etwa Modellierungs- oder Problemlöse-Seminare, müssen fester Bestandteil der Ausbildung sein. Hier sollen die Prinzipien des aktiv-entdeckenden Lernens fachbezogen erlebt werden.

Ingesamt geht es um einen *Paradigmenwechsel* im Umgang mit der Mathematik: Nicht nur die Disziplin Mathematik, sondern gleichgewichtig die Beziehung Mensch-Mathematik soll im Mittelpunkt des Interesses stehen. „Als grundlegendes hochschuldidaktisches Prinzip ergibt sich …, dass der Student im Mathematikstudium gleichzeitig sowohl die Mathematik als einen vorgegeben Gegenstand wie auch seine eigene Beziehung zur Mathematik erfahren, reflektieren und entwickeln muss“.[2] Erst dieser Paradigmenwechsel ermöglicht sinn- und identitätsstiftende Erfahrungen und bedeutet keinesfalls eine Aufweichung wissenschaftlicher Ansprüche an die mathematische Ausbildung, im Gegenteil.

Die *Verbindung zwischen Fach- und Berufsfeldbezug* muss deutlicher werden. Nur ein didaktisch sensibler Umgang mit disziplinärer Mathematik ist anschlussfähig für die Fachdidaktik im engeren Sinne. Daher gilt es, die vernachlässigten phänomenologischen Anteile im Umgang mit Mathematik gegenüber den algorithmischen und theoretischen zu stärken. „In den Lehrveranstaltungen für Lehramtskandidaten müsste man sich oft mehr auf die Denkprozesse einlassen als auf deren Ergebnisse. Das ist ja genau auch die Aufgabe des Lehrers in der Schule!“[3] Das Ziel der Ausbildung liegt im Aufbau eines kognitiven und motivationalen Fundaments, das dem berechtigten Anspruch von Lehramtsstudierenden nach fachbezogener Professionalität Rechnung trägt.

Die skizzierten notwendigen Veränderungen der fachmathematischen Ausbildung werden in der Implementation viele Herausforderungen mit sich bringen. Ihre Bewäl-

---

[1] Lehramts-Studierende müssen „befähigt werden, auch ein exploratives und heuristisches Vorgehen als grundlegende Arbeitsformen der Mathematik zu begreifen.“ (Stroth et al 2001, S.1)

[2] Bromme 1981, S. 163

[3] Reichel 2000, S. 34

tigung bedarf einer engen konzeptionellen Zusammenarbeit der Fachmathematiker und Didaktiker, an den einzelnen Standorten und deutschlandweit. Die dabei auftauchenden Auseinandersetzungen sollten als Chance begriffen werden, gegenseitig voneinander zu lernen. Das intendierte Pilotprojekt setzt hier an und wagt einen konsequenten pragmatischen Versuch der Implementation.[1]

Abschließend skizzieren wir noch, in welcher Weise der hier vorgestellte Rahmen für Veränderungen sich in die aktuelle fachdidaktische Diskussion zur Verbesserung des Mathematikunterrichts einbetten lässt. Unsere Position stützt sich auf eine Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe[2], die im Zuge der bildungspolitischen Rezeption der internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA von der KMK in Auftrag gegeben wurde. Ihr mathematikdidaktischer Ausgangspunkt ist der allgemeinbildende Auftrag des Mathematikunterrichts:

> Der Mathematikunterricht ist dadurch allgemeinbildend, dass er drei Grunderfahrungen ermöglicht (Winter 1996):
>
> **(G1)** “*Erscheinungen der Welt um uns*, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, *in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen*,
>
> **(G2)** mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine *deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen*,
>
> **(G3)** in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (*heuristische Fähigkeiten*) zu erwerben.”
>
> Charakteristisch für die Mathematik ist das Spannungsverhältnis zwischen G1 und G2, in dem sich die Doppelnatur der Mathematik von Abbildfunktion und systemischem Charakter[3] spiegelt und das ihre breite Anwendbarkeit erst möglich macht. Im Oberstufenunterricht muss dieses dynamische Gleichgewicht in besonderem Maße zur Geltung kommen. Modellbildende Aktivitäten sind dafür konstituierend und deshalb unverzichtbar. Sie gehen in beide Richtungen: Zum einen begleiten sie das Mathematisieren außermathematischer Situationen,

---

[1] Erste Einzelversuche dieser Art reichen weit zurück. Vergleiche etwa den Bericht über ein Seminar zur Didaktik der Analysis für S II-Lehramtsstudierende in Danckwerts 1983.

[2] vgl. Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand 2001

[3] BLK-Gutachten 1997

> zum anderen ist die innermathematische Modellierung ein Mittel zur begrifflichen Durchdringung.
>
> Heuristische Fähigkeiten (→ G3) sind Grundlage für eine verständige Erschließung unserer Welt. Sie sind eingebettet in eine intellektuelle Haltung, zu der auch die Bereitschaft gehört, sich frei, kreativ und positiv gestimmt einer gedanklichen Herausforderung zu stellen. Die Entwicklung dieser Haltung zählt zu den zentralen Aufgaben des Mathematikunterrichts. In der Sekundarstufe II gilt es darüber hinaus, sich der Kraft heuristischer Strategien bewusst zu werden.
>
> Der Einsatz neuer Technologien ist für alle drei Grunderfahrungen gleichermaßen bedeutsam und hilfreich: Zum einen ist der Computer ein leistungsfähiges Werkzeug zur Unterstützung von Modellbildungen und Simulationen (→ G1), zum anderen kann er – vor allem durch dynamische Visualisierungen – den Aufbau adäquater Grundvorstellungen mathematischer Begriffe positiv beeinflussen (→ G2), und schließlich beflügelt der Computer heuristisch-experimentelles Arbeiten beim Problemlösen (→ G3).
>
> *Erst in der wechselseitigen Integration aller drei Grunderfahrungen kann der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe seine spezifisch bildende Kraft entfalten.* Dies ist die mathematikdidaktische Position als Antwort auf den Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe, der nach breitem Konsens darin besteht, vertiefte Allgemeinbildung, Wissenschaftspropädeutik und Studierfähigkeit zu verbinden.[1]

Das Prinzip der Integration der drei Grunderfahrungen muss Folgerungen für die Lehrerausbildung haben. Die eingangs formulierten Desiderate spiegeln dieses Prinzip und sind damit in den aktuellen fachdidaktischen Diskurs eingebettet.

[1] Borneleit/Danckwerts/Henn/Weigand 2001, S.75/76

3. Maßnahmen

Die Grundausbildung zukünftiger Mathematiklehrerinnen und –lehrer steht fachlich auf zwei Beinen. Dies ist zum einen die geometrisch-algebraische Ausbildung (traditionellerweise in der Vorlesung „Analytische Geometrie“ bzw. „Lineare Algebra“), zum andern die analytisch orientierte Ausbildung (Theorie der Funktionen durch die Vorlesung „Analysis“). Im späteren Verlauf des Studiums kommen dann noch angewandte Fächer, wie etwa Numerische Mathematik und Wahrscheinlichkeitsrechnung hinzu.

Die Antragsteller decken beide Grundpfeiler kompetent ab. Deshalb wird folgende Aufteilung des Projekts vorgeschlagen: An der Universität Gießen wird der Teil der Geometrie und Algebra neu konzipiert und durchgeführt, an der Universität Siegen die Analysis.

Die Teilprojekte sind aber auf zahlreichen Ebenen verbunden:

- *Intensive Zusammenarbeit der beteiligten Dozenten und Assistenten* vor und während der Durchführung. Während der Laufzeit des Projekts werden regelmäßig, mindestens alle zwei Wochen Treffen stattfinden.
- *Gemeinsame Tagungen der Studierenden.* In einwöchigen Tagungen sollen die Studierenden sich gegenseitig unterrichten, indem sie selbst erarbeitete kleine Projekte vorstellen. Dies ist eine zusätzliche Ebene der Identifizierung mit dem Fach. Außerdem werden auch an dieser Stelle Präsentationstechniken gelernt. Diese Tagungen sollen die Giessener und Siegener Studenten zusammenführen. Zunächst wird nur eine solche Tagung beantragt.
- Schließlich bietet sich durch die räumliche Nähe zum Mathematikum die einmalige Chance, geeignete Experimente des Mathematikums zu nutzen, um die Begriffe und Erkenntnisse der entsprechenden mathematischen Disziplinen deutlich werden zu lassen.

3.1 Das Gießener Teilprojekt

Aufgrund des neuen Hessischen Lehrerbildungsgesetzes, das voraussichtlich erstmals zum Wintersemester 2005/06 zur Anwendung kommt, ist es geradezu ideal, ein Jahr zuvor einen grundsätzlich neuen Ansatz als Pilotversuch durchzuführen.
Die Ausbildung im Bereich Geometrie-Algebra soll in zwei 2-semestrigen Veranstaltungen durchgeführt werden:
(a) Fachwissenschaftlicher Teil. Hier werden sowohl geometrischen und algebraischen Kenntnisse vermittelt als auch durchgängig der Bezug zur Schulmathematik thematisiert. Themenkreise werden sein: Dimension (ebene vs. räumliche Effekte, 3D vs. 4D), die Perspektive, die Kugel usw. Selbstverständlich wird der Aufbau der Geometrie behandelt und die rechnerische Beherrschung des Raums durch die „analytische Geometrie“ bzw. „Lineare Algebra“.
In diesem Teil wird auch die historische Entwicklung reflektiert.

(b) Didaktischer Teil. Hier wird nicht nur die Vermittlung von Geometrie und Algebra im Schulunterricht ausführlich behandelt, sondern insbesondere der Einsatz von Software („Dynamische Geometrie“) praktisch erprobt.

Für beide Veranstaltungen ist ein *Mathematisches Labor* als Begleitmaßnahme essentiell. In diesem Labor sollen Studierende gemeinsam arbeiten, wobei Dozenten, Assistenten und Hilfskräfte als Berater zur Verfügung stehen.

3.2 Das Siegener Teilprojekt:

Ausbildung der angehenden Gymnasiallehrer(innen) im Lernbereich Analysis (1. Studienjahr)

3.2.1 Inhaltliches

Die vier Bereiche

Hochschulanalysis

Der heute übliche kanonische Aufbau der Analysis entspricht im Sinne der Produkt-Prozess-Dualität eher der Sicht auf die Analysis als fertiges Produkt, eben als kanonisierter Wissensbestand. Die Motive für Begriffsbildungen und Theorieentwicklung sind kaum mehr sichtbar. So wird etwa bei einer topologisch akzentuierten Definition der Stetigkeit über ‚$\varepsilon - \delta$' selten deutlich, dass das Motiv der Verallgemeinerungsfähigkeit zu Grunde liegt und man sich deshalb nicht auf eine Definition über Folgen beschränkt. Dass beide Sichtweisen im Rahmen der klassischen Analysis mathematisch äquivalent sind, muss ebenso explizit zugänglich werden wie das Motiv für die Auswahl. Es wird darauf ankommen, der aprozessualen Sicht der Analysis konsequent eine andere Perspektive gegenüber zu stellen: Analytische Theoriebildung muss sich legitimieren. Sie muss sich auch legitimieren durch ihren Nutzen für die Lösung von (inner- und außermathematischen) Problemen. Nur in der Balance von Problem und Struktur, d.h. durch modellbildende Aktivitäten, kann ein adäquates Bild von der Mathematik (hier: der klassischen Analysis) entstehen.
Eine entsprechende Lehrveranstaltung wird sich auf solche Lehrbuchliteratur für den Anfänger stützen, die wenigstens ansatzweise die Metaebene für die Entwicklung mathematischer (hier: analytischer) Theorie mit thematisiert.[1]

---

[1] Ein vielversprechendes deutschsprachiges Beispiel scheint das noch junge Lehr- und Arbeitsbuch von E. Behrends (bei Vieweg 2003) zu sein.

Geeignete Lehrbücher müssen im Übrigen gut verträglich sein mit einer reflektierten inhaltlichen Rückschau auf die hinter den Studienanfängen liegende Analysis in der gymnasialen Oberstufe.

Geschichte der Analysis

> „Alle diese Gegenstände der Infinitesimalrechnung, die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden … , müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden.“

Dieses berühmte Zitat des Mathematikers Otto Toeplitz aus dem Jahre 1927 bringt die Sache auf den Punkt: Eine ideengeschichtliche (nicht lediglich ereignisgeschichtliche) Sicht der Analysis kann zur prozessorientierten Auffassung der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin substanziell beitragen. Dass um die etablierten analytischen Begriffe über lange Zeit gerungen wurde, ist für den Lernenden (und für den Lehrenden) eine entlastende, motivierende und sinnstiftende Erfahrung, zumal das eigene Ringen um Verstehen häufig ähnlich verläuft. Es wird darauf ankommen, den Studierenden unter Einbeziehung geeigneter Quellen und Sekundärtexte den Unterschied zwischen werdender und gewordener Analysis bewusst zu machen. Hier entstehen natürliche Anknüpfungspunkte für ein ‚Sprechen über Analysis’.

Schulanalysis vom höheren Standpunkt

Die Analysis ist die tragende Säule der Oberstufenmathematik des Gymnasiums und inhaltlich wie methodisch ganz anders ausgerichtet als die Hochschulanalysis. Ziel muss es sein, die eigenen Schulerfahrungen zur Analysis aktiv in Erinnerung zu rufen und fachlich so zu beleuchten, dass die Vorerfahrungen anschlussfähig werden für die Inhalte und Ziele der Hochschulanalysis. Dies ist ein eigener, elementarmathematisch orientierter Anspruch und erfordert eine spezifische Anstrengung, die nicht in der Begegnung mit kanonisierter Hochschulanalysis aufgeht. Ein wichtiges Themenbeispiel hierfür ist die etablierte schulklassische Kurvendiskussion.
Lernpsychologisch haben Veranstaltungen wie eine derartige „Elementare Analysis“ eine Schlüsselrolle für das Projekt: Sie ermöglichen jene lernbiographische Kontinuität, ohne die nachhaltiges Lernen von Mathematik nicht möglich ist.

Didaktik der Analysis

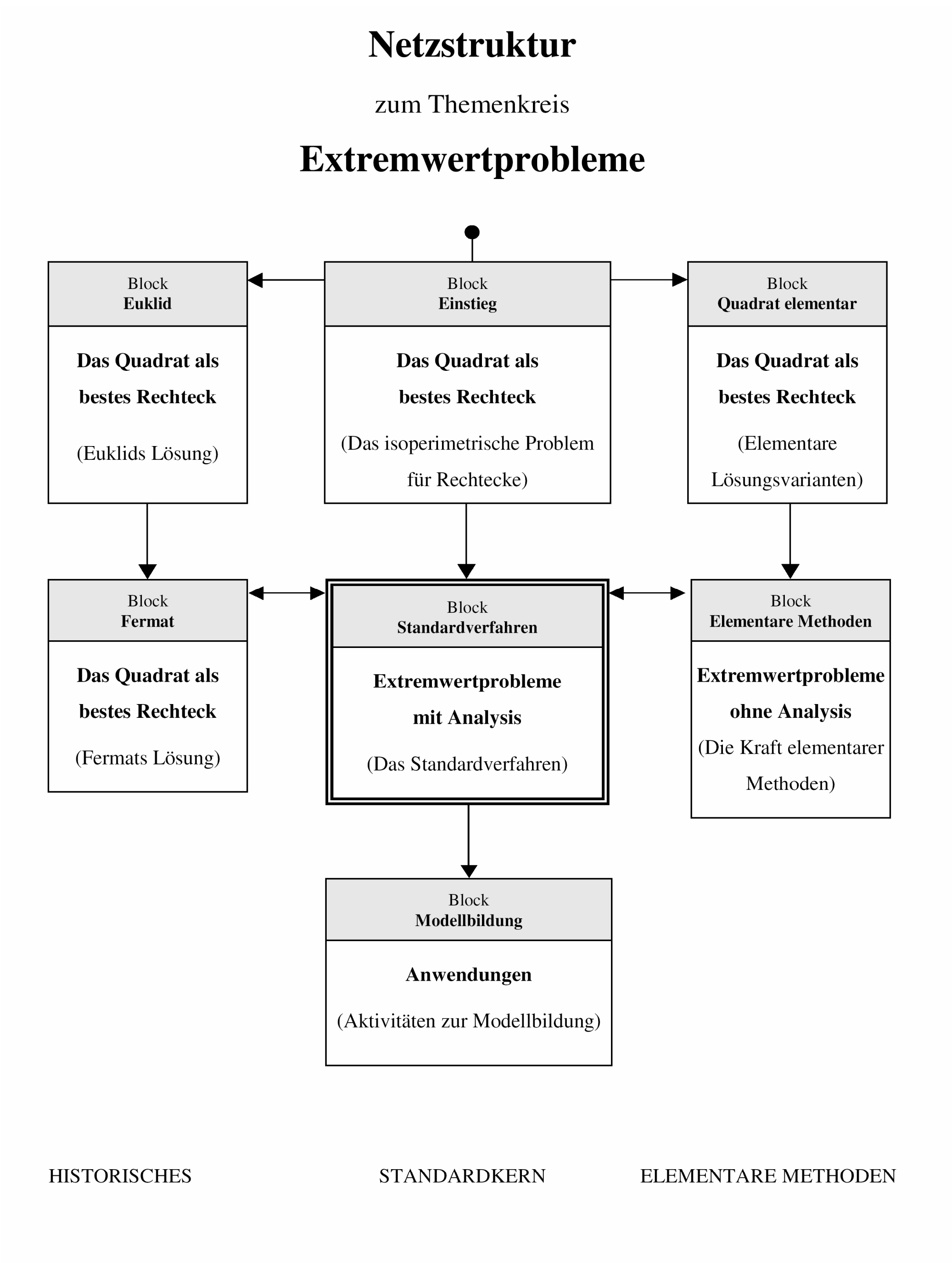
Hier findet ein Perspektivwechsel statt, der seinerseits anschlussfähig sein soll für das didaktische Handlungsrepertoire des zukünftigen Fachlehrers. So ist etwa die Frage „Warum sollte man (will ich) Analysis unterrichten?“ im Kern eine fachdidaktische Frage, die nicht aus dem mathematischen Gegenstand heraus beantwortet werden kann, aber gleichwohl gegenstandsbezogen ist. Ziel einer Erstbegegnung mit der Didaktik der Analysis ist es, den zentralen analytischen Inhalten eine fachdidaktische Dimension zu geben und damit u.a. beschreiben zu können, was guten Analysisunterricht als Fachunterricht ausmacht. In Kenntnis geeigneter fachdidaktischer Kriterien wird es möglich, ein vorliegendes Curriculum zur Analysis kritisch zu beurteilen. Fachdidaktische Urteilskraft ist eine Bedingung für die begründete Planung von Fachunterricht.

Die Themenkreis-Methode als integrierender Kern

Die wechselseitige Abhängigkeit und Verzahnung der vier Bereiche (Hochschulanalysis, Geschichte der Analysis, Schulanalysis vom höheren Standpunkt, Didaktik der Analysis) muss sichtbar werden und aktiv erlebbar sein. Eine dafür geeignete Möglichkeit ist die Methode der Themenkreise. Zur Illustration beschreiben wir zwei Beispiele

Erstes Beispiel: Der Themenkreis Extremwertprobleme

Die Extremwertprobleme sind ein Paradebeispiel für die sinnstiftende Verzahnung der vier Bereiche. Das jedem Abiturienten bekannte analytische Standardverfahren zur Lösung von Extremwertproblemen liegt im Herzen der Oberstufenanalysis und ist zum einen in seiner mathematischen Begründung mit dem kanonischen Aufbau der Hochschulanalysis verbunden. Zum anderen lehrt der Blick in die Geschichte, dass man lange vor der Entwicklung der Differentialrechnung Extremalprobleme formuliert und gelöst hat; dies relativiert die Bedeutung des Standardkalküls und schärft den Blick für die Kraft elementarer Methoden. Eng damit verknüpft ist der fachdidaktische Standpunkt von der ‚Wiederentdeckung des Inhaltlichen’ in einer veränderten Unterrichts-kultur. Die nachfolgende Übersicht zeigt die unterliegende Netzstruktur des Themenkreises, für die ein spezielles Problem (das isoperimetrische Problem für Rechtecke) zum natürlichen Ausgangspunkt wird: [1]



Ziel muss es sein, dass sich die Studierenden die innere Logik dieser vernetzten Struktur in freier und geleiteter Erkundung selbstständig erschließen und sich kundig darin bewegen können. Die intendierte Folge: Der in der Regel fachlich unreflektierte Ge-

[1] vgl. Danckwerts/Vogel 2001

brauch des schulischen Mini-Max-Kalküls gewinnt an Tiefe und eröffnet neue Handlungsspielräume.

Zweites Beispiel: Die Vollständigkeit der Reellen Zahlen

Die für die Analysis so wesentliche topologische Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen ist ein weiteres Thema, das die vier Bereiche sinnvoll aufeinander bezieht: Natürlicher Ausgangspunkt ist die Frage, warum zentrale Inhalte der Oberstufenanalysis ohne die Vollständigkeit nicht lebensfähig sind, und in welcher Fassung mit dem Vollständigkeitsaxiom in der Schule zweckmäßig gearbeitet wird. Dies berührt die fachmathematische Seite (Äquivalenz konkurrierender Fassungen) ebenso wie die fachdidaktische (Curriculare Passung, Grundvorstellung der lückenlosen Zahlengeraden). Der Blick in die Geschichte lehrt, wie mühsam es auch erkenntnistheoretisch war, diesen schwierigen Punkt mathematisch befriedigend herauszuarbeiten.
Ziel muss es sein, dass sich die Studierenden mit dem anspruchsvollen Konstrukt der Vollständigkeit aktiv auseinandersetzen und dafür reichhaltige Anknüpfungspunkte vorfinden. Die intendierte Folge: Die in der Regel nicht einmal bemerkte Abhängigkeit der Schulanalysis von der Vollständigkeit der reellen Zahlen[1] wird bewusst gemacht und die Theoriehaltigkeit der Analysis im Rückblick erfahrbar.

3.2.2 Methodisches und Organisation

Die geplante Struktur für die Pilotstudie in Siegen ist eingepasst in die neue Siegener Studienordnung für das gymnasiale Lehramt (seit 2004 in Kraft), in der die Verbindung zwischen klassisch-fachwissenschaftlichen, elementarmathematischen und fachdidaktischen Studienanteilen vom Ansatz her konzeptionell verankert ist.
Für das Siegener Teilprojekt steht im Mittelpunkt des ersten Semesters die Auseinandersetzung mit der Schulanalysis vom höheren Standpunkt (verantwortlicher Dozent: Prof. Danckwerts). In enger inhaltlicher Abstimmung und Kommunikation wird die

[1] u.a. eine Folge der starken Algebraisierung und Kalkülisierung

klassische Analysis I so entfaltet, dass die ideengeschichtliche Sicht der Analysis durchgängig integriert ist (verantwortlicher Dozent: Prof. Hein). Das zweite Semester beinhaltet neben der genauso strukturierten Analysis II (Prof. Hein) eine fachlich akzentuierte Erstbegegnung mit einer Didaktik der Analysis, die seminaristisch angelegt ist (Prof. Danckwerts). In dieser fachdidaktischen Veranstaltung werden die Erfahrungen aus dem ersten Semester zur Schulanalysis vom höheren Standpunkt systematisch aufgenommen. Durchgängig werden geeignete Exponate aus dem Mathematikum (Gießen) in die fachdidaktische und die fachwissenschaftlichen Veranstaltungen einbezogen.

Die traditionellen Übungsgruppen mit dem üblichen Vorrechnen von Aufgaben sollen radikal umstrukturiert werden. Im Sinne der Balance von Instruktion (durch die Dozenten in der Vorlesung) und aktiver Konstruktion des Wissens (durch die Studierenden selbst) haben die Übungsgruppen neuer Art eine eigenständige und für das Gelingen des Projekts zentrale Funktion: In ihnen findet die freie und gelenkte Erkundung passender inhaltlicher Angebote und heuristisches Denken und Arbeiten statt, unter der Anleitung und Begleitung geeignet vorbereiteter studentischer und wissenschaftlicher Hilfskräfte. Erst durch diese personalintensive Gelenkstelle zwischen bündelnder Vorlesung und individueller häuslicher Arbeit werden die Ziele des Projekts erreichbar.

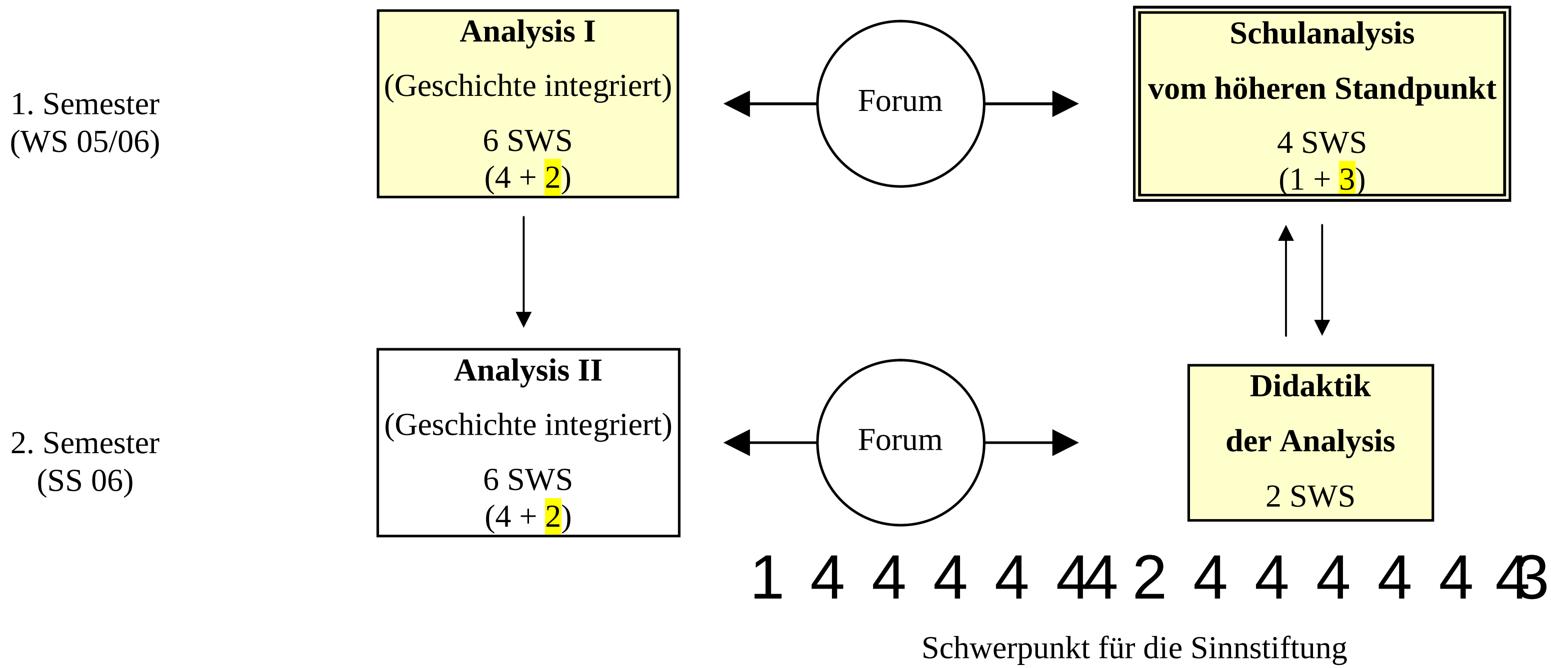
Darüber hinaus muss es einen identitätsstiftenden Ort geben – das ‚Forum' –, in dem sich die Studierenden offen und frei nicht nur inhaltsbezogen austauschen. [1] In Siegen wird für den Austausch das im Aufbau befindliche ‚Didaktische Labor' eine Schlüsselrolle haben. Zusätzlich wird dort ein(e) Mitarbeiter(in) zu festen Zeiten als Ansprechpartner(in) zur Verfügung stehen.

Die nachfolgende Übersicht zeigt die intendierte Studienstruktur.

---

[1] Im Übrigen sollen sich die an beiden Standorten beteiligten Studierenden während der Projektphase zweimal in einer auswärtigen Tagungsstätte zum Erfahrungsaustausch treffen.

Struktur



2 : aktiver Teil, Übungen neuer Art

Die notwendige begleitende **Evaluation** des Projekts soll qualitativ orientiert sein. Geeignet erscheint ein Fragebogen- und Interviewgestütztes Evaluationsdesign, insbesondere ist anzuknüpfen an die Ergebnisse und Verfahren der mathematikdidaktischen belief-Forschung (s. etwa Tietze oder Törner/Grigutsch). Erkenntnisleitende Forschungsfrage ist, ob der hier favorisierte Ansatz für die Eingangsphase der gymnasialen Lehrerbildung tatsächlich sinn- und identitätsstiftende Erfahrungen ermöglichen kann.

Literatur

Andelfinger, Bernhard (1990): LehrerInnen- und LernerInnenkonzepte im Analysisunterricht. In: Der Mathematikunterricht (1990) H. 3, S. 29-44.

Behrends, Ehrhard (2003): Analysis Band 1. Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni. Braunschweig/Wiesbaden 2003.

Bender, Peter; Beyer, Dieter; Brück-Binninger, Ute; Kowallek, Rainer; Schmidt, Siegbert; Sorger, Peter; Wielpütz, Hans; Wittmann, Erich Ch. (1999): Überlegungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Grundschullehrerinnen und –lehrer. In: Journal für Mathematikdidaktik 20 (1999), Heft 4, S. 301-310.

BLK (1997): Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Bonn 1997.

Borneleit, Peter, Danckwerts, Rainer, Henn, Hans-Wolfgang, Weigand, Hans-Georg (2001): Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Tenorth, E. (Hrsg.): Kerncurriculum Oberstufe, Beltz Verlag, Weinheim u. Basel, S. 26-53.

Borneleit, Peter, Danckwerts, Rainer, Henn, Hans-Wolfgang, Weigand, Hans-Georg (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe (Verkürzte Fassung). In: Journal für Mathematikdidaktik 22(2001) Heft 1, S. 73-90.

Bromme, Rainer (1981) (Hrsg.): Perspektiven für die Ausbildung der Mathematiklehrer. Köln 1981.

Bungartz, Paul; Wynands, Alexander (1998): Wie beurteilen Referendare ihr Mathematikstudium für das Lehramt Sekundarstufe II? Universität Bonn 1998. http://www.math.uni-bonn.de/people/wynands/Referendarbefragung.html

Danckwerts, Rainer (1983): Bericht über ein Seminar zu Didaktik der Analysis für SII-Lehramtsstudenten. In: Journal für Mathematikdidaktik 4(1983), Heft 2, S. 115-137.

Danckwerts, Rainer; Prediger, Susanne; Vasarhelyi, Eva (2004): Perspektiven der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für die Sekundarstufen. In: DMV / GDM-Mitteilungen 12 (2004) H. 2, S. 76-77.

Danckwerts, Rainer; Vogel, Dankwart (2001) (Hrsg.): Der Themenkreis Extremwertprobleme – Wege der Öffnung. Der Mathematikunterricht 47(2001) Heft 4.

Grigutsch, Stefan; Raatz, Ulrich; Törner, Günter (1998): Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern, Journal für Mathematik-Didaktik (1998) 19. Jg., H. 1, S. 45.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (1998): Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. In: Mathematische Semesterberichte 45 (1998), S. 189-206.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2004): Unterricht in Mathematik und den Naturwissenschaften. Bericht und Reflexion zu einer PISA-2000 Fachtagung. In: DMV / GDM-Mitteilungen 12 (2004) H. 2, S. 94-98.

Hefendehl-Hebeker, Lisa; Törner, Günter (1998): Neun Thesen zur gymnasialen Lehrerbildung. In: DMV-Mitteilungen 1/1998, S. 57-59.

Klein, Felix (1924): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte. Bd. 1, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1924.

Merzyn, Gottfried (2004): Fachwissenschaftliche Ausbildung aus mathematisch-naturwissenschaftlicher Sicht. In: Blömeke, Sigrid; Reinhold, Peter; Tulodziecki, Gerhard; Wildt, Johannes: Handbuch Lehrerbildung. Bad Heilbrunn/ Braunschweig 2004, S. 397-410.

Müller, Gerhard N. (1997): Mathematiklernen als konstruktiver, entdeckender Prozess nicht nur in der Grundschule, sondern auch in der Lehrerbildung? – dargestellt an der Arithmetik. In: Bardy, Peter (Hrsg.): Mathematische und mathematikdidaktische Ausbildung von Grundschullehrerinnen und -lehrern, Weinheim 1997, S. 95-113.

Müller, Gerhard; Steinbring, Heinz; Wittmann, Erich Ch. (2002): Ein Konzept zur Bildungsreform aus fachdidaktischer Sicht. Universität Dortmund 2002.

OECD (2004): Anwerbung, berufliche Entwicklung und Verbleib von qualifizierten Lehrerinnen und Lehrern. Länderbericht: Deutschland. Bonn 2004. http://www.kmk.org/aktuell/Germany%20Country%20Note_Endfassung_deutsch.pdf

Pehkonen, Erkki K. (1994): On teachers' beliefs and changing mathematics teaching. In: Journal für Mathematikdidaktik 15 (1994), Heft 3/4, S. 177-209.

Pieper-Seier, Irene (2002):Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim 2002, S. 395-398.

Reichel, Hans-Christian (2000): Brauchen wir eine spezielle Mathematik-Fachausbildung für Lehramtskandidaten? In: DMV-Mitteilungen 2/2000, S. 33-36.

Selter, Christoph (1999): Allgemeine Lernziele für die Lehrerbildung. In: Selter, Christoph; Walther, Gerd (Hrsg.): Mathematikdidaktik als design science, Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf 1999, S. 206-216.

Stroth, Gernot; Törner, Günter; Scharlau, Rudolf; Blum, Werner; Reiss, Kristina (2001): Vorschläge zur Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und -lehrern für das Lehramt an Gymnasien in Deutschland. DMV/GDM-Denkschrift zur Lehrerbildung 2001, http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/archiv/memoranda/lehrer.html

Terhart, Ewald (Hrsg.) (2000): Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. Beltz, Weinheim 2000.

Tietze, Uwe P. (1986): Der Mathematiklehrer in der Sekundarstufe II. Bad Salzdetfurth 1986.

Tietze, Uwe P. (1990): Der Mathematiklehrer an der gymnasialen Oberstufe Zur Erfassung berufsbezogener Kognitionen. In: Journal für Mathematikdidaktik 11 (1990), Heft 3, S. 177-243.

Tobies, Renate (1998): Eine zehnte These zur gymnasialen Lehrerbildung. In: DMV-Mitteilungen 2/1998, S. 67-68.

Toeplitz, Otto (1927): Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 36 (1927), S. 88-100.

Törner, Günter, Grigutsch, Stefan (1994): „Mathematische Weltbilder" bei Studienanfängern – Quintessenz einer Erhebung. In: Pickert, Günter; Weidig, Ingo: Mathematik erfahren und lehren, Stuttgart 1994, S. 237-245.

Winter, Heinrich (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 1996, S.37-46.