Zwischenbericht

1. Semester

„Mathematik Neu Denken“

Ein Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt

gefördert durch die

Deutsche Telekom Stiftung

Siegener Teilprojekt

Leitung: Prof. Dr. R. Danckwerts

1. April 2006

Inhalt

1. Zielsetzung

Studierende für das gymnasiale Lehramt machen im Vergleich zu Diplomstudierenden in nur geringem Umfang sinn- und identitätsstiftende Erfahrungen: Durch den klassischen axiomatisch-deduktiven Aufbau der Fachveranstaltungen an der Universität wird den Studierenden die Wissenschaft Mathematik in der Regel als fertiges, in sich geschlossenes System vermittelt. Eine genetische Perspektive des Lernens von Mathematik wird dadurch erschwert. Zudem wird unzureichend thematisiert, wie die Inhalte der Hochschulmathematik mit der später zu unterrichtenden Schulmathematik in Verbindung gebracht werden können. Hinzu kommt: Die Methoden der Vermittlung an der Universität sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung, und auch die „Übungen“ folgen in der Regel noch immer demselben Instruktionsmuster.

Hier setzt das Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt an. Ziel ist es, dem berechtigten Anspruch von Lehramtsstudierenden nach fachbezogener Professionalität Rechnung zu tragen und die Verbindung zwischen Fach- und Berufsfeldbezug deutlicher werden zu lassen.

Dies hat inhaltliche und methodische Konsequenzen:
Für die Entstehung eines gültigen, prozessorientierten Bildes von Mathematik soll die historisch-genetische Sicht durchgängig einbezogen sowie Raum für außermathematische Anwendungen im Sinne modellbildender Aktivitäten geschaffen werden.

Darüber hinaus kommt es darauf an, einer elementarmathematisch orientierten „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ entsprechendes Gewicht zu geben und zugleich die fachdidaktische Ausbildungskomponente früh zu integrieren.
Methodisch gilt es, zu einer Balance zwischen Instruktion (durch die Lehrenden) und aktiver Konstruktion des Wissens (durch die Lernenden) zu kommen sowie heuristischen Aktivitäten genügend Raum zu geben.

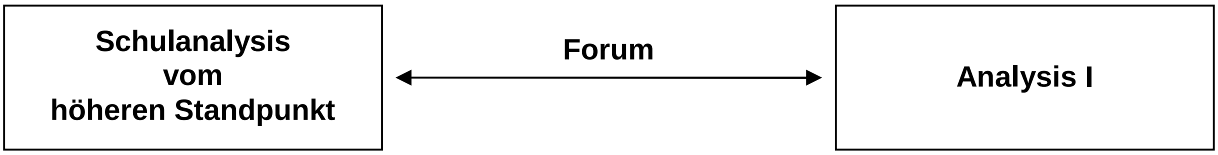
Ingesamt geht es um einen *Paradigmenwechsel* im Umgang mit der Mathematik: Nicht nur die fertige Disziplin Mathematik, sondern gleichgewichtig die Beziehung Mensch-Mathematik soll im Mittelpunkt des Interesses stehen.

2. Durchführung und Ergebnisse

Das Teilprojekt an der Universität Siegen befasst sich mit der Umsetzung der skizzierten Neuorientierung im Lernbereich **Analysis**, einem der beiden Grundpfeiler jedes Mathematik-Studiums für das gymnasiale Lehramt.

Inhaltliches Ziel des Siegener Teilprojektes im ersten Studienjahr ist die enge Verzahnung der vier Bereiche Schulanalysis, kanonische Hochschulanalysis, Geschichte der Analysis und Didaktik der Analysis.

Im ersten Semester (WS 2005/06) nimmt die „Schulanalysis vom höheren Standpunkt" die zentralen Themen vertrauter Schulanalysis auf und reflektiert sie so („höherer Standpunkt"), dass die gewonnenen Einsichten anschlussfähig sind für die fachwissenschaftlich-systematische Vertiefung in der „Analysis I" ebenso wie für die „Didaktik der Analysis" im zweiten Semester. Überdies integriert die „Analysis I" durchgängig die ideengeschichtliche Sicht der Analysis.



Im „Forum" wird der inhaltliche Brückenschlag zwischen beiden Veranstaltungen zum Thema gemacht.

Zentral ist die eigenaktive Auseinandersetzung der Studierenden in allen Veranstaltungsteilen, insbesondere in neu gestalteten Übungen, die über Arbeitsblätter, neue Aufgabenformate und individuelle Betreuungsangebote strukturiert sind.

Beide Veranstaltungen wurden semesterbegleitend evaluiert.

2.1 Schulanalysis vom höheren Standpunkt

2.1.1 Konzeption

Die Veranstaltung „Schulanalysis vom höheren Standpunkt" (Prof. Danckwerts) hat eine Schlüsselrolle im Spannungsverhältnis zwischen schulmathematischen Vorerfahrungen im Lernbereich Analysis, fachwissenschaftlicher Vertiefung im Rahmen der kanonischen Hochschulanalysis und späterer fachdidaktischer Reflexion. Hier gilt es, etablierte Standpunkte aufzunehmen und zu verändern.
Die nachfolgende Übersicht verdeutlicht die intendierte Standpunktverlagerung:

Schulanalysis ⟶	***„höherer Standpunkt"***
Standard-Akzentuierung	***Horizonterweiterung***
Ableitung	
als Instrument zur Berechnung von Tangentensteigungen nach syntaktischen Regeln	*inhaltlicher* Aspektreichtum des Ableitungsbegriffs → lokale Änderungsrate → lokale Linearisierung *analytische* Präzisierung → Was ist eine Tangente? (→ 'Differenzierbarkeit') → Was ist ein Grenzwert? (→ ‚Analysis I')
Kurvendiskussion	
als syntaktischer Kalkül zur Untersuchung von Funktionen (-scharen)	*qualitative* Kurvendiskussion → beweglicher Umgang mit dem Wechselspiel von Ausgangsfunktion und Ableitungsfunktionen (auch in Sachkontexten) → geometrisch-anschauliche Begründung der Kriterien der Kurvendiskussion *analytische* Präzisierung → analytische Begründung der Kriterien der Kurvendiskussion → Wie allgemein ist der Funktionsbegriff?
Extremwertprobleme	
als Anwendung von Ableitungskalkül und syntaktischer Kurvendiskussion	*reflektierter* Umgang mit dem Standardkalkül → lokale vs. globale Extrema → Relativierung des Kalküls durch die Kraft elementarer Methoden

Integral	
als Instrument zur Berechnung von Flächeninhalten (und Volumina) nach syntaktischen Regeln	*inhaltlicher* Aspektreichtum des Integralbegriffs → Integrieren heißt Rekonstruieren / Summieren / Mitteln *analytische* Präzisierung → Was ist ein Flächeninhalt? (→ ‚Integrierbarkeit') → Was ist ein Grenzwert? (→ ‚Analysis I')
Reelle Zahlen	
naiver Umgang ohne Thematisierung der Vollständigkeit	*Analyse* der Vollständigkeit → Bedeutung für die (Schul-)Analysis (keine „richtige“ Analysis auf $\mathbb{Q}$!) → Entwicklung von Grundvorstellungen (Zusammenhang mit dem Phänomen der Irrationalität) → analytisch-axiomatische Präzisierung

Der Ablauf der Themen folgt dem üblichen Aufbau der schulischen Analysis. Der Themenkreis „Reelle Zahlen“, der im Mathematikunterricht kaum explizit thematisiert wird, wurde exemplarisch integriert, etwa bei der analytischen Begründung des Monotoniekriteriums der Differentialrechnung im Rahmen der Kurvendiskussion.

Um deutlich zu machen, dass das Lernen von Mathematik ein sozialer Prozess ist, in dem Bedeutung ausgehandelt werden muss, sollten die Studierenden des Projekts ihr zukünftiges Unterrichtsfach als etwas kennenlernen, das der fachlichen Diskussion, Interpretation und des gegenseitigen Austausches bedarf. So war die Veranstaltung im Gegensatz zu einer klassischen Vorlesung eher seminaristisch angelegt; sie sollte als Modell für Unterricht dienen können.

Die Basis bildeten sorgfältig konzipierte Arbeitsmaterialien[1], die die Studierenden in Kleingruppen bearbeiteten und diskutierten. Diese Phasen der eigenaktiven Auseinandersetzung waren verzahnt mit denen der Bündelung der Ergebnisse im Plenum sowie deren Einbettung in den Fachkontext durch den Dozenten. Hierin zeigt sich die angestrebte Balance von Konstruktion und Instruktion.

Ein umfangreiches Betreuungsangebot durch Mitarbeiter und Tutoren, die vor allem die individuelle häusliche Arbeit begleiteten, sowie ein passendes Textbuch[2] rundeten das Angebot für die Studierenden ab.

---

[1] Sämtliche Arbeits- und Übungsblätter finden sich im Anhang, die Autoren sind R. Danckwerts und D. Vogel. Die exemplarischen Kommentare zu den Arbeitsblättern dienten der Orientierung für die Tutoren.

[2] R. Danckwerts / D. Vogel: Elementare Analysis. Norderstedt 2005

2.1.2 Ergebnisse

Im Verlauf des ersten Projektsemesters fanden mehrere Erhebungen und Tests statt, um die Wirksamkeit der neu konzipierten Veranstaltung im Hinblick auf die intendierten Ziele einschätzen zu können:

- 18.10.2005 Eingangserhebung zur Schulanalysis
- 20.10.2005 Eingangserhebung zum mathematischen Weltbild
- 29.11.2005 Kurzbefragung 1
- 16.12.2005 Test zur Schulanalysis
- 20.01.2006 Kurzbefragung 2
- 03.02.2006 Veranstaltungsevaluation: Qualität der Lehre
- 07.02.2006 Enderhebung zur Schulanalysis
- 10.02.2006 Klausur zur Schulanalysis

Weiterhin fanden im Januar 2006 Interviews mit 17 ausgewählten Studierenden statt, die derzeit ausgewertet werden. Die Enderhebung zum mathematischen Weltbild, die nicht mehr innerhalb der Vorlesungszeit stattfinden konnte, ist für April 2006 geplant.

Ergebnisse in fachinhaltlicher Hinsicht

Einer der Eckpfeiler der Neuorientierung ist die Stärkung der fachlichen Kompetenz im Sinne eines prozess- und verstehensorientierten Bildes von Mathematik. Zum einen soll dabei die Anschlussfähigkeit für Folgeveranstaltungen im Mathematikstudium gewährleistet werden, zum anderen wird aber gerade auf die Anbahnung jener qualitativen und interpretativen mathematischen Fähigkeiten abgezielt, die zur Professionalität im Lehrerberuf wesentlich beitragen, die die Studierenden aber aus der Schule erfahrungsgemäß nicht mitbringen und die an der Universität bislang auch nicht oder nur in Ansätzen vermittelt wurden.

Bei der Eingangs- und der Enderhebung zur Schulanalysis handelt es sich um Instrumente, die der Messung genau dieses fachlichen Zugewinns dienen. Die Erhebungen orientieren sich inhaltlich sehr eng an den behandelten Themenbereichen der Veranstaltung, erfordern von den Studierenden jedoch in hohem Maße verstehensorientiertes und nicht lediglich auf isolierte Fakten bezogenes Wissen.

Wie erwartet sind die Studierenden in ihrem schulischen Analysisunterricht nur unzureichend im Sinne der in der Erhebung geforderten Fertigkeiten ausgebildet worden und hatten dementsprechend teilweise große Schwierigkeiten beim Bearbeiten der Testitems der Eingangserhebung. Die Enderhebung zeigt demgegenüber einen deutlichen Zuwachs entsprechender mathematischer Kompetenzen und attestiert auf diese Weise den Erfolg des Projekts im ersten Projektsemester hinsichtlich der angestrebten fachinhaltlichen Ziele.

Um sicherzustellen, dass die sehr guten Resultate der Enderhebung nicht durch den Wegfall von tendenziell schwächeren Studenten zustande gekommen waren, wurden Teilnehmer und Nicht-Teilnehmer der zweiten Erhebung zur Schulanalysis bezüglich ihres Abschneidens in der Eingangserhebung verglichen. Es zeigte sich, dass diejenigen Studierenden, die, aus welchen Gründen auch immer, das Studium abgebrochen haben, im Durchschnitt nur geringfügig schlechtere Ergebnisse in der ersten Erhebung aufwiesen. Die enorme Verbesserung der Leistungen geht somit nur zu einem Bruchteil auf den Studienabbruch schwächerer Studierender zurück. Ein Vergleich der Ergebnisse findet sich in Tabelle 1:

Ergebnisse der Eingangserhebung zur Schulanalysis				
Teilnahme Enderhebung	**N**	**Mittelwert Punkte**	**Minimum Punkte**	**Maximum Punkte**
ja	**31**	**5,79 (48,2 %)**	**3,18 (26,5 %)**	**8,63 (71,9 %)**
nein	**21**	**5,05 (42,0 %)**	**3,30 (27,5 %)**	**8,33 (69,4 %)**
Insgesamt	**52**	**5,49 (45,7 %)**	**3,18 (26,5 %)**	**8,63 (71,9 %)**
Ergebnisse der Enderhebung zur Schulanalysis				
	N	**Mittelwert Punkte**	**Minimum Punkte**	**Maximum Punkte**
	31	**9,65 (80,4 %)**	**5,25 (43,8 %)**	**12,00 (100,0 %)**

Tabelle 1: Vergleich der Ergebnisse der Eingangs- und Enderhebung (12 Testitems) sowie der Ergebnisse der Eingangserhebung gesondert nach Teilnehmern und Nicht-Teilnehmern an der Enderhebung

Inwieweit sich die Einstellungen gegenüber der Mathematik (mathematisches Weltbild) im Laufe dieses ersten Semesters geändert und ausdifferenziert haben, muss noch durch die Enderhebung zum mathematischen Weltbild bestimmt werden. Aus mehreren Interviews konnte jedoch entnommen werden, dass Prozesse der Ausdifferenzierung stattgefunden haben: Von einer vormals sehr engen Sicht auf die Mathematik, die zumeist nur den Kalkülaspekt sowie das unreflektierte, oft sinnentleerte Hantieren mit Formeln und Verfahren beinhaltet, wurde der Blickwinkel erweitert, zum einen um theoretische Aspekte, zum anderen aber insbesondere um prozess- und verstehensorientierte Sichtweisen.

> *„Von der bloßen Anwendung zum Verstehen!! Das tiefe Verständnis des Stoffs und nicht nur das Kennen des Stoffes!!“* (Zitat aus der Veranstaltungsevaluation vom 03.02.2006)

Wie stark diese veränderte Sichtweise angenommen wurde, konnte auch im Rahmen der kleinen Vorträge wahrgenommen werden, die die Studierenden während der

Wochenendtagung auf der Freusburg (vgl. 2.4) mit spürbarem Engagement gehalten haben. Um die Horizonterweiterung der schulanalytischen Vorerfahrungen öffentlich sichtbar zu machen, wurde zu folgenden Themen referiert:

- „Die Tangente als bestapproximierende Gerade“
  (zum Ableitungsbegriff)
- „Die Mittelungleichung - ein schlagkräftiges Instrument zur Lösung von Extremwertproblemen“
- „Das isoperimetrische Problem - mit und ohne Analysis“
- „Die Milchtüte“
  (zum Thema Extremwertprobleme)
- „Integrieren kommt von „integrare“ (lat.) = wiederherstellen“
  (zum Integralbegriff)

Der Zwischentest am 16.12.2005 bezog sich auf die bis dahin in der Veranstaltung verhandelten Themenbereiche (‚Ableitung’ und ‚Kurvendiskussion’) und prüfte durch verständnisorientierte Fragen die Fähigkeit, mit den Begriffen und Methoden beweglich umzugehen. Das Ergebnis zeigt die Tabelle 2:

Note	Sehr gut (1,0 – 1,3)	Gut (1,7 – 2,3)	Befriedigend (2,7 – 3,3)	Ausreichend (3,7 – 4,0)	Nicht bestanden
Anzahl der Personen (N=42)	2	6	16	7	11

Tabelle 2: Ergebnis des Tests vom 16.12.2005

Der Test wurde trotz zusätzlicher Belastung von den Studierenden überwiegend als willkommene Möglichkeit der Selbstkontrolle angesehen.

Die Abschlussklausur zum Semesterschluss (10.2.2006) prüfte in voller Breite den behandelten Stoff und spiegelte vom Stil der Aufgaben die Erfahrungen aus den Übungsblättern und dem Zwischentest. Tabelle 3 zeigt das Ergebnis:

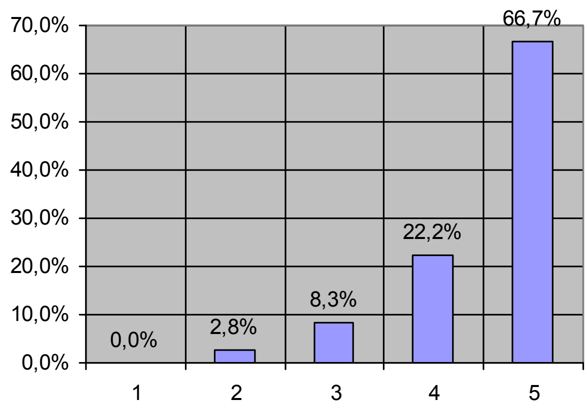
Note	Sehr gut (1,0 – 1,3)	Gut (1,7 – 2,3)	Befriedigend (2,7 – 3,3)	Ausreichend (3,7 – 4,0)	Nicht bestanden
Anzahl der Personen (N=38)	6	6	12	6	8

Tabelle 3: Ergebnis der Abschlussklausur vom 10.2.2006

Für die bei dieser Klausur nicht erfolgreichen Studierenden (Quote: ca. 20 %) bestand die Möglichkeit der Nachklausur (am 8.4.2006). Die Durchfallquote entsprach der in der Parallelveranstaltung „Analysis I“.

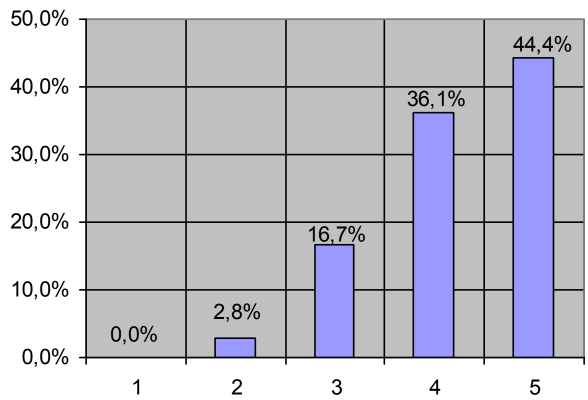
Ergebnisse in methodischer und organisatorischer Hinsicht

Durch die Veranstaltungsevaluation (36 Teilnehmer) und auch in den 17 Interviews wurde deutlich, dass die Studierenden die Arbeits- und Lernatmosphäre als eher offen und angenehmen empfanden. Sie fühlten sich gut aufgehoben und ernst genommen (siehe Graphiken 1 und 2), wobei insbesondere das intensive Betreuungsangebot durch die Mitarbeiter angenommen und gelobt wurde. Als sehr positiv wurde zudem der gesonderte Vorkurs für die Lehramtsstudierenden empfunden, wodurch das Zusammengehörigkeitsgefühl gestärkt und schon sehr früh zur Identitätsstiftung beigetragen werden konnte. Insbesondere wurde auch die Art des Dozenten gelobt, der durch seine Hingabe und Begeisterung mitreißend und motivierend wirkte.



(1) Der Dozent nimmt die Studierenden

1: kaum wahr
5: sehr gut wahr



(2) Der Dozent

1: erzeugt negative Spannungen
5: stellte eine angenehme, offene Atmosphäre her

Die verhandelten Inhalte der Vorlesung wurden als tief in der schulischen Analysis verankert und durch angemessene Querbezüge zu Anwendungen, anderen Bereichen der Mathematik und insbesondere zur Schulmathematik gut motiviert wahrgenommen.

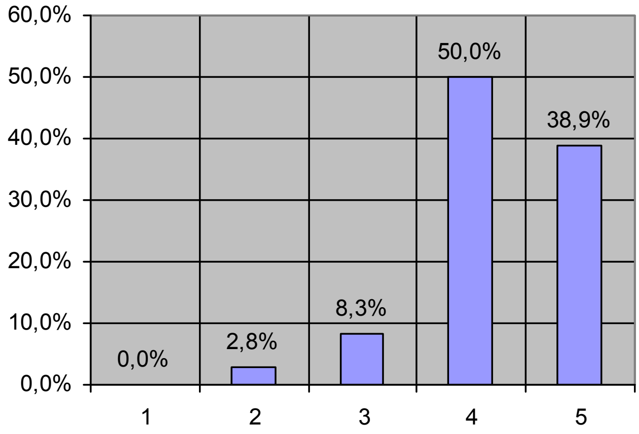
> *„Das tiefe Verständnis, welches uns vermittelt wurde: Problemstellungen wurden gemeinsam erarbeitet und gelöst und es wurde immer versucht, tatsächlich an das Vorwissen und die Vorerfahrungen der Studenten anzuknüpfen und die behandelten Inhalte mit dem späteren Beruf in Bezug zu setzen.“* (Zitat aus der Veranstaltungsevaluation vom 03.02.2006)

> *„Ich fand es gut und vor allem hat es mir auch sehr viel geholfen, daß die Inhalte immer irgendwie vernetzt und in einen größeren Zusammenhang eingebunden waren: zu Sachen, die wir in der Schule drangenommen hatten, zu anderen Teilgebieten der Mathematik, zu historischen Entwicklungen, zu schon behandelten Themen…ich glaube, daß das vor allem auch für später ungemein wichtig ist und einem im Beruf weiterhilft.“* (Zitat aus der Veranstaltungsevaluation vom 03.02.2006)

Die integrierten Beispiele und Bezüge wurden von den Studierenden fast durchweg als hilfreich und für das Verstehen förderlich empfunden, ebenso wie der gewählte Abstraktionsgrad im Spannungsfeld zwischen Anschaulichkeit und Strenge. Dieses

Vorgehen der Einordnung in sinnstiftende Kontexte trug wesentlich dazu bei, den Lerninhalten Sinn und Bedeutung zu geben.

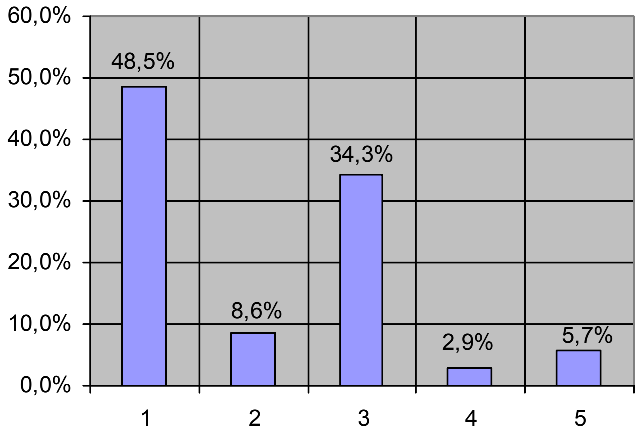
Insbesondere scheint damit die zentrale Zielsetzung der Veranstaltung, die Anbahnung eines prozessorientierten Bildes von (Schul-) Mathematik sowie die Balance zwischen Instruktion und Konstruktion, in der intendierten Weise umgesetzt worden zu sein. Die Studierenden bestätigten in mehreren Erhebungen, dass ein ausgewogenes Verhältnis zwischen Phasen der eigenaktiven Auseinandersetzung mit Mathematik und der öffentlichen Thematisierung im Plenum herrschte. Nicht lediglich mathematische Fakten, sondern auch die dazugehörigen Entstehungs- und Erkenntnisprozesse wurden deutlich (siehe Graphik 3). Trotz einer auf den ersten Blick scheinbaren Einfachheit schulmathematischer Inhalte waren die behandelten Themenbereiche für den größten Teil der Studierenden aber alles andere als trivial:



(3) Haben Sie den Eindruck, dass Erkenntnisprozesse verdeutlicht wurden oder vielfach nur Fakten / isoliertes Wissen?

1: häufig nur Fakten
5: Prozesse gut verdeutlicht

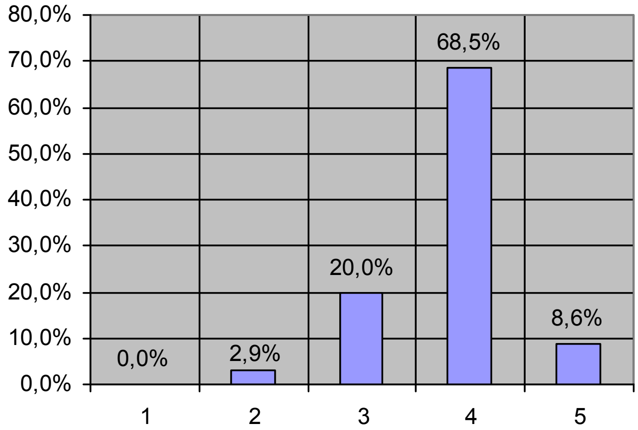
> *„Zu Beginn des Projektes wusste ich nicht, was auf mich zukam, und ich stand der ganzen Geschichte eher pessimistisch gegenüber. Die ersten Vorlesungen […] kamen mir so leicht vor, dass ich erst gedacht habe, dass ich im falschen Kurs sitze. Doch nach und nach wurden die Vorlesungen interessanter und ich begann die Inhalte mit anderen Augen zu sehen. Die neuen Ansichten die ich bis jetzt gewonnen habe, hätte ich vermutlich nicht in einer "normalen " Vorlesung in dieser Form erhalten.“* (Zitat eines Studenten vom 30.12.2005)



(4) Der in der Veranstaltung „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ behandelte Stoff ist einfach und wenig herausfordernd für mich.“

1: trifft gar nicht zu
5: trifft vollkommen zu

Zwar äußerten die meisten Studierenden in der Veranstaltungsevaluation, Tempo, Stoffumfang und Schwierigkeitsgrad seien für eine universitäre Veranstaltung durchaus angemessen, dennoch stellten die behandelten Inhalte für viele der Teilnehmer eine Herausforderung dar. Wie aus Graphik 4 ersichtlich scheint eine Spaltung in zwei Lager vorzuliegen: solche Studierenden, die den Stoff als stark herausfordernd und anspruchsvoll empfinden und solche, für die er vom Schwierigkeitsgrad her angemessen zu sein scheint. Diese Beobachtung wird auch durch die geführten Interviews bestätigt. Mögliche Ursachen für eine als mehr oder weniger groß empfundene Herausforderung könnten in unterschiedlichen Vorerfahrungen mit prozessorientierten Elementen liegen.



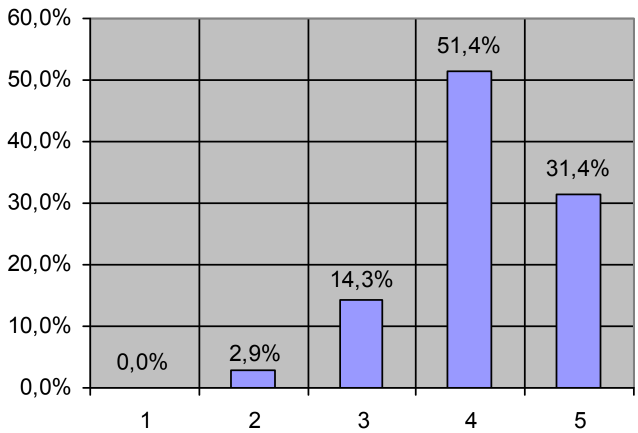
(5) „Die „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ trägt dazu bei, meine eigene Beziehung zur Mathematik zu erfahren, reflektieren und zu entwickeln“

1: trifft gar nicht zu
5: trifft vollkommen zu

Insgesamt wurden durch die „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ also die gesteckten Ziele mit großem Erfolg erreicht: Sie hat entscheidend zur Sinnstiftung beigetragen (Graphik 5) und wird von den Studierenden als ein wesentlicher Bestandteil der Ausbildung im Hinblick auf die angestrebte Tätigkeit als Mathematiklehrer empfunden (Graphik 6).

„Mein Schulwissen wurde mit einbezogen, „aufgearbeitet“ und vertieft und dabei habe ich scheinbar Bekanntes aus einem neuen Blickwinkel kennengelernt: parallele Deutungsmodelle also für ein und dasselbe Problem.“ (Zitat eines Studenten vom 30.12.2005)

Von Seiten der Studierenden ist insgesamt nur wenig negative Kritik geäußert worden: Neben einer „Überstrapazierung“ mancher Themen und Diskussionen - hier insbesondere solche Studierenden (unter 10%), die den Vorlesungsstoff als eher wenig herausfordernd betrachteten - betrafen die Einwände in erster Linie Organisatorisches. So wurde etwa die streckenweise mangelnde Abstimmung zwischen Vorlesungsstoff und den zu bearbeitenden Übungszetteln, in denen die Inhalte der Vorlesung vertieft werden sollten, kritisiert. Zudem beklagten sich die Studierenden, dass die Qualität der bearbeiteten Übungsaufgaben und das Ergebnis des Zwischentests nicht in



(6) „Die „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ ist ein guter Baustein in der Ausbildung professioneller Mathematiklehrer“

1: trifft gar nicht zu
5: trifft vollkommen zu

die Endnote für die Veranstaltung eingingen (maßgebend hierfür war nur die Abschlussklausur). Ebenso wurde ihnen der Besuch der Tutorien zwar nachdrücklich empfohlen, war aber nicht obligatorisch. Die Erwartung von Seiten der Mitarbeiter, durch diese Entscheidung die intrinsische Motivation und die Selbstkontrolle der Studierenden zu steigern, wurde von der Mehrheit der Teilnehmer nicht durchgängig erfüllt. Hier spielte eine Rolle, dass die Spielregeln in der Parallelveranstaltung „Analysis I" von Anfang an klarer und rigider waren. Die fast einhellige Meinung des Semesters war, dass man sich noch intensiver mit der „Schulanalysis vom höheren Standpunkt" beschäftigen und vielleicht auch mehr Punkte in den Übungen holen würde, wenn nur der Druck größer wäre.

Fazit: In einem erneuten Durchgang sollten die Passung der Übungen optimiert und die Rahmenbedingungen beider Veranstaltungen angeglichen werden.

2.2 Analysis I

2.2.1 Konzeption

Die Lehrveranstaltung „Analysis“ gehört zum Fundament jedes Mathematikstudiums für das gymnasiale Lehramt. Das Siegener Teilprojekt beginnt im 1. Semester mit „Analysis I“ (Prof. Hein). Sie wurde durchgeführt im Verbund

a) einer 4 stündigen Vorlesung,
b) einer 2 stündigen Übung (Tutorium) in 3 Parallelgruppen und wöchentlichen schriftlichen Übungsaufgaben,
c) einer schriftlichen Hausarbeit.

zu a: Vorlesung

Die Vorlesung verfolgte das Ziel, die Studierenden mit den grundlegenden fachwissenschaftlichen Fakten und Methoden der Differential- und Integralrechnung und den dazu notwendigen Hilfsmitteln bekanntzumachen. Hierdurch sollen die Studierenden befähigt werden (um nur ein – allerdings wesentliches – Ziel zu nennen), das weitere Studium erfolgreich zu absolvieren, um sich ggf. auch in ausgewählten Disziplinen am aktuellen Forschungsdiskurs verständnisvoll und mit eigener kreativer Tätigkeit beteiligen zu können. Daraus folgt, dass die Inhalte der Vorlesung weitgehend vorgegeben sind und nicht beliebig ausgetauscht werden können. Andererseits gibt es einen breiten Spielraum hinsichtlich der Art und Weise, wie die Studierenden an diese Inhalte und die damit verbundenen Methoden herangeführt werden. Hier ist der Punkt, in dem sich die drei genannten Teile a) – c) der Lehrveranstaltung von der üblicherweise praktizierten Form unterschieden haben. Drei Aspekte seien hervorgehoben:

1. Von Anfang an waren Gesprächsanteile in die Vorlesung integriert, um die Studierenden in die Entwicklung der Begriffsbildungen miteinzubeziehen. Hierdurch sollte die Einsicht in die Sinnhaftigkeit, das Verständnis und somit die Akzeptanz der Theorieentwicklung gestärkt werden sowie die Motivation, diese Einstellung in der späteren Schulpraxis weiterzuvermitteln.

2. Eine wichtige Komponente war die Einbeziehung der Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte. Dabei wurde die Geschichte nicht als Selbstzweck vermittelt, sondern als Hilfsmittel, die genannten Ziele zu erreichen und darüber hinaus die gesellschaftliche und allgemein kulturelle Relevanz der Mathematik (zumal in unserer heutigen technisch-naturwissenschaftlichen Welt) zu verdeutlichen.

3. Bei der Strukturierung des Stoffes wurde das Ziel verfolgt, die Schwierigkeiten und das Abstraktionsniveau anfangs so gering wie möglich zu halten und allmählich zu steigern. Das bedeutet z. B., dass schwere Sätze oder Beweise, die das Fassungsvermögen von Studienanfängern bekanntermaßen überfordern, auf einen späteren Teil der Vorlesung verschoben wurden, auch wenn sie fachsystematisch in einen früheren Abschnitt gehören. Dies entspricht auch der historischen Entwicklung. Am Beispiel der Einführung der reellen Zahlen soll das stichwortartig verdeutlicht werden:

Die Punktmenge einer Geraden (bei Zugrundelegung elementargeometrischer Kenntnisse) als angeordneter Körper → Konstruktion der rationalen Punkte → Existenz irrationaler Punkte → Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ mittels der antiken Methode der Wechselwegnahme (→ Euklidischer Algorithmus, Kettenbrüche) → Übergang zu Nullfolgen, ihre (implizite) Behandlung durch die Griechen → „moderne“ Formulierung → geometrische Reihe in Antike und Neuzeit → Konvergenz unendlicher Reihen → Identifizierung der Punkte der Zahlengeraden mit Dezimalzahlen → Intervallschachtelung → Vollständigkeit → vertiefte Behandlung unendlicher Folgen und Reihen → Neuentdeckung der Konvergenz im 14. Jh. (Beispiel), Anwendung: die Eulersche Zahl *e* als Grenzwert einer Folge und als Potenzreihe

Ein neu konzipiertes Skript zur „Analysis I“ wurden den Studierenden semesterbegleitend ausgehändigt. Das Skript umfasste neben den Definitionen, Sätzen und Beweisen auch die behandelten historischen Beispiele und ausführliche Erläuterungen (vgl. Anhang). Zur schriftlichen Leistungsüberprüfung wurden neben der Abschlussklausur zwei Tests während des Semesters geschrieben.

zu b: Übungen

Die Aufgabe der Übungsgruppen ist zunächst ganz traditionell in der Besprechung der wöchentlich zu bearbeitenden Übungsblätter zu sehen. Die Umsetzung dieser Aufgabe sollte dagegen nicht im traditionellen Sinne (d. h. einer rechnet vor, alle schreiben mit oder kopieren die Musterlösung) erfolgen, sondern die Studierenden zu aktiver Mitarbeit in den Übungen und Beschäftigung mit dem in der Vorlesung Gehörten anregen.

Die Arbeit in den Übungsgruppen war damit nicht nur von dem Ziel geleitet, jedem eine richtige Lösung zukommen zu lassen. Vielmehr sollte sie dazu beitragen, die Fragen der Studierenden zu den Aufgaben, den Korrekturen und ihren Lösungen, aber auch zur Vorlesung, den Tests und der Klausur sowie weitere Probleme zu klären. Die Übung sollte somit ein Raum sein, in dem sich die Studierenden trauen, alle Fragen, auch die vermeintlich „dummen“, zu stellen. Die Übung musste Gelegenheit geben, sich mit den Lösungen der Studierenden auseinanderzusetzen und individuelle Probleme im Einzelgespräch klären zu können. Wichtig war, Zeit für Fragen zum gerade aktuellen, noch abzugebenden Übungsblatt zu geben, um Verständnisprobleme mit den Anforderungen der Aufgaben bereits vor der Abgabe aus dem Weg zu räumen.

Eine der Anforderungen zum Erwerb eines Leistungsnachweises für die Studierenden bestand in „aktiver Mitarbeit“ in den Übungsgruppen. In unserem Fall bedeutete dies, dass die Studierenden die Pflicht hatten, aber auch die Möglichkeit dazu bekommen sollten, aktiv miteinander Fragen und Lösungen zu erarbeiten. Dazu gehörte es, miteinander über die Sache ins Gespräch zu kommen, sich nicht hinter einer Abgabegruppe zu verstecken, anderen eigene Lösungen zu erklären und zu präsentieren, unter Anleitung Lösungen zu erarbeiten und anderen gezielt eigene Fragen zu stellen. Besonders die Präsentation diente dabei nicht nur dem vertiefenden Verständnis des Erarbeiteten, sondern trainiert auch die für einen angehenden Mathematiklehrer so wichtige Fähigkeit, anderen Selbstverstandenes verständlich nahe zu bringen. All dies sollte weiter nicht nur das Verständnis für die Analysis fördern, sondern auch erfahrbar machen, dass mathematische Erkenntnis nicht „vom Himmel fällt“, sondern aus einem Prozess heraus entsteht und damit den genetischen Ansatz der Vorlesung unterstützen.

Um diesen Zielen gerecht zu werden, wurde auch methodisch vom traditionellen frontalen Vorrechnen weitestgehend abgesehen und hauptsächlich auf unterschiedliche Formen der Gruppenarbeit zurückgegriffen. Eine wichtige organisatorische Voraussetzung dafür war die Aufteilung der Korrekturen. So konnte jede Übungsleiterin die Studierenden in ihrer Gruppe selbst korrigieren. Dies ermöglichte einerseits einen Überblick über individuelle und allgemeine Schwierigkeiten in bestimmten Bereichen, andererseits z. B. die Auswahl von Studierenden mit besonders guten Lösungen als „Experten“, die dann in ihren Kleingruppen die Lösungen den anderen vorstellen und Fragen dazu klären konnten. Die Lösungen wurden meist in Gruppen erarbeitet und dann den anderen vorgestellt („Gruppenpuzzle“). Dies ermöglichte es, weitestgehend von vorgefertigten Musterlösungen abzusehen.

zu c: Hausarbeit

Neben der regelmäßigen aktiven Teilnahme in den Übungsgruppen und der Abgabe von Lösungen zu den Übungsblättern wurde von den Studierenden erwartet, eine kurze Hausarbeit zu schreiben. Sie hatte vor allem das Ziel, den Studierenden die Möglichkeit zu geben, die Mathematik auch als Geisteswissenschaft begreifen zu lernen und erste Erfahrungen bei der Formulierung wissenschaftlicher Texte zu machen.

Die Hausarbeit sollte als Gruppenarbeit geschrieben werden, so dass die Studierenden auch hier die Möglichkeit hatten, ihre bereits geübte Zusammenarbeit aus den Übungsgruppen in einem neuen, eher geisteswissenschaftlich orientierten Aufgabenbereich zu erproben. Die unterschiedlichen Themen wurden unter den Gruppen ausgelost, und sie hatten fünf Wochen Zeit zur Bearbeitung. Die Themen waren so ausgewählt, dass sowohl ein Bezug zum mathematischen Teil der Vorlesung „Analysis I“ erkennbar war, als auch Aspekte aus der Geschichte der Mathematik mit einbezogen wurden. Weiterhin gab es bestimmte Vorgaben zur Gestaltung der Arbeit, die insbesondere mit dem Team der Veranstaltung „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ abgesprochen wurden.

Eine Bibliotheksführung zu Beginn des Semesters diente als erste Einführung in die wissenschaftliche Arbeitsweise. Als Hilfestellung wurde grundlegende Literatur in einem Semesterapparat bereitgestellt und die einzelnen Themen anhand möglicher zentraler Fragestellungen erläutert. Die Korrektur der Hausarbeiten wurde in Einzelgesprächen mit den Studierenden durchgegangen, um auf dieser Grundlage Verbesserungen und Anregungen für zukünftige Arbeiten dieser Art zu geben.

Über einige ausgewählte Fragestellungen referierten die Studierenden in Kurzreferaten bei dem Seminarwochenende auf der Freusburg für alle Studierenden des Projekts. Die Themen waren so ausgewählt, dass ein guter Querschnitt der Veranstaltung präsentiert werden konnte. So wurde beispielsweise in einem Referat zum *Dedekindschen Schnitt* gezeigt, wie notwendig und schwierig es ist, die Lückenlosigkeit der Zahlengerade nachzuweisen. Eine andere Gruppe präsentierte einige Aspekte zur Geschichte der infinitesimalen Methode bei Newton. *Newtons Fluxionsmethode* hat sich im Gegensatz zu der Differentialrechnung von Leibniz nicht durchsetzen können, obwohl Newtons spezieller physikalischer Ansatz einen wichtigen Anwendungsaspekt der Differentialrechnung darstellt. Ein Referat zu *Geschichte des Logarithmus* rundete die Vortragsthemen ab. Bemerkenswert ist, dass auch Studierende des unteren Leistungsbereichs bereit waren, ihr Hausarbeitsthema vor einem größeren Publikum vorzutragen.

2.2.2 Ergebnisse

Die in der Veranstaltung zur Schulanalysis konzipierten Erhebungen bezogen sich teilweise nicht nur auf die Veranstaltung selbst, sondern haben auch die Erfahrungen der Studierenden im Bereich der Fachvorlesung „Analysis I“ reflektiert. Insbesondere in der Erhebung zum mathematischen Weltbild (Eingangserhebung vom 20.10.2005), der Kurzbefragung 1 vom 29.11.2005 und den im Januar 2006 geführten Interviews wurde auf beide Veranstaltungen Bezug genommen. Aus der Kurzbefragung vom 29.11.06 lässt sich ablesen, dass die Studierenden die Übungen zu beiden Veranstaltungen für gleich wichtig erachten und etwa sechs Stunden häusliche Arbeit zusätzlich auf die Veranstaltung „Analysis I“ verwenden. Dies entspricht den Erwartungen für eine sechsstündige Veranstaltung in einem Vollzeitstudium. Gleichzeitig hat die Kurzbefragung ergeben, dass die Studierenden den Umfang der

Übungen zu 64% angemessen empfinden und zu 75% der Ansicht sind, dass die Übungsaufgaben zum Verstehen des Vorlesungsstoffes beitragen. Diese Zustimmung ist im Vergleich zu der allgemeinen Meinung von Studierenden in herkömmlichen Fachveranstaltungen außergewöhnlich, aber dennoch schneidet in beiden Fragen die Veranstaltung „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ noch besser ab. Dies soll als Anregung dienen, die Verknüpfung von Übungsaufgaben und Vorlesungsstoff weiter zu verbessern. Die Auswertung der Interviews steht noch aus, so dass bis auf punktuelle Aussagen keine weiteren Ergebnisse dargestellt werden können. Zu den Erhebungen der Veranstaltung „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ kamen in der „Analysis I“ noch weitere Evaluationen des Leistungsstandes der Probandengruppe hinzu:

- 24.11.05 Test 1
- 16.01.06 Test 2
- 19.01.06 Abgabe der Hausarbeit
- 02.02.06 Abschlussklausur

Die kontinuierliche Mitarbeit in den Übungsgruppen und der verbindliche Charakter der Abgabe von Lösungen zu den Übungsaufgaben ermöglichte, während des gesamten Semesters den Leistungsstand einzelner Studierender zu beobachten.
Eine detaillierte Evaluation hinsichtlich der Identifizierung der Studierenden mit den Projektzielen konnte für die „Analysis I“ nicht vorgenommen werden. Ebenso wurde auf eine Erhebung der Qualität der Lehre zum Ende des Semesters verzichtet, da die Studierenden bereits zahlreiche Fragebögen bearbeiten mussten.

Bei den folgenden Angaben soll nur die Gruppe der Studierenden betrachtet werden, die auch bis zum Ende des Semesters den Scheinerwerb angestrebt hat. Bis auf eine Studentin ist diese Gruppe deckungsgleich mit den Studierenden aus der Parallelveranstaltung „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“.

Note	Sehr gut (1,0 – 1,3)	Gut (1,7 – 2,3)	Befriedigend (2,7 – 3,3)	Ausreichend (3,7 – 4,0)	Nicht bestanden
Anzahl der Personen (N=39)	3	15	9	6	6

Tabelle 4: Ergebnis der Hausarbeit (10 % der Abschlussnote)

Das Erarbeiten der Hausarbeit wurde von den Studierenden im Allgemeinen sehr positiv betrachtet. Dies war in erster Linie nicht durch die Wahl der Themen begründet, sondern vielmehr wurde die Möglichkeit geschätzt, in einem relativen Schonraum das wissenschaftliche Arbeiten zu üben, ohne dass die Gesamtleistung maßgeblich von dieser Einzelleistung abhängt. Ebenso wurde geschätzt, dass die Arbeit gemeinschaftlich erstellt werden konnte, also niemand mit seinen Problemen alleingelassen wurde.

Diese positive Einschätzung lässt sich besonders durch die Tatsache belegen, dass alle angesprochenen Gruppen freiwillig bereit waren, ihre Arbeitsergebnisse bei der Tagung vorzutragen, obwohl dies nicht Bestandteil des Scheinerwerbs war. Bemängelt wurde allerdings, dass einige der Hausarbeitsthemen deutlich schwieriger waren als andere und dass auch die Literatur und Quellengrundlage unterschiedlich gut ausgewählt worden war.

Insgesamt kann ein sehr positives Fazit zu den Übungen gezogen werden. Es konnte zwar auf Grund der vielen Gruppenaktivitäten keine Einzelnote oder Ähnliches für die aktive Mitarbeit in den Übungsstunden gegeben werden, allerdings war es durch die Arbeitsform in Kleingruppen auch keinem Studierenden möglich, sich davor zu „drücken“, aktiv und kooperativ Fragen und Lösungen zu erarbeiten. Die Vergabe der Noten resultiert hier aus den erreichten Punkten bei den abgegebenen Lösungen der Übungsaufgaben:

Note	Sehr gut (1,0 – 1,3)	Gut (1,7 – 2,3)	Befriedigend (2,7 – 3,3)	Ausreichend (3,7 – 4,0)	Nicht bestanden
Anzahl der Personen (N=39)	7	11	13	7	1

Tabelle 5: Lösungen der Übungsaufgaben (10 % der Abschlussnote)

Die Erarbeitung von Lösungen in Kleingruppen hat scheinbar auch über die Übungsgruppen hinaus Sinn und Ziel erkennen lassen. Eine Studentin z.B. hatte sich mit einigen anderen zu einer Arbeitsgruppe zusammengeschlossen und sogar zu Hause eine Tafel angeschafft, an der die Aufgaben gemeinsam gelöst werden konnten.

In den Interviews wurden besonders die engagierten Leistungen der Tutorinnen in den Übungsgruppen gelobt, da sie es geschafft hatten, in den Kleingruppen eine kommunikative Atmosphäre zu erzeugen, die eine aktive Auseinandersetzung mit einem schwierigen Sachverhalt ermöglichte.

Note	Sehr gut (1,0 – 1,3)	Gut (1,7 – 2,3)	Befriedigend (2,7 – 3,3)	Ausreichend (3,7 – 4,0)	Nicht bestanden
Anzahl der Personen (N=39)	8	8	5	9	9

Tabelle 6: Ergebnisse Test 1 (15 % der Abschlussnote)

Test 1 umfasste 15 Fragen, die den Vorlesungsstoff des ersten Kapitels: *Zahlen und Zahlenfolgen* behandelten. Die Fragen waren zum allergrößten Teil verständnisorientiert. Die Inhalte des Vorlesungsstoffes waren sprachlich zu erläutern, und die Verknüpfungen zwischen den einzelnen Aspekten anhand übergreifender Begriffe herauszuarbeiten. Die Studierenden sollten mathematische Beziehungen in ihrer eigenen Sprache ausdrücken und ihre Interpretationsfähigkeiten in mathematischer Hinsicht zeigen.

Note	Sehr gut (1,0 – 1,3)	Gut (1,7 – 2,3)	Befriedigend (2,7 – 3,3)	Ausreichend (3,7 – 4,0)	Nicht bestanden
Anzahl der Personen (N=38)	3	6	10	9	10

Tabelle 7: Ergebnisse Test 2 (10 % der Abschlussnote)

Test 2 umfasste 10 Fragen zum Kapitel *Differentialrechnung*. Die Fragen waren teils in Anlehnung an die Aufgaben der Übungsblätter gestaltet, teils entsprachen sie aber auch den sprachlich orientierten Ansätzen der Aufgaben des ersten Tests. Die Studierenden sollten einerseits nachweisen, dass sie die in den Übungen gewonnenen Fähigkeiten, mathematische Sachverhalte zu beschreiben, anhand einfacher themenbezogener Beispiele umsetzen konnten und andererseits, dass sie fähig waren, auch komplexere mathematische Probleme zu beschreiben und in einen Gesamtkontext zu bringen. Zudem sollten die Studierenden ihre Fähigkeiten hinsichtlich mathematischer Lösungsstrategien und innermathematischen Methoden weiter ausbauen.

Die auffällige Verschiebung des Notenspiegels von sehr guten und guten Leistungen im ersten Test zu befriedigenden Leistungen im zweiten Test lässt sich durch eine Verschiebung der Anforderungsskala beim zweiten Test erklären. In beiden Tests war es möglich 60 Punkte zu erreichen. Bei Test 1 konnte allerdings bereits mit 40 Punkten die Note sehr gut erreicht werden. Bei Test 2 benötigten die Studierenden 48 Punkte. Ausreichende Leistungen wurden in beiden Tests bescheinigt, wenn mindestens 24 Punkte erreicht worden waren. Diese Verschiebung in der Notenskala im oberen Bereich hat sich im Nachhinein als eine sehr unglückliche Entscheidung herausgestellt.

Trotz der erhöhten Arbeitsbelastung bewerteten die Studierenden die Tests positiv, da sie so selbst überprüfen konnten, inwieweit sie die Problemhorizonte der einzelnen Kapitel tatsächlich verstanden hatten.

> *„In Analysis muss ich eben immer meine Zettel abgeben, jetzt hatten wir zwei Tests, da muss ich's mir auch noch mal vernünftiger angucken"* (Zitat aus einem der Interviews, Januar 2006)

Organisatorisch wurde gelobt, dass durch die Einbeziehung der Testergebnisse in die Abschlussbewertung der Druck bei der Abschlussklausur gemildert wurde und dass mit der kontinuierlichen Leistungsüberprüfung tagesformabhängige Schwankungen ausgeglichen werden konnten.

Note	Sehr gut (1,0 – 1,3)	Gut (1,7 – 2,3)	Befriedigend (2,7 – 3,3)	Ausreichend (3,7 – 4,0)	Nicht bestanden
Anzahl der Personen (N=39)	1	13	9	8	8

Tabelle 8: Ergebnisse Abschlussklausur (50 % der Abschlussnote)

Die Abschlussklausur umfasste 7 Fragen, die den gesamten Stoff der Vorlesung reflektierten. Die Durchfallquote lag mit etwa 20% genauso hoch wie bei der „Schulanalysis". Allerdings besteht noch die Möglichkeit, dass sich diese Zahl verringert, da am 03.04.06 eine Nachklausur angeboten wird.

Zu bemerken ist, dass auffällig viele Studierende, die Mathematik mit dem Ziel Lehramt für das Berufskolleg studieren, bei der Klausur durchgefallen sind. Eine mögliche Erklärung, die aus den Interviews ersichtlich wird, besteht darin, dass diese Studierenden oftmals bereits eine Berufsausbildung abgeschlossen haben und somit ihre Schulzeit länger zurück liegt. Inwieweit den Bedürfnissen dieser Gruppe noch spezieller Rechnung getragen werden muss, wird zu überlegen sein.

Die Durchfallquote bei der regulären Veranstaltung „Analysis I" für Bachelorstudierende, die im Wintersemester ebenfalls stattfand, lag bei etwa gleicher Teilnehmeranzahl bei 57%.

Fazit: Die neu konzipierte Vorlesung „Analysis I" und besonders die ideengeschichtliche Herangehensweise war für die Studierenden eine völlig neue und sinnstiftende Erfahrung.

> *„Ich hätte gedacht, dass Uni noch wesentlich schlimmer wird: Das ist so und jetzt beweisen wir das über 5 Seiten. Ja, dass es also geschlossener – formal in sich geschlossener – wirkt und jetzt nicht so auf dieser erklärenden beschreibenden Schiene ist, dass es also deutlich abstrakter als die Schulmathematik ist."* (Zitat aus einem der Interviews, Januar 2006)

Besonders das Skript als Medium zum Wiederholen und Nachschlagen ist mehrfach positiv hervorgehoben worden, da es alle notwendigen Informationen in komprimierter Form zur Verfügung bereitgestellt hat.

> *„Das ist eigentlich schon so ein bisschen vergleichbar mit der Vorlesung vom Herrn Hein, da kommst du dann nicht mehr mit und dann nimmst du dir das Skript und machst dann noch irgendwie die Aufgaben."* (Zitat aus einem der Interviews, Januar 2006)

Die Organisation des Übungsbetriebs und der ausgefeilte Prüfungsmodus hat bei den Studierenden große Zustimmung gefunden. Trotz eines engen Zeitplans und ständigen Drucks wurde hervorgehoben, dass es das Projekt ermöglicht hat, nicht nur innermathematisches Wissen zum Thema „Analysis I“ zu erwerben, sondern dass der genetische Ansatz der Vorlesung hinsichtlich der Ausprägung eines kontextualen Wissens einen wertvollen Beitrag geleistet hat. Die Form der Gruppenarbeit in den Übungsgruppen hat das gemeinsame Erarbeiten von Lösungen ermöglicht und die Kompetenz der Studierenden gefördert, über Mathematik reden zu können. Zusätzliche kleinere Arbeiten haben den Druck hinsichtlich der Abschlussklausur reduziert und zur Reflexion über die einzelnen Kapitel angeregt. Die Hausarbeit verknüpfte die Mathematik mit ihrer Geschichte und ermöglichte es die Mathematik auch als Geisteswissenschaft begreifen zu lernen.

2.3 Forum

2.3.1 Konzeption

Das Forum fand ab der dritten Semesterwoche als fakultative wöchentliche Veranstaltung statt, je nach Teilnehmerzahl entweder im Seminarraum oder im didaktischen Labor. Das didaktische Labor steht den Studierenden als Kommunikations- und Informationszentrum täglich offen. Es beherbergt eine wachsende Auswahl mathematischer und mathematikdidaktischer Literatur, Schulbücher sowie einen PC-Arbeitsplatz mit mathematischer Software und Internetzugang. Das didaktische Labor ist bewusst wohnlich gestaltet, um eine angenehme Lern- und Kommunikationsatmosphäre zu ermöglichen. Neben den Forumssitzungen wird es für die Übungsgruppen zur „Schulanalysis" genutzt und ist für die Lehramtstudierenden der Mathematik ein gern und oft genutzter Arbeitsraum und Treffpunkt.

Das Forum als Verbindung zwischen den Veranstaltungen „Schulanalysis vom höheren Standpunkt" und „Analysis I" dient dazu, Gemeinsamkeiten aufzudecken, unterschiedliche Perspektiven der beiden Zugänge zur Analysis zu diskutieren sowie eine vertiefte Sicht auf die Kernideen des Fachs zu gewinnen. Zu diesem Zweck sind Problemstellungen und Diskussionsgrundlagen entwickelt worden, die ganz bewusst eine eigenaktive und kooperative Auseinandersetzung der Studierenden initiieren. Beispielsweise lautete ein Arbeitsauftrag[3] zur Grenzwertproblematik:

> „Nehmen Sie Stellung zu der Aussage $0,\overline{9}=1$! Mit welchen Argumenten würden Sie Ihre Position stützen? Könnten Sie sich Argumente vorstellen, die Ihre Position anzweifeln?"

Um den Charakter des Forums möglichst offen zu halten, gab es keine festgelegte Struktur der einzelnen Sitzungen. Dies bedeutet, dass die Studierenden in der Verantwortung waren, den Ablauf größtenteils selbst zu gestalten. Lediglich das jeweils zu bearbeitende Thema mit den ausgewählten Arbeitsaufträgen wurde zu Beginn als Diskussionsgrundlage ausgegeben.

2.3.2 Ergebnisse

Mit fortschreitendem Semester ging die Anzahl der Teilnehmer von anfangs etwa 20 immer weiter zurück und pendelte sich bei einem „harten Kern" von ca. 10 Studierenden ein. Wie durch Gespräche mit Studierenden, die Kurzbefragung vom 29.11.2005 sowie einige Interviews deutlich wurde, lagen die Ursachen für diesen Rückgang insbesondere in zwei Aspekten:

---

[3] Eine vollständige Aufstellung der eingesetzten Arbeitsaufträge findet sich im Anhang.

Zum einen war der große Freiheitsgrad innerhalb der Forumssitzungen für die Teilnehmer ungewohnt. Sie hatten bislang meist einen stark vorgeprägten und durchstrukturierten Umgang mit Mathematik kennengelernt, der ihnen kaum die Möglichkeit oder auch die Notwendigkeit bot, über die verhandelten Inhalte zu diskutieren und sie zu hinterfragen. Einige Stimmen forderten daher eine stärkere Lenkung der Diskussionen sowie eine deutlichere Ergebnisorientierung der Veranstaltung. Zum anderen führte der nicht verpflichtende Charakter des Forums dazu, dass die Teilnehmer bei steigendem Arbeitspensum langsam ausblieben bzw. lieber andere Veranstaltungen des Grundstudiums besuchten. Die anonyme Kurzbefragung zeigte darüber hinaus, dass sich einem Teil der Studierenden der Sinn der Veranstaltung nicht erschloss und die dort behandelten Inhalte für sie größtenteils keine Relevanz aufwiesen. Tabelle 9 fasst das Antwortverhalten auf das Item 2.4 „Ich würde am Forum eher teilnehmen, wenn…" der Kurzbefragung vom 29.11.2005 zusammen. Die Frage wurde von 18 der 44 Teilnehmer an der Befragung bearbeitet; Mehrfachantworten waren dabei möglich.

keine zeitgleichen Veranstaltungen	weniger Zeitdruck	sinnvollere Gestaltung
9	4	7

Tabelle 9: Häufigste Antworten auf das Item 2.4 der Kurzbefragung vom 29.11.2005: „Ich würde eher am Forum teilnehmen, wenn…" (n = 18)

Auf der anderen Seite äußerte sich der „harte Kern" sehr positiv über das Forum: es habe zum Aufzeigen von Zusammenhängen, zur Klärung von Verständnisfragen sowie zur Vertiefung der in den Vorlesungen behandelten Inhalte deutlich beigetragen. Auch wurde von dieser Gruppe der gegenseitige Austausch mit den Kommilitonen und das Miteinander-Diskutieren als Bereicherung empfunden. Diese Äußerungen decken sich mit Ergebnissen von Item 2.2 der Kurzbefragung, zusammengefasst in Tabelle 10.

Zusammenhänge aufzeigen	Verständnisfragen klären	Vertiefung der Vorlesung
7	8	7

Tabelle 10: Häufigste Antworten auf das Item 2.2 der Kurzbefragung vom 29.11.2005: „Welche Bedeutung hat das Forum für Sie?" (n = 21)

Fazit: In einem erneuten Durchgang müsste insbesondere der von den Studierenden geäußerte Kritikpunkt berücksichtigt werden, das Forum sei zu offen und zu wenig strukturiert. Gerade zu Beginn des Studiums scheint eine stärkere Strukturierung dieser Veranstaltung angezeigt.

2.4 Gemeinsame Tagung

Vom 17. - 19.3. 2006 fand ein gemeinsames Treffen der Projektgruppen Siegen und Gießen auf der Freusburg bei Kirchen/Sieg statt. Neben der Pflege des sozialen Zusammenhalts sollten die Studierenden beider Standorte wechselseitig einen Einblick geben in die inhaltliche Arbeit des vergangenen Semesters. Dies geschah in Form von kleinen Workshops und Vorträgen, die ausschließlich von den Studierenden selbst gestaltet wurden. Abgerundet wurde die Tagung von einem Festvortrag zu Beginn und einer Podiumsveranstaltung zum Abschluss. Das detaillierte Programm findet sich im Anhang. Die Veranstaltung wurde rückblickend mit überwältigender Zustimmung als sinnvolle Ergänzung gewürdigt.

2.5 Ausblick

Die planmäßige **Fortsetzung** des Programms im Sommersemester 2006 hat soeben begonnen: Neben dem zweiten Teil der ideengeschichtlich orientierten Hochschulanalysis („Analysis II“) wird eine seminaristisch angelegte Begegnung mit Grundfragen des Analysisunterrichts („Didaktik der Analysis“) angeboten, die die „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ vom vergangenen Wintersemester aufnimmt und didaktisch fortsetzt.

Das **externe Interesse** am Projekt ist spürbar:

- Das Prorektorat für Lehre und der Lehrerbildungsausschuss der Universität Siegen haben angeregt, das Projekt im Lehr-Lern-Forschungsforum der Universität vorzustellen (Vortrag Prof. Danckwerts im April 2006).
- Das Schulministerium NRW (Referat Lehrerbildung) hat die Konzeptpapiere angefordert.
- Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) hat das Projekt öffentlich bekannt gemacht (Vortrag Prof. Danckwerts auf der GDM-Jahrestagung in Osnabrück im März 2006).
- Die Deutsche Mathematiker Vereinigung (DMV) bereitet ein öffentliches Symposium im Rahmen der DMV-Jahrestagung in Bonn im September 2006 vor (Prof. Beutelspacher und Prof. Danckwerts werden das Projekt vorstellen und an einer Podiumsdiskussion teilnehmen).
- Einzelne Hochschulstandorte haben zur Vorstellung des Projekts eingeladen (Vorträge Prof. Danckwerts an der Universität Duisburg-Essen im November 2005, Universität Saarbrücken im Mai 2006, Universität Oldenburg im Juni 2006, Universitäten Hamburg, Bielefeld und Jena angefragt).
- Interview Prof. Danckwerts mit der Siegener Zeitung im November 2005 und mit der Universitätszeitung im Dezember 2005.

Die Mannschaft des Siegener Teilprojekts

Hochschullehrer:

Prof. Dr. Rainer Danckwerts (Leitung)
Prof. Dr. Wolfgang Hein

Wiss. Mitarbeiter:

Thomas Mockenhaupt (Koordinator)

Abgeordneter Lehrer:

StD Dr. Dankwart Vogel

Wiss. Hilfskräfte:

Gabriele Wickel
Julia Nies (bis 30.12.05)
Dorothee Maczey

Stud. Hilfskräfte:

Regina Freund
Verena Hernschier
Nicole Schlosser
Louisa Sippel
Susanne Spies
Christian Villwock

Anhang

Erhebungen

Erhebung zu Beginn der Veranstaltung

„Schulanalysis vom höheren Standpunkt“

Prof. Dr. Danckwerts

WS 2005/06

IHRE DATEN WERDEN STRENG VERTRAULICH BEHANDELT!

Um zum einen die Vertraulichkeit sicherzustellen, Sie zum anderen aber dennoch zu einem späteren Zeitpunkt - etwa für geplante Interviews - gezielt ansprechen zu können, wird Ihre Identität für die Erhebung mit einem Kürzel verschlüsselt. Dieses Kürzel besteht aus einer Ziffern-Buchstaben-Kombination:

→ **z.B. dem Geburtsdatum des Vaters/der Mutter/ …sowie**

→ **den ersten beiden Buchstaben des Mädchennamens der Mutter/des Vornamens des Bruders/…**

Wichtig:

Verwenden Sie bitte ein Kürzel, das Sie sich gut merken können!

Denn:

Sie benötigen Ihr persönliches Kürzel für alle folgenden Erhebungen und müssen sich anhand ihres Kürzels wiedererkennen können!

Beispiel:

Geburtsdatum des Bruders: 13.03.1973

Nachname des Großvaters: Setzer

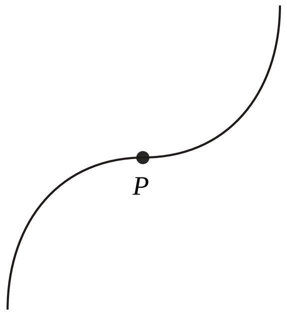
1	3	0	3	1	9	7	3	S	E

1

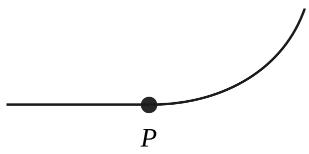
Zeichne jeweils die Tangente im Punkt *P* ein (falls es eine gibt).

Erklärungen sind willkommen!

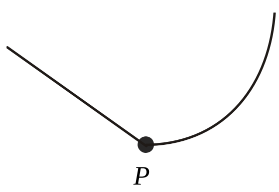
a)



b)



c)



2

$f(t)$ gebe die zum Zeitpunkt t gemessene Außentemperatur an. Die Temperatur wird zu den Zeitpunkten t_1 und (etwas später) t_2 gemessen.

Kreuze an, welche Deutungen des Ausdrucks

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

richtig sind!

- ☐ a) Der Ausdruck gibt die Temperaturänderung zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 an.
- ☐ b) Der Ausdruck gibt das Verhältnis der Temperaturänderung zu der dafür benötigten Zeit an.
- ☐ c) Der Ausdruck gibt den Unterschied zwischen der Temperaturänderung und der dafür benötigten Zeit an.
- ☐ d) Der Ausdruck gibt an, um wie viel sich die Temperatur im Mittel pro Zeiteinheit im Intervall $[t_1, t_2]$ ändert.
- ☐ e) Der Ausdruck gibt die mittlere Temperaturänderung pro Zeiteinheit zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 an.
- ☐ f) Der Ausdruck gibt an, wie viel mal stärker sich die Temperatur im Intervall $[t_1, t_2]$ ändert als die Zeit.

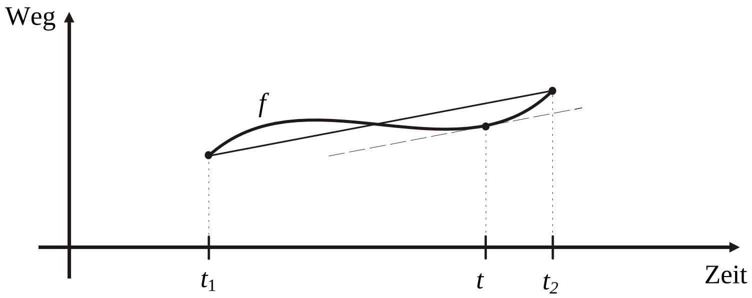
3

f sei eine Funktion über dem Intervall $[a,b]$.

Ist es möglich, dass der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ positiv ist, ohne dass die Funktion im Intervall $[a,b]$ monoton wächst?

Falls ja, skizziere man einen entsprechenden Graphen.

4



Die gestrichelte Gerade ist eine zur eingezeichneten Sekante parallele Tangente an den Graphen von *f*. Was bedeutet es im Sachkontext des Weg-Zeit-Verlaufs, dass Tangente und Sekante parallel sind, d.h. dieselbe Steigung haben?

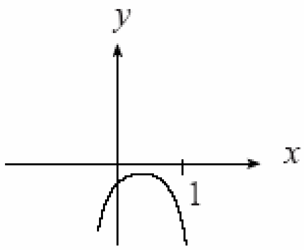
5

Für welche der folgenden Graphen gilt:

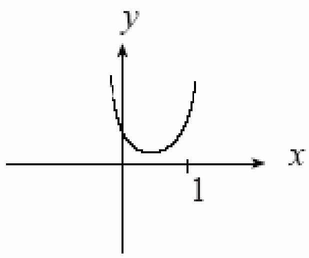
$f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$ und $f''(x)$ ist immer negativ?

Kreuze die richtigen Graphen an!

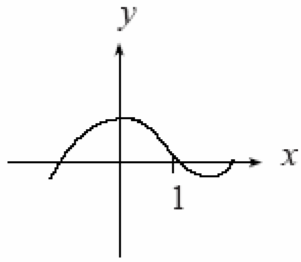
☐ a)



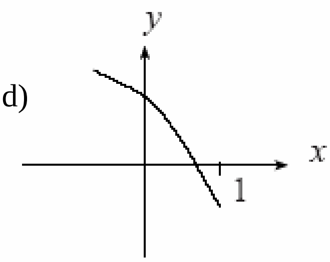
☐ b)



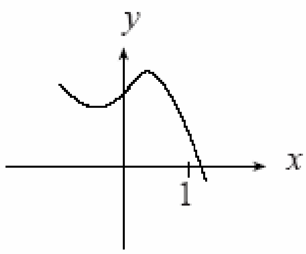
☐ c)



☐ d)



☐ e)



6

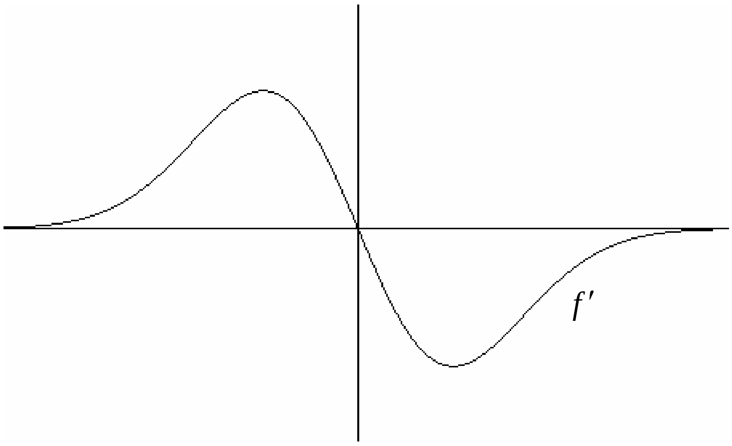
Sicher kennen Sie die Bedingung für lokale Minima (anders gesagt: für relative Minima oder für Tiefpunkte):

Ist $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) > 0$*, so hat f an der Stelle* x_0 *ein lokales Minimum.*

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die zwar ein lokales Minimum hat, aber dort nicht die obige Bedingung „$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$“ erfüllt. (Mit Begründung!)

(Ein solches Minimum würde also von dem genannten Kriterium nicht aufgespürt.)

7



Das Bild zeigt den (punktsymmetrischen) Graphen einer Ableitungsfunktion.

Welche Feststellungen über die Ausgangsfunktion f bzw. über die zweite Ableitung f'' sind richtig? Kreuze an!

- ☐ a) f ist streng monoton wachsend.
- ☐ b) f ist achsensymmetrisch.
- ☐ c) f hat ein lokales Minimum an der Stelle 0.
- ☐ d) f hat keinen Wendepunkt.
- ☐ e) f'' hat genau zwei Nullstellen.
- ☐ f) f'' hat an der Stelle 0 ein lokales Minimum.

8

Sie lesen im Wirtschaftsteil einer Zeitung: „Das Wachstum des Bruttosozialprodukts ist im Laufe des letzten Quartals stetig zurückgegangen.“

f beschreibe die Höhe des Bruttosozialprodukts in Abhängigkeit von der Zeit. Kreuze die richtigen Feststellungen an!

☐ a) f' fällt in diesem Quartal monoton.

☐ b) f' ist in diesem Quartal negativ.

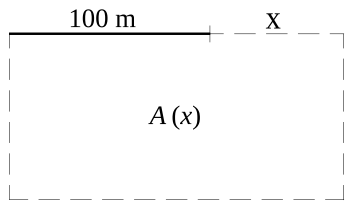
☐ c) f' ist in diesem Quartal positiv.

☐ d) f'' ist in diesem Quartal negativ.

☐ e) f fällt in diesem Quartal monoton.

9

100 m eines Zaunes stehen schon (und sollen stehen bleiben). 200 m sollen so hinzugefügt werden, dass ein Rechteck möglichst großer Fläche eingezäunt wird.



Jemand löst die Aufgabe wie folgt (nach einem Verfahren, das Ihnen vermutlich vertraut ist):

Die eine Rechteckseite ist (100 + x) Meter lang, die andere, da der halbe Umfang 150 m beträgt, (50 – x) Meter. Dann ist die Fläche

$$\begin{aligned} A(x) &= (100+x)(50-x) \\ &= -x^2-50x+5000 \end{aligned}$$

und

$$A'(x) = -2x-50$$

Die Gleichung $A'(x)=0$ liefert $x=-25$, und da die zweite Ableitung stets negativ ist, liegt bei $x=-25$ in der Tat ein Maximum! Das negative Vorzeichen bedeutet nun aber: Von dem bereits bestehenden Zaunstück sind 25 m abzureißen. Die 100 m Zaun sollten aber stehen bleiben! Also ist die Aufgabe nicht lösbar.

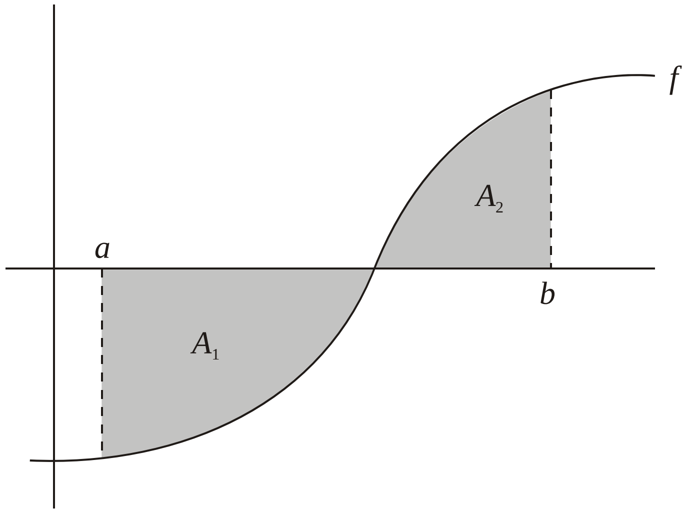
Nehmen Sie Stellung!

10

Unter allen Rechtecken mit dem Umfang 40 cm hat das Quadrat (mit der Seitenlänge 10 cm) den größten Inhalt.

Wie würden Sie dies begründen?

11



Der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ ist gleich

☐ a) $A_1 + A_2$

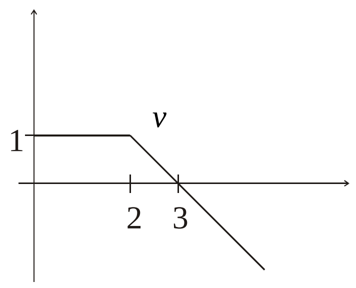
☐ b) $A_1 - A_2$

☐ c) $A_2 - A_1$

☐ d) $|A_1 - A_2|$

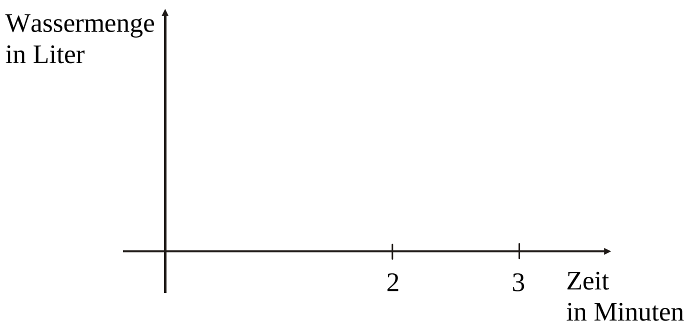
Kreuze die richtigen Antworten an!

12



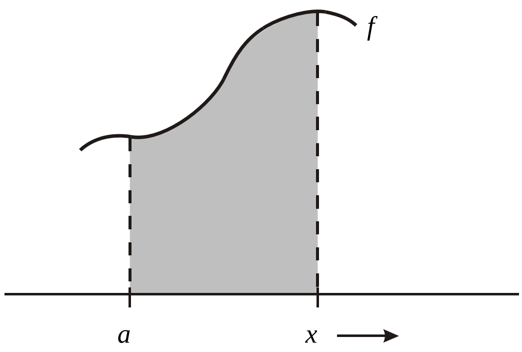
Die Funktion v beschreibt die Zuflussgeschwindigkeit (in Liter pro Minute) von Wasser in ein leeres Becken.

a) Skizziere den zeitlichen Verlauf der Wassermenge (in Liter).



b) Wann ist das Becken wieder leer?

13



Stellen Sie sich vor, die von f berandete Fläche wird mit Farbe angestrichen. Sie benutzen dazu einen kleinen Pinsel und gehen beim (senkrechten) Streichen gleichmäßig von a nach rechts.

Dann ist der Bedarf an Farbe an einer Stelle x proportional

☐ a) zum Wert des Integrals $\int_a^x f(t)\,dt$

☐ b) zum Funktionswert $f(x)$

☐ c) zur Entfernung $x-a$

☐ d) zur lokalen Änderungsrate $f'(x)$

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an!

14

Betrachten Sie den unendlichen periodischen Dezimalbruch

$$0,\overline{9} = 0,999...$$

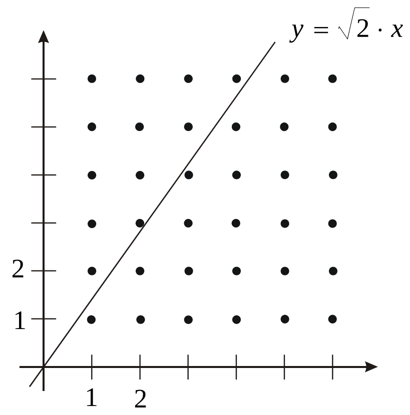
Ist diese Zahl wirklich gleich 1?

Nehmen Sie Stellung (mit Argumenten)!

15

Begründen Sie: Zwischen je zwei rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.

16



Das Bild ist unendlich ausgedehnt zu denken.

Die eingezeichnete Gerade trifft keinen einzigen Gitterpunkt.

Warum?

Erhebung am Ende der Veranstaltung

„Schulanalysis vom höheren Standpunkt“

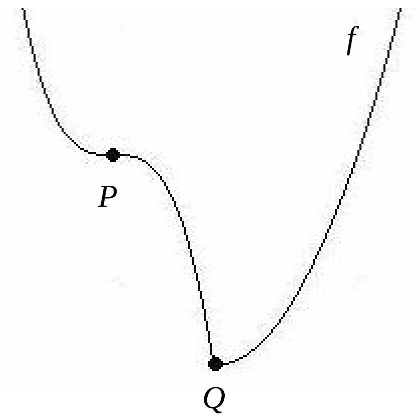
Prof. Dr. Danckwerts

WS 2005/06

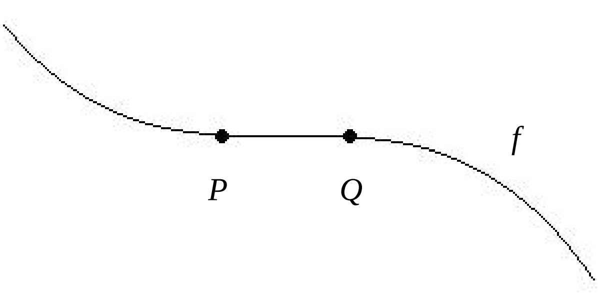
1

Wie steht es mit der Differenzierbarkeit von f in den Punkten P und Q ?

a)



b)



2

$f(t)$ gebe die zum Zeitpunkt t gefahrene Geschwindigkeit an.

Kreuzen Sie an, welche Deutungen des Ausdrucks

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

richtig sind !

☐ a) Der Ausdruck gibt die Geschwindigkeitsänderung zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 an.

☐ b) Der Ausdruck gibt die durchschnittliche Beschleunigung im Zeitintervall $[t_1,t_2]$ an.

☐ c) Der Ausdruck gibt an, um wie viel sich die Geschwindigkeit im Mittel pro Zeiteinheit im Intervall $[t_1,t_2]$ ändert.

3

f sei eine Funktion auf dem Definitionsbereich $[a,b]$.

Kann der Differenzenquotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ negativ sein, ohne dass die Funktion im Intervall $[a,b]$ monoton fällt ?

Falls ja, skizziere man einen entsprechenden Graphen.

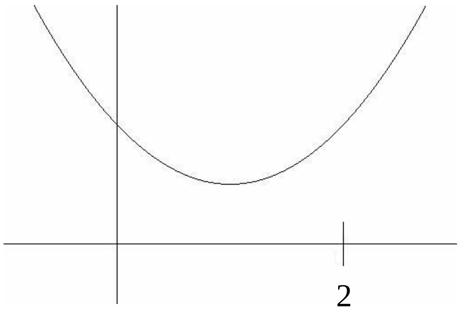
4

Für welche der folgenden Graphen gilt:

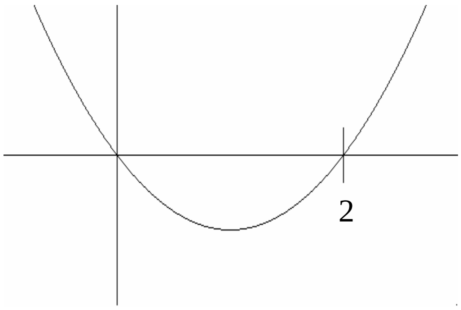
$f(0) = 0, \quad f'(0) < 0$ und $f''(x)$ ist immer positiv ?

Kreuzen Sie die richtigen Graphen an !

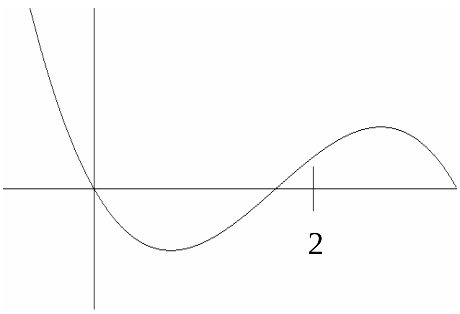
☐ a)



☐ b)



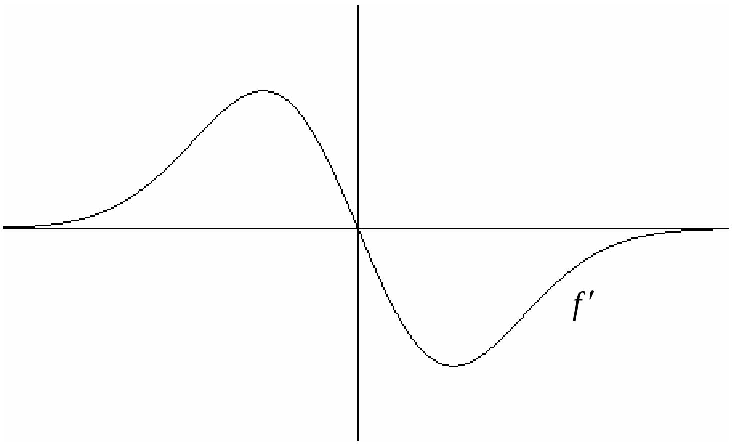
☐ c)



5

Warum ist die Bedingung „ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ “ nicht notwendig für ein lokales Maximum von f an der Stelle x_0 ?

6



Das Bild zeigt den (punktsymmetrischen) Graphen einer Ableitungsfunktion.

a) Warum kann die Ausgangsfunktion f nicht streng monoton wachsend sein ?

b) Hat die Ausgangsfunktion f lokale Extrema ? (mit Begründung !)

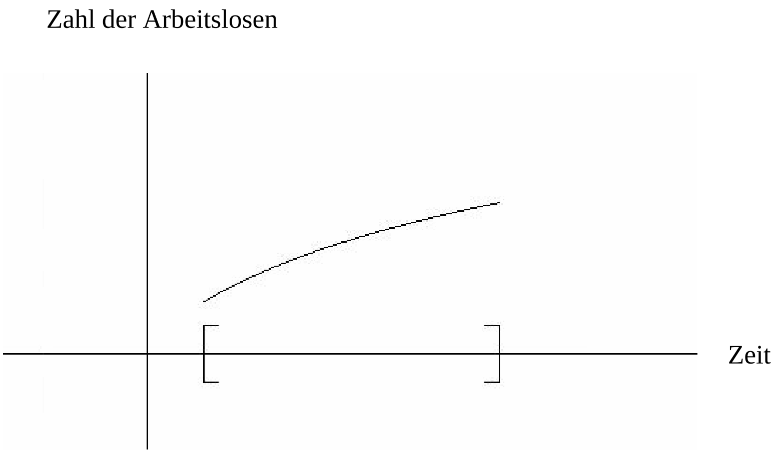
7

Sie lesen in einer Zeitung: „Der Anstieg der Arbeitslosigkeit ist im Laufe des letzten Quartals stetig zurückgegangen.“

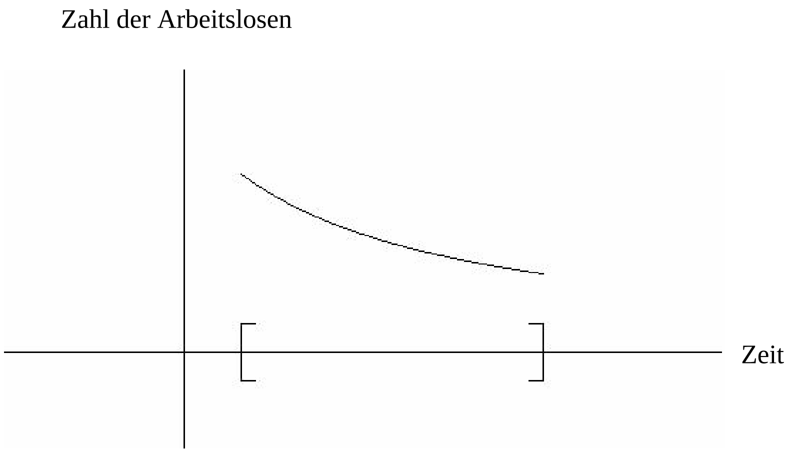
Kreuzen Sie die richtigen Feststellungen an !

☐ a) Die Zahl der Arbeitslosen ist im Laufe des letzten Quartals gefallen.

☐ b) Die Arbeitslosenkurve für das letzte Quartal könnte so aussehen:



☐ c) Die Arbeitslosenkurve für das letzte Quartal könnte so aussehen:



8

Warum ist der Ausdruck

$$A(x) = -x^2 - 50x + 5000 \quad (x \in \mathbb{R})$$

für $x = -25$ maximal ?

9

Die Funktion f sei auf dem Intervall [-10;10] definiert und punktsymmetrisch zum Ursprung (Ein mögliches Beispiel ist $f(x) = x^3$).

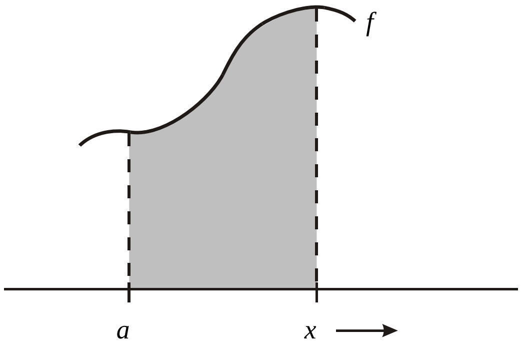
Der Wert des Integrals $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx$ ist dann

☐ a) Null.

☐ b) allgemein nicht anzugeben.

☐ c) 10.

10



Stellen Sie sich vor, die von f berandete Fläche wird mit Farbe angestrichen. Sie benutzen dazu einen kleinen Pinsel und gehen beim (senkrechten) Streichen gleichmäßig von a nach rechts.

Dann ist der Bedarf an Farbe an einer Stelle x proportional

☐ a) zum Wert des Integrals $\int_a^x f(t)\,dt$

☐ b) zum Funktionswert $f(x)$

☐ c) zur Entfernung $x-a$

☐ d) zur lokalen Änderungsrate $f'(x)$

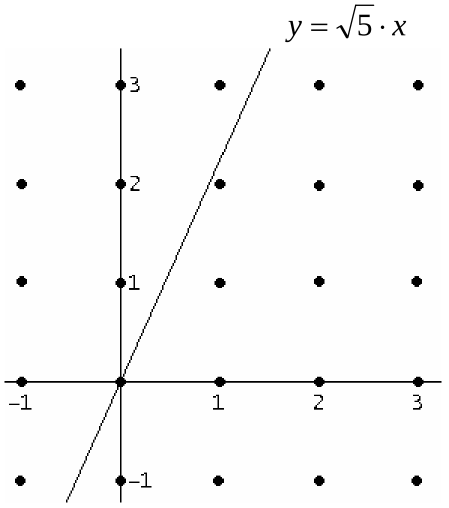
Kreuzen Sie die richtigen Antworten an!

11

Was bedeutet für Sie die Feststellung:

Die rationalen Zahlen liegen dicht auf der Zahlengeraden ?

12



Das Bild ist unendlich ausgedehnt zu denken.

Die eingezeichnete Gerade trifft keinen einzigen Gitterpunkt.

Warum ?

Erhebung zum

„Mathematischen Weltbild“

WS 2005/06

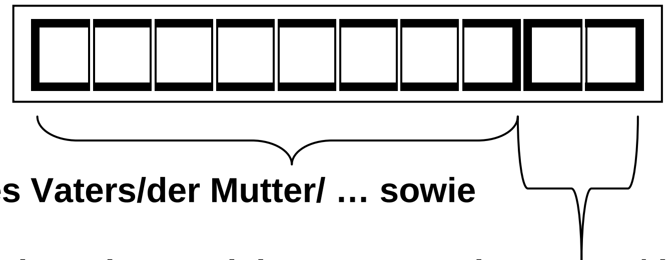
Im Rahmen des von der Deutschen Telekom Stiftung geförderten Entwicklungsprojekts zur Neuorientierung der Lehrerausbildung im Fach Mathematik soll unter anderem Ihr „mathematisches Weltbild“ ermittelt werden, d.h. Ihre Ansichten und Einstellungen zu dem, was das „Wesen“ von Mathematik ausmacht.

Neben einer Vielzahl anderer Faktoren sind es gerade diese Einstellungen und Haltungen, die Ihren zukünftigen Mathematikunterricht beeinflussen.

Im Zuge des Projekts soll festgestellt werden, welches mathematische Weltbild Sie mitbringen und wie dieses Weltbild sich im Laufe des Studiums ändert. Diesem Zweck dient der vorliegende Erhebungsbogen.

IHRE DATEN WERDEN DABEI STRENG VERTRAULICH BEHANDELT!

Um zum einen die Vertraulichkeit sicherzustellen, Sie zum anderen aber dennoch zu einem späteren Zeitpunkt - etwa für geplante Interviews - gezielt ansprechen zu können, wird Ihre Identität für die Erhebung mit einem Kürzel verschlüsselt. Dieses Kürzel besteht aus einer Ziffern-Buchstaben-Kombination:



→ **z.B. dem Geburtsdatum des Vaters/der Mutter/ … sowie**

→ **den ersten beiden Buchstaben des Mädchennamens der Mutter/des Vornamens des Bruders/…**

Wichtig:

Verwenden Sie bitte ein Kürzel, das Sie sich gut merken können!

Denn:

Sie benötigen Ihr persönliches Kürzel für alle folgenden Erhebungen und müssen sich anhand ihres Kürzels wiedererkennen können!

Beispiel:

Geburtsdatum des Bruders: 13.03.1973
Nachname des Großvaters: Setzer

1	3	0	3	1	9	7	3	S	E

1 ZU MEINER PERSON

1.1 Geschlecht ☐ **m** ☐ **w**

1.2 Alter ☐

1.3 Ich habe einen Mathematik-Leistungskurs besucht ☐ **j** ☐ **n**

1.4 Meine Mathematiknote im Abitur war ☐

1.5 Mein Abitur habe ich abgelegt im Jahr ☐

1.6 Im Folgenden geht es um den schulischen / beruflichen Hintergrund Ihres Elternhauses.

1.6.1 Schulausbildung der Mutter: höchster erworbener Bildungsabschluss (Mehrfachnennung möglich)

- kein Abschluss ☐
- Hauptschule / Volksschule ☐
- Realschule ☐
- Allgemeine Hochschulreife ☐
- abgeschlossenes Studium (welches Fach?) ☐ ____________

1.6.2 Beruf der Mutter: ____________

____

1.6.3 Schulausbildung des Vaters: höchster erworbener Bildungsabschluss (Mehrfachnennung möglich)

- kein Abschluss ☐
- Hauptschule / Volksschule ☐
- Realschule ☐
- Allgemeine Hochschulreife ☐
- abgeschlossenes Studium (welches Fach?) ☐ ____________

1.6.4 Beruf des Vaters: ____________

____

2 MEINE ERFAHRUNGEN MIT DER MATHEMATIK IN DER SCHULE

		trifft gar nicht zu…trifft voll zu				
2.1	Mathematik hat mir in der Schule immer gut gefallen.	☐	☐	☐	☐	☐
2.2	Ich habe mich auch außerhalb der Schule mit Mathematik beschäftigt.	☐	☐	☐	☐	☐
2.3	Nur der Teil der Mathematik, der in Klassenarbeiten und Klausuren abgefragt wurde, war wichtig und wissenswert.	☐	☐	☐	☐	☐
2.4	Es gibt bereits vorgefertigte Lösungsansätze, die man nur finden muss.	☐	☐	☐	☐	☐
2.5	Die Herleitung oder der Beweis einer Formel ist mir weniger wichtig; entscheidend ist, dass ich sie anwenden kann.	☐	☐	☐	☐	☐
2.6	Schematische Lösungsansätze helfen bei vielen Problemen.	☐	☐	☐	☐	☐
2.7	Es wurden im Unterricht immer auch Bezüge zur Anwendung der Mathematik in Umwelt und Alltag hergestellt.	☐	☐	☐	☐	☐
2.8	Der Lehrer ist auf (eigene) Lösungsansätze der Schüler eingegangen.	☐	☐	☐	☐	☐
2.9	Kreativität und Originalität wurden im Mathematikunterricht eher nicht gefördert.	☐	☐	☐	☐	☐
2.10	Wichtiger, als mathematische Verfahren zu beherrschen, ist für mich das Verständnis der Mathematik, die „dahinter steckt“.	☐	☐	☐	☐	☐
2.11	Lernen und Verstehen gelangen mir in der Schule besser, wenn ich mit anderen zusammenarbeiten konnte.	☐	☐	☐	☐	☐
2.12	In der Schule habe ich kennengelernt, dass Mathematik bereits „fertig“ ist und vom Schüler nur noch nachvollzogen werden muss.	☐	☐	☐	☐	☐
2.13	Mir ist im Mathematikunterricht nur selten klar geworden, dass die dort behandelte Mathematik viel mit realen Anwendungen zu tun hat.	☐	☐	☐	☐	☐

3 MEINE GRÜNDE MATHEMATIK ZU STUDIEREN

		trifft gar nicht zu…trifft voll zu				
3.1	In der Schule war ich immer gut in Mathematik.	□	□	□	□	□
3.2	Mathematik interessiert mich einfach.	□	□	□	□	□
3.3	Mathematik hat für mich einen praktischen Nutzen im Alltag.	□	□	□	□	□
3.4	Mathematik ist streng und logisch aufgebaut.	□	□	□	□	□
3.5	Mathematik ist mir in der Schule immer leicht gefallen.	□	□	□	□	□
3.6	Mathematik fordert mich intellektuell heraus.	□	□	□	□	□
3.7	Mathematik hilft mir, Probleme aus dem Alltag leichter zu verstehen.	□	□	□	□	□
3.8	In der Schule habe ich zu den besseren Schülern in Mathematik gehört.	□	□	□	□	□

4 MEINE ERWARTUNGEN AN DAS MATHEMATIKSTUDIUM

		trifft gar nicht zu…trifft voll zu				
4.1	Ich denke, dass das Studium mir dabei helfen wird, mich auf meinen späteren Beruf als Mathematiklehrerin/-lehrer optimal vorzubereiten.	□	□	□	□	□
4.2	Meine Grund- oder Leistungskurskenntnisse in Mathematik werden mir für das Studium von Nutzen sein.	□	□	□	□	□
4.3	Ich werde lernen, welche konkreten Bezüge die Mathematik zum Alltag hat.	□	□	□	□	□
4.4	Das Studium wird theoretisch und abstrakt.	□	□	□	□	□
4.5	Das Studium wird einen deutlichen Berufsbezug haben.	□	□	□	□	□
4.6	Das Studium wird auf das aufbauen, was in der Schulmathematik behandelt wurde.	□	□	□	□	□
4.7	Die Zusammenarbeit in Lerngruppen wird eher weniger wichtig sein, da jeder den Stoff ja für sich selbst erschließen und verstehen muss.	□	□	□	□	□
4.8	Ich werde mir ein umfangreiches mathematisches Wissen aneignen, das ich für meinen Unterricht später benötige.	□	□	□	□	□
4.9	Die schulmathematischen Inhalte werden aufgegriffen und theoretisch vertieft.	□	□	□	□	□
4.10	Es wird wichtig sein, Aufgaben mit anderen zusammen zu bearbeiten und zu diskutieren.	□	□	□	□	□
4.11	Ich möchte im Studium lernen, wie der Computer im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann.	□	□	□	□	□

5 MEINE ERWARTUNGEN AN DEN BERUF ALS MATHEMATIKLEHRER

		trifft gar nicht zu…trifft voll zu				
5.1	Bei dem Gedanken daran, Mathematik zu unterrichten, wird mir angst und bange.	☐	☐	☐	☐	☐
5.2	Schüler sollen im Unterricht vor allem schematische Lösungsverfahren lernen.	☐	☐	☐	☐	☐
5.3	Mathematikunterricht sollte so gestaltet sein, dass er eigene Ideen der Schüler zulässt und einbezieht.	☐	☐	☐	☐	☐
5.4	Mathematikunterricht sollte die Schüler zu einer selbständigen Auseinandersetzung mit Mathematik anregen.	☐	☐	☐	☐	☐
5.5	Der Lehrer weiß, wie es geht. Deshalb sollte er „falsche“ Lösungsansätze von Schülern nicht weiter verfolgen.	☐	☐	☐	☐	☐
5.6	Der Mathematikunterricht sollte realitätsbezogen sein.	☐	☐	☐	☐	☐
5.7	Für viele mathematische Probleme gibt es nur einen richtigen Lösungsweg.	☐	☐	☐	☐	☐
5.8	Mathematikunterricht sollte Gelegenheit geben, Mathematik zu entdecken und zu erforschen.	☐	☐	☐	☐	☐
5.9	Mathematikunterricht sollte Strategien vermitteln, die vielfältig einsetzbar sind.	☐	☐	☐	☐	☐
5.10	Man sollte sich im Mathematikunterricht auf die Inhalte konzentrieren, die man im späteren Leben braucht.	☐	☐	☐	☐	☐

6 MEINE EINSTELLUNGEN GEGENÜBER DER MATHEMATIK

trifft gar nicht zu…trifft voll zu

6.1	Im Vordergrund der Mathematik steht formale Logik.	☐	☐	☐	☐	☐
6.2	Selbst die abstrakteste Mathematik entstand aus konkreten Problemen.	☐	☐	☐	☐	☐
6.3	Um einen mathematischen Gegenstand wirklich verstehen zu können, muss man es immer wieder einüben.	☐	☐	☐	☐	☐
6.4	In der Mathematik ist etwas entweder richtig oder falsch.	☐	☐	☐	☐	☐
6.5	In der Mathematik kommt es darauf an, Regeln und Verfahren zu behalten und anzuwenden.	☐	☐	☐	☐	☐
6.6	Mathematik ist Gedankenspielerei mit eigenen Spielregeln.	☐	☐	☐	☐	☐
6.7	Fast alle mathematischen Probleme lassen sich durch direktes Anwenden bekannter Formeln und Verfahren lösen.	☐	☐	☐	☐	☐
6.8	Mathematik ist ein nützliches Instrument, um allgemeine (auch über die Mathematik hinausgehende) Gesetzmäßigkeiten zu erschließen.	☐	☐	☐	☐	☐
6.9	Mathematik ist eine wesentliche kulturelle Errungenschaft.	☐	☐	☐	☐	☐
6.10	Mathematik ist ein strukturiertes abstraktes System.	☐	☐	☐	☐	☐
6.11	Mathematik ist zeitlos.	☐	☐	☐	☐	☐
6.12	Es ist nicht wirklich wichtig, warum ein mathematisches Verfahren funktioniert. Wichtig ist, dass es überhaupt funktioniert.	☐	☐	☐	☐	☐
6.13	Problemlösen ist ein kreativer Prozess, für den bloßes Fakten- und Verfahrenswissen nicht ausreichen.	☐	☐	☐	☐	☐
6.14	Mathematik ist ein Vorrat an Regeln und Verfahren.	☐	☐	☐	☐	☐
6.15	Mathematik bedeutet: Regelmäßigkeiten erkennen, Ordnen, Abstrahieren.	☐	☐	☐	☐	☐

7 WIE SOLLTE MATHEMATIK UNTERRICHTET WERDEN?

		trifft gar nicht zu…				…trifft voll zu
7.1	Ein mathematischer Gegenstand muss von vielen Seiten beleuchtet werden, um ihn verstehen zu können.	☐	☐	☐	☐	☐
7.2	Ein guter Mathematiklehrer zeigt seinen Schülern genau, wie man eine Aufgabe lösen muss.	☐	☐	☐	☐	☐
7.3	Der Mathematikunterricht sollte nicht nur vorgefertigte Rezepte vermitteln.	☐	☐	☐	☐	☐
7.4	Mathematik ist so komplex, dass der Schüler kaum in der Lage sein dürfte, sie sich selbst zu erschließen.	☐	☐	☐	☐	☐
7.5	Das soziale Miteinander in der Lerngruppe kann entscheidend zum tieferen Verständnis beitragen.	☐	☐	☐	☐	☐
7.6	Für das tiefere Verständnis ist es wichtig, den behandelten Inhalten immer wieder in neuen Zusammenhängen zu begegnen.	☐	☐	☐	☐	☐
7.7	Schulmathematik sollte auf die wissenschaftliche Mathematik vorbereiten.	☐	☐	☐	☐	☐
7.8	Ein guter Mathematiklehrer lässt seine Schüler nicht in Sackgassen laufen und falsche Lösungsansätze weiterverfolgen.	☐	☐	☐	☐	☐
7.9	Da die Mathematik für alle Menschen gleich ist, kann sie auch für alle auf die gleiche Weise gelehrt werden.	☐	☐	☐	☐	☐
7.10	Der Lehrer weiß am besten, wie mathematische Inhalte effektiv vermittelt werden können.	☐	☐	☐	☐	☐

8 WAS MACHT DAS LERNEN VON MATHEMATIK AUS?

		trifft gar nicht zu…trifft voll zu				
8.1	Lernen und Verstehen kann nur jeder für sich alleine.	☐	☐	☐	☐	☐
8.2	Ich habe eher das Gefühl etwas verstanden zu haben, wenn ich es für mich selbst erarbeitet habe.	☐	☐	☐	☐	☐
8.3	Viel Fleiß und Arbeit können Verstehen ersetzen.	☐	☐	☐	☐	☐
8.4	Vernetzungen und Querverbindungen erleichtern das Verstehen und Behalten.	☐	☐	☐	☐	☐
8.5	Wenn ich jemand anderem einen mathematischen Sachverhalt in meinen eigenen Worten wiedergeben kann, so habe ich diesen wirklich verstanden.	☐	☐	☐	☐	☐
8.6	Lernen beinhaltet einen eigenaktiven Prozess der Auseinandersetzung mit einem mathematischen Sachverhalt.	☐	☐	☐	☐	☐
8.7	Wenn man alle Aufgaben problemlos lösen kann, hat man den mathematischen Sachverhalt verstanden.	☐	☐	☐	☐	☐
8.8	Mathematik lernen bedeutet, bereits vorhandene Ideen und Verfahren nachzuvollziehen.	☐	☐	☐	☐	☐

Kurzbefragung

1 ÜBUNGEN

1.1 Wieviel Zeit wenden Sie durchschnittlich pro Woche für die Bearbeitung der Übungen auf?

- Analysis I: ca. ___ Stunden
- Schulanalysis: ca. ___ Stunden

1.2 Bearbeiten Sie die Übungszettel alleine oder in Kleingruppen?

- Alleine ☐
- Kleingruppe ☐

1.3 Wenn Kleingruppe: mit wie vielen Studierenden arbeiten Sie in etwa zusammen?

ca. ___ Studierende

1.4 Welche Bedeutung haben die Übungen für Sie?

____

____

____

____

1.5 Sind die beiden Übungen für sie gleich wichtig?

- gleich wichtig ☐
- nicht gleich wichtig ☐

1.6 Wenn nicht gleich wichtig: welche Übung ist für Sie weniger wichtig und aus welchen Gründen?

____

____

____

____

1.7 Finden Sie den Umfang der Übungen angemessen?

- Analysis I ☐ ja
  ☐ nein
- Schulanalysis ☐ ja
  ☐ nein

1.8 Helfen die Übungen Ihnen beim Verstehen des Vorlesungsstoffs?

- Analysis I ☐ eher ja
  ☐ eher nicht
- Schulanalysis ☐ eher ja
  ☐ eher nicht

1.9 Umgekehrt: helfen Ihnen die Vorlesung bzw. die Tutorien und Übungsgruppen bei der Bearbeitung der Übungen?

- Analysis I ☐ eher ja
  ☐ eher nicht
- Schulanalysis ☐ eher ja
  ☐ eher nicht

Kurzbefragung

2 FORUM / ALLGEMEIN

2.1 Nehmen Sie (regelmäßig) an den Forumssitzungen teil?

☐ eher ja

☐ eher nicht

2.2 Wenn ja: welche Bedeutung hat das Forum für Sie?

2.3 Wenn nein: aus welchen Gründen nicht? (Mehrfachnennungen möglich)

- Terminprobleme (andere Veranstaltungen) ☐
- Inhalte sind für mich wenig relevant ☐
- Sinn des Forums nicht erkennbar ☐
- keine Anwesenheitspflicht ☐
- sonstige:

2.4 Ich würde am Forum eher teilnehmen, wenn…

2.5 Würden Sie sagen, daß die Veranstaltungen sich angemessen aufeinander beziehen und sich gegenseitig stützen?

☐ ja

☐ nein

2.6 Wenn nein: welche Veranstaltung hilft ihnen mehr für das Verstehen der anderen Veranstaltung?

- Schulanalysis für Analysis I ☐
- Analysis I für Schulanalysis ☐

2.7 Würden Sie die in der Schulanalysis behandelten Inhalte eher als anspruchsvoll oder eher als trivial bezeichnen?

- eher trivial ☐
- eher anspruchsvoll ☐

2.8 Wo liegen zur Zeit ihre größten Probleme?

Kurzbefragung II

Die Veranstaltung, um die es hier geht, ist die „*Schulanalysis vom höheren Standpunkt*“, im folgenden nur „*Schulanalysis*“ genannt. Es geht um die ganze Veranstaltung, also auch um die zugehörigen Arbeits- und Übungsblätter sowie die Tutorien. Inwiefern würdest du den folgenden Aussagen zustimmen?

1) „In der *Schulanalysis* herrscht ein gutes Gleichgewicht zwischen Eigenaktivität und Vorlesungsanteilen.“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

2) „In der *Schulanalysis* wird problemlösendes Denken (in Bezug auf Sachprobleme) gefördert.“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

3) „Die *Schulanalysis* trägt dazu bei, die Mathematik als eine eigene, durch ein logisches System geordnete Welt mit eigener Sprache und Symbolik kennen zu lernen und zu begreifen“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

4) „Die *Schulanalysis* trägt dazu bei, meine eigene Beziehung zur Mathematik zu erfahren, reflektieren und zu entwickeln.“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

5) „Die *Schulanalysis* trägt für mich dazu bei, den mathematischen Lerninhalten Sinn und Bedeutung zu geben.“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

6) „Die *Schulanalysis* trägt für mich dazu bei, den Bezug der Mathematik zu außermathematischen Anwendungen deutlich zu machen.“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

7) „Die *Schulanalysis* trägt für mich dazu bei, den Bezug zwischen dem Fach Mathematik und dem Lehrerberuf deutlich zu machen.“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

8) „Die *Schulanalysis* trägt für mich dazu bei, den Bezug zwischen der Hochschulmathematik und der Schulmathematik deutlich zu machen.“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

9) „Die *Schulanalysis* fördert meine Motivation, Mathematiklehrer zu werden.“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

10) „Die *Schulanalysis* fördert die prozessorientierte Sicht der Mathematik (also den Blick auf die Entstehung und die verhandelbare Natur vieler mathematischer Sachverhalte)“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

11) „Die *Schulanalysis* trägt dazu bei, die in der Hochschulanalysis behandelten Inhalte besser verstehen und einordnen zu können“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

12) „Der in der *Schulanalysis* behandelte Stoff ist einfach und wenig herausfordernd für mich“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

13) „Die *Schulanalysis* ist ein guter Baustein in der Ausbildung professioneller Mathematiklehrer“
☐ gar nicht ☐ etwas ☐ mittel ☐ sehr ☐ vollkommen

Erhebungsbogen zur Lehrveranstaltung
„Schulanalysis vom höheren Standpunkt“

Dieser Fragebogen gibt Ihnen die Möglichkeit Ihren persönlichen Eindruck von der Lehrveranstaltung wiederzugeben. Der Lehrende ist auf diese Form der Rückmeldung angewiesen um Verbesserungen und Veränderungen durchführen zu können.

I Demoskopische Daten

1. Geschlecht ☐ weiblich ☐ männlich
2. Studiengang ____
3. Anzahl der Fachsemester? ___

II Dozent

1. Sprachlicher Vortrag des Stoffes:

1.1	zu schnell/ hastig	☐	☐	☐	☐	☐	zu langsam/ langweilig
1.2	zu konzentriert/ zu dicht	☐	☐	☐	☐	☐	zu redundant/ zuviel Wiederholung
1.3	stark vom Thema abschweifend	☐	☐	☐	☐	☐	eng am Thema klebend
1.4	viele ungeläufige Wörter	☐	☐	☐	☐	☐	weitestgehend geläufige Wörter

2. Wie beurteilen Sie die Interaktionskompetenz des Dozenten? Der Dozent ...

2.1	nimmt Studenten kaum wahr	☐	☐	☐	☐	☐	nimmt Studenten gut wahr
2.2	geht zu wenig auf Zwischenfragen ein	☐	☐	☐	☐	☐	geht angemessen auf Zwischenfragen ein
2.3	Antworten sind wenig hilfreich	☐	☐	☐	☐	☐	Antworten sind sehr/häufig hilfreich
2.4	wirkt sehr distanziert	☐	☐	☐	☐	☐	ist stets ansprechbar
2.5	stud. Wünsche werden abgelehnt	☐	☐	☐	☐	☐	stud. Wünsche werden realisiert

3. Eigeninitiative des Dozenten: Der Dozent ...

3.1 zeigt wenig Interesse am Thema | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | zeigt Begeisterung für das Thema

3.2 häufig schlecht vorbereitet | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | immer gut vorbereitet

4. Wie beurteilen Sie die atmosphärische Gestaltung der Veranstaltung? Der Dozent ...

erzeugt negative Spannungen | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | stellt angenehme, offene Atmosphäre her

5. Hat der Dozent Ihre Begeisterung/Ihr Interesse für das Thema geweckt?

nein/fast nie | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | sehr/häufig

6. War der Dozent auch außerhalb der Veranstaltung erreichbar?

kaum/ selten erreichbar | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | häufig/ immer erreichbar

III Thema

7. Wie beurteilen Sie die Veranstaltung hinsichtlich Stoffumfang, Tempo und Schwierigkeitsgrad?

7.1 zu wenig Stoff | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | zu große Stofffülle

7.2 eher zu langsam | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | viel zu schnell

7.3 häufig überfordert | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | angemessen/ genau richtig

8. Empfinden Sie den Abstraktionsgrad der Veranstaltung als zu schwierig, zu leicht oder dem Thema angemessen?

viel zu abstrakt | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | zu anschaulich/ zu speziell

9. Haben Sie den Eindruck, dass Erkenntnisprozesse verdeutlicht wurden oder wurden vielfach nur Fakten/isoliertes Wissen vermittelt?

häufig nur Fakten | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | Prozesse gut verdeutlicht

10. Wurden für Sie während der Veranstaltung das aktuelle Thema und seine Zielrichtung deutlich?

häufig unklar | ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ | sehr oft/ immer klar

11a. Hat der Dozent Querverbindungen zu anderen Bereichen der Mathematik oder zu anderen Studienfächern aufgezeigt?

kaum Querverbind. ☐☐☐☐☐ angemessen viele

11b. Hat der Dozent Bezüge zur Schulmathematik aufgezeigt?

Nein, überhaupt nicht ☐☐☐☐☐ ja, häufig

12. Haben Sie den Eindruck, dass der Stoff durch hinreichend viele und hilfreiche Beispiele und Anwendungen ergänzt wurde?

12.1 Häufigkeit der Beispiele und Anwendungen

zu wenig, zu selten ☐☐☐☐☐ übertrieben, zu selten

12.2 Qualität der Beispiele und Anwendungen

für das Verständnis nicht förderlich ☐☐☐☐☐ für das Verständnis sehr förderlich

IV Methoden der Wissensvermittlung

13. Hat die Veranstaltung eine für Sie erkennbare und nachvollziehbare Struktur?

verworren, chaotisch ☐☐☐☐☐ gute und klare Struktur

14. Wurden neue Begriffe, Definitionen und math. Aussagen hinreichend motiviert? Waren diese Motivationen eher verwirrend oder verständlich?

14.1 Häufigkeit der Motivation

zu selten/ fast nie ☐☐☐☐☐ zu häufig/ übertrieben

14.2 Wirkung der Motivation

hat nicht zum Verständnis beigetragen ☐☐☐☐☐ sehr zum Verständnis beigetragen

15. Hat der Dozent Elemente der Anschauung verwendet? Hat die Anschauung dem besseren Verständnis gedient?

15.1 Häufigkeit der Anschauung

zu selten ☐☐☐☐☐ zu häufig

15.2 Wirkung der Anschauung

hat nicht zum Verständnis beigetragen ☐☐☐☐☐ sehr zum Verständnis beigetragen

16a. Welche Wirkung hat bei Ihnen der Einsatz technischer Medien hervorgerufen?

wenig hilfreich/ abschreckend ☐☐☐☐☐ sehr hilfreich/ anregend

16b. Welche Hilfsmittel wurden eingesetzt?

( ) Tafel ( ) Overheadprojektor ( ) Computer/Beamer

17. Wie beurteilen Sie die zeitliche und inhaltliche Abstimmung der Übung auf die Vorlesung und wie empfinden Sie den Schwierigkeitsgrad der Übungen?

17.1 zeitlich große Differenzen	☐	☐	☐	☐	☐	zeitlich gut abgestimmt
17.2 wenig Bezug zur Vorlesung	☐	☐	☐	☐	☐	sehr gut abgestimmt
17.3 viel zu schwierig	☐	☐	☐	☐	☐	zu leicht/ zu wenig Anspruch

V Fragen zur Eigeninitiative und Aufgehobenheit/Isoliertheit

18. Wie schätzen Sie Ihr eigenes Engagement für die Lehrveranstaltung ein (Selbstkontrolle)?

18.1 Teilnahme an Vorlesungen

häufig gefehlt	☐	☐	☐	☐	☐	immer teilgenommen

18.2 Teilnahme an Übungen

häufig gefehlt	☐	☐	☐	☐	☐	immer teilgenommen

18.3 Nacharbeit der Vorlesung/Übung

fast nie/ keine	☐	☐	☐	☐	☐	sehr häufig/ immer

18.4 Eigenanteil bei der Bearbeitung der Übungen

schreibe fast immer ab	☐	☐	☐	☐	☐	regelmäßige Bearbeitung

19. Wie fühlten Sie sich in der Lerngruppe?

fühle mich isoliert	☐	☐	☐	☐	☐	fühle mich gut aufgehoben

20. Haben Sie während der Veranstaltung die Möglichkeit, über das Thema in Kontakt/in Interaktion mit Ihren Kommilitonen zu treten?

kaum/ keine Interaktion	☐	☐	☐	☐	☐	häufiger und anregender Kontakt

VI Zusätzliche Fragen für Seminarveranstaltungen

21. Konnten die Studierenden Einfluss auf die Auswahl der zu behandelnden Themen nehmen

nein, gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	weitgehend

22. Gab es Raum für Eigenaktivitäten der Seminarteilnehmer/innen?

eigentlich nie	☐	☐	☐	☐	☐	wurde überstrapaziert

23. Die Diskussionen in der Veranstaltung…

23.1

kamen zu kurz	☐	☐	☐	☐	☐	nahmen zu viel Raum ein

23.2

waren schlecht haben mir inhaltlich nichts gebracht	☐	☐	☐	☐	☐	waren gut und haben mir inhaltlich viel gebracht

24. Ich fühlte mich als Person wahrgenommen und meine Meinung wurde gehört

nein, gar nicht	☐	☐	☐	☐	☐	ja, sehr

VII Offene Fragen

An dieser Stelle haben Sie die Möglichkeit uns mitzuteilen, was Sie an der Vorlesung positiv bzw. negativ fanden.
Weiterhin sind wir für Anregungen und Verbesserungsvorschläge dankbar.
Verfassen Sie Ihre Anmerkungen nach Möglichkeit in Stichpunkten.

Was mir gefallen hat:

Was mir nicht gefallen hat / Was ich vermißt habe:

Beschreiben Sie, worin Sie Ihren eigenen Lernfortschritt sehen!

Was ich verbessern/ verändern würde:

Was ist für Sie der Kern der schulischen Analysis?

Schulanalysis vom höheren Standpunkt

Arbeitsblätter

Erinnerung: Was ist die Ableitung?

Blicken Sie auf Ihren Analysisunterricht zurück.

Welche Vorstellungen verbinden Sie mit dem Begriff der Ableitung?

ARBEITSBLÄTTER

zum Grundverständnis der Ableitung

als lokale Änderungsrate

ARBEITSBLATT 1: Temperaturverläufe

ARBEITSBLATT 2: Die Ableitung als „letztes Verhältnis“

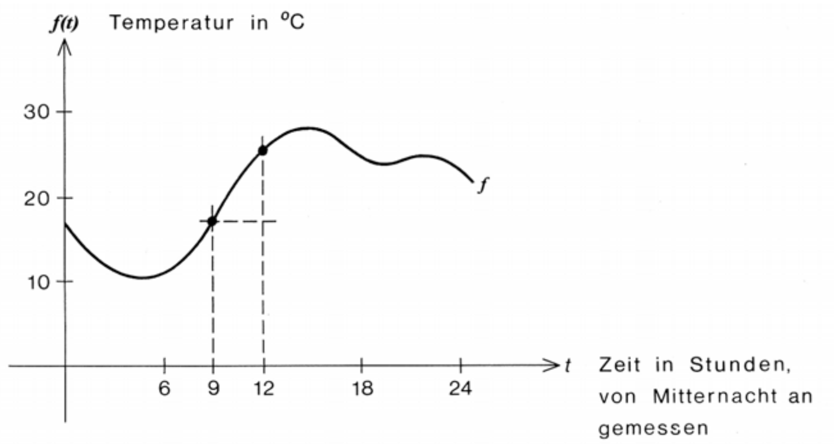
ARBEITSBLATT 3: Eine Modellierungsaufgabe

ARBEITSBLATT 1

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate

Temperaturverläufe

Der Temperaturschreiber einer Wetterstation zeichnet an einem sonnigen Sommertag diese Kurve auf:



Aufgaben

1. Beschreiben Sie den Temperaturverlauf während dieses Tages in Worten.

2. Betrachten Sie die beiden Zeiträume 9 bis 12 Uhr und 12 bis 18 Uhr. Wie groß sind jeweils die absolute und die relative Temperaturänderung? Stimmen die Ergebnisse mit Ihren Erfahrungen überein?

3. Inwiefern gibt der Differenzenquotient

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

für zwei Zeitpunkte $t_1 < t_2$ an, um wie viel sich die Temperatur im Mittel pro Zeiteinheit im Intervall $[t_1,\ t_2]$ ändert?

4. Die Ableitung $f'(t_0)$ wird üblicherweise als momentane Änderungsrate der Temperatur zum Zeitpunkt t_0 aufgefasst. Kritischer Einwand: Wie kann sich eine Temperatur in einem Zeit*punkt* ändern? Nehmen Sie Stellung!

5. Wie entwickelt sich die momentane Änderungsrate der Temperatur im Laufe des Tages? Was sagen Ihre Alltagserfahrungen?

KOMMENTAR ZU ARBEITSBLATT 1

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate

Temperaturverläufe

zu 2. und 3. Kern ist, beispielbezogen ein genaues Verständnis vom Begriff der *mittleren Änderungsrate* zu gewinnen.
(Vergleiche Item 2 der Erhebung.)

zu 4. Die Ableitung als lokale (hier momentane) Änderungsrate ist im Allgemeinen eine *Modellgröße*, die im Sachkontext keine direkte Entsprechung hat. (Dahinter steht das tiefliegende Theorie-Praxis-Problem bei der Anwendung von Mathematik.) Diesen Modellcharakter zu thematisieren gehört zu einem verständigen Umgang mit der Ableitung als lokale Änderungsrate.

zu 5. Hier ändert sich die Blickrichtung auf das Zeit-Temperatur-Diagramm in Richtung Ableitungs*funktion*.
(Dies ist bedeutsam für die Ziele einer qualitativen Kurvendiskussion; vergleiche Items 7 und 8 der Erhebung.)

ARBEITSBLATT 2

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate

Die Ableitung als "letztes Verhältnis"

Hören wir, was Augustin-Louis CAUCHY, einer der Begründer der modernen Analysis, in seiner ersten Vorlesung über die »Differenzialrechnung« im Jahre 1815 zur Ableitung sagt:

Um die Begriffe zu fixiren, nehmen wir an, daß man bloß zwei Veränderliche betrachte; nämlich eine unabhängige Veränderliche x und eine durch:

$$y = f(x)$$

bezeichnete Function von x.

Wenn die Function $f(x)$ zwischen zwei gegebenen Grenzen der Veränderlichen x continuirlich bleibt, und wenn man der Veränderlichen einen zwischen diesen Grenzen liegenden Werth beilegt; so wird ein der Veränderlichen ertheiltes unendlich kleines Increment auch eine unendlich kleine Veränderung der Function zur Folge haben. Also werden, wenn man $\Delta x = i$ setzt, die beiden Glieder des Differenzenverhältnisses:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

unendlich kleine Größen sein. Aber während sich diese beiden Glieder unbestimmt und gleichzeitig der Grenze Null nähern, wird ihr Verhältniß selbst gegen eine andere Grenze, sie sei positiv oder negativ, convergiren können, welche das letzte Verhältniß der unendlich kleinen Differenzen Δy, Δx sein wird. Diese Grenze, oder dieses letzte Verhältniß, hat, wenn es existirt, für jeden particulären Werth von x einen bestimmten Werth; aber es variirt mit x. Nun … wird die Form der neuen Function, welche die Grenze des Verhältnisses $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ ist, von der Form der gegebenen $y = f(x)$ abhängig sein. Um diese Abhängigkeit auszudrücken, gibt man der neuen Function den Namen **abgeleitete (derivirte) Function**, und bezeichnet sie vermittelst eines Accentes durch:

$$y' \text{ oder } f'(x).$$

Fragen

1. Cauchy hat eine dynamische Sicht auf den Funktionsbegriff, und er setzt voraus, dass „die Function… der Veränderlichen *x* continuirlich bleibt". Welche Vorstellung verbindet er damit?
2. Cauchy spricht die $\frac{0}{0}$ - Problematik für den Differenzenquotienten direkt an. Was ist gemeint?
3. Inwiefern ist Cauchys Bezeichnung „letztes Verhältnis" für die Ableitung $f'(x)$ treffend gewählt?

KOMMENTAR ZU ARBEITSBLATT 2

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate

Die Ableitung als "letztes Verhältnis"

zu 1. Es ist die Vorstellung von der Stetigkeit der Funktion, d.h. von der Eigenschaft, dass kleine Änderungen im Argument auch kleine Änderungen im Funktionswert bewirken. („… so wird ein der Veränderlichen ertheiltes unendlich kleines Increment auch eine unendlich kleine Veränderung der Function zur Folge haben.“) Cauchy war klar, dass die Stetigkeit eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit ist.

zu 2. und 3. Im Differenzenquotienten $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ (bei uns $i=h$) streben für $i \to 0$ Zähler und Nenner gegen null, und dennoch kann (!) der Quotient (das Verhältnis) einen Grenzwert (bei Cauchy ein „letztes Verhältnis“) haben. Cauchy hilft uns mit seiner Metapher, die Ableitung als Grenzwert der Differenzenquotienten verstehbarer zu machen. Damit wird auch der Begriff der lokalen Änderungsrate fassbarer.

ARBEITSBLATT 3

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate

Eine Modellierungsaufgabe

In einem anspruchsvollen Schweizer Lehrbuch zum Selbstlernen der Differenzialrechnung[1] findet sich die folgende kleine Episode:

> *Eine samstägliche Geschichte*
>
> Frank und seine Freundin Petra kommen vom Joggen zurück und haben großen Durst. Sie beschließen, einen halben Liter Orangensaft und einen halben Liter Mineralwasser zu mischen und das Getränk zu teilen. Verspielt und verliebt, wie sie sind, kippen sie die beiden Getränke nicht einfach zusammen.
> Petra trinkt mit einem Trinkhalm aus einem Krug, der am Anfang nur den halben Liter Mineralwasser enthält. Gleichzeitig träufelt Frank Orangensaft in den Krug und gleicht so laufend aus, was Petra zu sich nimmt. Dabei rührt er ständig, damit seine Freundin ein feines Gemisch trinken kann, das zunehmend süßer schmeckt. Nachdem Frank die ganze Portion Orangensaft hineingegeben hat, gibt Petra ihm den Krug zufrieden ab, und er trinkt den verbleibenden halben Liter gespritzten Orangensaft mit Genuss und in großen Schlucken.
> „Wie viel Prozent Orangensaft", fragt Petra, „sind wohl in dem Getränk, das du gerade so hinunterstürzt?"
> „Wenn ich noch einen Schluck übrig hätte, könnte man den Zuckergehalt des Gemischs mit dem Zuckergehalt im reinen Orangensaft vergleichen", meint Frank, „aber beides ist alle, und wie man das machen würde, ist mir auch nicht so ganz klar."
> „Ach was", erwidert Petra, „das muss sich doch ausrechnen lassen!" Du lieber Himmel, denkt Frank. Er weiß, was das bedeutet, und verdrückt sich unter die Dusche.
> Als er zurückkommt, ist Petra sehr zufrieden. „Dein Getränk enthielt circa 63 Prozent Orangensaft", sagt sie bestimmt.
> „Wie kommst du denn darauf?", fragt Frank.
> „Lies", meint Petra und erklärt ihm ihre voll beschriebenen Blätter. „Ich mache folgende Annahme. Ich trinke gleichmäßig, sagen wir 100 cm^3 pro Minute. Entsprechend träufelst du pro Minute 100 cm^3 (reinen) Orangensaft in den Krug. Dann dauert es 5 Minuten, bis ich meinen halben Liter getrunken und du den Orangensaft, in den Krug gegeben hast.
> Der Anteil Orangensaft im Krug nimmt im Laufe der Zeit zu. Ich möchte berechnen, wie groß er jeweils ist. Dazu führe ich eine Funktion ein: $x(t)$ soll die Menge (reinen) Orangensaft (in cm^3) bezeichnen, der zur Zeit t (gemessen in Minuten) im Getränkegemisch enthalten ist. Um $x(t)$ bestimmen zu können, brauche ich eine Gleichung. Ich versuche, eine Differenzialgleichung für $x(t)$ aufzustellen. Das ist eine Gleichung, in der $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ vorkommen.

---

[1] Wong, Baoswan Dzung et al. (2003): Differenzieren- Do It Yourself. Zürich

Dazu betrachte ich ein (kurzes) Zeitintervall, beginnend mit dem Zeitpunkt t und endend mit dem Zeitpunkt $t+h$. Dabei soll h eine kleine, positive Zahl – zum Beispiel eine Viertelminute oder eine Zehntelminute oder eine Hundertstelminute usw. – sein. (Später lasse ich h immer kleiner werden.)
Nun untersuche ich die Veränderung des Anteils an Orangensaft im Krug zwischen den Zeitpunkten t und $t+h$. Mit Hilfe der Funktion x lässt sich diese Veränderung leicht ausdrücken.
Der Anteil ist von $x(t)$ cm^3 auf $x(t+h)$ cm^3 angestiegen. Also sind

$$x(t+h)-x(t)$$

cm^3 reiner Orangensaft dazugekommen. Entstanden ist diese Zunahme durch zwei gegenläufige Vorgänge.
Einerseits gibst du $100\cdot h$ cm^3 Orangensaft in den Krug. (Ich habe ja angenommen, dass du pro Minute 100 cm^3 eingießt. Wenn h zum Beispiel eine Viertelminute ist, fließen 25 cm^3 Orangensaft in den Krug.)
Andererseits wird dem Krug Orangensaft entzogen, weil ich ja mit dem Röhrchen von dem Gemisch trinke. Die Trinkmenge ist klar:
Es sind ebenfalls $100\cdot h$ cm^3 .Aber es sind $100\cdot h$ cm^3 vom verdünnten Orangensaft. Ich muss überlegen, wie viel davon reiner Orangensaft ist.
Zur Zeit t sind nach Definition $x(t)$ cm^3 reiner Orangensaft im Krug. Du hast fortwährend mit dem Löffel gerührt, also nehme ich an, dass der Anteil an reinem Orangensaft überall im Krug gleich groß ist, nämlich

$$\frac{x(t)}{500} .$$

Somit sind von den $100\cdot h$ cm^3 gespritztem Orangensaft, den ich zwischen den Zeitpunkten t und $t+h$ getrunken habe, etwa

$$100\cdot h\cdot\frac{x(t)}{500}$$

cm^3 reine Orange. Das stimmt nur ungefähr, weil sich in dieser Zeit die Menge an reinem Orangensaft im Krug verändert. Aber ich denke mir h ja klein, und meine Überlegung stimmt umso besser, je kleiner h ist.

Zusammengefasst: Es kommen im betrachteten (kurzen) Zeitintervall $100\cdot h$ cm^3 reiner Orangensaft dazu, und es gehen (etwa) $100\cdot h\cdot\frac{x\,(t)}{500}$ cm^3 reiner Orangensaft weg. Also verändert sich der Anteil an reinem Orangensaft im Krug zwischen dem Zeitpunkt t und dem Zeitpunkt $t+h$ um (ungefähr)

$$100\cdot h-100\cdot h\cdot\frac{x(t)}{500}$$

cm^3. Es gilt daher

$$x(t+h)-x(t)\approx 100\,h-100\,h\frac{x(t)}{500} .$$

Diese „Bilanzgleichung“ stimmt umso exakter, je kleiner h ist. Ich dividiere die Beziehung durch h

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\approx 100-100\frac{x(t)}{500} \qquad (6)$$

und lasse *h* gegen 0 gehen. Weil links der Differenzenquotient von $x(t)$ steht, erhalte ich links $\dot{x}(t)$. Die rechte Seite ist unabhängig von *h*, also verändert sie sich nicht, wenn *h* immer kleiner wird. Das Ungefährzeichen ersetze ich durch ein Gleichheitszeichen, weil die Beziehung (6), wie gesagt, umso besser stimmt, je kleiner *h* ist und ich nun ja den Grenzübergang $h \to 0$ mache. Somit erhalte ich

$$\dot{x}(t) = 100 - \frac{1}{5}x(t) \ . \tag{7}$$

So, jetzt bin ich aber schon nahe am Ziel!
(7) ist eine Differenzialgleichung erster Ordnung für die gesuchte Funktion $x(t)$, sie ist linear mit konstanten Koeffizienten, also vom Typ

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b \tag{8}$$

wobei *a*, *b* Zahlen sind (*a* ist $-\frac{1}{5}$ und *b* gleich 100).
Die Lösungen der Differenzialgleichung (8) liefert der TC oder eine Formelsammlung. Sie lauten

$$x(t) = -\frac{b}{a} + c\,e^{at} \tag{9}$$

dabei ist *c* eine beliebige Zahl.
Für $a = -\frac{1}{5}$, $b = 100$ erhalte ich aus (9)

$$x(t) = 500 + c\,e^{-t/5} \tag{10}$$

Wie soll ich *c* wählen? Als ich zu trinken anfing, war nur Mineralwasser im Krug, kein bisschen Orangensaft. Daher setze ich $x(0) = 0$. Damit diese Bedingung erfüllt ist, muss ich *c* gleich -500 setzen. So, jetzt habe ich die Funktion $x(t)$ gefunden. Sie lautet:

$$x(t) = 500 - 500\,e^{-t/5} \tag{11}$$

Sie gibt an, wie viel cm^3 (reiner) Orangensaft zur Zeit *t* im Krug ist. Den Anteil bekomme ich, wenn ich $x(t)$ durch 500 dividiere (denn es ist ja immer ein halber Liter Saft im Krug): ($1 - e^{-t/5}$). Weil ich angenommen habe, dass ich einen Deziliter pro Minute trinke, hat das ganze 5 Minuten gedauert, und somit ist der Anteil an reinem Orangensaft in der Mischung, die du dann zu dir genommen hast, gleich $1 - e^{-1} \approx 0{,}632$, also 63,2 %.

Frank bewundert, wie Petra dieses Problem gelöst hat.
„Ein paar Fragen hätte ich noch“, meint er. „Du hast angenommen, du hättest etwa einen Deziliter pro Minute zu dir genommen. Denkst du, das Resultat wäre anders herausgekommen, wenn du schneller oder langsamer getrunken hättest und ich entsprechend schneller oder langsamer nachgegossen hätte?
Und: Wie hoch wäre die Konzentration an reinem Orangensaft, wenn ich den Orangensaft doppelt oder halb so schnell eingeschenkt hätte im Vergleich zur Geschwindigkeit, mit der du getrunken hast?“
„Das sind interessante Fragen. Aber was ist jetzt“, entgegnet Petra, „soll ich nun unter die Dusche, und gehen wir dann tanzen, oder willst du heute Abend Mathematik machen?!“
„Na klar“, strahlt Frank, „ab in die Disco!“

Verständnisfragen zum Text

1. Petra geht mit dem Begriff „Anteil“ recht locker um. Inwiefern?

2. Petra sagt, dass ihre Überlegung zu dem Ausdruck $100 \cdot h \cdot \frac{x(t)}{500}$ umso besser stimme, je kleiner h ist. Warum hat sie recht?

3. Die Gleichung (8) wird nicht nur von *einer* Funktion, sondern gleich von unendlich vielen Funktionen erfüllt: Für jede Wahl der Zahl c liefert (9) eine neue Lösungsfunktion. Wie ist das möglich?

4. Mit welchem Kunstgriff ist eigentlich die rettende (Differenzial-) Gleichung (7) entstanden?

Franks Fragen

5. Hängt das berechnete Ergebnis von 63,2 % davon ab, ob Petra langsamer oder schneller trinkt (und Frank den Orangensaft entsprechend langsamer oder schneller nachgießt)?

6. Angenommen Petra hätte nur halb so schnell getrunken wie Frank nachgießt. Wie sähe dann die Differenzialgleichung aus?

Weiterführende Frage

7. Hat die Gleichung (8) neben der Lösung (9) noch weitere Lösungen?

KOMMENTAR ZU ARBEITSBLATT 3

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate

Eine Modellierungsaufgabe

zu 1. Einmal bezeichnet Petra mit „Anteil“ die (absolute) Menge reinen Orangensafts, ein anderes Mal den relativen Anteil reinen Orangensafts im Krug.

Die Frage macht aufmerksam auf den (für den Ableitungsbegriff so wichtigen) Unterschied zwischen absoluten und relativen Größen. (Vergleiche hierzu Item 2 der Erhebung.)

zu 2. Diese Bemerkung rechtfertigt erst, dass aus dem „$\approx$“ in der Beziehung (6) nach dem Grenzübergang für $h \to 0$ die *Gleichung* (7) wird.

Petra hat Recht, weil sich die Konzentration des Orangensafts im Krug zwischen den Zeitpunkten t und $t+h$ um so weniger unterscheidet, je kleiner h ist. (Hier geht die Stetigkeit der zeitabhängigen Funktion x ein.)

zu 3. Natürlich kann man direkt nachrechnen, dass die Funktion (9) unabhängig vom gewählten c eine Lösung der Gleichung (8) ist. Interessanter ist die Einsicht, dass man den freien Parameter c braucht, um die Lösungsfunktion einer gegebenen Anfangsbedingung (hier $x(0)=0$) anzupassen.

zu 4. Hier geht es um ein weitreichendes Prinzip bei der Modellierung veränderlicher Prozesse: Man drückt die absolute Änderung der interessierenden Größe (hier $x(t)$) auf zwei Arten aus (hier durch $x(t+h)-x(t)$ und durch $100h - 100h \cdot \frac{x(t)}{500}$) und geht anschließend zur relativen Änderung über, um die Ableitung ins Spiel zu bringen.

zu 5. Ersetzt man in Petras Rechnung die 100 (cm^3/Minute) durch eine Konstante v_0 und führt die Rechnung bis zum Ende durch, merkt man, dass das Ergebnis nicht von v_0 abhängt. Erhellender ist das folgende Argument: Der gegenläufige Prozess bleibt derselbe, er wird nur zeitlich gestreckt. (Oder technisch ausgedrückt: Es genügt eine Anpassung der Zeiteinheit.)

zu 6. Die Modellierung gelingt in der gleichen Weise, doch die entstehende Differenzialgleichung ist nicht mehr von dem einfachen Typ (8).

zu 7. Die Frage kann Anlass für eine gezielte Literatur-Recherche sein. (Die Lösung ist in der Tat eindeutig, was aus dem Sachkontext heraus auch zu erwarten ist.)

ARBEITSBLÄTTER

zum Grundverständnis der Ableitung

als lokale Linearisierung

ARBEITSBLATT 1

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Linearisierung

Ein neuer Blick auf die Ableitung

Wir zitieren aus einer Vorlesung, die Karl WEIERSTRASS im Sommersemester 1861 am Königlichen Gewerbeinstitut zu Berlin gehalten hat und die von dem bekannten Mathematiker H. A. SCHWARZ aufgezeichnet wurde. WEIERSTRASS gehört zu jenen Mathematikern, die führend an der Grundlegung der Analysis mitgewirkt haben.

»Die vollständige Veränderung $f(x_0+h)-f(x_0)$, welche eine Funktion $f(x)$ dadurch erfährt, daß x_0 in x_0+h übergeht, läßt sich im allgemeinen in zwei Teile zerlegen, von denen der eine der Aenderung h des Argumentes proportional ist, also aus h und einem von h unabhängigen – in Bezug auf h constanten – Faktor besteht, … der andere aber nicht bloß an und für sich unendlich klein wird, wenn h unendlich klein wird, d.h. noch unendlich klein wird, wenn man ihn mit h dividiert.«

Fragen

1. Wovon spricht Weierstraß hier, und was hat dies mit der Ihnen vertrauten Ableitung zu tun?

2. Wie lässt sich die neue Sichtweise geometrisch interpretieren?

3. Recherchieren Sie, wie die neue Sicht der Ableitung (als lokale Linearisierung) in Analysis-Schulbüchern realisiert ist.

4. Weierstraß sagt vorsichtig, dass die beschriebene Zerlegung „im allgemeinen" gelingt. Kennen Sie eine Funktion, für die diese Zerlegung an einer Stelle x_0 nicht möglich ist?

KOMMENTAR ZU ARBEITSBLATT 1

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Linearisierung

Ein neuer Blick auf die Ableitung

zu 1. Der Proportionalitätsfaktor ist genau die klassische Ableitung $f'(x_0)$. Weierstraß zielt damit auf die Zerlegung

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot h+r(h) \qquad \text{mit } \frac{r(h)}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Für eine Entwicklung vergleiche das Textbuch, S. 19ff.

zu 2. Die Funktion *f* wird lokal um x_0 durch die Tangente approximiert, und zwar so, dass der Fehler $r(h)$ schneller gegen 0 geht als *h* selbst (*lokale lineare Approximation*).

zu 4. $f(x)=|x|$ für $x_0=0$ ist ein Kandidat (als eine in x_0 nicht differenzierbare Funktion). Gelänge die Zerlegung, so wäre

$$f(0+h)-f(0)=\alpha\cdot h+r(h) \qquad \text{mit } \frac{r(h)}{h}\to 0 \text{ für } h\to 0\ ,$$

d.h. es müsste gelten

$$\frac{f(h)}{h}=\alpha+\frac{r(h)}{h} \;\to\; \alpha$$

$\dfrac{f(h)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$ hat aber für $h\to 0$ keinen Grenzwert.

Die Frage greift der analytischen Klärung der Differenzierbarkeit vor.

Die unterliegende geometrische Intuition ist leichter zugänglich: An einer Knickstelle kann es keine Tangente geben.

ARBEITSBLATT 2

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Linearisierung

Vom Nutzen der lokalen Linearisierung

Die Weierstraßsche Auffassung von der Ableitung erlaubt die Zerlegung

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot h+r(h)$$

mit einem für $h\to 0$ sehr gut klein werdenden Rest $r(h)$. Daraus entsteht die gute Näherung

$$(*) \qquad \boxed{f(x_o+h)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot h \quad \text{für kleine } |h|}\,.$$

1. Kennt man Bestand und Änderungsrate einer Funktion an einer Stelle, so lässt sich der Bestand in der Nachbarschaft gut prognostizieren.
   Inwiefern ist dies eine angemessene Deutung der Aussage $(*)$?

2. In der Praxis werden häufig Näherungsformeln verwendet.
   Gängig sind zum Beispiel:

   a) $\frac{1}{1-x}\approx 1+x$ für kleine $|x|$

   b) $\sin x\approx x$ für kleine $|x|$

   c) $e^x\approx 1+x$ für kleine $|x|$

   In welchem Zusammenhang steht dies jeweils mit der Beziehung $(*)$?
   Suchen Sie nach weiteren Beispielen solcher Näherungsformeln!

3. Vielfach werden aufgrund von Messwerten abgeleitete Größen berechnet (z.B. aus dem Durchmesser die Kreisfläche). Jeder Messfehler pflanzt sich dann bei der Berechnung fort.
   Was hat dieses Phänomen der Fehlerfortpflanzung mit der Beziehung $(*)$ zu tun?

KOMMENTAR ZU ARBEITSBLATT 2

zum Grundverständnis der Ableitung als lokale Linearisierung

Vom Nutzen der lokalen Linearisierung

zu 1. Hier liegt der Keim der Leistungsfähigkeit der Differenzialrechnung als Prognoseinstrument in deterministischen Situationen. (Hiervon lebt ein Gutteil unserer Wissenschaften.)

zu 2. Die Formeln beschreiben jeweils den linearen Anteil der zu approximierenden nichtlinearen Funktionen. Es ist im Übrigen jeweils der lineare Teil der Taylorentwicklung.
Im Zeitalter des Taschenrechners sind solche Formeln natürlich weniger als numerische Rechenhilfen bedeutsam, sie erlauben vielmehr Vereinfachungen in theoretischen Kontexten.

zu 3. Der aufgrund des Messfehlers h fortgepflanzte Fehler $f(x_0+h)-f(x_0)$ kann wegen $(*)$ rechnerisch durch $f'(x_0)\cdot h$ genähert werden.
Dem möglichen Einwand, dass einem die Näherung deshalb nichts nutzt, weil man weder den „wahren“ Wert x_0 noch den absoluten Messfehler h kennt, begegnet man am besten mit einem Beispiel:

Aufgabe:
Um wie viel Prozent wird das Volumen einer Kugel näherungsweise falsch angegeben, wenn ihr Durchmesser um 2 % falsch gemessen wird?

Lösung:
$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$, $V'(r)=4\pi r^2$, $V(r+h)-V(r)\approx 4\pi r^2\cdot h$; $h=\frac{2}{100}r$, also ist der fortgepflanzte Fehler näherungsweise gleich $4\pi r^2\cdot\frac{2}{100}r = \frac{8}{100}\pi r^3$ oder prozentual

$$\frac{\frac{8}{100}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=6\,\%\,.$$

ARBEITSBLÄTTER

zum Themenkreis

Extremwertprobleme

ARBEITSBLATT 1

zum Themenkreis Extremwertprobleme

Mini-Max-Aufgaben: Ein Blick zurück und nach vorn

Das isoperimetrische Problem für Rechtecke

Unter allen umfangsgleichen Rechtecken hat das Quadrat den größten Inhalt.

Aufträge

1. Lösen Sie diese Extremwertaufgabe einmal mit dem vertrauten Verfahren aus dem Analysisunterricht und einmal ohne Hilfsmittel der Analysis.

2. Erkunden Sie mit Hilfe unserer CD[1], wie die großen Mathematiker Euklid (um 300 v. Chr.) und fast 2000 Jahre später – noch vor der Entwicklung der Analysis – Fermat dieses Problem gelöst haben.

3. Erkunden Sie mit Hilfe unserer CD, welche elementaren Lösungsvarianten es für dieses Problem gibt.

[1] Der Inhalt der CD kann von der Homepage der Universität Siegen heruntergeladen werden:
www.math.uni-siegen.de/didaktik/extremwert.htm

KOMMENTAR ZU ARBEITSBLATT 1

zum Themenkreis Extremwertprobleme

Mini-Max-Aufgaben: Ein Blick zurück und nach vorn

zu 1. Für eine elementare, d.h. Analysis-freie Lösung ist die Kreativität herausgefordert. Zu mobilisieren sind dann algebraische oder gar rein geometrische Argumente.

zu 2. und 3. Zur Zielsetzung und Begleitung der CD vergleiche das MU-Heft „Der Themenkreis Extremwertprobleme – Wege der Öffnung“, herausgegeben von R. Danckwerts und D. Vogel (2001).

ARBEITSBLATT 2

zum Themenkreis Extremwertprobleme

Mini-Max-Aufgaben: Eine echte Anwendung

Auftrag

1. Kaufen Sie sich eine Milchtüte und untersuchen Sie, ob bei der Herstellung der Tüte darauf geachtet wurde, möglichst wenig Pappe zu verbrauchen.
   Tipp: Sie können sich auf der CD orientieren, wie dieses Problem bearbeitet werden kann.

2. Reflektieren Sie die Rolle der Mathematik bei der Lösung solcher echter Anwendungsprobleme.

KOMMENTAR ZU ARBEITSBLATT 2

zum Themenkreis Extremwertprobleme

Mini-Max-Aufgaben: Eine echte Anwendung

zu 2. Hier geht es um Anwendungsorientierung im Sinne modellbildender Aktivitäten und damit um den begrenzten, aber relevanten Nutzen der Mathematik (hier der Analysis) bei der Problemlösung.

Insbesondere gilt es bewusst zu machen, in welcher Weise der Modellbildungskreislauf durchlaufen wird.

ARBEITSBLATT 1

zum Thema Kurvendiskussion

Kriterien der Kurvendiskussion

Ankerpunkt für die bekannten Kriterien der Kurvendiskussion ist das

Monotoniekriterium:
Eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion mit überall positiver Ableitung ist dort streng monoton wachsend.

Das (Ihnen vermutlich bekannte) **Erste Kriterium** für lokale Extrema lautet:

Ist $f'(x_0) = 0$ *und wechselt* f' *bei* x_0 *das Vorzeichen von – nach + (von + nach –), so hat* f *bei* x_0 *ein lokales Minimum (Maximum).*

Frage 1: Inwiefern lässt sich dieses Kriterium mit Hilfe des Monotoniekriteriums begründen?

Noch vertrauter ist das **Zweite Kriterium** für lokale Extrema:

Ist $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) > 0$*, so besitzt* f *bei* x_0 *ein lokales Minimum. Entsprechend folgt aus* $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) < 0$ *die Existenz eines lokalen Maximums.*

Frage 2: Inwiefern lässt sich die Begründung des zweiten Kriteriums auf das erste Kriterium zurückspielen?

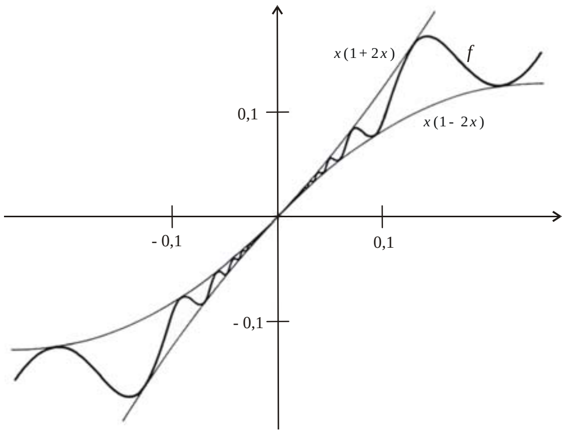
Dem Vorteil der leichteren Anwendbarkeit des zweiten Kriteriums steht der Nachteil der geringeren Reichweite gegenüber: So versagt es bereits beim Aufspüren des Minimums von $f(x) = x^4$ im Nullpunkt. (Wieso?)

Leider ist selbst das Erste Kriterium nicht notwendig für das Vorhandensein eines lokalen Extremums, d.h. auch diesem Kriterium könnte ein lokales Extremum durch die Lappen gehen. Mit anderen Worten: Es gibt (zugegeben merkwürdige) Funktionen, die an einer Stelle x_0 ein lokales Extremum haben, ohne dass die Ableitung an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel hat.
Hierzu folgender

Arbeitsauftrag: Ein Beispiel für eine solche Funktion enthält der Kasten auf S. 72 im Textbuch „Elementare Analysis“. Machen sie sich genau klar, warum dies ein passendes Gegenbeispiel ist. Notieren Sie die entsprechenden Argumente!

Gegenbeispiele dieser Art eignen sich auch, um einem möglichen Missverständnis im Umgang mit dem Monotoniekriterium zu begegnen:

Man könnte versucht sein anzunehmen, dass eine Funktion, deren Ableitung *an einer Stelle* x_0 positiv ist, in einer genügend kleinen Umgebung von x_0 auch streng monoton wächst. Schließlich schmiegt sich ja die Kurve der Tangente besonders gut an, und die Tangente *ist* streng monoton wachsend. Dass dem nicht so ist, mag zunächst verblüffen, und wenn uns unsere Intuition so im Stich lässt, ist nicht zu erwarten, dass ein Gegenbeispiel von einfacher Natur ist. Doch man sehe selbst:



$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

f bleibt zwischen den beiden einhüllenden Kurven und oszilliert umso schneller, je näher man dem Nullpunkt kommt. Die Ableitung von *f* an der Stelle $x_0 = 0$ ist positiv, und dennoch ist f in keiner auch noch so kleinen Nullumgebung streng monoton wachsend.[1]

Aufgabe: Man zeige:

a) Die Funktion f ist differenzierbar und $f'(0)$ ist positiv.

b) f ist in keiner Nullumgebung streng monoton wachsend.

Anleitung zu b):

Angenommen, es gäbe eine Umgebung von $x_0 = 0$, in der *f* streng monoton wächst. Dann wäre f' in dieser ganzen Umgebung nicht negativ. (Warum?). Andererseits gilt aber für die Nullfolge $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, dass $f'(x_n) < 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. (Beweis!). Wieso ist damit ein Widerspruch erreicht?

[1] Dass unsere Intuition hier versagt hat, liegt daran, dass der im analytischen Ableitungsbegriff aufgehobene Tangentenbegriff weit allgemeiner ist als der in der intuitiven Vorstellung verankerte geometrische Tangentenbegriff.

Erinnerung: Was ist das Integral?

Blicken Sie auf Ihren Analysisunterricht zurück.

Welche Vorstellungen verbinden Sie mit dem Begriff des Integrals?

ARBEITSBLÄTTER

zum Integralbegriff

Grundverständnis des Integrierens als Rekonstruieren

ARBEITSBLATT 1: Ein Füllvorgang

Grundverständnis des Integrierens als Summieren

ARBEITSBLATT 1: Scheibchenweise

Grundverständnis des Integrierens als Mitteln

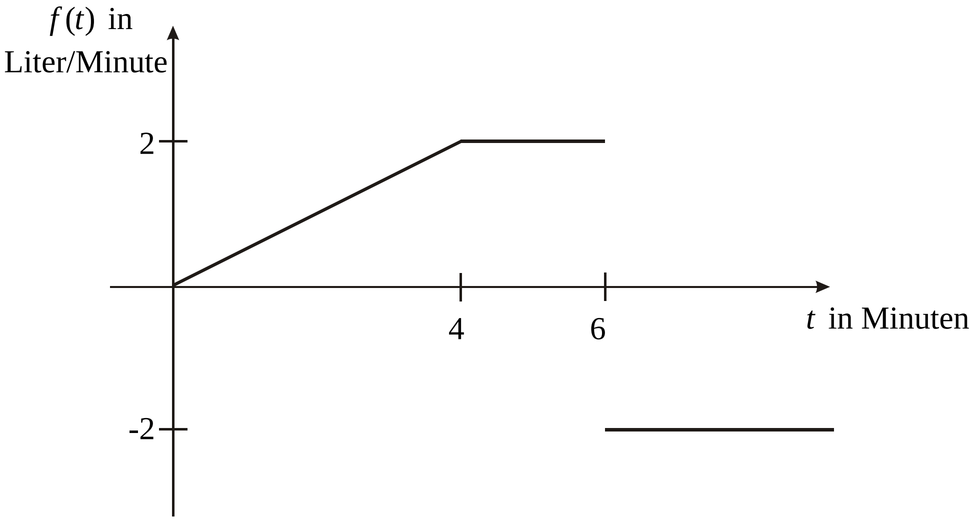
ARBEITSBLATT 1: Mittelwerte

ARBEITSBLATT 1

zum Grundverständnis des Integrierens als Rekonstruieren

Ein Füllvorgang

Zu- und Abfluss von Wasser in ein leeres Gefäß sei beschrieben durch das folgende Diagramm:



Fragen

1. a) Wie lässt sich der Vorgang in Worten beschreiben?

   b) Wie lautet der Funktionsterm für f?

   c) $V(t)$ sei die Wassermenge im Gefäß (in Litern) zum Zeitpunkt t (in Minuten). Wie lautet der Funktionsterm für V, und wie sieht das entsprechende Diagramm aus?

   d) Nach wie viel Minuten sind 3 Liter im Gefäß, und wann ist das Gefäß wieder leer?

2. a) Inwiefern spiegelt das Diagramm für die Wassermenge V im Gefäß den Verlauf der Zuflussrate f wider?

   b) Interessante Zeitpunkte sind $t = 4$ und $t = 6$ (warum?). Kann das gegebene Diagramm die Realität wirklich abbilden?

   c) Inwiefern spiegelt sich im Verlauf von V die Tatsache wider, dass Integrale *orientierte* Flächeninhalte sind?

KOMMENTAR ZU ARBEITSBLATT 1

zum Grundverständnis des Integrierens als Rekonstruieren

Ein Füllvorgang

zu 1. Das Beispiel ist paradigmatisch für die Rekonstruktion einer Funktion aus der Kenntnis ihrer lokalen Änderungsrate (integrare (lat.) = wiederherstellen). Hier wird aus der Kenntnis von $f = V'$ die Funktion V rekonstruiert.

Unter b) ist es nötig sich zu entscheiden, welchen Funktionswert f an der Stelle $t = 6$ haben soll. (Dass diese Wahl keinen Einfluss auf die rekonstruierte Funktion V hat, gehört zum (späteren) theoretischen Verständnis des Integralbegriffs.)

zu 2a. Beide Diagramme beschreiben denselben Prozess, sie sind gleichsam zwei Seiten derselben Medaille. Deshalb entsprechen sich ihre Eigenschaften: Solange f positiv (negativ) ist, steigt (fällt) V. Das ist das Monotoniekriterium!
Um die Äquivalenz der Beschreibung bewusst zu machen, sollen beide Diagramme im Sachkontext verbalisiert werden.

zu 2b. An diesen Stellen kann man eine theoretisch bedeutsame Beobachtung machen. Beim Übergang von der Berandung zur Integralfunktion (hier von f zu V) wird die analytische Güte der Funktion angehoben: An der Stelle $t = 4$ ist V differenzierbar, f dagegen nur stetig, und an der Stelle $t = 6$ ist V immerhin stetig, obwohl f unstetig, aber noch integrierbar war. Das Beispiel ermöglicht also die theoretische Grunderfahrung, dass Integration glättet. Im Übrigen enthält die Feststellung zur Stelle $t = 4$ den Kern des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung!
Die Modellierung für den Zeitpunkt $t = 6$ ist nicht realistisch, aber zweckmäßig. Umschaltvorgänge in verschiedenen Sachkontexten werden genau so modelliert.

zu 2c. Wie wichtig diese Frage ist, zeigen die Fehlvorstellungen, auf die sich Item 11 der Erhebung bezieht.

ARBEITSBLATT 1

zum Grundverständnis des Integrierens als Summieren

Scheibchenweise

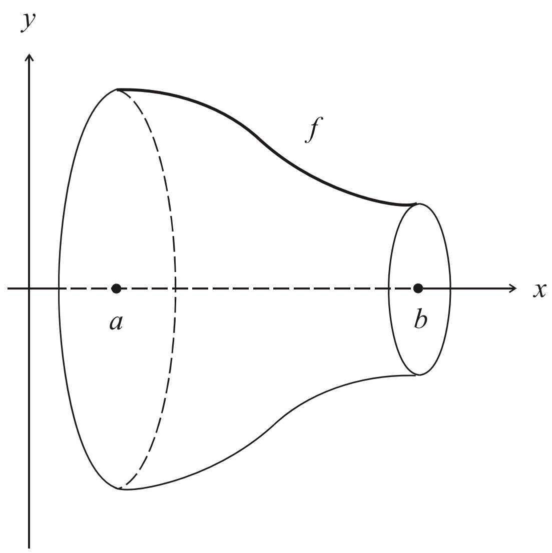
Aus der Schule ist Ihnen vielleicht die Integralformel

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

bekannt, mit der man das Volumen von Rotationskörpern berechnet.

Wie lässt sich diese Formel einsichtig begründen?

Betrachten Sie dazu eine zwischen *a* und *b* positive Randfunktion *f*, die um die *x*-Achse rotiert:



Wie groß ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?

Frage 1: Für konstantes f ist die Sache einfach. Inwiefern?

Für den allgemeinen Fall wird das Intervall $[a, b]$ in Teilabschnitte zerlegt und jedes Teilvolumen nach oben und nach unten durch Zylinderinhalte abgeschätzt.

Auftrag 1:

a) Man mache sich genau klar, dass diese Idee es erlaubt, die gewünschte Formel zu erklären. (Hinweis: Benutzen Sie den Kasten „Volumenberechnung“ im Textbuch S. 243/244 in Verbindung mit dem Abschnitt „Integrieren heißt Summieren“, S. 231 ff.)

b) Welche Voraussetzungen über die Berandung f sind in die Herleitung eingegangen? Wir halten fest: Der Kern der Idee zur Begründung der Volumenformel besteht darin, sich den Rotationskörper aus vielen dünnen Zylinderscheiben zusammengesetzt zu denken und das Volumen durch Aufsummieren der Scheiben zu berechnen.

Frage 2: Lösen Sie sich von der Rotationssymmetrie des Körpers. Wie lässt sich dann die Scheibchenidee retten?

Es deutet sich die Möglichkeit einer Verallgemeinerung an. Dazu blicken wir in neuer Weise auf unsere Integralformel:

$$V = \pi\int_a^b [\,f(x)]^2\,dx = \int_a^b \pi\,[\,f(x)]^2\,dx$$

Offenbar wird also die Funktion $x \to \pi\,[\,f(x)]^2$ integriert.

Frage 3: Wie sind deren Funktionswerte im Kontext zu interpretieren?

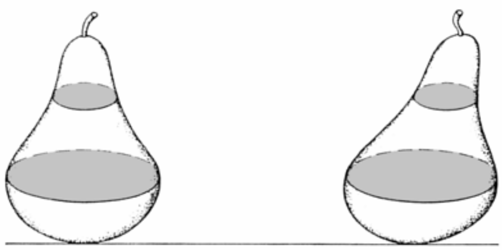
Der gefundene Zusammenhang ist nicht an die Kreisförmigkeit der Querschnittsflächen des Körpers gebunden. Allgemein gilt:

$$V = \int_a^b q(x)\,dx\ ,$$

wobei $q(x)$ den Inhalt des Querschnitts an der Stelle x angibt.

Genau diese Vorstellung hatte Cavallieri (1598? – 1647), als er das nach ihm benannte Prinzip formulierte:

Stehen zwei Körper auf derselben Ebene und werden sie von jeder zu ihr parallelen Ebene in inhaltsgleichen Flächen geschnitten, so haben sie das gleiche Volumen.



Auftrag 2:

a) Das Prinzip von Cavallieri besagt, dass das Volumen eines Körpers vollständig durch seine sämtlichen (parallelen) Querschnittsflächen bestimmt ist. Inwiefern?

b) Machen Sie eine Recherche zum Prinzip von Cavallieri.

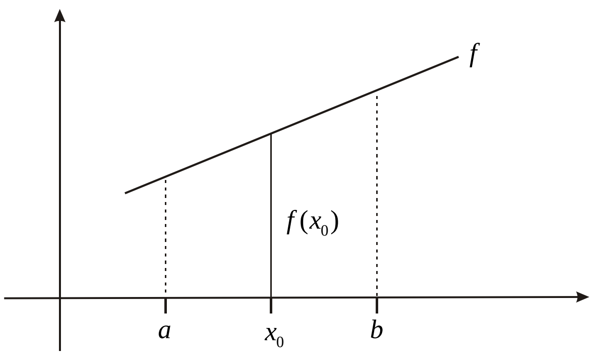
Zur Übung: Textbuch, S. 248/249, Aufgaben 26-28.

ARBEITSBLATT 1

zum Grundverständnis des Integrierens als Mitteln

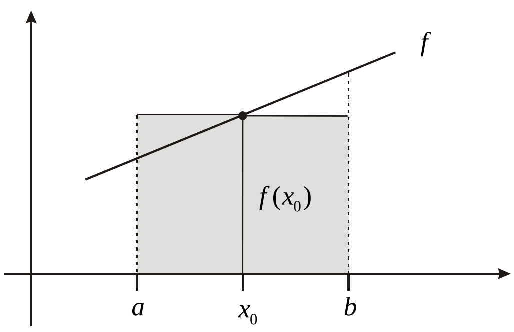
Mittelwerte

1. Es ist klar, dass sich, bei gleichmäßigem (linearen) Anstieg einer Größe in einem Intervall, ein mittlerer Wert der Größe leicht angeben lässt; er wird in der Mitte angenommen.



Mittlerer Funktionswert in $[a,b]$

Um den mittleren Funktionswert mit dem Integral als (orientiertem) Flächeninhalt in Verbindung zu bringen, blicken wir in neuer Weise auf das Bild:



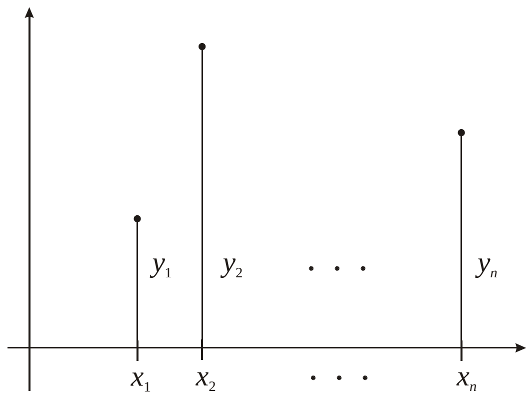
a) Inwiefern ist der mittlere Funktionswert mit dem Integral verknüpft?

b) Wie lässt sich das zweite Bild interpretieren, wenn man das erste Bild als Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eines fahrenden Autos deutet?

c) Wie lässt sich allgemein der Mittelwert einer auf dem Intervall $[a,b]$ definierten Funktion über das Integral definieren?

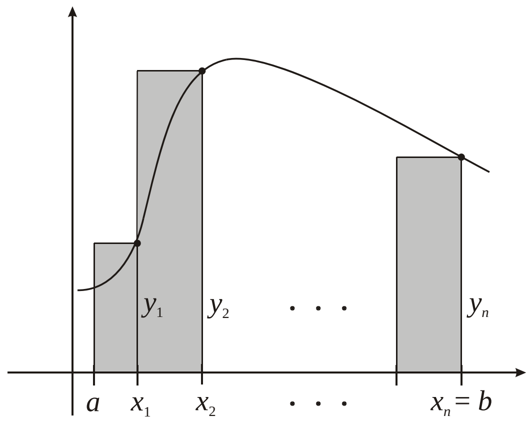
2. Hat man n Messwerte $y_1, y_2, ..., y_n$ zu den äquidistanten Zeitpunkten $x_1, x_2, ..., x_n$ erhoben, so versteht man landläufig unter dem Mittelwert der Daten das arithmetische Mittel

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$



Die n Messpunkte

Um das arithmetische Mittel mit dem Integral in Verbindung zu bringen, schauen wir wieder in neuer Weise hin:



Wir denken uns die Messwerte als
diskrete Realisierung eines stetigen Verlaufs.

a) Man mache sich klar: Im kontinuierlichen Fall ist das Analogon zum arithmetischen Mittel (bis auf den Faktor $\frac{1}{b-a}$) das Integral, und man landet bei derselben Definition wie unter 1c)!

b) Zeigen Sie: Die vorausgesetzte Äquidistanz (Gleichabständigkeit) der Stützstellen $x_1, x_2 ..., x_n$ ist nicht entscheidend: Im allgemeinen Fall startet man mit dem *gewichteten* arithmetischen Mittel und gelangt zum selben Ergebnis.

Übungsblätter

ÜBUNGSBLATT 1

Ableitung als lokale Änderungsrate

Aufgabe 1 (*Druckwelle*)

Die Druckwelle einer atomaren Explosion breitet sich in den ersten 10 Sekunden annähernd nach der Gleichung

$$s(t) = 1,6t^2 + 3,2t$$

aus. $s(t)$ bezeichnet die Entfernung (in km) vom Explosionszentrum nach t Sekunden.

a) Man berechne die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckwelle in den ersten 10 Sekunden sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu den Zeitpunkten 2, 4, 6, 8 und 10 Sekunden.
b) Wie lange braucht die Druckwelle bis zu einem 63 km vom Zentrum entfernten Ort, und welche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat sie dort?

Aufgabe 2 (*Zylinder*)

Wir blicken auf das Volumen (die Oberfläche) eines Zylinders und denken uns den Radius und die Höhe des Zylinders variabel.
Wie groß ist die lokale Änderungsrate des Volumens (der Oberfläche)
a) in Abhängigkeit vom Radius bei fester Höhe
b) in Abhängigkeit von der Höhe bei festem Radius?
Man interpretiere die Ergebnisse!

Aufgabe 3 (*Kugel*)

Das Volumen einer Kugel mit dem Radius r ist bekanntlich

$$V(r) = \frac{4}{3}\ \pi^3$$

Die Ableitung von V nach r ist demnach

$$V'(r) = 4\pi r^2 .$$

Offenbar gilt: Die lokale Änderungsrate des Volumens der Kugel (man denke sich den Radius veränderlich) ist gerade gleich ihrer Oberfläche.
Wie lässt sich das verstehen?

Aufgabe 4 (*Leiter*)

Eine 5 Meter lange Leiter lehnt an einer Mauer. Ihr Fuß rutscht mit 0,5 Meter pro Sekunde von der Mauer weg. Wie schnell gleitet die Spitze der Leiter nach unten, wenn sie sich 4 Meter über dem Boden befindet? Wie schnell ist sie, wenn sie den Boden erreicht?

Aufgabe 5 (*Kreis des Apollonius von Perge*, 262?-190? v. Chr.)

Ein Punkt bewegt sich so in der Ebene, dass er stets doppelt so weit vom Ursprung entfernt ist wie von (3,0).
a) Zeigen Sie, dass er sich auf einem Kreis bewegt.
b) Welche Geschwindigkeit hat er in x-Richtung in dem Moment, in dem er die die x-Achse passiert?
c) In welchen Punkten ist $\dot{x} = \dot{y}$? (Man nehme an, dass $\dot{x}$ und $\dot{y}$ nicht gleichzeitig gleich null sind.)

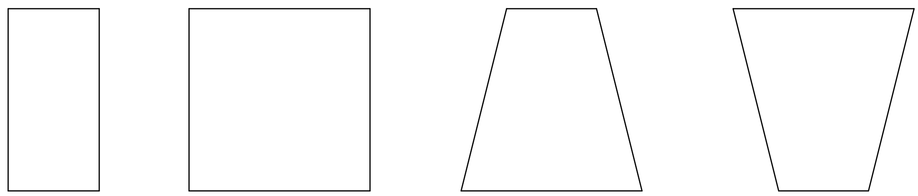
ÜBUNGSBLATT 2

Ableitung als lokale Änderungsrate

Aufgabe 1 (*Äquator*)
Man denke sich um die Erde längs des Äquators ein Band gelegt. Nun verlängere man es um einen Meter und lege es so, das es einen zum Äquator konzentrischen Kreis bildet. Wie hoch liegt das Band über der Erde?
Wiederholt man das gleiche Experiment mit einem Apfel, so hat das band denselben Abstand! Wie ist dieses verblüffende Ergebnis zu erklären? (Man betrachte den Radius eines Kreises als Funktion des Umfangs.)

Aufgabe 2 (*Gefäße*)
Die abgebildeten Gefäße werden mit jeweils der gleichen konstanten Zuflussrate gleich hoch mit Wasser gefüllt.

A *B* *C* *D*



zylindrisch, $h = 2$ konisch, $h = 2$

$r = \frac{1}{2}$ $r = 1$ $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{2}$ $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 1$

a) Skizzieren Sie die Füllhöhe h der Gefäße in Abhängigkeit von der Zeit t . Bezeichnen Sie jeweils die Graphen, und beschriften und skalieren Sie die Achsen.
b) Skizzieren Sie in einem weiteren Diagramm die Änderungsraten der Füllhöhen.
c*) Lassen Sie die Füllhöhen und ihre Änderungsraten von einem Rechner darstellen. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Ihren Handskizzen.
(Hinweis: Man bestimme $V(h)$ und $V(t)$ und setze sie gleich.)
d*) Die Änderungsraten lassen sich auch ohne Analysis gewinnen. Wie?

Aufgabe 3 (*Änderungsraten*)
Ergänze die folgende Tabelle und deute jeweils die lokale Änderungsrate.

Unabhängige Variable	*abhängige Variable*	*Lokale Änderungsrate*
Zeit	Weg	
Zeit	Geschwindigkeit	
Zeit	Flüssigkeitsmenge	
Zeit		elektrische Stromstärke
Zeit	Energie	
Zeit		Inflationsrate
Temperatur	Länge	
Einkommen	Steuer	
Produktion		Grenzkosten

Aufgabe 4 (*Regentropfen*)
Das Volumen eines fallenden kugelförmigen Regentropfens wachse proportional zu seiner Oberfläche. Zeige, dass dann die zeitliche Änderungsrate des Radius konstant ist, d.h. der Radius des Tropfens mit der Zeit linear zunimmt.

ÜBUNGSBLATT 3

Ableitung als lineare Näherung

Aufgabe 1 (*Näherungswert*)
Die durch

$$f(x) = x^3$$

gegebene Funktion soll in der Nähe von $x_0 = 2$ durch die Tangente approximiert werden. Welcher Näherungswert ergibt sich für den Funktionswert $f(2,5)$, und wie groß ist der absolute bzw. der relative Fehler?

Aufgabe 2 (*Näherungswert*)
Die durch

$$f(x) = x^2 - 3x + 3$$

gegebene Funktion soll bei $x_0 = 1$ linear genähert werden. Wie groß darf h höchstens sein, wenn der Näherungswert nicht mehr als 10% vom Funktionswert abweichen soll?

Aufgabe 3 (*Näherungsformeln*)
Der Praktiker, der Theoretiker im Übrigen auch, bedient sich gern einfacher Näherungsformeln. Vielfach reicht ihm eine (lokale) *lineare* Näherung. (Oft spricht er dann von „erster Näherung" und hat dabei die Potenzreihe im Sinn.)
Die folgende Tabelle enthält die gebräuchlichsten linearen Näherungen einiger algebraischer Funktionen.

Funktion	*Näherung*	*Funktion*	*Näherung*	*Funktion*	*Näherung*
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x$	$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2}$	$\frac{1+x}{1-x}$	$1 + 2x$
$\frac{1}{(1+x)^2}$	$1 - x^2$	$\sqrt[3]{1+x}$	$1 + \frac{x}{3}$	$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$	$1 + 4x$
...	...	...	...	...	...

a) Überzeugen Sie sich am Beispiel $\frac{1+x}{1-x}$ von der Richtigkeit der angegebenen Näherung.

b) Wie groß darf $|x|$ höchstens sein, damit der (relative) Fehler der Näherung unter 1% $(0,1\%)$ bleibt?

Aufgabe 4 (*Faustregel*)
Bekanntlich wächst bei Zinseszins das Kapital exponentiell (p konstant). Für die Verdoppelungszeit T gilt bei kleinem Zinssatz p in guter Näherung

$$T \quad p \approx 70\,.$$

a) Wie genau ist diese Faustregel für $p = 1$ $(5,\ 25)$?

b) Leiten Sie die Faustregel her! (Hinweis: Verwenden Sie die Näherung $\ln(1 + x) \approx x$.)

c) Welchen praktischen Nutzen könnte diese Faustregel haben?

ÜBUNGSBLATT 4

Kurvendiskussion

Aufgabe 1 (*Drei Fälle*)

Zeigen Sie, dass bei einer Polynomfunktion dritten Grades nur drei Fälle möglich sind: Sie besitzt *entweder* einen Hoch- und Tiefpunkt *oder* einen Sattelpunkt *oder* keines von beiden.

Aufgabe 2 (*Vorzeichenwechsel*)

Hat die Ableitung von $\frac{1}{f}$ an denselben Stellen einen Vorzeichenwechsel wie die Ableitung von f? Wie lässt sich dies bei der Anwendung des Vorzeichenwechselkriteriums nutzen?

Aufgabe 3 (*Wendepunkt*)

Zeigen Sie, dass ein Polynomfunktion dritten Grades stets genau einen Wendepunkt hat.

Aufgabe 4 (*Braten*)

Wir nehmen an, wir hätten einen Braten in eine Backröhre geschoben, deren Temperatur auf konstant $200\,°\mathrm{C}$ gehalten wird.

a) Skizzieren Sie, wie sich die Temperatur T (in °C) des Bratens in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) entwickeln wird. Erklären Sie, warum sich die Temperaturkurve so gezeichnet haben, wie Sie sie gezeichnet haben.

b) Nehmen Sie an, die Temperatur des Bratens sei zum Zeitpunkt $t = 30$ auf $120°$ angestiegen und steige weiter mit einer Rate von $2°$ pro Minute. Schätzen Sie mit Hilfe dieser Angabe und allem, was Sie über den Temperaturverlauf wissen, die Temperatur zum Zeitpunkt $t = 40$.

c) Nehmen Sie an, eine Messung hätte ergeben, dass bei $t = 60$ die Bratentemperatur $165°$ beträgt. Können Sie damit Ihre Schätzung für $t = 40$ verbessern?

d) Geben Sie auf der Basis aller Angaben eine möglichst gute Schätzung, wann die Temperatur $150°$ erreicht.

e*) Aus der Annahme, dass die Änderungsrate der Bratentemperatur proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Ofen und Braten ist, lässt sich für den Temperaturverlauf ein Funktionsterm gewinnen. Wie? Vergleichen Sie schließlich die rechnerischen mit den gegebenen und den geschätzten Werten. Kommentar?

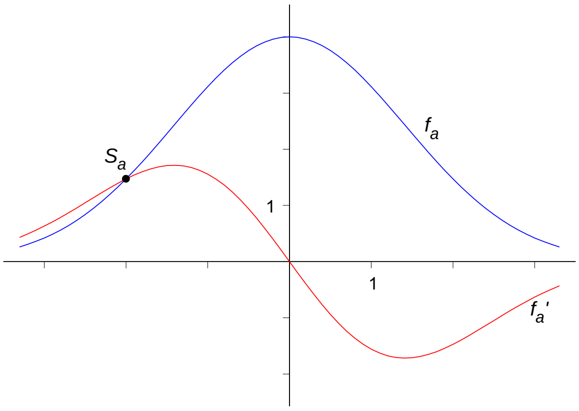
ÜBUNGSBLATT 5

Kurvendiskussion

Aufgabe 1 (*Funktionenschar*)

Gegeben ist die Funktionenschar f_a ($a > 0$) mit

$$f_a(x) = \frac{1}{a} e^{-ax^2},\ x \quad ¡\ .$$



a) Die Zeichnung zeigt die Graphen von f_a und $f_a{}'$ im selben Koordinatensystem. Welchen Wert hat der Parameter a?

b) Gibt es Eigenschaften, die für alle Funktionen der Schar gelten? (Mit Begründung.)

c) Der Graph der Ableitung $f_a{}'$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Dies ist sowohl algebraisch als auch geometrisch zu begründen.

d) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f_a und bestätigen Sie das Ergebnis ohne Rückgriff auf die Ableitung.

e) Ist es möglich, den Parameter a so zu wählen, dass der Graph von f_a den Punkt $W(1\,|\,1)$ als Wendepunkt hat?

f) In welcher Weise spiegeln sich die Wendepunkte von f_a als besondere Punkte im Graphen von $f_a{}'$? Gilt dieser Zusammenhang allgemein?

g) Für welche a schneiden sich die Graphen von f_a und $f_a{}'$? Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt S_a sowie die Kurve, auf der alle Schnittpunkte S_a liegen.

h) Untersuchen Sie, wie sich mit wachsendem a der Graph von f_a verändert. Beschreiben und begründen Sie!

i) Wir interpretieren zum Schluss die Ableitungsfunktion in einem Anwendungskontext:

x sei die Zeit (in Minuten); zur Zeit $x = 0$ sei ein Öltank mit 500 Litern gefüllt. $f_a'(x)$ gebe die Zuflussgeschwindigkeit (in 100 Liter pro Minute) zum Zeitpunkt x an ($a = 0{,}25$).

(a) Gesucht ist ein Term für den Ölvorrat (in 100 Litern) zur Zeit x ($x \geq 0$).

(b) Wann ist der Tank zur Hälfte entleert?

(c) Welche Vorratsgrenze kann auch bei beliebig langer Ablaufzeit (theoretisch) nicht unterschritten werden?

Aufgabe 2 (*Mit der 'Krake' unterwegs*)

Ein Punkt P der Ebene bewege sich auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt seinerseits einer Kreisbewegung unterliege. Dann werden die Koordinaten x und y von P als Funktion der Zeit beschrieben durch

$$x(t) = r_1 \cos \frac{2\pi}{T_1} t + r_2 \cos \frac{2\pi}{T_2} t$$

$$y(t) = r_1 \sin \frac{2\pi}{T_1} t + r_2 \sin \frac{2\pi}{T_2} t \ .$$

Die 'Krake'.

a) Leiten Sie diese Formeln her!

b) Wo befindet sich P zum Startzeitpunkt $t = 0$?

c*) Erzeugen Sie (rechnerunterstützt) „schöne“ Bahnkurven!

ÜBUNGSBLATT 6

Extremwertprobleme

Aus der Geometrie

Aufgabe 1 (*Einbeschreiben einer Figur*)
Einem gleichschenkligen Dreieck (einem Kegel) ist das Rechteck (der Zylinder) größten Inhalts einzubeschreiben. Man vergleiche Lösungswege und Ergebnisse.

Aufgabe 2 (*Sportplatz*)
Ein Sportplatz mit 400 m-Bahn hat die Form eines Rechtecks mit zwei angesetzten Halbkreisen. Wie ist die längere Seite des rechteckigen Spielfeldes zu wählen, damit seine Fläche möglichst groß wird?

Aus dem Alltag

Aufgabe 3 (*Streichholzschachtel*)
Eine Schachtel Streichhölzer ist 5 cm lang, 3,5 cm breit und 1,2 cm hoch. Sind dies vernünftige Abmessungen, wenn die Länge der Streichhölzer (5 cm) festliegt?

Aufgabe 4 (*Päckchen*)
Die Deutsche Post bietet ihren Kunden an, kleine und leichte Güter als *Päckchen* zu befördern. Gewicht und Größe hat sie in ihrer Preisliste begrenzt (Stand: 1. Januar 2005):

Höchstgewicht: 2 kg

QUADERFORM
Mindestmaße: $15 \times 11 \times 1$ cm
Höchstmaße: $60 \times 30 \times 15$ cm (Deutschland)

ROLLENFORM
Mindestmaße: Länge 15 cm, Durchmesser 5 cm
Höchstmaße: Länge 90 cm, Durchmesser 15 cm (Deutschland)

Welches Volumen kann ein Päckchen höchstens haben?

Aus der Physik

Aufgabe 5 (*Schiefer Wurf*)

a) Unter welchem Winkel α (gegen die Horizontale) muss ein Ball geworfen werden, damit er eine a Meter entfernte Wand möglichst hoch trifft? (v_0 sei die Abwurfgeschwindigkeit in $\mathrm{m/s}$, h die Auftreffhöhe in Meter.)
Hinweis: Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems ist
$$h(\alpha) = a \tan\alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \quad \text{mit } g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \text{ (Erdbeschleunigung).}$$

b) Welcher Winkel und welche Höhe ergeben sich für $v_0 = 12\ \mathrm{m/s}$ und $a = 10\ \mathrm{m}$?

Aufgabe 6 (*Gravitation*)
Zwei Punktmassen m_1 und m_2 seien in einem festen Abstand voneinander fixiert. Dann ist ihre wechselseitige Anziehungskraft proportional zum Produkt $m_1 \quad m_2$ ihrer Massen. Wie ist die Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ auf m_1 und m_2 zu verteilen, damit die Anziehungskraft maximal ist?

Aus der Wirtschaft

Aufgabe 7 (*Kosten und Ertrag*)

a) Kosten und Ertrag der Produktion eines Gutes seien gegeben durch

$$K(x) = 800 + 30x - 0,01x^2 \text{ und } E(x) = 50x - 0,02x^2,\ 0 \le x \le 1500.$$

Bei welcher Produktionsmenge x ist der Gewinn $G(x) = E(x) - K(x)$ maximal?

b) Zeige: Bei maximalem Gewinn sind Grenzkosten und Grenzertrag gleich.

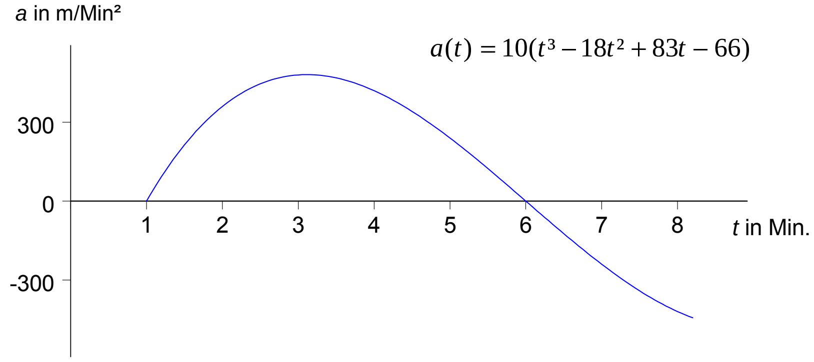
Diverses

Aufgabe 8 (*Summe der Kehrwerte*)
Zeigen Sie, dass die Summe der Kehrwerte zweier Zahlen mit konstanter Summe extremal ist, wenn die beiden Zahlen gleich groß sind, und bestimmen Sie die Art des Extremums.

ÜBUNGSBLATT 7: **Das Integral**

AUFGABE 1 (*Flugzeug*)

Moderne Verkehrsflugzeuge sind mit einem sogenannten Trägheitsnavigationssystem (INS – Inertial Navigation System) ausgerüstet. Auf einer durch einen Kreisel in der Lage zur Erdachse immer stabil gehaltenen Plattform sind Sensoren angebracht, die mittels Kraftwirkungen (Kraft gleich Masse mal Beschleunigung) Beschleunigungen in drei zueinander senkrechten Richtungen messen können. In vertikaler Richtung wird nun der in der Abbildung dargestellte Beschleunigungsverlauf registriert.



a) Man bestimme die Geschwindigkeit v (in vertikaler Richtung) als Funktion der Zeit t $(v(1) = 0)$ und skizziere ihren Verlauf.

b) Wie groß ist der Höhenzuwachs von der ersten bis zur sechsten Minute?

Aufgabe 2 (*Hauptsatz am Trapez*)

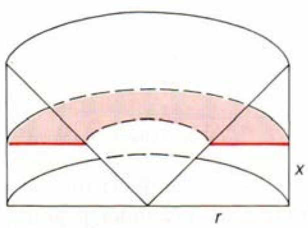
Betrachte für die lineare Funktion

$$f(x) = mx + b \qquad (m, b > 0)$$

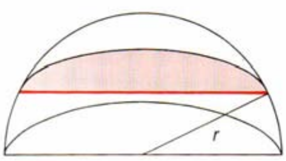
den Inhalt $A_a(x)$ der Trapezfläche, die f mit der x-Achse zwischen a und x einschließt $(0 < a < x)$. Zeigen Sie, dass die Flächeninhaltsfunktion A_a die Beziehung $A_a' = f$ erfüllt.

Aufgabe 3 (*Kugel*)

Zeige mit dem Prinzip von Cavalieri die Volumengleichheit beider Körper und begründe so die Formel für das Kugelvolumen.



Kreiszylinder mit von oben herausgebohrtem Kegel



Halbkugel

Aufgabe 4 (*Mittelwert*)

Ein Flussdampfer fährt stromaufwärts von A nach B mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 und stromabwärts zurück nach A mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2 > v_1$. Warum ist seine mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ *nicht* gleich $\frac{v_1 + v_2}{2}$? Wie groß ist sie?

Test / Klausur

TEST

16.12.2005

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Hilfsmittel: keine
Bitte bearbeiten Sie **jede Aufgabe** auf einem **separaten Blatt**.
Schreiben Sie bitte Ihren **Namen auf jedes Blatt** und lassen Sie rechts einen **Korrekturrand**.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte										

Gesamt-Punktzahl max.: 22

Gesamt-Punktzahl erreicht:

Note:

VIEL ERFOLG !!!

1 An einem bestimmten Ort gebe $f(t)$ den Luftdruck zur Zeit t an. Der Luftdruck wird zu einem Zeitpunkt t_1 und (etwas später) zum Zeitpunkt t_2 gemessen. Wie ist der Differenzenquotient $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ zu interpretieren? (1 Punkt)

2 Wie ist die Ableitung $f'(x_0)$ als Grenzwert des Differenzenquotienten geometrisch bzw. anwendungsbezogen zu deuten? (2 Punkte)

3 In den USA, aber auch in Deutschland finden regelmäßig Kurzstreckenrennen über eine Viertelmeile statt. Ein Rennwagen lege diese Distanz in 6 Sekunden zurück. Nach t Sekunden sei er

$$s(t) = \frac{44}{3}t^2 + 132t$$

Fuß vom Start entfernt. Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Überqueren der Ziellinie, d.h. am Ende der Viertelmeile? (3 Punkte)

4 Begründen Sie die lineare Näherung $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$ für kleine $|x|$. (2 Punkte)

5 Zeigen Sie: Für die Normalparabel $f(x)=x^2$ hängt der Fehler der Approximation durch die Tangente nicht von der Lage des Berührpunktes ab. (Anleitung: Berechnen Sie den Fehler *r(h)* für eine beliebige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$) (2 Punkte)

6 In welchem Sinne ist die Tangente die bestapproximierende Gerade? (2 Punkte)

7 Begründen Sie, warum die Wurzelfunktion ($f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$) streng monoton wächst. (2 Punkte)

8 Die durch $f(x)=x^5$ definierte Funktion wächst auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton. Dennoch ist $f'(0)=0$. Widerspricht dies dem Monotoniekriterium? (2 Punkte)

9 Es gibt lokale und globale Maxima. Erklären Sie den Unterschied anhand einer Skizze! (2 Punkte)

10 Zeigen Sie mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums, dass die durch $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+1$ auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion an der Stelle $x_0 = 1$ ein lokales Minimum hat. Ist es auch das globale Minimum von f ? (Mit Begründung!) (4 Punkte)

VIEL ERFOLG !!!

KLAUSUR

Aufgabe 1 (*Differenzenquotient*)

$f(t)$ gebe den bis zum Zeitpunkt *t* zurückgelegten Weg an. Wie ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} \quad \text{(für zwei Zeitpunkte } t_1 < t_2\text{)}$$

zu interpretieren?
(2 Punkte)

Aufgabe 2 (*lineare Näherung*)

Begründen Sie die lineare Näherung

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{x}{n} \quad \text{für kleine } |x| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3 (*Tangente*)

Wir approximieren die Normalparabel $f(x)=x^2$ in der Nähe des Punktes $P(1|1)$ durch Geraden der Form

$$y = m(x-1)+1 \quad \text{(mit variablem } m\text{).}$$

Zeigen Sie: Der Approximationsfehler $r(h)$ genügt für alle Geraden der Bedingung $\lim\limits_{h\to 0} r(h)=0,$ aber nur die Tangente in *P* erfüllt die Weierstraßsche Restbedingung $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0.$

(4 Punkte)

Aufgabe 4 (*Wurzelfunktion*)

Man begründe, warum der Graph jeder Wurzelfunktion

$$f(x)=\sqrt[n]{x} \qquad (n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$$

für $x>0$ rechtsgekrümmt ist und zugleich streng monoton wächst. („Rechtsgekrümmt“ heißt, dass die Kurvensteigung ständig abnimmt.)
(3 Punkte)

Aufgabe 5 (*1-Liter-Dose*)

Eine zylindrische 1-Literdose mit Radius *r* hat die Oberfläche

$$O(r) = 2\left(\pi r^2 + \frac{1}{r}\right).$$

a) Warum? (2 Punkte)

b) Für welchen Radius ist die Oberfläche minimal? (2 Punkte)

(4 Punkte) **b.w.**

Aufgabe 6 (*Integrieren*)

Was bedeutet „Integrieren heißt Rekonstruieren“ inhaltlich? Erläutern Sie dies qualitativ an einem selbst gewählten Beispiel!
(3 Punkte)

Aufgabe 7 (*mittlere Änderungsrate*)

a) Bilden Sie den Mittelwert aller lokalen Änderungsraten einer Funktion f auf $[a,b]$ und zeigen Sie, dass sich gerade die mittlere Änderungsrate von f auf $[a,b]$ ergibt. (2 Punkte)

b) Wie ist dieser Sachverhalt zu interpretieren, wenn f eine Weg-Zeit-Funktion ist? (1 Punkt)

(3 Punkte)

Viel Erfolg!

Analysis I

Übungsblätter

Übungen zu Analysis I

W. Hein | WS 05/06 | Blatt 1

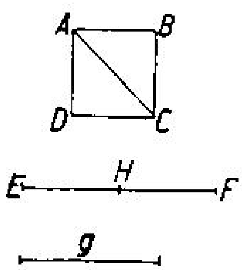
1. Der untenstehende Text ist entnommen aus Euklid, *Elemente*, Buch X. Dieses Werk hat 2000 Jahre lang als Grundlage für den Unterricht in Geometrie (und mehr) gedient und enthält einen großen Teil des noch heute üblichen Schulstoffes aus diesem Gebiet. Es steht deshalb jedem Lehrer gut an, von diesem Werk eine gewisse Kenntnis zu haben.

   Aufgabe: Lesen Sie den Text und „übersetzen“ Sie ihn in die heute übliche mathematische Schreibweise. (Die durchgestrichenen Stellen brauchen Sie nicht zu beachten; sie zeugen von dem sorgfältigen deduktiven Aufbau des Werkes.) Machen Sie klar, was die Zeichen $\cup$ und $\cap$ bedeuten und was „gegeneinander prim“ heißen soll.

   Benutzen Sie bei Ihrer „Übersetzung“ die folgenden Bezeichnungen:

$$s = AB,\ d = CA,\ h = EF,\ k = EH.$$

[*Man soll zeigen, daß in jedem Quadrat die Diagonale der Seite ~~linear~~ inkommensurabel ist.*



Es sei $ABCD$ ein Quadrat, AC seine Diagonale. Ich behaupte, daß $CA \cup AB$.

Wenn möglich, sei es nämlich ~~(linear)~~ kommensurabel. Ich behaupte, dann muß herauskommen, daß dieselbe Zahl gerade und ungerade wäre.

Offenbar ist $AC^2 = 2\,AB^2$ ~~(I, 47)~~. Da $CA \cap AB$, hätte CA zu AB ein Verhältnis wie eine Zahl zu einer Zahl ~~(X, 5)~~. Das Verhältnis sei $EF : g$; hier seien EF, g die kleinsten unter den Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie ~~(VII, 33)~~. Dann ist EF nicht die Einheit. Wäre nämlich EF die Einheit und hätte zu g das Verhältnis $= AC : AB$, wo $AC > AB$, dann wäre $EF >$ eine Zahl, nämlich g ~~(V, Def. 5)~~. Dies wäre Unsinn. EF ist also nicht die Einheit, wäre also eine Zahl. Da $CA : AB = EF : g$, wäre auch $CA^2 : AB^2 = EF^2 : g^2$ ~~(VI, 20 Zus.; VIII, 11)~~. Aber $CA^2 = 2\,AB^2$, also wäre auch $EF^2 = 2\,g^2$ ~~(V, Def. 5)~~, also EF^2 gerade ~~(VII, Def. 6)~~. Folglich wäre auch EF selbst gerade; wäre es nämlich ungerade, so wäre auch sein Quadrat ungerade, da, wenn man beliebigviele ungerade Zahlen zusammensetzt und ihre Anzahl ungerade ist, auch die Summe ungerade ist ~~(IX, 23)~~. EF wäre also gerade; man halbiere es in H. Da EF, g die kleinsten von den Zahlen sein sollten, die dasselbe Verhältnis haben, wären sie gegeneinander prim ~~(VII, 22)~~. Hier wäre EF gerade, also g ungerade; denn wenn es gerade wäre, mäße die Zwei die Zahlen EF, g — jede gerade Zahl hat ja eine Hälfte — während sie gegeneinander prim sein sollten; dies ist unmöglich. g ist also nicht gerade, wäre also ungerade. Da $EF = 2\,EH$, wäre $EF^2 = 4\,EH^2$. Nun war $EF^2 = 2\,g^2$, also wäre $g^2 = 2\,EH^2$. Also wäre g^2 gerade, also nach dem Gesagten g gerade. Dabei war es ungerade. Dies ist unmöglich. Also ist CA nicht $\cap AB$ — q. e. d.]

2. Es sei n eine natürliche Zahl, $n > 2$. Wie kann man auf der Zahlengerade einen Punkt konstruieren, dessen Quadrat gleich n ist? (Stichwort: Höhensatz)

3. a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$(\sqrt{2}-1)^n = 2(\sqrt{2}-1)^{n+1} + (\sqrt{2}-1)^{n+2}.$$

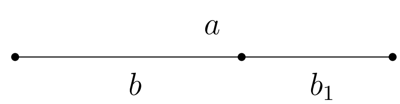
   b) Führen Sie mittels a) den Euklidischen Algorithmus für $\sqrt{2}$ durch.
   Hinweis: Die erste Gleichung lautet $\sqrt{2} = 1 \cdot 1 + r_1$ *mit* $r_1 = \sqrt{2} - 1$.

   c) Begründen Sie, dass $\sqrt{2}$ irrational ist (m.a.W., dass die Strecken $\sqrt{2}$ und 1 auf der Zahlengeraden inkommensurabel sind).

   d) Zeigen Sie, dass die Reste beim Euklidischen Algorithmus eine Nullfolge bilden.

4. a) Gegeben seien zwei Strecken a, b mit $a > b$. Die Strecke b_1 sei definiert durch

$$a = b + b_1$$



   und es gelte

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b_1}$$

   (als Verhältnisgleichung). Dieses Verhältnis wird „Goldenes Verhältnis“ oder „Goldener Schnitt“ genannt. Zeigen Sie: $0 < b_1 < b$.
   Es sei nun b_2 definiert durch

$$b = b_1 + b_2.$$

   Beweisen Sie:

$$\frac{b}{b_1} = \frac{b_1}{b_2}.$$

   und schließen Sie hieraus, dass gilt: $0 < b_2 < b_1$.

   b) Wie lauten die ersten drei Gleichungen des Euklidischen Algorithmus für a, b? Warum ist das Goldene Verhältnis irrational?

5. Es seien a, b, c drei von 0 und 1 verschiedene Punkte auf der Zahlengerade, a, b, c paarweise verschieden. Konstruieren Sie die Punkte ab, ba, $a(bc)$ und $(ab)c$.

Übungen zu Analysis I

W. Hein — WS 05/06 — Blatt 2

Bei den folgenden Konvergenzbeweisen kommt es (auch für die Punktverteilung) auf präzise Formulierungen an! Benutzen Sie dabei nur die Definition des Grenzwertes einer konvergenten Folge aus der Vorlesung (bzw. dem Skript).

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Ist a eine reelle Zahl und $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

   (b) Die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist nicht konvergent.

   (c) Die Folge (a_n) mit
   $$a_n = \frac{n}{n+1}$$
   für $n \in \mathbb{N}$ hat den Grenzwert 1.

2. Geben Sie ein Beispiel einer Nullfolge (a_n) an, für die gilt, dass die Folge $\left(\frac{|a_n|}{a_n}\right)$ nicht konvergent ist (Beweis!). Sehen Sie einen Zusammenhang mit dem, was Sie in der Parallelvorlesung „SHS“ gelernt haben?

3. (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für jede natürliche Zahl $n \neq 3$ gilt
   $$n^2 \leq 2^n.$$

   (b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a):
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

4. (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
   $$x \in \mathbb{R},\ x > -1 \ \Rightarrow\ (1+x)^n \geq 1 + nx \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a): Ist $q \in \mathbb{R},\ q > 1$, so gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $q^n > K$.

   (c) Geben Sie einen alternativen Beweis für den in der Vorlesung bewiesenen Satz, dass für alle q mit $|q| < 1$ gilt:
   $$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

.

Übungen zu Analysis I

W. Hein — WS 05/06 — Blatt 3

---

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle natürlichen Zahlen n gilt
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

2. Wählen Sie (mindestens) vier der angegebenen Folgen (a_n) aus und zeigen Sie, dass es sich um Nullfolgen handelt. Bei der Folge d) ist a eine beliebige reelle Zahl. (Wenn Sie mehr als vier Folgen bearbeiten, werden diese ebenfalls durchgesehen und auch mit Punkte bewertet.)

   Hinweis: Zu zeigen ist also, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Benutzen Sie dazu gegebenfalls das Archinedische Axiom.

$$\text{a)}\ \left(\frac{2}{n+1}\right) \qquad \text{b)}\ \left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right) \qquad \text{c)}\ \left(\frac{(-1)^n}{2n-1}\right) \qquad \text{d)}\ \left(\frac{a}{n!}\right)$$

$$\text{e)}\ \left(\frac{2n+1}{3n-2} - \frac{2}{3}\right) \qquad \text{f)}\ \left((1+(-1)^n)\frac{1}{n}\right) \qquad \text{g)}\ \left(\frac{n-1}{n\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{h)}\ \left(\frac{2n^2+3n}{4n^2+1} - \frac{1}{2}\right)$$

3. Warum konvergiert die Reihe
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \pm \cdots$$
   und wie lautet ihre Summe?

4. Welche rationale Zahl $\frac{m}{n}$ stellt der Dezimalbruch $0{,}035\overline{47}$ dar?

Übungen zu Analysis I

W. Hein | WS 05/06 | Blatt 4

---

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Grenzwertregeln aus Abschnitt 7 des Skripts (und nicht mit ε und N), dass die angegebenen Folgen konvergieren (ggf. nach geeigneten Umformungen des allgemeinen Glieds), und bestimmen Sie jeweils die Grenzwerte.

$$\text{a)} \left(\frac{2}{n+1}\right) \qquad \text{b)} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right) \qquad \text{c)} \left(\frac{2n^2+3n}{4n^2+1}\right)$$

2. In dieser Aufgabe geht es darum, durch ein geometrisches Argument die Summe der Reihe

$$S = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + 6\frac{1}{16} + 8\frac{1}{32} + 12\frac{1}{64} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \cdots$$

zu bestimmen.

Dazu wird zunächst das Intervall $[0,1]$ – von 0 aus nach rechts fortschreitend – in Teilintervalle $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n, \ldots$ der Länge $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ zerlegt.

Über den Intervallen I_{2n-1}, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (mit ungeradem Index) wird ein Rechteck der Höhe 2^n errichtet (s. Abb.).

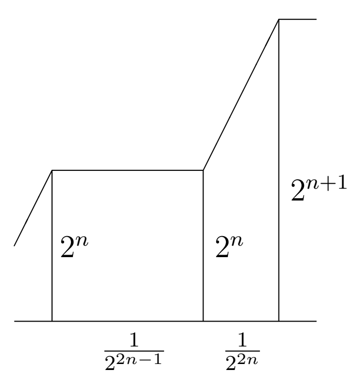
Über den Intervallen I_{2n}, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (mit geradem Index) wird ein Trapez mit der linken Höhe 2^n und der rechten Höhe 2^{n+1} errichtet (s. Abb.).

Jetzt kommt die Aufgabe:

(a) Schreiben Sie die Summe der Rechtecksflächen als unendliche Reihe und geben Sie die Summe (den Wert) dieser Reihe an.

(b) Das gleiche für die Trapezflächen.

(c) Berechnen Sie die Flächen, die aus einem Rechteck und dem rechts folgenden Trapez besteht. Schreiben Sie die Summe dieser Flächen als unendliche Reihe und zeigen Sie, dass diese Reihe mit der eingangs genannten Reihe S übereinstimmt.



(d) Wie lautet die Summe (der Wert) der Reihe S?

(e) Beweisen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass die Reihe S konvergent ist (ohne Bezug zu nehmen auf die Teilreihen aus (a) und (b)).

3. Beweisen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen mit Hilfe der Konvergenzkriterien aus der Vorlesung (Majoranten- oder Wurzel- oder Quotientenkriterium)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^{n+1}}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad (0 \le a_n \le 9), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Hinweis: Bei der letzten Reihe können Sie die „Bernoullische Ungleichung“ $x \in \mathbb{R},\ x > -1 \Rightarrow (1+x)^n \ge 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus Aufgabe 4, Blatt 2 benutzen.

Übungen zu Analysis I

W. Hein WS 05/06 Blatt 5

---

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

2. Geben Sie Folgen (a_n), (b_n), (c_n) an, für die gilt (mit Beweis):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{a_n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{b_n} = -1\,, \qquad \left(\frac{|c_n|}{c_n}\right) \text{ ist nicht konvergent.}$$

3. Es sei $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ und

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Beweisen Sie: Es gibt genau eine reelle Zahl c (welche?), so dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$ für jede reelle Zahlenfolge (a_n) mit den Eigenschaften $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ und $a_n \neq 3$ für alle n.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

Beweisen Sie: Für jede reelle Zahl x_0 gibt es reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) mit den Eigenschaften

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0\,, \ \lim_{n\to\infty} b_n = x_0\,, \ \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0\,, \ \lim_{n\to\infty} f(b_n) = 1\,.$$

Übungen zu Analysis I

W. Hein — WS 05/06 — Blatt 6

---

1. Es sei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{falls } x \neq 3 \\ 6 & \text{falls } x = 3 \end{cases}$$
(vgl. Ubungsblatt 5). Zeigen Sie: Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine reelle Zahl δ (die von ε abhängt), so dass
$$|f(x) - f(3)| < \varepsilon \ \text{ für alle } x \ \text{ mit } |x-3| < \delta.$$
Was bedeutet das anschaulich? Fertigen Sie eine Skizze an.

2. Beweisen Sie:
$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = 6\,, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} \ \text{ existiert } \textbf{nicht}.$$

3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^2 - 3x$ sowie ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.
   (a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion f an und zeichnen Sie (nach „Augenmaß“) die Tangente an diesen Graphen im Punkt $(x_0\,,\, f(x_0))$ für $x_0 = 1$. Ermitteln Sie aus der Zeichnung die Steigung dieser Tangente und den Punkt $(0\,, y)$, in dem die Tangente die $y-$Achse schneidet.
   (b) Bestimmen Sie
   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,.$$
   (c) Die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0\,,\, f(x_0))$ hat die Gestalt $y = mx + b$. Geben Sie m und b an. Vergleichen Sie mit den in (a) gefundenen Werten.

4. Es sei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ x^2 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$
   (a) Beweisen Sie, dass diese Funktion in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Ableitung.
   (b) Wir definieren die Funktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
   $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
      i. Zeichnen Sie den Graph der Funktion f'.
      ii. Zeigen Sie, dass f' im Nullpunkt stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Übungen zu Analysis I

W. Hein | WS 05/06 | Blatt 7

---

1. Es sei $x = 5483$, $y = 8888$. Berechnen Sie (mit einem Taschenrechner) die „dekadischen" Logarithmen (deka gr. = zehn) $\log_{10}(x)$ und $\log_{10}(y)$, anschließend $\log_{10}(x) + \log_{10}(y)$ und schließlich $a = \exp_{10}(\log_{10}(x) + \log_{10}(y))$ und $b = xy$. Warum stimmen a und b (näherungsweise) überein?

   Auf diesem Rechenverfahren, Multiplikationsaufgaben auf Additionen zu „reduzieren", beruhen die – erst im 20. Jh. durch mechanische und elektronische Maschinen überholten – Logarithmentafeln und Rechenschieber.

2. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an einer beliebigen Stelle x ihres Definitionsbereiches (a sei eine reelle Zahl > 0):

$$f_1(x) = \exp(x^2) \ , \quad f_2(x) = \exp(-x) \cdot \ln(x) \ ,$$

$$f_3(x) = \ln((x^3 + 2)(x^2 + 3)) \ , \quad f_4(x) = a^{3x^2} \ , \quad f_5(x) = x^2 3^x \ .$$

3. (a) Leiten Sie (für eine beliebige reelle Zahl $a > 0$) aus den Definitionen von $\log_a$ und $\ln$ die folgende Gleichung her:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \ .$$

   (b) Ermitteln Sie die Ableitung $\log_a{}'(x)$ an einer beliebigen Stelle $x > 0$ auf zwei verschiedene Weisen.

   (c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \log_a(3x^2 + 5)$ für $x \in \mathbb{R}$.

4. Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f(x) = \exp(|x|)$ und beweisen Sie, dass f im Nullpunkt stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Übungen zu Analysis I

W. Hein | WS 05/06 | Blatt 8

1. Beweisen Sie die die folgenden Potenzgesetze für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^0 = 1, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

2. (a) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ habe die Eigenschaft $f(x) = a + b(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$. Bestimmen Sie a und b.

   (b) Warum ist die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar? Bestimmen Sie die Ableitung von f an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$.

3. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ bilde D bijektiv auf $f(D)$ ab und sei in $x_0 \in D$ differenzierbar. Beweisen Sie: Ist auch $f^{-1} : f(D) \to D$ in $f(x_0)$ differenzierbar, so gilt $f'(x_0) \neq 0$.

4. Der folgende Text ist dem im Jahre 1691/92 erschienenen Buch „Die Differentialrechnung" von Johann Bernoulli entnommen. Formulieren Sie den Text in unserer heutigen Terminologie.

Die Tangente der Ellipse zu finden:

Es sei der Durchmesser (Fig. 2) $BJ = b$, der Parameter a, die Abszisse x, Ordinate y, das Differential der Abszisse $CE = dx$ und das Differential der Ordinate $FG = dy$. Hier sind (aus demselben Grunde wie bei der Parabel) die Dreiecke DGF und ACD ähnlich. Deshalb ist $FG : GD = DC : AC$, d. h. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$, ferner aus der Natur der Ellipse $\frac{b}{a} = \frac{bx - x^2}{y^2}$, also $abx - ax^2 = by^2$. Nimmt man beiderseits die Differentiale:

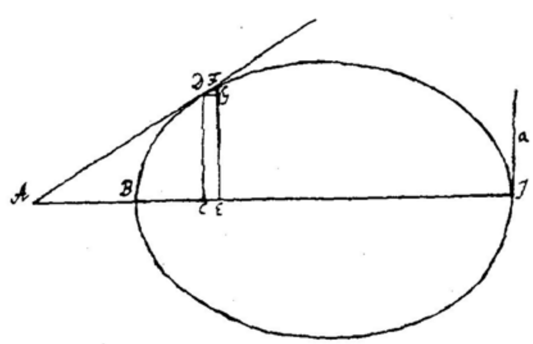


Fig. 2.

$ab\,dx - 2ax\,dx = 2by\,dy$, folglich: $\frac{ab - 2ax}{2by} = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$. Daher ist $s = \frac{2by^2}{ab - 2ax} = \frac{2abx - 2ax^2}{ab - 2ax} = \frac{2bx - 2x^2}{b - 2x}$.

Übungen zu Analysis I

W. Hein | WS 05/06 | Blatt 9

1. Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

   a) f ist in $[a,b]$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar,

   b) f ist <u>streng</u> monoton wachsend,

   c) es gilt <u>nicht</u> $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a,b[$.

2. Zeigen Sie, dass Satz 3 in III.3 nicht für offene, halboffene oder uneigentliche (einseitig oder beidseitig unbeschränkte) Intervalle gilt.

3. Geben Sie Beispiele von Funktionen $f,\ g,\ h$ mit den folgenden Eigenschaften:

   f ist im Definitionsbereich $[a,b]$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar und hat in einem Punkt x_0 ein (lokales) Extremum, ist aber in x_0 nicht differenzierbar.

   g ist im Definitionsbereich $[a,b]$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar und es gibt einen Punkt $x_0 \in [a,b]$, in dem g ein (lokales) Extremum besitzt, aber $f'(x_0) \neq 0$.

   h ist im Definitionsbereich $[a,b]$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar und hat ein (lokales) Extremum in einem Punkt x_0, aber es gilt nicht $f''(x_0) > 0$ bzw. $f''(x_0) < 0$.

4. Es sei $f : [-1,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$. Bestimmen Sie <u>mit Hilfe des Mittelwertsatzes</u> einen Punkt $c \in\ ]-1,2[$, so dass die Tangente durch $(c, f(c))$ an den Graph von f die gleiche Steigung hat wie die Sekante durch die Punkte $(-1,-1)$ und $(2,8)$.

5. Für $y \in \mathbb{R}$ sei $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_y(x) = \exp(x+y)\cdot\exp(-x)$. Beweisen Sie mit Hilfe dieser Funktion die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ der Exponentialfunktion.

Abgabe: Do, 19. 1. 2006 vor der Vorlesung

Tests / Klausur

1. Test zur Analysis I

W. Hein WS 05/06 24. 11. 2005

Name:

Vorname

Matrikelnummer:

Für jede Aufgabe gibt es höchstens 4 Punkte.
Hilfsmittel: keine
Schreiben Sie Ihre Bearbeitung bitte nur auf die anliegenden Blätter; benutzen Sie auch die Rückseiten.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Punkte															

Gesamt–Punktzahl max.: 60

Gesamt–Punktzahl erreicht:

Note:

1. Wie konstruiert man auf der Zahlengerade den Punkt $\dfrac{2}{3}$?

2. Warum ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl?

3. Beweisen Sie $0,7\overline{4}$ ist rational.

4. Warum hat jede rationale Zahl eine endliche oder periodische Dezimalbruchentwicklung?

5. Geben Sie zwei Formulierungen (Definitionen) für die Aussage $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zeichnung!

6. Was haben Konvergenz und Irrationalität (reeller Zahlen bzw. der Punkte auf der Zahlengerade) miteinander zu tun?

7. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Nullfolge (Konvergenz gegen 0) und Konvergenz gegen a ?

8. Geben Sie zwei äquivalente Formulierungen für das Archimedische Axiom.

9. Warum ist $\dfrac{1}{n}$ eine Nullfolge?

10. Was bedeutet Konvergenz bei unendlichen Reihen?

11. Warum ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konvergent?

12. Für welche q konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ und was ist im Fall der Konvergenz der Wert (die Summe) der Reihe? Warum konvergiert sie nicht für die „übrigen“ $q's$?

13. Erläutern Sie die Begriffe „Intervallschachtelung“ und „Vollständigkeit der reellen Zahlen“ (bzw. der Zahlengerade).

14. Wie findet man die Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahlen (bzw. eines Punktes der Zahlengerade)? (Kurzbeschreibung)

15. Was versteht man unter der Schnittzahl einer Intervallschachtelung und warum hat jede Intervallschachtelung <u>höchstens eine</u> Schnittzahl?

2. Test zur Analysis I

W. Hein | WS 05/06 | 16. 1. 2006

Name:

Vorname

Matrikelnummer:

Hilfsmittel: keine
Füllen Sie bitte zuerst beide Deckblätter aus.
Für jede Aufgabe gibt es höchstens 6 Punkte.
Schreiben Sie Ihre Bearbeitung bitte nur auf die anliegenden Blätter; benutzen Sie ggf. auch die Rückseiten.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte										

Gesamt–Punktzahl maximal: 60

Gesamt–Punktzahl erreicht:

Note:

1. Was bedeutet der Ausdruck $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$? Wie ist die Stetigkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ definiert?

2. Beweisen Sie, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
unstetig ist?

3. Kann man die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
im Nullpunkt stetig ergänzen? (Begründung)

4. Wie lautet der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen? Skizzieren Sie das Beweisprinzip.

5. Wie erhält man zeichnerisch aus dem Graph einer umkehrbaren (bijektiven) Funktion den Graph der Umkehrfunktion? Skizzieren Sie danach den Graph der Funktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

6. Geben Sie zwei Definitionen für die Differenzierbarkeit und leiten Sie aus einer die Stetigkeit einer differenzierbaren Funktion her.

7. Geben Sie zwei Definitionen für $\exp(x)$. Leiten Sie aus beiden Definitionen die Gleichung $\exp(0) = 1$ her. Warum gilt $\exp(1) = e$?

8. Beweisen Sie, dass die Exponentialreihe konvergent ist. Warum ist sie absolut konvergent? Wozu haben wir die absolute Konvergenz dieser Reihe benötigt?

9. Wie lauten die Ableitungen der Funktionen (ohne Beweise)

   $a)$ exp, $\quad b)$ ln, $\quad c)$ $\log_a$ $(a > 0)$, $\quad d)$ $x \mapsto x^a$ $(x > 0)$,

   $e)$ $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(x > 0)$, $\quad f)$ $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$?

10. Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(r) = g(r)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann auch $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Klausur zur Analysis I

W. Hein WS 05/06 2. 2. 2006

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Hilfsmittel: keine
Füllen Sie bitte zuerst beide Deckblätter aus.
Schreiben Sie Ihre Bearbeitungen bitte nur auf die Blätter mit dem jeweiligen Aufgabentext; benutzen Sie ggf. auch die Rückseiten.

Aufgabe	1	2	3	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7a	7b	7c
Punkte max.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
Punkte erreicht												

Gesamt–Punktzahl maximal: 23

Gesamt–Punktzahl erreicht:

Note:

Klausur zur Analysis I

W. Hein WS 05/06 2. 2. 2006

Name, Vorname:

Aufgabe	1	2	3	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7a	7b	7c
Punkte max.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
Punkte erreicht												

Gesamt–Punktzahl maximal: 23

Gesamt–Punktzahl erreicht:

Note:

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Summe

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$$

der ersten n **ungeraden** Zahlen eine Quadratzahl ist (welche?).

2. Geben Sie eine Intervallschachtelung $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ an mit

$$a_k, b_k \in \mathbb{Q} \;\; \text{und Schnittzahl} \;\; 0,101001000100001\cdots.$$

3. Gegeben sei die Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{n+1}{n\sqrt[3]{n}} \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Beweisen Sie mittels der $\varepsilon-$Definition, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

4. (a) Es sei $r \in \mathbb{R},\ 0 < r < 1$. Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$$

konvergent ist.

(b) Schließen Sie aus (a) mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die geometrische Reihe (ohne den ersten Summanden r^0)

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

(mit r wir in (a)) konvergent ist. (Nach den Werten (Summen) der Reihen ist nicht gefragt!)

5. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Geben Sie zu jedem $n \geq 0$ die Menge aller Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$ an, in denen die $n-$te Ableitung $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(a) stetig,

(b) differenzierbar

ist.

6. Für jedes $y \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Funktion $f_y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_y(x) = \ln(xy) - \ln(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \mathbb{R}_{>0}$ die Funktion f_y konstant ist.

(b) Folgern Sie aus (a) die Funktionalgleichung für den natürlichen Logarithmus.

7. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = 2 + x^{\frac{2}{3}} \ .$$

(a) Bestimmen Sie die Menge aller Punkte x_0, in denen f differenzierbar ist, und geben Sie $f'(x_0)$ an.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitung die Intervalle, in denen die Funktion streng monoton fallend bzw. streng monoton wachsend ist.

(c) Bestimmen Sie das absolute Minimum der Funktion.

Skript (exemplarischer Auszug)

W. Hein

Vorlesungen über

Analysis

Teil I

Relle Zahlen und Zahlenfolgen, Differential- und Integralrechnung

Fachbereich Mathematik der
Universität Siegen

Wintersemester 2005/2006

Inhalt

Kapitel 3 Integralrechnung

Kapitel 1

Zahlen und Zahlenfolgen

„Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterrichte in der Differentialrechnung vom didaktischen Standpunkte aus für außerordentlich nützlich, ja unentbehrlich [...].“
[Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872]

1. Rationale Punkte auf der Zahlengeraden

1.1 Konstruktion der rationalen Punkte. Vorgegeben seien zwei verschiedene Punkte $O,\ E$. Unser Ziel ist es, sämtlichen Punkten der Verbindungsgeraden G von O und E Zahlen zuzuordnen. Die rationalen Zahlen setzen wir dabei als bekannt voraus. Im Vorgriff darauf bezeichnen wir G (zusammen mit O und E) als *Zahlengerade*. Die Strecke mit den Endpunkten O und E wird mit e bezeichnet.

Dem Punkt O wird die Zahl 0, dem Punkt E die Zahl 1 zugeordnet.

Die Punkte a derjenigen Halbgeraden, deren Anfangspunkt O ist und die den Punkt E enthält, heißen *'positiv*; wir schreiben dafür $a > 0$. Die übrigen von O verschiedenen Punkte heißen *negativ*. Mit $-a$ wird derjenige Punkt bezeichnet, den man durch Spiegelung von a am Nullpunkt erhält.

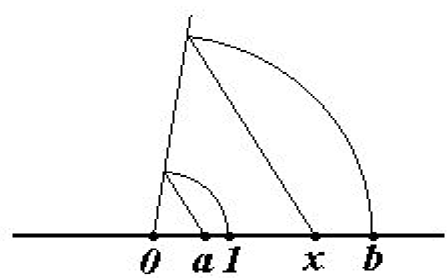
Für jede natürliche Zahl n wird auf der positiven Halbgeraden das n-fache von e abgetragen. Dem so konstruierten Punkt wird die Zahl n zugeordnet.

Indem man für positives n die Strecke e in n gleiche Teile teilt und einen dieser Teile auf der positiven Halbgeraden von O aus m-mal abträgt, erhält man den Punkt $m \cdot \frac{e}{n}$; diesem wird die rationale Zahl (der Bruch) $\frac{m}{n}$ zugeordnet.

Insgesamt haben wir damit allen rationalen Zahlen eindeutig bestimmte Punkte auf der Zahlengeraden zugeordnet, die wir auch als rationale Punkte bezeichnen. Wir werden daher im Folgenden nicht mehr zwischen rationalen Punkten und rationalen Zahlen unterscheiden.

Es erhebt sich sogleich die Frage, ob mit den rationalen Zahlen schon alle Punkte der Zahlengeraden belegt sind. Dass dies nicht der Fall ist, werden wir im Folgenden sehen. Dann stellt sich aber die weitere Frage, ob und ggf. wie man den Bereich der rationalen Zahlen so erweitern kann, dass *jedem* Punkt der Geraden eine eindeutig bestimmte Zahl entspricht; auch das werden wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels durchführen. Im Vorgriff darauf, und um eine bequeme Sprechweise zu haben, werden wir von jetzt an alle Punkte der Zahlengeraden als *reelle Zahlen* bezeichnen.

1.2 Addition und Multiplikation auf der Zahlengeraden. Wir können nun die Grundrechenarten der Addition und Multiplikation rationaler Zahlen durch rein elementargeometrische Konstruktionen auf der Zahlengeraden ausführen. Diese Konstruktionen können ganz allgemein für alle Punkte durchgeführt werden (wie das wohl als erster kein geringerer als René Descartes (1596–1650) und nach ihm z. B. David Hilbert (1862–1943) getan hat), wodurch die Rechenregeln der rationalen Zahlen auf alle Punkte der Zahlengeraden ausgeweitet werden. Wir nehmen dies als erste Rechtfertigung dafür, dass auch die nichtrationalen Punkte als *Zahlen* bezeichnet werden. Die Addition wird durch Abtragen mit dem Zirkel vorgenommen oder (besser) wie in der linken Abbildung angegeben. Die Konstruktion für die Multiplikation ist der rechten Abbildung zu entnehmen.



$x = a + b$ $\qquad\qquad$ $x = ab$

1.3 Grundgesetze der Addition und Multiplikation (Körperaxiome). Aufgrund dieser Definitionen kann man nun die üblichen Rechenregeln herleiten, womit wir uns aber nicht befassen wollen. Wir geben nur die wichtigsten Ergebnisse an. Wichtig zu wissen ist, dass man alle Rechengesetze, die nur Addition und Multiplikation betreffen, aus diesen ableiten kann:

Assoziativgesetze der Addition und Multiplikation:
$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a(bc) = (ab)c;$
Kommutativgesetze der Addition und Multiplikation:
$a + b = b + a, \quad ab = ba;$
Distributivgesetz: $a(b + c) = ab + ac;$

Existenz der neutralen Elemente: $0 + a = a, \quad 1a = a;$

Existenz der Inversen: $-a + a = 0, \quad a^{-1}a = 1 \ (a \neq 0).$

Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen (Addition und Multiplikation), die diesen Rechenregeln für alle $a, b, c \in K$ – den sogenannten **Körperaxiomen** – genügen, nennt man einen **Körper**. Die Punkte der Zahlengeraden, d. h. die reellen Zahlen, bilden also einen Körper, den wir mit $\mathbb{R}$ bezeichnen. Ebenso bilden die rationalen Punkte bzw. die rationalen Zahlen einen Körper, der die Bezeichnung $\mathbb{Q}$ erhält. Bei dieser Gelegenheit führen wir noch für die Menge der natürlichen Zahlen die Bezeichnung $\mathbb{N}$ ein, für die Menge der ganzen Zahlen die Bezeichnung $\mathbb{Z}$.

1.4 Grundgesetze der Anordnung (Anordnungsaxiome). Aus der eingangs getroffenen Definition der positiven Zahlen folgen unmittelbar die beiden **Anordnungsaxiome**

(1) Für jedes a gilt genau eine der drei Beziehungen

$$a > 0, \ a = 0, \ -a > 0.$$

(2) Ist $a > 0$ und $b > 0$ so gilt $a + b > 0$ und $ab > 0$.

Im folgenden schreiben wir zur Abkürzung $a > b$ für $a - b > 0$ und $a < b$ für $b > a$. Die Zeichen $\geq$ und $\leq$ sind in der offensichtlichen Weise zu verstehn. Aus den beiden **Anordnungsaxiomen** ergeben sich die üblichen Rechenregeln, z. B.

$a < b < c \Rightarrow a < c$

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$ für jedes c

$a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$

$a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$

$a^2 > 0$ für alle a, insbes. $1 > 0$

$a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0, \quad a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

$0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$

1.5 Rationale Zahlen und die Proportionenlehre im antiken Griechenland. Die Grundlagen unserer heutigen Mathematik als einer beweisenden Wissenschaft wurden im antiken Griechenland etwa zwischen dem 6. und 3. Jh. v. Chr. gelegt, beginnend mit Thales von Milet und Pythagoras von Samos im 6. Jh. Pythagoras versammelte eine Schar von Schülern um sich, die sich ausgiebig mit mathematischen Fragen befassten. Jedoch war die Mathematik kein Selbstzweck. Mathematische Untersuchungen sollten Licht in die noch weitgehend unbekannten Gesetze der irdischen und kosmischen Welt bringen. Verschiedene Erfahrungen und Spekulationen führten sie zu der Annahme, die natürlichen Zahlen – und nur diese – bildeten das Fundament, ja das Wesen des gesamten Kosmos; dessen Harmonie manifestiere sich in den Zahlenverhältnissen.

So ergab es sich fast mit zwingender Notwendigkeit, dass die Pythagoräer eine Proportionenlehre schufen, durch die Verhältnisse von Größen mannigfaltiger Art durch Verhältnisse von (natürlichen) Zahlen ausgedrückt werden konnten. Sind beispielsweise a und b zwei Strecken, Flächen oder andere vergleichbare Größen, so wird gesetzt

$$a : b = m : n \text{ genau dann, wenn } na = mb.$$

Diese Proportion kann man noch auf andere Art interpretiern: Setzen wir $c = \frac{b}{n}$ (d. h. c ist der n-te Teil von b), so gilt offensichtlich

$$b = nc \text{ und } a = mc.$$

Die Größen a und b haben also ein „gemeinsames Maß“, nämlich c; man sagt auch, sie seien *kommensurabel*. Umgekehrt folgt aus diesen beiden Gleichungen sofort die vorstehende Proportion. Wir sehen also: *Zwei Größen haben genau dann ein „rationales Verhältnis“, wenn sie kommensurabel sind. Andernfalls sind die Größen inkommensurabel, das Verhältnis ist irrational.*

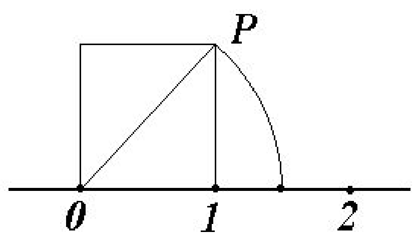
Dieser Begriff war ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, Größen miteinander zu vergleichen, „ins Verhältnis zu setzen“, und sie dadurch quantitativ zu erfassen. Dieses Hilfsmittel war besonders deshalb von großer Bedeutung, weil die Griechen den Begriff der rationalen Zahl nicht kannten. *Zahl ist Menge von Einheiten*, wie sie sagten, in unserer Redeweise also natürliche Zahl. Die Proportionenlehre war ein gleichwertiger Ersatz für rationale Zahlen – aber eben nur für diese.

Während also die frühen Pythagoräer glaubten, alle Verhältnisse seien rational, entdeckte man schon bald (vermutlich war Hippasos der erste), dass diese Theorie nicht aufrechtzuhalten war. Man erkannte, dass es Strecken gibt, die kein gemeinsames Maß haben. Für unsere Konstruktion bedeutet das, dass es Punkte auf der Zahlengeraden gibt, die nicht mit rationalen Zahlen belegt sind. Möglicherweise wurde diese Entdeckung am Verhältnis von Seite und Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks gemacht, möglicherweise aber auch am Verhältnis von Seite und Diagonale eines Quadrates. Da letzteres technisch einfacher zu behandeln ist, wollen wir diesen Fall für die Einführung irrationaler Zahlen im Folgenden genauer diskutieren.

2. Irrationale Punkte auf der Zahlengeraden

2.1 Irrationalität von $\sqrt{2}$. Wir hatten im vorigen Abschnitt u. a. die Frage gestellt, ob mit den rationalen Zahlen schon alle Punkte der Zahlengeraden belegt sind. Um diese Frage zu beantworten, beginnen wir mit dem Standardbeispiel einer reellen Zahl (d. h. eines Punktes auf der Zahlengeraden), die nicht rational ist. Solche Punkte oder Zahlen bezeichnen wir im Folgenden als *irrational* (das griechische Wort hierfür bedeutet so viel wie unaussprechbar).

Wir zeichnen über der Zahlengeraden ein Quadrat der Seitenlänge 1 (oder e) wie in der folgenden Abbildung angegeben und übertragen mit dem Zirkel den Punkt P auf die Zahlengerade.

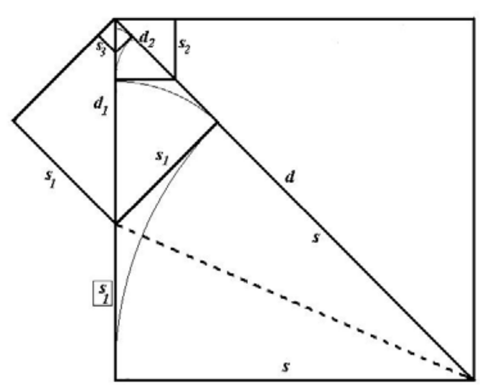


Da nach dem Pythagoräischen Lehrsatz das Quadrat über der Diagonale den Flächeninhalt $2e^2$ hat, haben wir auf der Zahlengeraden eine Strecke, deren Quadrat gleich 2 ist. Es ist naheliegend, dem so konstruierten Punkt die Zahl – oder, vorsichtiger ausgedrückt – die Bezeichnung $\sqrt{2}$ zuzuordnen. Wir beweisen:

Satz 1 *Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.*

Damit ist unsere Frage negativ beantwortet. Dieses Ergebnis ist einigermaßen überraschend wenn man sich klar macht, dass zwischen zwei rationalen Punkten a und b (es gilt allgemein für beliebige Punkte der Zahlengeraden) stets noch ein weiterer rationaler Punkt liegt (und folglich sogar unendlich viele), beispielsweise das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$.

Beweis Wir beginnen mit einem Quadrat der Seitenlänge s (für $s = e$ haben wir die Aussage des Satzes) und der Diagonale d. Wir konstruieren weitere Quadrate wie in der nebenstehenden Abbildung veranschaulicht.



Diese Konstruktion ist so beschaffen, dass folgende Beziehungen zwischen den Seiten $s = s_0, s_1, s_2, \ldots$ und den entsprechenden Diagonalen $d, d_1, d_2, \ldots$ gelten:

$$(1) \quad \begin{cases} d &= s_0 + s_1 \ , & s_1 < s_0 \\ s_0 &= 2s_1 + s_2 \ , & s_2 < s_1 \\ \ldots\ldots & & \\ s_k &= 2s_{k+1} + s_{k+2} \ , & s_{k+2} < s_{k+1} \\ \ldots\ldots & & \end{cases}$$

Anschaulich ist klar, dass $s_k \neq 0$ für alle k (mit vollständiger Induktion kann man aus den Gleichungen schließen, dass $s_k = s_0 \left(\frac{d}{s_0} - 1\right)^k$ für alle k). Anschaulich ist auch klar, dass die Quadratseiten mit wachsendem k „beliebig klein werden", genauer

($*$) *zu jeder „noch so kleinen" Strecke c gibt es eine natürliche Zahl k, so dass $s_k < c$.*

Um das zu beweisen, benötigen wir einige Hilfsmittel, die wir im nächsten Abschnitt bereitstellen und die uns auf natürliche Weise zum Begriff der konvergenten Zahlenfolge führen werden.

Wenn wir vorläufig ($*$) als richtig annehmen (der Beweis folgt in 32.1 Bemerkung 1), ist der Beweis von Satz 1 vollendet. Hätten nämlich $s = s_0$ und d ein gemeinsames Maß, nennen wir es e, so wäre nach den obigen Formeln jede Seite s_i ein Vielfaches von e, also $\geq e$. Das ist aber ein Widerspruch zur vorstehenden Annahme, dass es ein i gibt mit $s_i < e$.

2.2 Absolutbetrag. Bevor wir die bisherigen Überlegungen weiter entfalten, ist es zweckmäßig, den Begriff des **Absolutbetrages** einzuführen, oder, anschaulich gesprochen, der Länge oder des Maßes einer Strecke auf der Zahlengeraden, die durch 0 und einen beliebigen (auch negativen) Punkt a begrenzt wird. Dazu setzen wir

$$|a| = a, \text{ falls } a \geq 0, \ |a| = -a, \text{ falls } a < 0.$$

Es gilt also insbesondere $|a| \geq 0$ für alle a, $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ und $|-a| = |a|$ für alle a. Weitere wichtige Eigenschaften sind:

a) $|ab| = |a||b|$, b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$,

c) die sogenannte **Dreiecksungleichung**: $|a+b| \leq |a| + |b|$,

d) $|a+b| \geq |a| - |b|$, e) $|a-b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$.

3. Nullfolgen

3.1 Ein Satz von Euklid. Wir kommen zurück auf die Folge $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ der Quadratseiten aus dem vorigen Abschnitt. Die Konstruktion legt anschaulich nahe, dass die Glieder dieser Folge um so dichter bei 0 liegen, je größer der Index ist. Wie kann man diese (vermutete) Eigenschaft eines unendlichen Prozesses mit unseren endlichen Mitteln exakt begründen?

Dass unendliche Prozesse viele Überraschungen und Ungereimtheiten bereithalten, die auf die Entwicklung der Mathematik starken Einfluss ausgeübt haben, werden wir im weiteren Verlauf sehen. Hier ein erstes, besonders folgenreiches Beispiel, die Aporie (= scheinbarer Widerspruch) des Zenon von Elea (frühes 5. Jh. v. Chr.) von „Achilles und der Schildkröte“: Es ist selbst für den schnellsten Läufer (Achilles) nicht möglich, eine Schildkröte einzuholen, wenn ihr ein Vorsprung zugebilligt wird. Beweis: Jedesmal, wenn der Läufer die (voerherige) Position der Schildkröte erreicht hat, ist sie bereits ein Stück weitergelaufen.
Aus einem ähnlichen Grund wird ein fliegender Pfeil niemals sein Ziel erreichen können, da er zuerst die Hälfte der Distanz, danach die Hälfte der verbleibenden Distanz usw. zurücklegen muss.
Diese und andere (scheinbare) Widerspruche zur praktischen Erfahrung (die wir in Kürze aufzulösen hoffen) haben die griechischen Mathematiker, die stets auf Exaktheit bedacht waren, beunruhigt und dazu geführt, unendliche Prozesse zu vermeiden. Dennoch haben sie – vom heutigen Standpunkt aus betrachtet – die Grundlagen für unsere „Infinitesimal“- (d. h. „Unendlichkeits“-) Mathematik gelegt.

Die fundamentale Idee erblickte bereits in 5. oder 4. Jh. in Griechenland das Licht der Welt; niedergeschrieben finden wir sie in den Elementen Euklids, Buch X §1:

Satz 1 („Euklid X.1“) *Nimmt man bei Vorliegen zweier [vergleichbarer] Größen von der größeren mehr als die Hälfte weg und vom Rest wieder mehr als die Hälfte usf., so wird der Rest einmal kleiner als die kleinere der vorgegebenen Größen.*

Bemerkung 1 Bevor wir uns den Beweis ansehen, bemerken wir, dass diese Aussage für den Beweis von 2.1 $(*)$ wie geschaffen ist. Aus der Gleichung $s_k = 2s_{k+1} + s_{k+2}$ mit $s_{k+2} < s_{k+1}$ (vgl. (1) in Abschnitt 2.1, Seite 6) folgt nämlich: Nehmen wir von s_k die Strecke $2s_{k+1}$ weg, so ist der Rest s_{k+2} kleiner als $\frac{1}{2}s_k$, weil $s_k > 2s_{k+1} > 2s_{k+2}$. Beginnt man diesen Prozess mit $s = s_0$, so erhält man, dass jeder Rest mit geradem Index kleiner als die Hälfte des vorherigen Restes mit geradem Index ist. Nach dem Satz gibt es also zu jeder, „noch so kleinen“ Größe c eine Zahl N, so dass $s_{2N} < c$. Dann gilt natürlich auch $s_k < c$ für alle $k \geq 2N$. Wenn Satz 1 bewiesen ist, ist also auch unser obiges Problem erledigt.

3.2 Das Archimedische Axiom. Wenn man sich bei Euklid den Beweis von Satz 1 ansieht, stellt man man fest, dass (mehr oder weniger implizit) eine Voraussetzung gemacht wird, die explizit wohl erstmals von ARCHIMEDES (284/85–212 v. Chr.) in Form eines Axioms benutzt wurde und deshalb bis heute als

Archimedisches Axiom bezeichnet wird: *Zu jedem Punkt a auf der Zahlengeraden gibt es eine (natürliche) Zahl n, so dass $n > a$.*

Dass die hier ausgesprochene Eigenschaft der Zahlengeraden zukommt, ist anschaulich offensichtlich. Wir werden es als eine fundamentale Eigenschaft der reellen Zahlen von nun an grundsätzlich voraussetzen. Deshalb bezeichnen wir es auch ausdrücklich als Axiom im Sinne einer unbewiesenen Voraussetzung.

Nur auf den ersten Blick allgemeiner, in Wirklichkeit aber äquivalent zum Archimedischen Axiom ist die folgende Aussage, die wir sogleich im Beweis von Satz 1 benutzen:

Sind a, b Punkte auf der Zahlengeraden, $a > 0$, so gibt es eine (natürliche) Zahl n, so dass $na > b$.

Um nämlich aus dem Axiom diese Aussage zu schließen, wählt man zu a und b ein n, so dass $n > \frac{b}{a}$. Für die Umkehrung setzt man $a = 1$.

Beweis von Satz 1 Wir geben den Beweis von Euklid sinngemäß wieder und fassen ihn in unsere heutige Terminologie. Es seien dazu a und c gegeben, $a > c$, ferner $a_1 < \frac{1}{2}a$, $a_2 < \frac{1}{2}a_1$ usw. Wir wählen eine Zahl n, so dass $(n+1)c > a$ (hier geht also das Archimedische Axiom ein!). Behauptung: $a_n < c$. Im Fall $n = 1$, sind wir fertig. Sei $n \geq 2$. Dann folgt $nc = (n+1)c - c \geq \frac{1}{2}(n+1)c > \frac{1}{2}a > a_1$, also $ne > a_1$. Ebenso folgt $(n-1)c < a_2$ usw. bis schließlich $c = (n-(n-1))c < a_n$.

3.3 Nullfolgen. Wenn wir von unserer speziellen Situation und dem geometrischen Kontext bei Euklid absehen, und die Folge der Reste mit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ bezeichnen, liegt folgende Formulierung nahe. Dabei ist zu beachten, dass wir es bisher nur mit positiven Größen zu tun hatten, was wir dadurch kompensieren, dass wir ggf. zum Betrag übergehen.

Definition a) Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißt *Nullfolge*, wenn es zu jedem ε ein N gibt, so dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

b) Ist eine Nullfolge gegeben, so sagen wir, die Folge *konvergiert gegen* 0 und nennen

0 den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge, in Zeichen

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

c) Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißt *konvergent gegen* a, wenn die Folge $a_1 - a,\ a_2 - a,\ a_3 - a,\ \ldots$ eine Nullfolge ist; symbolisch ausgedrückt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \;\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty}(a_k - a) = 0.$$

(Für genauere Erläuterungen zum Konvergenzbegriff vgl. Abschnitt 7.)

Aus der Annahme des Archimedisches Axioms erhalten wir sofort eine Nullfolge, die wir wegen ihrer großen Bedeutung in einem Satz präsentieren:

Satz 2 Die Folge $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ ist eine Nullfolge.

Beweis Aus dem Archimedischen Axiom folgt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist $n > \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \geq N$, folglich $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. (Dass auch die Umkehrung gilt, sieht man genau so.)

Wir können jetzt Satz 1 so umformulieren: *Nimmt man von einer Größe mehr als die Hälfte weg und vom Rest wieder mehr als die Hälfte usf., so bilden die Reste eine Nullfolge.* Eine Verallgemeinerung dieser Aussage werden wir in 4 Satz 2 beweisen.

Bevor wir im nächsten Abschnitt genauer auf konvergente Folgen eingehen (3.7), geben wir einige unverzichtbare Regeln für das Rechnen mit Nullfolgen.

Satz 3 *Sind* (a_n) *und* (b_n) *Nullfolgen, so gilt*
a) *Summenfolge* $(a_n + b_n)$ *und Differenzenfolge* $(a_n - b_n)$ *sind Nullfolgen;*
b) *ist* (c_n) *eine beschränkte Folge, d. h. es gibt* $s \in \mathbb{R}$ *mit* $|a_n| \leq t$ *für alle* n, *so ist auch die Folge* $(c_n a_n)$ *eine Nullfolge; insbesondere gilt:*
c) *Produktfolge* $(a_n b_n)$ *und* $(c \cdot a_n)$ *sind Nullfolgen.*

Beweis Zu a) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da (a_n) und (b_n) Nullfolgen sind, gibt es natürliche Zahlen N_1, N_2 mit $|a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N_1$ und $|b_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N_2$. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann $|a_n \pm b_n| < |a_n| + |b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq \max\{N_1, N_2\}$.
Zu b) Zu gegebebem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{1}{t}\varepsilon$ für alle $n \geq N$, folglich $|c_n a_n| = |c_n||a_n| < t|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
c) folgt aus b), weil Nullfolgen beschränkt sind und die konstante Folge (c) ebenfalls beschränkt ist.

3.4 Eine Anwendung von „Euklid X.1". Um die Bedeutung des oben schon als grundlegend erkannten und erfolgreich angewandten Satzes 1 noch besser zu verstehen, geben wir ein Beispiel, das uns einerseits schon in die Integralrechnung führt, andererseits aber auf eine weitere irrationale Zahl, nämlich die „mysteriöse" Kreiszahl π. Außerdem wird an diesem Beispiel deutlich, wie in den Anfängen der beweisenden Mathematik infinitesimale Methoden mit viel Geschick vermieden wurden.

Wie wir wissen, ist der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r gleich $r^2\pi$. Unabhängig von π kann man diese Aussage so formulieren, wie die Griechen es getan haben und wie wir es in XII.2 der Elemente Euklids finden:

Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über ihren Durchmessern.

Sind also K_1 und K_2 die Flächeninhalte zweier Kreise mit den Radien r_1 bzw. r_2, so soll gezeigt werden, dass

$$K_1 : K_2 = r_1^2 : r_2^2 \ .$$

Nimmt man beispielsweise für K_2 den Kreis E mit Radius $r_2 = 1$ (Einheitskreis), so kann man dies auch so formulieren:

Satz 4 *Für den Flächeninhalt eines (beliebigen) Kreises K mit Radius r gilt*

$$K = Er^2,$$

wobei E den Flächeninhalt des Einheitskreises bezeichnet. Insbesondere ist jede Kreisfläche proportional zum Quadrat ihres Radius mit einem konstantem (vom Radius unabhängigen) Proportionalitätsfaktor, der gleich dem Flächeninhalt des Einheitskreises ist; er wird mit π bezeichnet.

Der *Beweis* benutzt die Voraussetzung, dass der Satz gilt für in Kreise einbeschriebene ähnliche Vielecke anstelle der Kreise. Dies wird bei Euklid in XII.1 bewiesen. Das folgende Verfahren wird heute meistens als *Exhaustionsmethode* bezeichnet (von lat. exhaurire = aus- oder herausschöpfen). Der Beweis verläuft indirekt: Angenommen, $K_1 : K_2 \neq r_1^2 : r_2^2$. Wähle eine Fläche F, so dass $F : K_2 = r_1^2 : r_2^2$. Dann ist entweder (1) $F < K_1$ oder (2) $F > K_1$. Wir zeigen, dass (1) zu einem Widerspruch führt. Ein analoger Schluss, den wir hier nicht ausführen, ergibt auch im Fall (2) einen Widerspruch.

Im ersten Schritt wird dem Kreis K_1 ein Quadrat einbeschrieben. Dessen Fläche P_1 wird aus der Kreisfläche K_1 „herausgeschöpft". Für die Restfläche $K_1 - P_1$ gilt dann, wie man leicht sieht,[1] $K_1 - P_1 < \frac{1}{2}K_1$.

Im zweiten Schritt wird zwischen Kreis und Quadrat durch Verdoppelung der Eckenzahl ein regelmäßiges Achteck P_2 einbeschrieben. Nimmt man dessen Fläche von der Kreisfläche weg, so bleibt als Rest $K_1 - P_2$, und man überzeugt sich davon, dass $K_1 - P_2 < \frac{1}{2}(K_1 - P_1)$. Wir denken uns dieses Verfahren Schritt für Schritt mit einem 16-Eck, 32-Eck usw. fortgesetzt, indem man die Eckenzahl des zuletzt konstruierten Vielecks verdoppelt. Auf diese Weise entsteht eine Folge von Vielecken $P_m,\ m = 1, 2, 3, \ldots$ (mit 2^{m+1} Ecken). Nehmen wir diese aus dem Kreis heraus, so erhalten wir die Folge der Restflächen $K_1 - P_m,\ m = 1, 2, 3, \ldots$, für die gilt:[2]

$$K_1 - P_m < \frac{1}{2}(K_1 - P_{m-1}), \quad m = 1, 2, 3, \ldots \quad (\text{mit } P_0 = 0).$$

Dies ist der Punkt, in dem wir Satz 1 ansetzen können. Nach diesem Satz gibt es nämlich zu jeder positiven Größe, also auch zu $K_1 - F$, eine natürliche Zahl n derart, dass $K_1 - P_n < K_1 - F$, was gleichbedeutend ist mit

$$P_n > F.$$

Es folgt $P_n : Q_n > F : Q_n$. Wegen $Q_n < K_2$ gilt weiter $F : Q_n > F : K_2$, und mit $F : K_2 = r_1^2 : r_2^2$ insgesamt also $P_n : Q_n > r_1^2 : r_2^2$. Damit haben wir (im Fall (1)) einen Widerspruch zu der oben genannten Voraussetzung (Euklid XII.1) hergeleitet, dass nämlich $P_n : Q_n = r_1^2 : r_2^2$. Folglich ist der Fall (1) unmöglich. Wenn wir auch noch im Fall (2) einen Widerspruch herleiten (was wir, wie oben gesagt, hier nicht durchführen), so ist gezeigt, dass auch dieser Fall nicht eintreten kann, womit insgesamt die eingangs gemachte Annahme $K_1 : K_2 \neq r_1^2 : r_2^2$ *ad absurdum* geführt und somit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung 2 Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass bei diesem Beweis kein Grenzübergang für n gegen Unendlich gemacht wird. Typisch ist stattdessen der

[1] Das dem Kreis K_1 umschriebene Quadrat ist gleich $2P_1$, also $K_1 < 2P_1$, folglich $2K_1 < 2P_1 + K_1$.

[2] Induktionsschluss: Ist S der Kreisabschnitt über einer Seite von P_m, R das diesem Abschnitt umschriebene Rechteck und D das Dreieck, das durch P_{m+1} über dieser Seite gebildet wird, so gilt $S < R = 2D$, also $2S < 2D + S$, folglich $S - D < \frac{1}{2}S$. Führt man dies für alle Seiten von P_m durch, ergibt sich sofort die Behauptung für P_{m+1}.

zweifache Widerspruchsbeweis innerhalb des indirekten Beweises; die Methode bleibt vollständig im Endlichen. In analoger Weise, aber ohne eine einheitliche Methode in der Durchführung gefunden zu haben, sind – wie wir später noch genauer sehen werden – seit der Antike (besonders von Archimedes) zahlreiche Sätze über „krummlinig“ begrenzte Figuren bewiesen worden. Eine einheitliche Methode ist erst im 17. Jh. durch die Integral- und Differentialrechnung geschaffen worden, nachdem man die Angst der Griechen vor infinitesimalen Schlüssen überwunden hatte – und das war alles andere als ein leichter Erkenntnisprozess!

Bemerkung 3 Es ist nach dem oben durchgeführten Exhaustionsverfahren naheliegend, den Flächeninhalt oder den Umfang eines Kreises und damit die Zahl π direkt durch die Flächeninhalte bzw. Umfänge der einbeschriebenen regelmäßigen Vielecke näherungsweise zu berechnen. Archimedes hat das für den Umfang tatsächlich durchgeführt, beginnend mit einem Sechseck (anstelle eines Quadrates) und durch Verdoppeln der Eckenzahl bis zum 96-Eck. Außerdem hat er die Umfänge der entsprechenden umbeschriebenen Vielecke berechnet und erhielt die Schranken $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

3.5 Der Euklidische Algorithmus. Das in Abschnitt 2 benutzte Divisionsverfahren zum Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist nicht an dieses Problem gebunden, stellt vielmehr ein allgemeines und effektives Verfahren dar, die Inkommensurabilität von Größen (und damit die Irrationalität von reellen Zahlen) zu überprüfen. Genau aus diesem Grund haben die Griechen das Verfahren schon früh entwickelt. Es findet sich in den Elementen Euklids, Buch X.3 als Folgerung aus dem von uns sogenannten Archimedischen Axiom. Es gilt nämlich

Satz 5 (Euklidischer Algorithmus) a) *Sind $a > b > 0$ reelle Zahlen, so gibt es natürliche Zahlen n_i und reelle Zahlen r_i, so dass*

$$\begin{aligned} a &= n_1 b + r_1 \ , && 0 \le r_1 < b \\ b &= n_2 r_1 + r_2 \ , && 0 \le r_2 < r_1 \\ r_1 &= n_3 r_2 + r_3 \ , && 0 \le r_3 < r_2 \\ r_2 &= n_4 r_3 + r_4 \ , && 0 \le r_4 < r_3 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

b) *Falls es ein k gibt mit $r_k = 0$, so ist $\frac{a}{b}$ rational. Der letzte von 0 verschiedene Rest ist dann ein gemeinsames Maß von a und b.*

c) *Falls $r_k \neq 0$ für alle k, so ist $\frac{a}{b}$ irrational.*

Aus der Schule kennt man den Euklidischen Algorithmus als Methode zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von zwei natürlichen Zahlen a und b. Man findet diesen als den letzten von 0 verschiedenen Rest. Da hierbei die Reste ebenfalls natürliche Zahlen sind, muss das Verfahren abbrechen. Beispiel: $13 = 2 \cdot 5 + 3,\ 5 = 1 \cdot 3 + 2,\ 3 = 1 \cdot 2 + 1,\ 2 = 2 \cdot 1 + 0$. Für irrationale Zahlen ist das, wie der Satz sagt, nicht der Fall. Wir demonstrieren das am

Beispiel $a = \sqrt{2}$, $b = 1$. Zunächst beweist man die folgende Gleichung durch vollständige Induktion:

$$(\sqrt{2}-1)^n = 2(\sqrt{2}-1)^{n+1} + (\sqrt{2}-1)^{n+2}.$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1 \cdot 1 + r_1\ , &\quad 0 \leq r_1 := \sqrt{2} - 1 < 1 \\
1 &= 2r_1 + r_2\ , &\quad 0 \leq r_2 := (\sqrt{2}-1)^2 < r_1 \\
r_1 &= 2r_2 + r_3\ , &\quad 0 \leq r_3 := (\sqrt{2}-1)^3 < r_2 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wenn man in den obigen Gleichungen die Reste durch Einsetzen eliminiert, erhält man einen *Kettenbruch* für $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b} = n_1 + \frac{r_1}{b} = n_1 + \frac{1}{b/r_1} = n_1 + \frac{1}{n_2 + r_2/r_1} = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{r_1/r_2}} \ldots =$$

$$= n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\ldots}}}$$

Nach Satz 5 ist die Kettenbruchentwicklung genau dann endlich (bricht nach endlich vielen Schritten ab), wenn $\frac{a}{b}$ eine rationale Zahl ist.

Beispiel:

$$\frac{13}{5} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} \qquad\qquad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ldots}}}$$

4. Die geometrische Reihe

Wir beginnen mit einer Frage: Kann man aus den Umformungen

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = \dots,$$

wenn man sie sich ins Unendliche fortgesetzt denkt, auf die Richtigkeit der „Gleichung“

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

schließen? Oder anders gefragt: Kann die „Summe“

$$q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^k + \cdots$$

(ins Unendliche fortgesetzt) für $q > 0$ einen endlichen Wert haben? Muss es nicht vielmehr so sein, dass durch Summation unendlich vieler positiver Zahlen die Summe über jede Grenze wächst?

Dies hat offensichtlich mit der früher erwähnten Antinomie des Zenon von Achilles und der Schildkröte zu tun, und die Griechen (unter ihnen sogar das Genie Archimedes) haben sich in der Tat so schwer damit getan, dass sie, wie schon erwähnt, solche Absonderlichkeiten gemieden haben. Hat man aber erst einmal den Begriff des Grenzwertes einer Folge in trockenen Tüchern, so ist es eigentlich naheliegend, folgendes zu vereinbaren:

Definition 1 Es sei $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge (s_n) der (endlichen) Summen $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ nennen wir eine *unendliche Reihe* und schreiben abkürzend $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$. Das n-te Folgenglied $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ wird als n-te *Partialsumme* der Reihe bezeichnet. Ist die Folge (s_n) konvergent mit Grenzwert S, so heißt S der *Wert* oder auch die *Summe* der Reihe, und man schreibt in diesem Fall $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$.

Was bedeutet dies für das obige Beispiel? Die n-te Partialsumme ist

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

(Die Gleichheit rechts ist durch vollständige Induktion zu beweisen.) Diese Folge konvergiert nun tatsächlich gegen 1, weil $1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$ eine Nullfolge ist, wie wir unten allgemeiner beweisen werden. Also ist der Wert der unendlichen Reihe in der Tat, wie oben vermutet, gleich 1 – obwohl, anschaulich gesprochen, unendlich viele positive Zahlen aufsummiert werden.

Wir können diesen Sachverhalt nun leicht verallgemeinern, indem wir anstelle von $\frac{1}{2}$ ein beliebiges q mit der Bedingung $|q| < 1$ zulassen.

Satz 1 *Die „geometrische Reihe“* $1+q+q^2+q^3+q^4+\cdots+q^k+\cdots$ *ist genau dann konvergent, wenn* $|q| < 1$ *gilt; in diesem Fall ist*

$$1+q+q^2+q^3+q^4+\cdots+q^k+\cdots = \frac{1}{1-q}.$$

Bemerkung 1 Der Name „geometrische Reihe“ kommt daher, dass die Summanden $1, q, q^2, q^3 \cdots$ eine „geometrische Folge“ bilden, also eine Folge, bei denen der Quotient

________ zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant); anders ausgedrückt: jedes Glied ist das „geometrische Mittel“ der beiden benachbarten Folgenglieder.

Bemerkung 2 Um die Konvergenz einer Reihe (oder einer Folge) zu beweisen, muss nach unserer Definition der Grenzwert bekannt sein, oder man muss zumindest eine Vermutung haben, die man dann zu beweisen versucht. Bei der geometrischen Reihe bietet sich dafür die folgende Überlegung an: Nehmen wir an, die Reihe konvergiere und es gelte $1+q+q^2+q^3+\cdots = A$. Multiplikation beider Seiten mit $1-q$ ergibt $(1-q)+(q-q^2)+(q^2-q^3)+\cdots = A(1-q)$. Durch Umklammern erhält man auf der linken Seite 1, also $1 = A(1-q)$, und hieraus, wie oben behauptet, $A = \frac{1}{1-q}$. Dies liefert aber, darauf sei ausdrücklich hingewiesen, nur eine Vermutung, denn ob die linke Seite wirklich gleich 1 ist, ist durch nichts bewiesen. In anderen Zusammenhängen führen solche oder ähnliche Schlüsse zu völlig absurden Ergebnissen.
Ein Beispiel, das für viel Aufregung sorgte, als man noch keinen genauen Konvergenzbegriff hatte, ist die Reihe

$$1-1+1-1+1-1\pm\ \cdots.$$

Durch verschiedene Klammerungen erhält man als „Summe“ 0 oder 1. Die Reihe ist aber nicht konvergent, da die Folge der Partialsummen $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ natürlich nicht konvergent ist.

Beweis von Satz 1 Für $q = 1$ erhalten wir die Reihe $1+1+1+1+\cdots$, die offenbar nicht konvergiert. Für $q = -1$ haben wir das (nicht konvergente) obige Beispiel. (Die

rechte Seite ergäbe übrigens weder 0 noch 1, sondern $\frac{1}{2}$.) Für $|q| > 1$ ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und deshalb, was wir später beweisen werden, nicht konvergent.
Zum Beweis der Konvergenz im Fall $|q| < 1$ setzen wir die Summenformel für endliche geometrische Reihen voraus (Beweis als Übung zur vollständigen Induktion):

Hilfssatz *Für eine endliche geometrische Reihe gilt, wenn q eine beliebige(!) reelle Zahl und n eine beliebige natürliche Zahl k bedeutet, die Summenformel*

$$(*) \qquad 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \; .$$

Nun gilt

$$\frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}\, q^n.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass q^n für $|q| < 1$ eine Nullfolge ist (wegen einer später allgemeiner zu beweisenden Grenzwertregel ist dann auch $\frac{1}{1-q}\, q^n$ eine Nullfolge). Wir beweisen deshalb den

Satz 2 *Für $|q| < 1$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Zusatz: *Für $q = 1$ konvergiert die Folge gegen 1, für $q = -1$ und $|q| > 1$ ist die Folge nicht konvergent*

Beweis Für $q = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei $|q| < 1, q \neq 0$. Wir setzen $x = \frac{1}{|q|}$ und wenden $(*)$ an mit x anstelle von q: Wegen $x > 1$ ist jeder Summand der linken Seite ≥ 1, die Summe also $\geq n$, mithin $\frac{1-x^n}{1-x} \geq n$. Es folgt

$$x^n \geq n(x-1).$$

Sie nun $\varepsilon > 0$ eine beliebige positive Zahl. Nach dem Archimedischen Axiom können wir n so wählen, dass $n > \frac{1}{\varepsilon(x-1)}$, d. h. $n(x-1) > \frac{1}{\varepsilon}$, also auch $x^n > \frac{1}{\varepsilon}$ und folglich $|q^n| < \varepsilon$.

5. Rationale Zahlen und periodische Dezimalbrüche

Jede rationale Zahl $\dfrac{m}{n}$ kann man bekanntlich als Dezimalbruch schreiben. Die folgende Methode, bei der wir uns auf den Fall $m < n$ beschränken, entspricht vollständig dem gewöhnlichen Divisionsalgorithmus.

$$10m = a_1 n + r_1 \quad (0 \le a_1 < 10,\ 0 \le r_1 < n) \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10n}\ ,$$

$$10r_1 = a_2 n + r_2 \quad (0 \le a_2 < 10,\ 0 \le r_2 < n) \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{r_2}{100n}\ ,$$

usw.

$$\begin{aligned} 10r_{k-1} &= a_k n + r_k \quad (0 \le a_k < 10,\ 0 \le r_k < n) \\ \Rightarrow \quad \frac{m}{n} &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}\frac{r_k}{n} \\ &= 0{,}a_1 a_2 a_3 \dots a_k + \frac{1}{10^k}\frac{r_k}{n}\ . \end{aligned}$$

Falls ein Rest gleich null ist, etwa $r_k = 0$, so bricht die Entwicklung ab und wir haben für $\frac{m}{n}$ eine **endliche Dezimalbruchentwicklung** $\dfrac{m}{n} = 0{,}a_1a_2a_3\dots a_k$.

Andernfalls erhalten wir eine unendliche Reihe

$$0{,}a_1a_2a_3\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}\ .$$

Aufgrund der Konstruktion wird man erwarten, dass diese Reihe gegen $\dfrac{m}{n}$ konvergiert, d. h. dass die Folge

$$t_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

der Partialsummen gegen $\dfrac{m}{n}$ konvergiert, symbolisch ausgedrückt:

$$(*) \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \frac{m}{n}\ , \quad \text{d. h.} \quad \lim_{k\to\infty} \left(\frac{m}{n} - t_k\right) = 0.$$

Das ist leicht einzusehen. Aus dem Vorangehenden wissen wir, dass für alle k

$$0 < \frac{m}{n} - t_k = \frac{1}{10^k}\frac{r_k}{n} < \frac{1}{10^k},$$

(die rechte Ungleichung wegen $r_k < n$) und dass $\dfrac{1}{10^k}$ eine Nullfolge ist, woraus die Richtigkeit von $(*)$ folgt.

Wichtig ist nun noch eine Besonderheit des Divisionsalgorithmus, die wir bis jetzt noch nicht beachtet haben: Wegen $0 \leq r_k < n$ für alle k, sind nur n verschiedene Reste möglich. Folglich wiederholt sich spätestens nach n Schritten ein schon früher aufgetretener Rest. Das hat zur Folge, dass sich die Rechnung von da an wiederholt. Damit haben wir den ersten Teil des folgenden Satzes bewiesen:

Satz *Jede rationale Zahl hat eine (endliche oder) periodische Dezimalbruchentwicklung, und jede periodische Dezimalbruchentwicklung konvergiert gegen eine rationale Zahl*

Den zweiten Teil verdeutlichen wir an einem Beispiel, an dem hinreichend klar werden dürfte, wie der allgemeine Beweis zu führen ist:

$$\begin{aligned} 0,7424242\cdots &= 0.7 + \frac{42}{10^3} + \frac{42}{10^5} + \ \cdots = 0.7 + \frac{42}{10^3}(1 + \frac{1}{10^2} + \ \cdots) \\ &= 0.7 + \frac{42}{10^3}\ \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = 0.7 + \frac{42}{990} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Es wäre noch zu klären, ob verschiedene periodische Dezimalbruchentwicklungen die gleiche rationale Zahl darstellen können, m. a. W. ob verschiedene periodische Dezimalbruchentwicklungen den gleichen Grenzwert haben können.

Man kann beweisen, dass das nicht der Fall ist, dass man also wirklich von *der* Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl sprechen kann – ausgenommen den Fall der Periode 9: Analog zum vorstehenden Beispiel kann man nämlich zeigen:

$$0, a_1 \cdots a_k 999 \cdots = 0, a_1 \cdots (a_k + 1),$$

insbesondere also 0,999... = 1.

6. Irrationale Zahlen und nichtperiodische Dezimalbrüche

6.1 Intervallschachtelungen. Wie verhält es sich nun mit nicht-periodischen Dezimalbrüchen? Dass es solche gibt, erkennt man an dem Beispiel $0,101001000100001\cdots$, wobei die Anzahl der Nullen zwischen zwei Einsen jeweils um 1 vermehrt wird. Hat die zugehörige unendliche Reihe einen Grenzwert? Wenn ja, welchen? Wie steht es also – allgemein formuliert – mit der Konvergenz einer unendlichen Reihe der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k},$$

wobei (a_k) eine beliebige Folge natürlicher Zahlen ist mit $0 \leq a_k < 10$ für alle k?

Anders gefragt: Können wir jedem – auch den nichtrationalen – Punkten der Zahlengeraden einen (notw. nichtperiodischen) Dezimalbruch zuordnen? Wir beschränken uns zunächst auf Punkte, die zwischen 0 und 1 liegen; für den allgemeinen Fall s. u.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $[a, b[$ das *rechts offene* Intervall aller Punkte zwischen a und b einschließlich a aber ohne b (entspechend ist das *offene* $]a, b[$, das *links offene* $]a, b]$ und das *abgeschlossene Intervall* $[a, b]$ definiert).

Es sei also $a \in [0, 1[$. Wir zerlegen $[0, 1[$ in 10 gleichlange disjunkte Teilintervalle der Länge $\frac{1}{10}$:

$$\left[0\,, \frac{1}{10}\right[, \quad \left[\frac{1}{10}\,, \frac{2}{10}\right[, \quad \left[\frac{2}{10}\,, \frac{3}{10}\right[, \;\ldots,\; \left[\frac{9}{10}\,, 1\right[\;.$$

Der Punkt a muss in genau einem dieser Teilintervalle liegen, d. h. es gibt genau ein a_1, so dass

$$\frac{a_1}{10} \;\leq\; a \;<\; \frac{a_1 + 1}{10}\;, \quad 0 \leq a_1 < 9.$$

Dieses Intervall, also $[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}[$, wird in zehn gleichlange Teilintervalle der Länge $\frac{1}{100}$ zerlegt:

$$\left[\frac{a_1}{10}\,, \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2}\right[, \quad \left[\frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2}\,, \frac{a_1}{10} + \frac{2}{10^2}\right[, \quad \left[\frac{a_1}{10} + \frac{2}{10^2}\,, \frac{a_1}{10} + \frac{3}{10^2}\right[\;,$$

$$\ldots,\; \left[\frac{a_1}{10} + \frac{9}{10^2}\,, \frac{a_1 + 1}{10}\right[\;.$$

Von diesen enthält wieder genau eines, etwa $\left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\,, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}\right[$, unser a, so dass also

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \;\leq\; a \;<\; \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}\;, \quad 0 \leq a_2 < 9.$$ 146

In dieser Weise fortfahrend erhalten wir eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} \ \leq \ a \ < \ \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \ ,$$

oder in Dezimalbruchschreibweise

$$0, a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k \ \leq \ a \ < \ 0, a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_k + 1) \ .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$s_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_k}{10^k}, \quad t_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k},$$

so erkennen wir am obigen Verfahren der Intervallteilung:

1. Die Folge (s_k) ist monoton wachsend,

2. die Folge (t_k) ist monoton fallend,

3. $\lim\limits_{k\to\infty}(t_k - s_k) = 0$.

Definition 1 Eine Folge von „ineinandergeschachtelten“ Intervallen

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots$$

der Zahlengeraden heißt *Intervallschachtelung*, wenn die Länge der Intervalle eine Nullfolge bildet.

Da bei einer Intervallschachtelung die Intervallängen also gegen 0 konvergieren, ist es plausibel, dass es **höchstens** einen Punkt (eine reelle Zahl) gibt, die in allen Intervallen enthalten ist. Wir beweisen das sogleich allgemeiner in

Satz 1. a) *Ist $I_k = [s_k, t_k]$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und gilt $s \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} t_k = s.$$

b) *Ist u_k eine Folge mit $u_k \in I_k$, also $s_k \leq u_k \leq t_k$ für alle k, so gilt auch*

$$\lim_{k\to\infty} u_k = s.$$

Beweis Da $s - s_k, t_k - s_k, t_k - s \geq 0$ und $s - s_k = (t_k - s_k) - (t_k - s) \leq t_k - s_k$, folgt $|s - s_k| \leq |t_k - s_k|$. Da $t_k - s_k$ nach Voraussetzung eine Nullfolge ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N, so dass $|t_k - s_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. Dann ist aber auch $|s - s_k| < \varepsilon$

für alle $k \geq N$. Folglich ist $s - s_k$ eine Nullfolge, d. h. $\lim_{k\to\infty} s_k = s$. Analog zeigt man $\lim_{k\to\infty} t_k = s$. Ersetzt man in den obigen Ungleichungen s durck u_k, so erhält man $|u_k - s_k| \leq |t_k - s_k|$, woraus wie oben folgt, dass $u_k - s_k$ eine Nullfolge ist. Eine Grenzwertregel, die weiter unten folgt, ergibt dann $\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} s_k = s$.

Nach Teil a) des Satzes gibt es also höchstens eine Zahl, die in allen Intervallen einer Intervallschachtelung enthalten ist. Sie wird (falls es eine gibt) **Schnittzahl** dieser Intervallschachtelung genannt.

Die oben konstruierten Intervalle $I_k = [s_k, t_k]$ bilden wegen 1. bis 3. offensichtlich eine Intervallschachtelung, und wegen

$$a \in I_k \ \ \underline{\text{und}} \ \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \in I_k \ \ \text{für alle} \ \ k$$

folgt aus Satz 1 a)

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \ .$$

Folgerung *Jede reelle Zahl (jeder Punkt der Zahlengeraden) ist Grenzwert einer Folge <u>rationaler</u> Zahlen.*

Ist nämlich wie oben $a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, so ist a Grenzwert der Folge

$$0\ , \quad 0, a_1\ , \quad 0, a_1 a_2\ , \quad 0, a_1 a_2 a_3\ , \ \ldots \ .$$

Bemerkung 1 Wir haben oben der Einfachheit halber $0 \leq a < 1$ vorausgesetzt. Wir können diese Einschränkung leicht beseitigen, indem wir für einen beliebigen Punkt b auf dem positiven Zahlenstrahl die größte natürliche Zahl n links von b wählen (dafür brauchen wir das Archimedische Axiom!) und $a = b - n$ setzen. Dann gilt also $0 \leq a < 1$, und wenn wie oben $a = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \cdots$ ist, so setzen wir $b = n, a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \cdots$. Liegt b auf dem negativen Zahlenstrahl, so wird $b = -n, a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \cdots$ gesetzt.

Beispiel Wie gestaltet sich das obige Verfahren der Zehnerschachtelung für den (schon früher als irrational erkannten) Punkt, den wir mit $\sqrt{2}$ bezeichnet haben? Es gilt $1^2 < 2 < 2^2$, folglich $\sqrt{2} \in [1, 2[$. Wir teilen dieses Intervall in 10 gleiche Teile durch die (rationalen) Teilpunkte $1,1$, … , $1,9$. In welchem dieser Teilintervalle liegt nun $\sqrt{2}$? Eine Rechnung ergibt $1,1^2 < 2$, $1,2^2 < 2$, $1,3^2 < 2$, $1,4^2 < 2$, $1,5^2 > 2$, folglich $\sqrt{2} \in [1,4\ , 1,5[$. So fortfahrend findet man, jedenfalls im Prinzip, die Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$. Es gibt aber Methoden, die sehr viel schneller zum Ziel führen.

Bemerkung 2 Es sei noch darauf hingewiesen, dass es sich bei der oben konstruierten Intervallschachtelung um einen relativ speziellen Typ handelt, nämlich um eine sogenannte *Zehnerschachtelung.* Erstens sind nämlich die Intervallgrenzen s_k und t_k ganzzahlige Vielfache von 10^{-k} (insbesondere also rationale Zahlen!), zweitens sind die Längen der Intervalle Potenzen von $\frac{1}{10}$.

6.2 Das Vollständigkeitsaxion. Jede Intervallschachtelung besitzt nach dem Vorangehenden <u>höchstens</u> eine Schnittzahl. Frage: Besitzt jede Intervallschachtelung <u>mindestens</u> eine – und damit genau eine – Schnittzahl? Das möchten wir doch annehmen, aber – beweisen kann man es nicht! Wir kommen daher zum letzten Axiom der reellen Zahlen, dem sogenannten

Vollständigkeitsaxiom: *Jede Intervallschachtelung auf* $\mathbb{R}$ *besitzt eine Schnittzahl.*

Zusammenfassend können wir jetzt sagen: **Die reellen Zahlen bilden einen vollständigen und Archimedisch angeordneten Körper.**

Bemerkung 3 **Der Körper der rationalen Zahlen ist nicht vollständig.** Im obigen Beispiel haben wir den Anfang einer Zehnerschachtelung $I_1, I_2, , \ldots$ mit der Schnittzahl $\sqrt{2}$ konstruiert. Wenn man an Stelle der Intervalle I_k die Intervalle $I_k' = I_k \cap \mathbb{Q}$ betrachtet, so bilden diese eine Intervallschachtelung auf der Menge $\mathbb{Q}$, die keine rationale Schnittzahl besitzt.

6.3 Über die Anfänge der Dezimalbruchschreibweise. Das dezimale Stellenwertsystem für ganze Zahlen ist eine Schöpfung indischer Mathematiker und lag – nach einer langen Entwicklungsphase – spätestens im 6. Jh. n. Chr. in vollständiger Form vor. Über Italien und Spanien ist es durch Vermittlung der Araber ins Abendland gelangt. Vorangegangen ist das dreitausend Jahre ältere sexagesimale Stellenwertsystem (Grundzahl 60 statt 10) aus dem Zweistromland Mesopotamien (jetzt Irak), das bei uns noch heute in der Stunden- und Winkelteilung erhalten ist. Auf Dezimalbrüche wurde das indische Positionssystem erst allmählich und in verschiedenerlei Bezeichnungsweisen ausgeweitet.

Einen entscheidenden Anstoß dazu gab (nach Vorarbeiten anderer, die jedoch keine Breitenwirkungen hatten) eine kleine Schrift des Mathematikers Simon Stevin (1548–1620) aus Brügge mit dem Titel *De Thiende - welche lehrt, mit unerhörter Leichtigkeit alle Rechnungen, die unter den Menschen nötig werden, durch ganze Zahlen ohne Brüche zu erledigen.* Anstelle unseres Dezimalkommas setzte Stevin

einen kleinen Kreis mit einer 0 darin und bezeichnete auch die Stellen hinter dem Komma durch kleine Kreise mit den Ziffern 1, 2 usw. wie es das folgende Faksimile aus der Übersetzung von Helmuth Gericke und Kurt Vogel zeigt. Das Hauptargument Stevins für die Verwendung der Dezimalbruchdarstellung bestand darin, dass die Ausführung der Grundrechenarten dadurch besonders einfach und übersichtlich wurden.
Stevins Schrift verbreitete sich recht schnell, und es dauerte auch nicht mehr lange, bis die umständliche Bezeichnungsweise Stevins durch die heute gebräuchliche abgelöst wurde. Seine Methoden für das schriftliche Rechnen haben sich seit Stevins *Thiende* bis heute kaum verändert.

Die Begeisterung Stevins für das System spricht – mehr noch als aus dem Titel – aus der Einleitung, aus der wir einige Stellen zitieren (s. nächste Seite). Es folgt dann das genannte Faksimile der „Erklärungen" (s. u.), denen in der Schrift die Anleitungen zur Ausführung der Grundrechenarten und eine Reihe von Anwendungen folgen.

Der erste Teil der Thiende
von den Erklärungen

I. Erklärung

Thiende ist eine Art der Rechenkunst, durch welche man alle unter den Menschen als notwendig anfallende Rechnungen mittels ganzer Zahlen ohne Brüche erledigt; sie wird gefunden aus der Zehnerreihe[10], bestehend in den Ziffern, durch die irgendeine Zahl geschrieben wird.

Erläuterung
Es sei eine Zahl gegeben Eintausendeinhundertundelf, in Ziffern so geschrieben: 1111, in welcher sich zeigt, daß jede 1 der zehnte Teil der nächst vorangehenden ist. Ebenso ist auch in 2378 jede Einheit der 8 der zehnte Teil von jeder Einheit der 7, und ebenso bei allen anderen. Aber da es üblich ist, daß Dinge, von denen man sprechen will, Namen haben, und da diese Rechenweise aus der Beachtung einer solchen Thienden-Reihe gefunden ist, ja wesentlich in der Thienden-Reihe besteht, wie es sich im folgenden klar zeigen wird, so nennen wir [11] ihre Behandlung treffend und kurz[11] die Thiende. Durch diese werden alle uns vorkommenden Rechnungen besonders leicht durch ganze Zahlen ohne Brüche ausgeführt, wie nachher klar bewiesen werden wird.

II. Erklärung

Jede vorgelegte ganze Zahl nennen wir *Anfang*, ihr Zeichen ist dann ⓪.

Erläuterung
Ist z.B. eine ganze Zahl, dreihundertvierundsechzig, gegeben, so nennen wir dreihundertvierundsechzig den Anfang und schreiben folgendermaßen 364 ⓪. Und ebenso bei allen anderen dergleichen.

III. Erklärung

Und jeden zehnten Teil der Einheit des *Anfangs* nennen wir *Erstes*, sein Zeichen ist ①; und jeden Teil der Einheit des Ersten nennen wir *Zweites*, sein Zeichen ist ②; und so fort jeden zehnten Teil der Einheit seines vorhergehenden Zeichens immer in der Ordnung um eins mehr. [12]

Erläuterung
Wie ⟨z.B.⟩ 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④, das besagt 3 Erste, 7 Zweite, 5 Dritte, 9 Vierte, und so kann man ohne Ende fortfahren. Um aber von ihrem Zahlenwert zu sprechen, so ist nach dem Wortlaut dieser Erklärung offenbar, daß die genannten Zahlen $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{9}{10000}$, zusammen $\frac{3759}{10000}$ ausmachen. Ebenso hat 8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③ den Wert 8 $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$, das ist zusammen 8 $\frac{937}{1000}$, und so ⟨ist es⟩ mit allen anderen dergleichen. Man bemerke dabei auch, daß wir in der Thiende nirgends gebrochene Zahlen verwenden. Ferner daß die Anzahl der Menge der Zeichen, ausgenommen ⓪, niemals über 9 kommt. Z.B. schreiben wir nicht 7 ① 12 ②, sondern statt dessen 8 ① 2 ②, denn soviel sind sie wert.

IV. Erklärung

Die Zahlen der vorangehenden zweiten und dritten Erklärung nennen wir insgesamt *Thiende-Zahlen*.

Ende der Erklärungen

[...] *Aber was soll dies vorgelegte Werk nun sein? Eine wunderbare tiefsinnige Erfindung? Wahrlich nicht, sondern eine Sache, so ganz einfach, dass sie nicht den Namen einer Erfindung verdient; denn wie wenn ein einfacher Mann zufällig wohl einen großen Schatz findet, ohne dass eine (besondere) Kunst dabei gewesen wäre, so ist es auch hier zugegangen* [...]

Ob nun hierdurch die kostbare, nicht käufliche Zeit gewonnen werden wird, ob hierdurch das behalten werden wird, was sonst oft verlorengehen würde, ob hierdurch Mühe, Irrtum, Streit, Schaden und andere daraus folgende Misshelligkeiten abgewehrt werden, das überlasse ich gern Ihrem Urteil. Nun könnte mir jemand sagen, daß viele Dinge sich auf den ersten Blick oft besonders gut anlassen, aber wenn man sie durchführen will, so kann man nichts damit ausrichten, ebenso wie es bei den Neuerungen der Revolutionäre oft zugeht, welche im kleinen gut sind, aber im großen nichts taugen. Denen antworten wir, daß solch Zweifel hier keinesfalls bestehen kann, weil es im großen, d. h. in der Sache selber, nun täglich in der Praxis genug erprobt wird, nämlich durch verschiedene erfahrene Landmesser hier in Holland, denen wir es erklärt haben, welche (indem sie dasjenige aufgegeben haben, was sie zur Erleichterung ihrer Rechenarbeit hinzu erfunden hatten, jeder nach seiner Art) dieses neue (Verfahren) gebrauchen zu ihrem großen Vergnügen und mit solchen Ergebnissen, die naturgemäß mit Notwendigkeit daraus folgen müssen. Dasselbe wird jedem von Ihnen, meine ehrenwerten Herren, widerfahren, der es so macht wie jene.

Leben Sie inzwischen wohl und weiterhin glücklich.

7. Sätze über konvergente Folgen und Reihen

7.1 Zum Begriff der Konvergenz. Wir haben eine Folge $a_1, a_2, \ldots$ konvergent mit Grenzwert a genannt, wenn die Folge $a_1 - a,\ a_2 - a,\ \ldots$ eine Nullfolge ist. Hier noch einmal die präzise Formulierung, ohne das Wort Nullfolge ausdrücklich zu verwenden:

Definition 1 *Eine Folge reeller Zahlen heißt konvergent mit Grenzwert a (man sagt auch, sie konvergiert gegen a), wenn es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.*

Für $a = 0$ ist das genau unsere frühere Definition dafür, dass (a_n) eine Nullfolge ist.

Es gibt eine Reihe von Redewendungen, die sich in der Praxis eingebürgert und als nützlich erwiesen haben. Eine Folge heißt *konvergent*, wenn sie gegen einen Grenzwert konvergiert. Eine Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist, wenn sie also keinen Grenzwert besitzt (bei dem jetzigen Stand der Dinge kann man nur indirekt beweisen).

Häufig benutzt (auch hier) und in manchen Zusammenhängen hilfreich, im Prinzip aber durchaus kritisch zu sehen ist die Formulierung: „Die Folge $a_1, a_2, \ldots$ *strebt gegen oder konvergiert gegen a*“, in Zeichen $a_n \to a$ mit dem Zusatz *für n gegen Unendlich*. (Wir haben diesen Pfeil bereits bei dem Symbol $\lim\limits_{n\to\infty}$ benutzt; dieses „$n \to \infty$“ hat aber gar nichts mit konvergenten Folgen zu tun; das Symbol $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist nur als ganzes definiert und macht nur so einen Sinn.) Die Redewendung *strebt gegen* erweckt leicht den Eindruck, als ob die Folge eine Bewegung ausführe, als ob sie etwas „tue“, als ob es sich bei der Konvergenz um einen Prozess handele, den die Folge ausführt. Dieser Eindruck ist jedoch völlig falsch. Die Folge „tut“ gar nichts; sie hat gewisse „angeborene“ Eigenschaften oder auch nicht. Konvergenz ist etwas völlig statisches. Sie besagt nichts anderes, als:

In jeder „ ε-Umgebung“, d. h. in jedem Intervall $]a - \varepsilon\ ,\ a + \varepsilon[$ liegen „fast alle“ Glieder der Folge, d. h. alle mit endlich vielen Ausnahmen; anders ausgedrückt: in jeder solchen ε-Umgebung liegen unendlich viele, außerhalb aber nur endlich viele Folgenglieder.

Zu beachten ist auch, dass der Grenzwert einer konvergenten Folge selbst Glied der Folge sein kann, was bei der Formulierung *strebt gegen* leicht verwischt wird. Manche

Schüler und auch Studenten meinen ja, Konvergenz bedeute, dass die Folgenglieder einer Zahl (dem Grenzwert) immer näher kommen, ohne sie je zu erreichen. Für die (überaus wichtige) Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ stimmt das natürlich, aber schon an irgendeiner konstanten Folge $a, a, a, \ldots$, die offenbar gegen a konvergiert, erkennt man, dass diese Vorstellung völlig absurd ist. Dennoch soll nicht verschwiegen werden dass die dynamische, prozesshafte Vorstellung durchaus ihren Sinn und Nutzen hat – sofern man oben gesagtes verinnerlicht hat.

7.2 Rechenregeln für konvergente Folgen und Reihen. In den beiden nächsten Sätzen geben wir einige unverzichtbare Regeln für das Rechnen mit konvergenten Folgen und Reihen, die sich aus dem entsprechenden Satz für Nullfolgen ergeben (vgl. 3.2 Satz 3).

Satz 1 a) *Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen und ist $c \in \mathbb{R}$, so sind auch die Summenfolge (a_n+b_n), die Differenzenfolge (a_n-b_n), die Produktfolge (a_nb_n) und die Folge $(c \cdot a_n)$ konvergent und für die Grenzwerte gilt (in abkürzender Schreibweise)*

$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n, \quad \lim(a_nb_n) = \lim a_n \lim b_n, \quad \lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n.$$

b) *Gilt für die Folge b_n überdies $b_n \neq 0$ für alle n, so ist auch die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent und es gilt*

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \ .$$

Da eine konvergente Reihe nichts anderes ist als die Folge ihrer Partialsummen und deren Grenzwert die Summe der Reihe (vgl. 4, Def. 1), folgt aus Satz 1 a) unmittelbar

Satz 2 *Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergente Reihen und ist $c \in \mathbb{R}$, so sind auch die Reihen $\sum(a_n+b_n)$, $\sum(a_n-b_n)$ und $(\sum c \cdot a_n)$ konvergent und es gilt*

$$\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n \ , \qquad \sum(c \cdot a_n) = c \cdot \sum a_n \ .$$

Satz 3 a) *Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle n, so gilt auch*

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

b) *Sind s, t reelle Zahlen und hat die Folge (a_n) die Eigenschaft $s \leq a_n \leq t$ für alle n, so gilt auch*

$$s \leq \lim a_n \leq t.$$

Achtung! Wenn $a_n < b_n$ für alle n, so gilt nicht notwendig $\lim a_n < \lim b_n$, wie man an dem einfachen Beispiel $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$ (jeweils für alle n) erkennt! Entsprechendes gilt für b)!

7.3 Beschränkte Folgen. Eine Folge (a_n) heißt *nach oben (bzw. nach unten) beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl s gibt, so dass $a_n \leq s$ (bzw. $s \leq a_n$ für alle n gilt. (a_n) heißt *beschränkt*, wenn es reelle Zahlen s, t gibt mit $s \leq a_n \leq t$ für alle n. Eine Folge (a_n) ist genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl s gibt, so dass $|a_n| \leq s$ für alle n.

Satz 4 *Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt.*

Beweis Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zu $(\varepsilon =)$ 1 gibt es ein N, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Es folgt $|a_n| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1$ für alle $n \geq N$. Sei s das Maximum der Zahlen $|a_0|, |a_1|, \ldots |a_{N-1}|, |a| + 1$. Dann ist offenbar $|a_n| \leq s$ für alle n.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, wie man an dem einfachen Beispiel der Folge $1, -1, 1, -1, \pm 1, \ldots$ erkennt. Aber diese Folge enthält konvergente Teilfolgen, z. B. die Folge $1, 1, 1, \ldots$. Diesen Sachverhalt werden wir weiter unten (Satz 7) behandeln.

Satz 5 *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent.*

Genauer: Ist (a_n) eine monoton wachsende Folge, also $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n, und gibt es eine reelle Zahl t, so dass $a_n \leq t$ für alle n, so besitzt (a_n) einen Grenzwert.

Indem man von den Gliedern der Folge zu deren Negativen übergeht, erhält man aus dem vorstehenden Satz nsofort den

Satz 5' *Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist konvergent.*

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 4 ist auch

Satz 6 *Ist die Folge der Partialsummen einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern beschränkt, so ist die Reihe konvergent.*

Wir geben für den sehr wichtigen Satz 5 (der übrigens äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom ist) einen etwas unüblichen Beweis, der dafür aber besser an die bisher entwickelten Hilfsmittel, insbesondere an die Darstellung der reellen Zahlen als Dezimalzahlen, angepasst ist und als eine Vertiefung und Einübung des vorangehenden Stoffes dienen soll.

Beweis von Satz 5. Es sei also eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge (a_n) gegeben. Es sei t eine obere Schranke. Mit N bezeichnen wir die kleinste ganze Zahl, die größer als t ist, und mit M die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a_1 ist. Dann gilt also

$$a_n \in [M, N[\text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir teilen das Intervall $[M, N[$ in $N - M$ diskunkte Intervalle

$$[M, M+1[\ , \ [M+1, M+2[\ , \ \dots \ , \ [N-1, N[$$

der Länge 1 ein. Unter diesen wählen wir dasjenige Teilintervall $I_0 = [s_0, s_0 + 1[$ aus, für das gilt:

a) für alle n ist $a_n < s_0 + 1$,

b) es gibt ein k, so dass $a_k \in I_0$.

Anschaulich gesprochen ist I_0 das am weitesten rechts liegende Teilintervall, das noch ein Folgenglied enthält. Weil die Folge monoton wächst, gibt es also eine natürliche Zahl n_0, so dass

$$a_n \in [s_0, s_0 + 1[\text{ für alle } n \geq n_0 \ .$$

Wir teilen nun I_0 in zehn gleiche Teile ein und wählen dasjenige Teilintervall $I_1 = [s_1, s_1 + \frac{1}{10}[$ aus, dass die den Bedingungen a) und b) entsprechenden Eigenschaften hat (I_1 ist also das am weitesten rechts liegende Teilintervall von I_0 das noch ein Folgenglied enthält). Es gibt dann ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \in [s_1, s_1 + \frac{1}{10}[$ für alle $n \geq n_1$.

In dieser Weise fortfahrend erhalten wir eine Zehnerschachtelung $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ (I_k hat also die Länge $\frac{1}{10^k}$) mit der Eigenschaft, dass es zu jedem k ein n_k gibt, so dass

$$(*) \quad a_n \in I_k \text{ für alle } n \geq n_k.$$

Es sei a die Schnittzahl dieser Intervallschachtelung. Wir wollen zeigen, dass a der Grenzwert der Folge (a_n) ist. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da a in jedem I_k enthalten und die Länge von I_k gleich $\frac{1}{10^k}$ ist, folgt aus $(*)$:

$$|a_n - a| < \frac{1}{10^k} \text{ für alle } n \geq n_k.$$

Da $\frac{1}{10^k}$ eine Nullfolge ist, gibt es eine natürliche Zahl K, so dass $\dfrac{1}{10^K} < \varepsilon$. Es folgt $|a_n - a| < \dfrac{1}{10^K} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_K$. Setzen wir (um bei der üblichen Bezeichnung zu bleiben) $N = n_K$, so erhalten wir

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Damit ist bewiesen, dass (a_n) den Grenzwert a hat und folglich konvergent ist, was zu zeigen war. Am Rande sei bemerkt, dass mit der Zehnerschachtelung die Dezimalbruchentwicklung von a gegeben ist.

Wir beweisen jetzt einen weiteren überaus wichtigen Satz, den wir schon im Anschluss an Satz 4 angekündigt haben. Dazu benötigen wir den Begriff der Teilfolge.

Definition 2 Es sei (a_n) eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $a_{n_1}\,,\ a_{n_2}\,,\ a_{n_3}\,,\ \ldots\,,$ die wir abkürzend mit $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ oder einfach (a_{n_k}) bezeichnen, *Teilfolge* der Folge (a_n).

Bemerkung 1 Konvergiert eine Folge (a_n) gegen a, so konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) gegen a.

Satz 7 (Satz von Bolzano-Weierstraß[3]) *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis Es sei (a_n) eine beschränkte Folge. Es gibt also reelle Zahlen s_0, t_0, so dass $s_0 \leq a_n \leq t_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir teilen das Intervall $I_0 = [s_0, t_0]$ durch den Mittelpunkt $\frac{1}{2}(s_0 + t_0)$ in zwei Teilintervalle der Länge $\frac{1}{2}(t_0 - s_0)$ ein. Da $[s_0, t_0]$ unendlich viele (sogar alle) Folgenglieder enthält, muss (mindestens) eines dieser Teilintervalle ebenfalls unendlich viele Folgenglieder enthalten; wir wählen ein solches und bezeichnen es mit $I_1 = [s_1, t_1]$. In dieser Weise fortfahrend erhalten wir eine Folge von Intervallen I_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ mit unendlich vielen Folgengliedern der Länge $\frac{1}{2^k}(t_0 - s_0)$. Da dies eine Nullfolge ist, haben wir also eine Intervallschachtelung $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$. Sei a ihre Schnittzahl (Vollständigkeitsaxiom!). Wir wollen eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) konstruieren, die gegen a konvergiert. Wir beginnen die Auswahl unserer Teilfolge mit $a_{n_0} = a_0$. Da nun I_1 unendlich viele Folgenglieder enthält, gibt es ein $n_1 > n_0$, so dass $a_{n_1} \in I_1$. Hat man so (nach dem Prinzip der vollständigen Induktion) Folgenglieder $a_{n_0} \in I_0\,,\ a_{n_1} \in I_1\,,\ \ldots\,,\ a_{n_{k-1}} \in I_{k-1}$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ ausgewählt, so kann, da I_k unendlich viele Folgenglieder

[3] Bernhard Bolzano, 1781–1848; Karl Weierstraß, 1815–1897

– also insbesondere nicht nur $a_0, a_1, \ldots, a_{n_{k-1}}$ – enthält, ein $a_{n_k} \in I_k$ gewählt werden mit $n_{k-1} < n_k$. Die so ausgewählte Teilfolge konvergiert nach 6.1 Satz 1 b) gegen a.

7.4 Die harmonische und die alternierende harmonische Reihe. Als Anwendung von Satz 6 erhalten wir

Satz 8 *Die sogenannte* **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

ist nicht konvergent.

Beweis: Die Folge der Partialsummen ist unbeschränkt.

Dies hat bereits der scholastische Gelehrte Nicole Oresme im 14. Jh. in der gleichen Weise bewiesen, wie wir das heute tun (natürlich ohne unseren Formalismus) – und das zu einer Zeit, als man mit Konvergenzuntersuchungen buchstäblich von Null anfangen musste. Hier sein Argument:

Sit pedalis quantitas assumpta, cui addatur [...] *una medietas pedis, deinde una tercia* [...] *et deinde una quarta, deinde quinta et sic in infinitum secundum ordinem numerorum, dico, quod totum fieret infinitum, quod probatur sic: ibi existunt infinite partes, quarum quelibet erit maior quam medietas pedis, ergo totum erit infinitum. Antecedens patet, quia* 4^a *et* 3^a *sunt plus quam una medietas, similiter de* 5^a *usque ad* 8^{am} *et usque ad* 16^{am} *et sic in infinitum.*

Frei übersetzt: Wenn man einer Größe von einem Fuß zunächst einen halben Fuß hinzufügt, danach einen drittel, einen viertel, einen fünftel Fuß usw. ins Unendliche, so wird das Ganze unendlich. Beweis: Es gibt unendlich viele Gruppen von Gliedern, deren Summe größer ist als $\frac{1}{2}$; z. B. ist $\frac{1}{3} + {}^{1}$ $_{2}$, ferner $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ größer als $\frac{1}{2}$ und weiter $\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}$ größer als $\frac{1}{2}$ usw.

Das ist so klar, dass dem nichts hinzuzufügen ist. (Ein „formaler“ Beweis wird als Übungsaufgabe empfohlen.)

Erstaunlich ist nun, dass man durch Abändern der Vorzeichen in der harmonischen Reihe die Konvergenz gewissermaßen „erzwingen“ kann. Wir können nämlich mit unserem schon oft eingeübten Prinzip der Intervallschachtelung zeigen:

Satz 9 *Die* **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots$$

ist konvergent.

Zum Beweis betrachten wir die Partialsummen

$$s_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right),$$

$$s_{2k+1} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{} \qquad \frac{}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Wir sehen, dass die Folge (s_{2k}) monoton wächst, die Folge (s_{2k+1}) monoton fällt, dass ferner $s_{2k} < s_{2k+1}$ gilt, und schließlich $s_{2k+1} - s_{2k} = \frac{1}{2k+1}$ eine Nullfolge ist. Die Intervalle $I_k = [s_{2k}, s_{2k+1}]$ bilden also eine Intervallschachtelung. Da nun die Teilfolgen mit geradem bzw. ungeradem Index gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, konvergiert auch die gesamte Folge (der Partialsummen) gegen diesen Grenzwert.

Wir werden später sehen, dass man den Wert der alternierenden harmonische explizit angeben kann. Es gilt nämlich

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2,$$

wo $\ln 2$ der Logarithmus von 2 zur Basis e, der „Eulerschen Zahl“ ist.

7.5 Konvergenzkriterien für Reihen. Wer bis jetzt geglaubt hat – vielleicht irregeleitet durch die geometrische Reihe –, dass es für die Konvergenz einer unendlichen Reihe genüge, dass die Summanden eine Nullfolge bilden, sieht sich am Beispiel der harmonischen Reihe getäuscht. Der folgende Satz ist also nicht umkehrbar.

Satz 10 *Die Summanden einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge.*

Beweis Ist $\sum a_n = a$ die Reihe, s_n ihre Partialsummen, so gilt $a_n = s_n - s_{n-1}$ also $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = a - a = 0$.

Alternativ für alle, die die „Epsilontik“ einüben möchten: $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - a| + |a - s_{n-1}| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$, wenn zu ε ein N so gewählt ist, dass sowohl $|s_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m \geq N$ als auch $|a - s_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.

Wir geben an dieser Stelle noch drei Konvergenzkriterien für unendliche Reihen an, die leicht zu beweisen sind und zahlreiche Anwendungen haben.

Satz 11 (Majorantenkriterium) *Es gelte $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Reihe $\sum b_n$ sei konvergent. Dann ist auch die Reihe $\sum a_n$ konvergent und es gilt $\sum a_n \leq \sum b_n$.*

Beweis Die Folge (t_n) der Partialsummen von $\sum b_n$ ist beschränkt, für die Folge (s_n) der Partialsummen von $\sum a_n$ gilt $s_n < t_n$. Also ist auch (s_n) beschränkt, woraus alles weitere sofort folgt.

Satz 12 (Wurzelkriterium) *Es gelte $0 \leq a_n \leq q^n$ für eine reelle Zahl $q < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent und es ist $\sum a_n \leq \frac{1}{1-q}$.*

Beweis Folgt sofort aus dem Majorantenkriterium, wenn man als Majorante die geometrische Reihe nimmt.

Satz 13 (Quotientenkriterium) *Für die Folge (a_n) gebe es eine natürliche Zahl n_0, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Ferner gebe es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent und es ist $\sum a_n \leq \frac{a_0}{1-q}$.*

Beweis Durch Induktion zeigt man, dass $\frac{a_n}{a_0} \leq q^n$ gilt. Die Behauptung folgt nun aus dem Wurzelkriterium und mit $\sum \frac{a_n}{a_0} = \frac{1}{a_0} \sum a_n$.

Das Quotientenkriterium liefert nicht nur die Konvergenz einer Reihe, sondern sogar deren „absolute Konvergenz“, ein Begriff, von dem wir im folgenden des öfteren Gebrauch machen müssen.

Definition 3 Eine Reihe $\sum a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum |a_n|$ konvergent ist.

Satz 14 *Jede absolut konvergente Reihe ist auch* (im üblichen Sinn) *konvergent.*

Beweis Ein kleiner Trick: Für eine beliebige reelle Zahl a setzen wir $a^+ = \frac{1}{2}(|a| + a)$ und $a^- = \frac{1}{2}(|a| - a)$. Es gilt $0 \leq a^+ \leq |a|$, $0 \leq a^- \leq |a|$ und $a = a^+ - a^-$. Setzt man hier a_n für a ein, so folgt aus dem Majorantenkriterium die Konvergenz der Reihen $\sum a_n^+$ und $\sum a_n^-$ und hieraus mit Satz 2 die Konvergenz der Reihe $\sum(a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$.

Dass die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt, die absolut konvergenten Reihen also eine echte Teilmenge der Menge der konvergenten Reihen ist, dafür ist die alternierende harmonische Reihe ein Beispiel; sie ist konvergent, aber die Reihe der Absolutbeträge ihrer Summanden ist die nicht konvergente harmonische Reihe.

Anhang: Cauchy-Folgen. Wir haben schon früher darauf hingewiesen, dass man für Konvergenzbeweise notwendig einen Grenzwert braucht. Das ist häufig sehr hinderlich. Deshalb wäre ein Konvergenzkriterium wünschenswert, das keinen Bezug auf einen Grenzwert nimmt. Ein solches hat AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1857) gefunden. Zur bequemeren Formulierung verabreden wir zunächst die

Definition: *Eine Folge (a_n) heißt* **Cauchy-Folge**, *wenn es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.*

Satz 15 (Konvergenzkriterium von CAUCHY**)** *Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Für eine unendliche Reihe $\sum a_n$ bedeutet dies, dass

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon \text{ für alle } m > n \geq N.$$

Dass jede konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a eine Cauchy-Folge ist, erhalten wir mit einem Schluss, den wir schon bei Satz 7 angewandt haben: $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| \leq \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$, wenn zu ε ein N so gewählt ist, dass sowohl $|a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m \geq N$ als auch $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$.

Die Umkehrung, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, ist nicht trivial. Diese Aussage ist in der Tat äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom. Wir haben deshalb zu einer Cauchy-Folge eine Intervallschachtelung zu finden, deren sämtliche Intervalle (fast) alle Glieder der Folge enthalten; die Schnittzahl ist dann der gesuchte Grenzwert. Wir führen dies nicht durch.

Stattdessen kommen wir nochmals auf die Dezimalbrüche zurück, in deren Umfeld wir auf die Intervallschachtelungen gestoßen sind. Wir haben dort die Frage gestellt, ob ein (beliebiger, auch nicht-periodischer) Dezimalbruch

$$0, a_1 a_2 \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

konvergiert. Wir können jetzt die Konvergenz der Reihe direkt mit dem Cauchyschen Konvergenzkriterium nachweisen:

Für die Folge $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ der Partialsummen und $m \geq n$ gilt

$$|s_m - s_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{9}{10^k} \leq \frac{9}{10^{n+1}} \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{10^k} \leq \frac{9}{10^{n+1}} \frac{10}{9} = \frac{1}{10^n},$$

und dies ist $< \varepsilon$ für jedes ε und hinreichend großes n.

Damit ist erneut gezeigt, dass jeder Dezimalbruch $a, a_1 a_2 \cdots$ konvergent ist, genauer: dass die Folge der Abschnitte $(a, a_1 a_2 \cdots a_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge ist.

8. Die Eulersche Zahl e

Satz a) *Die Folge*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Der Grenzwert

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

heißt Eulersche Zahl (nach Leonhard Euler, 1707–1783).

b) *Es gilt*

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \ .$$

Bemerkung Die Folgen $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ haben also den gleichen Grenzwert (nämlich e), (a_n) konvergiert jedoch viel langsamer als s_n, wie die folgenden Zahlenbeispiele verdeutlichen.

n	s_n	a_n
2	$2,5$	$2,25$
4	$2,7083333333$	$2,4414062500$
6	$2,7180555555$	$2,5216263717$
8	$2,7182787698$	$2,5657845139$
10	$2,7182818011$	$2,5937424600$
12	$2,7182818282$	$2,6130352901$
10.000		$2,7181459268$
10.000.000		$2,7182816925$

Beweis des Satzes: Für die erforderlichen Abschätzungen benötigen wir die binimische Formel:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

und $n! \geq 2^{n-1}$ (Beweise durch vollständige Induktion). Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}.$$

Hieran erkennt man sofort, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist. (Wir erhalten nämlich (a_{n+1}) aus (a_n), indem wir die Faktoren $1-\frac{k}{n}$ durch die größeren $1-\frac{k}{n+1}$ ersetzen und einen letzten Summanden hinzufügen.)

Da in der Summe rechts die eingklammerten Faktoren sämtlich kleiner als 1 sind, gilt weiter

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{}}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3\ .$$

Damit haben wir für (a_n) die obere Schranke 3 gefunden, womit a) bewiesen ist.

Zu b) Da (s_n) offenbar monoton wachsend und nach dem Vorangehenden ebenfalls durch 3 nach oben beschränkt ist, ist also die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergent.[1] Es bleibt zu zeigen, dass (s_n) gegen e konvergiert. Nach der obigen Abschätzung wissen wir bereits, dass $a_n \le s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, also nach einem schon bewiesenen Satz auch

$$e \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\ .$$

Nun sei $m > n$. An der eingangs benutzten Darstellung (mit m statt n) $a_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1(1-\frac{1}{m})\cdots(1-\frac{k-1}{m})}{k!}$ sehen wir, indem wir nur bis n statt bis (zum größeren) m summieren, dass

$$a_m > \sum_{k=0}^{n} \frac{1(1-\frac{1}{m})\cdots(1-\frac{k-1}{m})}{k!} \quad \text{für alle } m > n.$$

Indem wir nun (bei festem n) m gegen unendlich gehen lassen, erhalte wir auf der linken Seite $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = e$. Auf der rechten Seite der Ungleichung geht jeder der eingeklammerten Faktoren gegen 1, d. h. die gesamte Summe gegen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Damit haben wir $e \ge s_n$ für alle n und folglich auch

$$e \ge \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\ ,$$

womit der sehr wichtige Satz bewiesen ist.

Als **Anwendung** erhalten wir eine Antwort auf eine Frage von Jacob Bernoulli (1654–1705): *Quaeritur: si ereditor aliquis pecuniae summa foenori exponet, ea lege,*

[1] Das sieht man auch sehr leicht mit Hlfe des Quotientenkriteriums: es gilt nämlich $\frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \frac{1}{k+1}$, was von einem gewissen Index an kleiner wird als eine beliebig vorgegebene Zahl q mit $0 < q < 1$.

ut singulis momentis pars proportionalis usurae amme sorti ammeretur; quantum ipsi finito anno debeatur.

Also: Ein Kapital A wird mit einem jährlichen Zinssatz von 100% verzinst. Nach einem Jahr ist also das Kapital $2A$. Schlägt man die Zinsen schon nach einem halben Jahr hinzu, so beträgt das Kapital nach einem Jahr

$$A\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right).$$

Schlägt man die Zinsen dritteljährlich hinzu, so ist das Kapital am Ende des Jahres

$$A\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right).$$

Teilt man das Jahr in n gleiche Teile, so liefert der Prozess ein Endkapital von

$$A\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Was geschieht mit wachsendem n, d. h. bei stetiger Verzinsung mit Zinsfuß 100% ? Die Antwort auf Bernoullis Frage ist: Nach einem Jahr hat sich das Kapital ver-e-facht.

9. Ein Beispiel aus dem 14. Jahrhundert

Der oben schon zitierte scholastische Gelehrte Nicole Oresme (14. Jh.) sah sich im Zusammenhang mit der Untersuchung von Bewegungsvorgängen vor die Aufgabe gestellt, die Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

zu beweisen und ihre Summe zu bestimmen, und das, wie gesagt, zu einer Zeit, als man mit Konvergenzuntersuchungen buchstäblich von Null anfangen musste. Es ist interessant zu sehen, insbesondere auch im Hinblick auf den Oberstufenunterricht, in dem der Konvergenzbegriff nur heuristisch behandelt wird, wie Oresme an die Sache herangeht.

Zuvor wollen wir uns anhand des Qutientenkriteriums versichern, dass die Reihe tatsächlich konvergent ist und ihre Summe bestimmen: Das Qutientenkriterium liefert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)2^n}{n2^{n+1}} = \frac{1}{2}\ \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Es gilt $\frac{1}{2n} < \frac{1}{4}$ für alle $n > 2$. Setzen wir beispielsweise $q = \frac{3}{4}$, so folgt $\overline{a_{n+1}}$

$\underline{}_{1/4} = 2$ ist, über den genauen Wert sagt es aber nichts. Um diesen herauszufinden, haben wir den Grenzwert der Partialsummen s_n zu bestimmen. Durch vollständige Induktion kann man zeigen, dass

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}.$$

Da $\frac{1}{2^{n-1}}$ und $\frac{n}{2^n}$ Nullfolgen sind (für die letztere haben wir das in den Übungen bewiesen), folgt $\lim s_n = 2$, was auch Oresme herausgefunden hat, allerdings, wie wir sehen werden, mit ganz anderen Methoden.

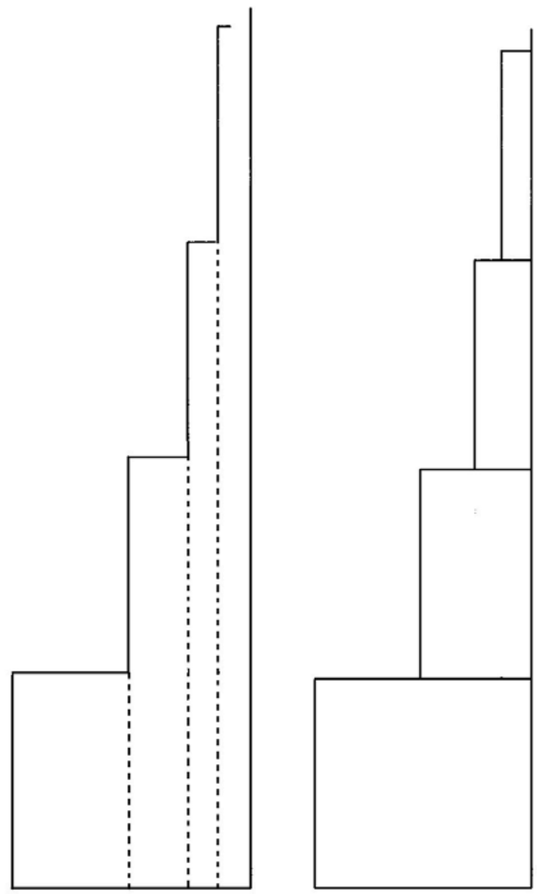
Da sich für Oresme, wie schon erwähnt, die Aufgabe im Zusammenhang mit dem Studium von Bewegungsvorgängen stellte, finden wir in seinem Text, den wir gleich zitieren, physikalische Begriffe, von denen man aber ohne weiteres absehen kann; übrig bleibt dann eine geometrische Argumentation, die wir leicht in eine analytische übersetzen können.

Wenn ein Mobile sich im ersten proportionalen Teil einer Stunde [einer halben Stunde] *mit irgendeiner Geschwindigkeit bewegen würde und im zweiten proportionalen Teil* [einer viertel Stunde] *doppelt so schnell und im dritten dreimal und im vierten viermal und so fort, bis ins Unendliche immer zunehmend, so würde jenes Mobile in der ganzen Stunde genau das Vierfache durchlaufen von dem, was in der ersten Hälfte der Stunde durchlaufen wurde.* [Oresme, De configurationibus qualitatum et motuum]

Oresme steht hier also vor dem Problem, eine unendliche Reihe von Rechtecken zu addieren (linke Abb.), nämlich:

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{4}2v + \frac{1}{8}3v + \ldots \;=\; v \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n},$$

und dies ist genau die vorhin behandelte Reihe, wenn $v = 1$ gesetzt wird.

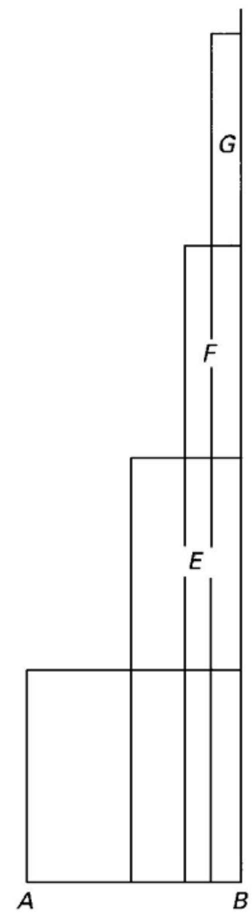


Übrigens sieht man hier, dass, wenn diese Summe bestimmt ist, gleichzeitig die Summe der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ ermittelt ist. Man braucht ja (mit $v = 1$) statt der vertikalen Rechtecke nur die horizontalen Rechtecke zu addieren (rechte Abb.).

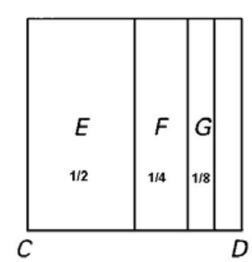
Interessante Bemerkung von Oresme: *Eine endliche Fläche kann man so lang oder so hoch machen wie man will indem man die Breite [extensio] variiert, ohne dass die Fläche größer wird. Denn jede Fläche hat sowohl Länge wie Breite und es ist möglich, dass sie in einer Dimension wächst so viel man will, ohne das die ganze Fläche größer wird, solange die andere Dimension proportional verkleinert wird. Und dies gilt ebenso für Körper.*

Die Argumentation verläuft bei Oresme folgendermaßen (sinngemäß und gekürzt übersetzt aus „De configuratione intensionum“, pars III, cap. 8):

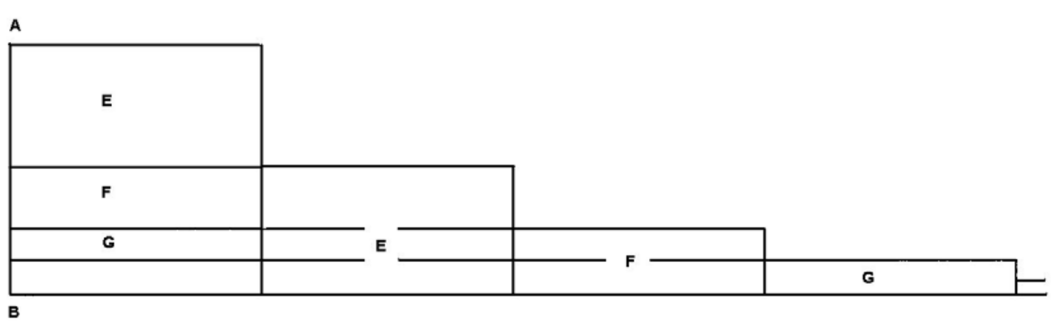
Man geht aus von einem Quadrat (es wird der Einfachheit halber $v = 1$ angenommen) und teilt dessen Grundseite CD gemäß der geometrischen Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Dadurch wird das Quadrat in die Rechtecke E, F, G usw. zerlegt. Nun wird über einer zu C, D gleichlangen Strecke A, B das Quadrat „aufgesetzt“, über diesem das Rechteck E, darüber das Rechteck F, hierüber das Rechteck E usf. In der so erhaltenen Treppenfigur ist die Summe der Rechtecke $E, F, \ldots$ gleich dem Quadrat über CD. Der Flächeninhalt der gesamten Treppenfigur ist demnach gleich der Summe der beiden Quadrate, mithin gleich 2. Man sieht also:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 4 \cdot \frac{1}{2} \ .$$



Oresme gibt noch eine andere Interpretation, womit er ein Argument des Aristoteles widerlegt, der meint, wenn ein Mobile sich immerfort („in Ewigkeit“) bewegt, müsse es notwendig einen unendlichen Weg zurücklegen (Bild unten):
Wenn ein Mobile in einem Tag mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt würde und am zweiten Tag doppelt so langsam und am dritten Tag doppelt so langsam wie am zweiten und so unendlich weiter, würde es immer einen Weg durchlaufen, der kürzer ist als das Doppelte des Weges, der am ersten Tag durchlaufen wurde. Erst in Ewigkeit würde es den doppelten Weg durchlaufen, den es am ersten Tag durchlaufen hat.



Forum

SITZUNGEN 02.-09.11.2005

Grenzwertproblematik / Ableitung: Cauchy

Aufgaben:

1)

Nehmen Sie Stellung zu der Aussage $0,\overline{9} = 1$! Mit welchen Argumenten würden Sie ihre Position stützen? Könnten Sie sich Argumente vorstellen, die Ihre Position anzweifeln?

2)

Cauchy hat, wie Sie dem Arbeitsblatt aus der Vorlesung entnehmen können, die Ableitung als „letztes Verhältnis" verstanden. Versuchen Sie, den von Cauchy beschriebenen Sachverhalt anhand einiger konkreter Funktionen nachzuvollziehen.

Welche Voraussetzungen müssen laut Cauchy gelten, um überhaupt ein solches letztes Verhältnis bilden zu können? Sind diese Voraussetzungen in Ihrem Beispiel erfüllt?

An welchen Stellen der angegebenen Funktionen könnten Schwierigkeiten auftreten und welcher Art sind diese Schwierigkeiten?

a) $f(x) = |x^2 - 4|$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{|x|}$

SITZUNG 16.11.2005

Ableitung: Cauchy - Weierstrass

Aufgaben:

Sie haben jetzt zwei Sichtweisen der Ableitung kennengelernt.

a) An welchen Stellen ist bei Cauchy und Weierstrass jeweils vom Grenzwert die Rede? Wie ist dieser Grenzwert zu verstehen?
Diskutieren Sie die Unterschiede am Beispiel der Normalparabel.

b) Was bringt der Standpunktwechsel für Ihr Verständnis der Ableitung?

Ableitung: Infinitesimalkalkül von Leibniz

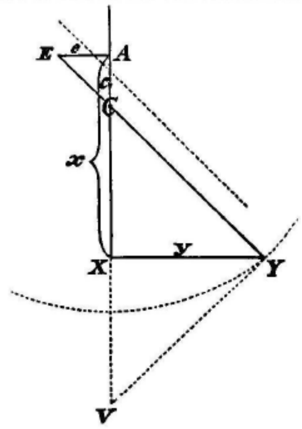
Gottfried Wilhelm Leibniz

Rechtfertigung der Infinitesimalrechnung durch den gewöhnlichen algebraischen Kalkül.

(1702.)

Zwei Gerade A X und E Y (Fig. 11) mögen sich im Punkte C schneiden; von den Punkten E und Y seien zwei Gerade E A und Y X senkrecht zu A X gezogen. Nennen wir A C c, A E e, A X x und X Y y. Dann verhält sich, da die Dreiecke C A E und C X Y einander ähnlich sind, $x - c : y = c : e$. Wenn nunmehr die Gerade E Y sich mehr und mehr dem Punkte A nähert, dabei jedoch in dem variablen Punkte C immer denselben Winkel mit A X bildet, so werden offenbar die Strecken c und e immer kleiner werden, ihr Verhältnis jedoch wird ungeändert bleiben. Wir wollen annehmen, daß es von der Gleichheit verschieden, der betreffende Winkel also nicht $= 45^0$ ist.

Setzen wir nun den Fall, daß die Gerade E Y schließlich durch den Punkt A hindurchgeht, so werden offenbar C und E in diesem einen Punkte zusammenfallen, die Geraden A C und A E oder c und e werden also verschwinden. Das Verhältnis oder die Gleichung $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$ gestaltet sich also zu $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$ um. In dem vorliegenden Falle wird also, vorausgesetzt, daß auch er unter die allgemeine Regel fällt, $x - c = x$ sein. Dennoch aber werden c und e nicht im absoluten Sinne „Nichts" sein, da sie ja zueinander stets das Verhältnis von C X : X Y bewahren, oder, mit anderen Worten: das Verhältnis zwischen dem Sinus von 90^0 oder dem Radius, und der Tangente des Winkels in C, den wir bei der Annäherung von E Y an A als konstant angenommen haben.[76]) Wären nämlich c und e in diesem Kalkül für den Fall des Zusammenfallens der Punkte C, E, A im absoluten Sinne Nichts, so würden sie, da e i n Nichts denselben Wert hat, wie ein anderes, einander gleich sein, und aus der Gleichung oder dem Verhältnis $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$ ergäbe sich $\frac{x}{y} = \frac{0}{0} = 1$, d. h. es wäre auch x gleich y, was ein offenbarer Widersinn ist, da unserer Annahme nach der Winkel nicht $= 45^0$ sein sollte. Die Größen c und e werden also in diesem algebraischen Kalkül nur vergleichsweise, mit Bezug auf x und y, als Nichts gerechnet, besitzen jedoch untereinander ein algebraisches Verhältnis[77]) und werden als Infinitesimale behandelt, wie die Elemente, die wir in unserem Differential-Kalkül bei den Koordinaten der Kurven annehmen, d. h. wie momentane Zuwüchse oder Abnahmen. So findet man schon in dem Kalkül der gewöhnlichen Algebra die Spuren des transscendenten Kalküls der Differenzen und dieselben Eigentümlichkeiten, an denen manche Gelehrte hier Anstoß nehmen. Es kann eben selbst der algebraische Kalkül ihrer nicht entbehren, wenn er sich seine Vorzüge erhalten will, deren wesentlichster seine Allgemeinheit ist, die ihm ermöglicht, a l l e Fälle, selbst den, wo bestimmte gegebene Gerade verschwinden, zu umfassen. Hierauf Verzicht zu leisten und sich damit freiwillig eines der fruchtbarsten Hülfsmittel zu begeben, wäre lächerlich. Schon in der gewöhnlichen Algebra haben alle geschickten Analytiker hieraus Nutzen gezogen, um ihren Rechnungen und Konstruktionen Allgemeinheit zu geben. Wenn man diesen Vorteil sodann auf die Physik und besonders auf die Gesetze der Bewegung anwendet, so ergibt sich hierbei z. T. das G e s e t z d e r K o n t i n u i t ä t, wie ich es nenne, das mir seit langer Zeit in der Physik als Prinzip für die Entdeckung neuer Wahrheiten und zudem als vorzüglicher Prüfstein zur Beurteilung mancher Regeln dient, die man in diesem Gebiet aufstellt. Ich hatte hiervon vor mehreren Jahren eine Probe in den „Nouvelles de la République des Lettres" veröffentlicht, in der ich die Gleichheit als einen Sonderfall der Ungleichheit, die Ruhe als Sonderfall der Bewegung, den Parallelismus als Fall der Konvergenz zweier Geraden usw. ansah — wobei jedoch angenommen wird, daß die Differenz der Größen, die gleich werden, nicht schon null i s t, sondern erst im Begriff ist, zu verschwinden; — ebenso, daß die Bewegung noch nicht absolut zu Nichts geworden ist, sondern erst im Begriffe steht es zu werden. Will sich jemand hiermit nicht zufrieden geben, so kann man ihm nach der Methode des Archimedes zeigen, daß der Irrtum keine angebbare Größe besitzt, und daß er durch keine Konstruktion darstellbar ist.



Wenngleich es indessen nicht in aller Strenge richtig ist, daß die Ruhe eine Abart der Bewegung, oder die Gleichheit eine Art der Ungleichheit ist, ebensowenig wie der Kreis in Wirklichkeit eine Art reguläres Vieleck ist, so kann man trotzdem sagen, daß die Ruhe, die Gleichheit und der Kreis die G r e n z f ä l l e der Bewegungen, der Ungleichheiten und der regulären Vielecke bilden, die durch eine stetige Veränderung im Zustande des Verschwindens schließlich in jene übergehen. Und obgleich diese Grenzen ausgeschlossen, d. h. streng genommen in der Mannigfaltigkeit, die sie abschließen, nicht mit einbegriffen sind, besitzen sie dennoch deren Eigentümlichkeiten, wie wenn sie darin enthalten wären. Dies steht im Einklang mit der Terminologie des Unendlichen und Unendlichkleinen, nach der z. B. der Kreis ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten ist. Andernfalls würde das Gesetz der Kontinuität verletzt, denn da man von den Vielecken durch stetige Veränderungen und ohne einen Sprung zu machen, zum Kreise gelangt, so darf nach diesem Gesetz auch beim Übergange von den E i g e n s c h a f t e n der Vielecke zu denen des Kreises kein Sprung stattfinden.

Aufgabe: a) Lesen Sie den Text genau und erklären Sie die wichtigsten Argumente.
b) Präzisieren Sie die Argumente, die sich auf die Abb. beziehen, mit Hilfe von konvergenten Zahlenfolgen.
c) Sehen Sie einen Zusammenhang mit Differentialquotienten, Ableitungen, Änderungsraten oder ähnlichem?

SITZUNG 07.12.2005

Kurvendiskussion

Aufgabe:

Begründen Sie das **Monotoniekriterium für Kurvendiskussionen** und beschreiben Sie genau, wie die **Vollständigkeit der reellen Zahlen** (Lückenlosigkeit der Zahlengeraden) beim Beweis eingeht.
Benutzen Sie dazu das Textbuch.

Berichtigung:

Textbuch, Seite 60, 8. Zeile von unten:
$f(x_1) \geq f(x_2)$ statt $f(x_0) \leq f(x_1)$

SITZUNG 11.01.2006

Äquivalenz verschiedener Definitionen der Differenzierbarkeit

Aufgabe:

In Ihrem Textbuch finden Sie unter Kapitel 1.3 auf den Seiten 30-33 die verschiedenen Definitionen der Differenzierbarkeit einer Funktion noch einmal zusammengefaßt gegenübergestellt:

→ Definition über die lokale Änderungsrate

→ Definition über die lokale lineare Approximation

→ Definition über die stetige Ergänzbarkeit der Differenzenquotientenfunktion

Ihre Aufgabe ist es nun, den aufgeführten Äquivalenzbeweis der drei Definitionen nachzuvollziehen, zu untersuchen und zu verstehen.

<u>Anleitung/Hilfestellung für ein mögliches Vorgehen:</u>

(i) Welcher logischen Struktur folgt der Beweis:
- Wie ist der Beweis aufgebaut?
- Welche Beweisidee liegt zugrunde?
- In welcher Beziehung stehen die einzelnen Aussagen zueinander

(ii) Welchen Vorteil bietet das hier zur Anwendung kommende Beweisverfahren und warum erleichtert es uns die Beweisarbeit ungemein?
Wie viele Beweise müßten geführt werden, um die Äquivalenz von n Aussagen zu überprüfen? Wie reduziert, wenn man das hier verwendete Verfahren benutzt?

(iii) Welche inhaltliche Struktur weist die Argumentation auf? An welchen Argumentationsschritten liegen für Sie (inhaltliche) Verständnisschwierigkeiten vor?

SITZUNG 18.01.2006

Extremwertprobleme

Aufgabe:

(Einbeschreiben einer Figur)

Einem gleichschenkligen Dreieck (einem Kegel) ist das Rechteck (der Zylinder) größten Inhalts einzubeschreiben. Man vergleiche Lösungswege und Ergebnisse.

Versuchen Sie, zu der Ihnen bereits von Übungsblatt 6 her bekannten Aufgabe möglichst viele alternative Lösungswege zu finden?

Gemeinsame Tagung Freusburg 2006

Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt

Projekt der Deutschen Telekom Stiftung

Gemeinsames Projektwochenende auf der Freusburg
17.-19.03.2006

	Freitag 17.03.2006	Samstag 18.03.2006	Sonntag 19.03.2006
8^{00}	**Züge fahren ab Siegen Bahnhof um** **$14^{54} \rightarrow 15^{10}$** **$15^{24} \rightarrow 15^{40}$**	**Frühstück**	**Frühstück**
8^{30}			
9^{00}		**Präsentationen der Studierenden** **Teil 1 (Gießen):** Computerworkshops - Was so alles in einem Würfel steckt – Oktaeder und Kuboktaeder mit dem Schieberegler - Die Platonischen Körper – Die Eckpunkte von Dodekaeder und Ikosaeder - Von Licht und Schatten – Geraden- und Ebenengleichungen - Lineare Gleichungssysteme sind kein Problem– Mit elementaren Zeilenumformungen werden sie gelöst - Die Zahlungsmoral… – ein richtiges Anwendungsbeispiel - Alles dreht sich – die Erzeugung von Rotationsflächen - Ein Kegel trifft eine Ebene… – Kreise, Ellipsen und mehr - Vektorräume – linear abhängige und linear unabhängige Vektoren	
9^{30}			
10^{00}			**Gesprächsrunde mit praktizierenden Lehrern**
10^{30}			
11^{00}			
11^{30}			**Ausklang**
12^{00}		**Mittagspause**	**Mittagspause**
12^{30}			
13^{00}			

<table>
<tr><td>13^{30}</td><td rowspan="5"></td><td rowspan="6">Teil 2 (Siegen): Vorträge aus den Bereichen

Schulanalysis vom höheren Standpunkt:
- Neues zu einem alten Thema: die Tangente als Bestapproximierende
- Das isoperimetrische Problem für Rechtecke - mit und ohne Analysis
- Die Mittelungleichung: Ein schlagkräftiges Instrument zur Lösung von Extremwertproblemen
- Die Milchtüte
- Integrieren kommt von ‚integrare' (lat.) = wiederherstellen

Analysis I:
- Der Dedekindsche Schnitt
- Der Logarithmus und seine Geschichte
- Newton und die Fluxionsmethode</td><td rowspan="17">Züge fahren ab Freusburg Bahnhof um
$13^{11} \rightarrow 13^{52} \rightarrow 14^{47}$
$13^{47} \rightarrow 14^{06}$
$14^{11} \rightarrow 14^{52}$
$14^{47} \rightarrow 15^{06} \rightarrow 16^{14}$</td></tr>
<tr><td>14^{00}</td></tr>
<tr><td>14^{30}</td></tr>
<tr><td>15^{00}</td></tr>
<tr><td>15^{30}</td></tr>
<tr><td>16^{00}</td><td>Treffen an der JH (Rittersaal)</td></tr>
<tr><td>16^{30}</td><td rowspan="2">Beziehen der Zimmer</td><td rowspan="5">Freizeit
evtl. Wanderung, Sport…</td></tr>
<tr><td>17^{00}</td></tr>
<tr><td>17^{30}</td><td>Versammlung im Rittersaal, Begrüßung, Vorstellung des Programms</td></tr>
<tr><td>18^{00}</td><td rowspan="2">Abendessen</td></tr>
<tr><td>18^{30}</td></tr>
<tr><td>19^{00}</td><td></td><td rowspan="4">Buffet</td></tr>
<tr><td>19^{30}</td><td rowspan="5">Vortrag von Frau Bärbel Barzel, Universität Duisburg-Essen: „Mathematikunterricht öffnen - mit und ohne Rechner“

danach:
geselliger Ausklang des Abends, z.B. in der Gaststätte Alt Freusburg</td></tr>
<tr><td>20^{00}</td></tr>
<tr><td>20^{30}</td></tr>
<tr><td>21^{00}</td><td rowspan="2">Ausklang
evtl. Spieleabend für Interessierte</td></tr>
<tr><td>danach</td></tr>
</table>

Presse

PRESSEINFORMATION

Mathematik Neu Denken: Deutsche Telekom Stiftung unterstützt Neuorientierung der Gymnasiallehrer-Ausbildung

Innovatives Forschungs- und Entwicklungsprojekt an den Universitäten Gießen und Siegen – Eigenes Grundstudium für angehende Gymnasiallehrer – Frühe Integration der fachdidaktischen Ausbildung - Beginn im Wintersemester 2005/2006

Bonn 17. November 2005: Studierende mit dem Berufswunsch Mathematiklehrer können jetzt an den Universitäten Gießen und Siegen ein spezielles, auf den Lehrerberuf zugeschnittenes Studium absolvieren. Mit Beginn des Wintersemesters 2005/2006 bieten die Hochschulen mit Unterstützung der Deutschen Telekom Stiftung ein eigenes Grundstudium für künftige Gymnasiallehrer an. Besonderes Unterscheidungsmerkmal zur Ausbildung angehender Diplom-Mathematiker ist die frühe Integration fachdidaktischer Komponenten.

„Durch das wiederholt schlechte Abschneiden deutscher Schüler bei den internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA sind die Qualität des Mathematikunterrichts und die Qualifizierung der Mathematiklehrer in die öffentliche Kritik geraten“, erklärt Klaus Kinkel, Vorsitzender der Deutsche Telekom Stiftung. „Mit unserem Projekt wollen wir dazu beitragen, dass junge Menschen mit dem Berufsziel Mathematiklehrer jetzt sehr konzentriert auf dieses Ziel hinarbeiten können. Wir sind überzeugt, dass davon auch die Schüler profitieren und die Mathematik so ihren Ruf als Schreckensfach verlieren kann.“

Ziel des von der Stiftung unterstützten Forschungs- und Entwicklungsprojekts unter Leitung von Professor Dr. Albrecht Beutelspacher (Gießen) und Professor Dr. Rainer Danckwerts (Siegen) ist die stärkere Ausrichtung des Studiums an dem angestrebten Berufsfeld. Während sich für künftige Diplom-Mathematiker nichts ändert, absolvieren angehende Gymnasiallehrer in Gießen und Siegen jetzt ein eigenständiges und speziell an den späteren Anforderungen ausgerichtetes Grundstudium. Besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der frühen Eingliederung fachdidaktischer Ausbildungskomponenten. Entscheidend ist, dass die Studierenden von Anfang an in ihrem eigenen Lernprozess erleben, wie mathematisches Wissen entsteht. So soll erreicht werden, dass sie später ihren Unterricht nach Prinzipien des aktiv-entdeckenden Lernens gestalten können. „Darüber hinaus wollen wir in Gießen auch durch die Einbindung unseres interaktiven Mathematikmuseums – des ‚mathematikums' – das Interesse der Studierenden am Lehrerberuf wecken", erläutert Professor Beutelspacher. Und Professor Danckwerts ergänzt: „Wir hoffen, dass die grundsätzliche Neuorientierung der Vorbereitung künftiger Lehrerinnen und Lehrer letztlich auch den Schülern den Zugang zur Mathematik neu eröffnet und sie für das Fach gewinnt."

Kontakt:
Deutsche Telekom Stiftung
Andrea Servaty
Tel.: 0228 - 181 92205
Fax: 02151 – 366 00 894
andrea.servaty@telekom.de
www.telekom-stiftung.de

Top-Projekt für Siegen und Gießen

Mathematik für Gymnasiallehrer an der Uni anders vermitteln / Telekom-Stiftung zahlt

Mit großem Engagement treiben die Professoren Dr. Rainer Danckwerts (Mitte) und Dr. Wolfgang Hein (links) das Projekt einer Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik an der Universität Siegen voran. Thomas Mockenhaupt (rechts) ist wissenschaftlicher Mitarbeiter und Koordinator des Projekts. *Foto: dima*

ewi **Siegen.** Ein eigenes Grundstudium für künftige Mathematik-Gymnasiallehrer bieten seit Beginn des Wintersemesters die Universitäten Siegen und Gießen an. Das bemerkenswerte Projekt, für das die Professoren Dr. Albrecht Beutelspacher (Gießen) und Dr. Rainer Danckwerts (Siegen) die Unterstützung der Telekom-Stiftung gewinnen konnten, soll einem alten Mangel in der universitären Vermittlung der Mathematik abhelfen.

Seit Jahrzehnten müssen Studienanfänger in Mathematik damit fertig werden, dass zwischen der vertrauten Schul- und der nachfolgenden Hochschulmathematik ein teilweise schockierender Bruch auftritt: Während die Schule das mathematische Denken eher lebensnah bis hin zu höheren Anwendungsformen entwickelt, wählt die Hochschulmathematik den Zugang deduktiv von Axiomen aus und damit buchstäblich so „trocken", dass vielen jungen Menschen die von der Schule mitgebrachte Leidenschaft nur zu oft „erfolgreich" ausgetrieben wird.

Aus Sicht ungezählter Didaktiker war dies immer ein gravierendes Manko. Beutelspacher und Danckwerts aber haben nach dem schlechten Abschneiden deutscher Schüler in den internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA mit ihrem entsprechenden Antrag bei der Deutschen-Telekom-Stiftung Gehör gefunden. Deren Vorsitzender, der frühere Bundesaußenminister Klaus Kinkel, teilte dazu gestern in einer Presseerklärung mit, die Stiftung wolle „dazu beitragen, dass junge Menschen mit dem Berufsziel Mathematiklehrer jetzt sehr konzentriert auf dieses Ziel hinarbeiten können. Wir sind überzeugt, dass davon auch die Schüler profitieren und die Mathematik so ihren Ruf als Schreckensfach verlieren kann". Dabei sollen die künftigen Mathematik-Lehrer – anders als die Diplom-Mathematiker – im Kern „von Anfang an ihren eigenen Lernprozess" mit im Auge behalten, damit sie diese Erfahrung später bei der Vermittlung an ihre Schüler beherzigen.

Das Gesamtprojekt ist in zwei Teilprojekte aufgeteilt: In Gießen beginnt das (neue) Grundstudium mit Geometrie und Algebra, in Siegen dagegen mit Analysis, zu der vor allem Differential- und Integralrechnung zählen. Prof. Dr. Danckwerts wird hier von seinem Kollegen Prof. Dr. Wolfgang Hein maßgeblich unterstützt, der nicht zuletzt Experte für die Geschichte der Mathematik ist. „Wir wollen, dass die Mathematik nicht als fertiges Produkt vorgesetzt wird, sondern dass man sieht, wie sich das entwickelt hat, also die Genese, und außerdem wie die interkulturellen Verflechtungen sind", erklärt Hein im Gespräch mit der SZ. Und Danckwerts erläutert ergänzend, es müsse eine Einheit von Fachwissenschaft und Fachdidaktik (d. h. die Vermittlung im Unterricht) angestrebt werden und dazu gehörten die verbindenden Prinzipien.

Nicht „produkt-, sondern eher prozessorientiert" geht es also in dem neu gestarteten Grundstudium zu, an dem sich in Siegen 50 Studienanfänger beteiligen. Auch Studenten in fortgeschritteneren Semestern hätten Interesse an einer Teilnahme gezeigt, berichtet Danckwerts. Deren Zulassung hätte jedoch das Ergebnis verzerren können. Das Projekt ist für zwei Jahre bewilligt, wobei noch offen ist, ob man mit den jetzt beteiligten Studenten auch deren zweites Studienjahr durchzieht, oder mit neuen Studenten die Ergebnisse des ersten Jahres überprüft.

Die eigentlichen Lernvorgänge werden dabei im ersten Semester aufgegliedert in eine Grundvorlesung Analysis mit Übung und eine zusätzliche Reihe „Schulanalysis vom höheren Standpunkt", in der eine (keineswegs triviale) neue Reflexion über die Schulanalysis einsetzt und so verbindende Prinzipien erkennbar werden. Die „Schulanalysis vom höheren Standpunkt" ist, das betonen die Professoren mit Nachdruck, keine fachdidaktische Veranstaltung, sondern eine fachwissenschaftliche.

Beide Veranstaltungsreihen werden in einem neuen Veranstaltungstyp zusammengefasst, den „Foren": Hier erkunden Übungsgruppen unter Anleitung und Begleitung geeigneter studentischer und wissenschaftlicher Hilfskräfte passende inhaltliche Angebote usw., welche den Lernprozess in bisher unbekannter Weise komplettieren. Die Professoren greifen bei diesen Foren nicht ein, sondern beobachten nur und besprechen später mit den Hilfskräften das weitere Vorgehen, nötige Korrekturen usw..

Der wissenschaftliche Mitarbeiter und Projektkoordinator Thomas Mockenhaupt, beim Gespräch mit der SZ anwesend, befasst sich ergänzend zu alledem mit Instrumenten zur Evaluation der Arbeit. Dazu dienen etwa quantitative und qualitative Erhebungen zu Beginn und zum Ende des Semesters, welche über erreichte Fortschritte Auskunft geben.

Im zweiten Semester tritt dann der fachwissenschaftlichen Veranstaltung zur Analysis eine didaktische Veranstaltung zur Seite. Didaktik ist nämlich in diesem neuen Typ von Grundstudium nicht mehr quasi ein Reparaturbetrieb, der erst in höheren Semestern Platz greift, sondern sie fügt sich dem Ganzen organisch ein.

Mit Blick auf den wesentlich erhöhten Personalaufwand dieses Grundstudiums werden freilich auch Zweifel geäußert. Einerseits müssen sich die Professoren selber verstärkt engagieren, die Arbeit der Hilfskräfte aber zahlt die Telekom-Stiftung, womit die Zukunft also nicht gesichert wäre, es sei denn, dass der Erfolg des Projekts vielleicht weithin überzeugt. Die Kollegen im Siegener Fachbereich Mathematik, so Danckwerts auf eine Frage der SZ, stehen dem Projekt jedenfalls sehr aufgeschlossen gegenüber.

„Das klingt gut"

sz **Siegen.** Wie beurteilt ein Mathematiker, der in der Forschung einen Namen hat, das Projekt einer Neuorientierung der Ausbildung von Gymnasiallehrern? Prof. Dr. Dr. h.c. Jörg Wills, der bislang namhafteste, inzwischen allerdings emeritierte Mathematiker der Universität Siegen, zeigt sich über das Anliegen der beiden Didaktiker, der Professoren Dr. Albrecht Beutelspacher (Gießen) und Dr. Rainer Danckwerts (Siegen) bei einer Anfrage sogleich informiert. „Das Projekt klingt gut", sagt er. Tatsächlich entferne sich die Weise, in der an deutschen Universitäten die Mathematik vermittelt wird, wohl zu sehr von den „Niederungen des normalen Lernens". Die Darstellungsweise erfolge vom Standpunkt der Forschung aus. Dagegen gebe es seit langem Bestrebungen – u. a. seitens des berühmten deutschen Mathematikers Felix Klein (1849 - 1925) –, die Lehrerausbildung anders anzulegen, sie mehr an der tatsächlichen Genese des Lernens auszurichten. Damit werde übrigens, so Wills auf eine Nachfrage, der Weg des Studierenden in die mathematische Forschung keineswegs verbaut.

Kordula Lindner-Jarchow

Mathelehrer made in Siegen/Gießen

Pilot-Projekt in der Mathematiklehrer-Ausbildung

Mit dem Fach Mathematik verbinden viele nicht die angenehmsten Erinnerungen an ihre Schulzeit. Der Geruch des Abstrakten, Schwerverständlichen, Theoretischen haftet dem Fach auch mit den Folgen an, die in den internationalen Vergleichsstudien deutschen Schülerinnen und Schülern schlechte mathematische Qualifikationen, und damit letztlich dem Mathematikunterricht mangelnde Qualität bescheinigen. Es zeichnet sich ein Kreislauf ab, in dem sich Defizite in der Lehrerausbildung mit fatalen Folgen in der Schule fortsetzen. Mit einem neuartigen Modell möchten der Siegener Mathematikdidaktiker Professor Dr. Rainer Danckwerts und sein Gießener Kollege Professor Dr. Albrecht Beutelspacher das Mathematikstudium für Gymnasiallehrer von Beginn an konsequent auf deren künftige Tätigkeit hin ausrichten.

Ermöglicht wird dieses innovative Forschungs- und Entwicklungsprojekt durch die Unterstützung der Deutschen Telekom Stiftung, deren Vorsitzender Dr. Klaus Kinkel bewirken möchte, „dass junge Menschen mit dem Berufsziel Mathematiklehrer jetzt sehr konzentriert auf dieses Ziel hinarbeiten können. Wir sind überzeugt, dass davon auch die Schüler profitieren und die Mathematik so ihren Ruf als Schreckensfach verlieren kann."

Ziel des Ansatzes ist eine stärkere Ausrichtung des Studiums an dem angestrebten Berufsfeld. Es drängt sich natürlich die Frage auf: ist die denn im konventionellen Studium bislang nicht gegeben? Auf diese vielleicht naive Frage hin holt Prof. Danckwerts tief Luft, bevor er auf einen eklatanten Bruch verweist, der die Sphären 'Schule' und 'Hochschule' voneinander trennt. Ist der vom Fach Mathematik begeisterte Schüler noch ambitioniert ein Lehramtsstudium anzustreben, trifft er in der Universität auf die abstrakte Fachwissenschaft Mathematik; er findet sich wieder zwischen angehenden Diplomanden, auf deren Ausbildungsziel das Lehrangebot inhaltlich und methodisch viel besser zu passen scheint. Der motivierte Lehramtsstudent sieht sich in der Universität plötzlich einem erratischen Block aus bereits scheinbar 'fertigem' mathematischem Wissen gegenüber, dessen Aufschlüsselung in später didaktisch anwendbares Erklärungswissen in der Diplomandenausbildung naturgemäß weniger wichtig ist. „Nach semesterlanger Begegnung mit deduktiv durchorganisierter Hochschulmathematik (Fachwissenschaft) empfindet der Student zunehmend eine Kluft zwischen dieser Mathematik und der, die er einmal unterrichten soll", so Prof. Danckwerts. Die Folge: ein defizitäres Selbstbild, da es Lehramtsstudierenden von vornherein strukturell erschwert ist, eine eigene, dem angestrebten Lehrerberuf entsprechende Identität als Fachvertreter zu finden. Das Gefühl, 'fünftes Rad' im Uni-Betrieb zu sein, teilen viele Lehramtsstudierende – übrigens nicht nur im Fach Mathematik. Und das ist dauerhaft keine gute Voraussetzung, in der Schule überzeugt und überzeugend zu wirken.

Prof. Dr. Rainer Danckwerts, FB Mathematik

Doch wie soll nun die Mathematiklehrerausbildung vom 'Kopf auf die Füße' gestellt werden? Die Defizite der gymnasialen Lehrerbildung im Fach Mathematik, so das Fazit Danckwerts, sind schließlich alt, gut beschrieben – und dennoch bleiben sie unverändert aktuell. Für Prof. Danckwerts, der über breite eigene Erfahrungen mit den Systemen Schule und Hochschule, als Lehrer und als Hochschullehrer verfügt, ist der Clou des nun in Siegen und Gießen erprobten Ansatzes ein radikaler Perspektivenwechsel, denn die Studierenden sollen vom Beginn ihres Studiums an ihren eigenen Lernprozess verstehen. Sie sollen – wie später ihre Schüler – die Mathematik nicht als fertiges Gebäude, sondern die Entstehung ihrer Fragen, Methoden und Ergebnisse im und mit dem Lernprozess nachvollziehen. Damit ist eine Wende von der Produktorientierung hin zur Prozessorientierung vollzogen. Und genau darin sieht der Siegener Mathematikdidaktiker den Unterschied zum fachwissenschaftlichen Studium mit seinen klassischen Deduktionen.

Wie das konkret aussieht? In Siegen und in Gießen haben zu Beginn des Wintersemesters Erstsemester mit dem speziell für angehende Lehrer ausgelegten neuen Grundstudium begonnen. In Siegen heißt das für 50 'Erstis': Fünf Tage in der Woche von 8 bis 10 Uhr die Veranstaltungen „Analysis I mit integrierten ideengeschichtlichen Anteilen" und mit neugestalteten Übungen sowie „Schulanalysis vom höheren Standpunkt" (wohlgemerkt, eine fachwissenschaftliche Veranstaltung!); die „Analysis I" liegt in der Hand von Professor Dr. Hein, dem Fachvertreter für die Geschichte der Mathematik. Ergänzt werden diese Veranstaltungen durch ein sog. „Forum" in der Mitte der Woche, das eine Brücke zwischen beiden Veranstaltungen schlägt und innerhalb dessen sich die Studierenden gemeinsam unter Anleitung studentischer und wissenschaftlicher Hilfskräfte eigenständig inhaltliche Probleme erarbeiten Professoren sind dabei in erster Linie Beobachter.

Wichtig ist es Danckwerts festzustellen, dass es keineswegs um eine Aufweichung des fachwissenschaftlichen Anspruchs geht. Im Gegenteil: Das nachvollziehende Verstehen ihrer Entstehung vermittelt auch das Verständnis für den Sinn von Mathematik als Hauptfach mit allgemeinbildender Funktion.

Damit rücken auch zwei weitere zentrale Ziele des Konzepts in den Blickpunkt: Lernen als evolutionärer Prozess wird zugleich befördert durch das soziale Erleben in der Gruppe. Dem tragen die Initiatoren noch zusätzlich Rechnung, indem sie die Siegener gemeinsam mit den Gießener Studierenden Tagungen veranstalten lassen, um ihre Ergebnisse präsentieren und diskutieren zu können. Im Zusammenhalt der Gruppe sehen Danckwerts und Beutelspacher einen wesentlichen Faktor bei der Herausbildung eines eigenen Lehrerselbstbewußtseins. „Eigentlich ist es ein Sozialisationsprojekt", so Danckwerts. Das auch noch Spaß macht und motivierend wirkt, denn die Zustimmung der Studierenden habe sich spätestens gezeigt, als auch das größte Siegener Schneechaos selbst an einem Freitag kaum am Erscheinen hinderte.

Diese Art der Lehrerausbildung bedeutet neben sorgfältiger spezieller Planung auch eine aufwendige Betreuung durch studentische und wissenschaftliche Mitarbeiter. Dass Siegen und Gießen mit diesem Modellversuch betraut wurden, bestätigt einerseits die Qualität der Siegener Lehrerbildung und ihre langjährigen Bemühungen im Bereich der Mathematikdidaktik. Weit über das benachbarte Bundesland Hessen hat sich das Gießener „mathematikum" als erstes interaktives Mathematikmuseum der Welt großes Renomee erworben. Dessen Begründer und jetzige Leiter des Gießener Grundstudiums Professor Dr. Albrecht Beutelspacher ist ein sowohl populärer als auch seriöser, preisgekrönter Wissenschafter. Beiden Mathematikdidaktikern ist es ein zentrales Anliegen, wissenschaftliche Mathematik, Schulmathematik, ihre Geschichte und Didaktik von Studienbeginn an miteinander zu verzahnen und damit Lehrer auszubilden, die als Multiplikatoren die Mathematik als bedeutenden Bestandteil unserer Kultur zu vermitteln verstehen.

Es versteht sich von selbst, dass ein derart ambitioniertes Projekt quantitativ und qualitativ evaluiert wird. Der Förderzeitraum durch die Telekom Stiftung ist auf zwei Jahre beschränkt und die Frage, die sich die Verantwortlichen stellen ist, ob man im zweiten Projektjahr mit den jetzigen Gruppen weiterarbeitet oder mit den Mitteln zum nächsten Wintersemester die Ergebnisse mit neuen Studienanfängern überprüft.

Frankfurter Allgemeine
ZEITUNG FÜR DEUTSCHLAND

Donnerstag
8. Juni 2006

Die Telekom antwortet auf Pisa

Eine Stiftung der Telefongesellschaft betreibt Nachwuchsförderung für den Technologiestandort Deutschland

bü. BONN, 5. Juni. Als Klaus Kinkel vor einigen Jahren an der Allenby-Brücke in Palästina stand, wunderte er sich über viele ungewöhnliche „Mercedes"-Modelle. Geschmückt mit dem Stern aus Stuttgart, passierten altersklapprige Karossen der unterschiedlichsten Hersteller die berühmte Brücke über den Jordan. Der Mercedes-Stern als Statussymbol für palästinensische und jordanische Autofahrer: Der frühere Bundesminister hat daraus seine persönliche Lehre für die Wahrnehmung Deutschlands gezogen. „Auch wenn wir uns selbst lieber als das Volk der Dichter und Denker sehen, im Ausland eilt uns an erster Stelle noch immer der Ruf einer Erfinder- und Technologienation voraus", sagte er im Gespräch mit dieser Zeitung. Und damit dies so bleibt, zieht der Exaußenminister als Vorsitzender der Deutsche Telekom Stiftung durch deutsche Lande und wirbt für bessere frühkindliche Bildung, Naturwissenschaften und Innovationen. Die Idee entstand vor ungefähr drei Jahren. Kinkel arbeitete als Anwalt für die Telekom und engagierte sich gleichzeitig in der Bosch- und in der Bertelsmann-Stiftung. Der damalige Telekom-Chef Ron Sommer griff Kinkels Anregung begeistert auf; die Gründung der Stiftung war aber seinem Nachfolger Kai-Uwe Ricke vorbehalten, der sie ein Jahr später ins Leben rief.

Die Telekom-Stiftung ist die jüngste der größten deutschen Unternehmensstiftungen. Den Grundstock bildete eine erste Einlage auf das Stiftungsvermögen von 25 Millionen Euro, das inzwischen auf 100 Millionen Euro aufgestockt worden ist. Hinzu kamen in den ersten beiden Jahren 2004 und 2005 laufende Zuwendungen von insgesamt 18,2 Millionen Euro. Stiftungszweck ist, wie es sich für einen Technologiekonzern gehört, die „Förderung von Bildung, Forschung und Technologie". Der Schwerpunkt liegt dabei eindeutig auf dem Thema Bildung: von der Frühförderung bis zum Stipendiatenprogramm für den wissenschaftlichen Nachwuchs.

Ihr Hauptziel ist es, neue Begeisterung für die unter deutschen Schülern und Studenten unbeliebten mathematischen und naturwissenschaftlichen Studiengänge und Berufe zu entfachen. Das ist nicht nur Altruismus, sondern auch ein bißchen Nachwuchsförderung für den eigenen Konzern. Kinkel und seine fünfzehnköpfige Mannschaft in Bonn, die von Stiftungsgeschäftsführer Ekkehard Winter geleitet wird, beginnen mit ihrer Antwort auf Pisa ganz unten: bei der frühkindlichen Bildung im Kindergarten und in der Grundschule. „Da haben wir ein Alleinstellungsmerkmal, das macht in dieser Form keine andere deutsche Stiftung", sagt Kinkel. Als ihren Beitrag gegen die deutsche Bildungsmisere hat die Stiftung eine lange Liste schulischer Projekte entwickelt. Sie reicht von einer „Junior-Ingenieur-Akademie" bis zur Förderung besonders begabter und leistungsbereiter Schüler, die noch vor dem Abitur ihre ersten Uni-Scheine machen.

Richtig in Rage reden kann sich der Jurist Kinkel über den Mathematikunterricht an deutschen Schulen. Das „Schreckensfach" verdanke seinen schlechten Ruf der mangelhaften didaktischen Ausbildung vieler Lehrer: „In Deutschland kommt jeder Mathematiker, der sonst nichts findet, in der Schule unter." Die Telekom-Stiftung will mit ihrem Projekt „Mathematik Neu Denken" gegensteuern. Das Forschungs- und Entwicklungsvorhaben an den Universitäten Gießen und Siegen zielt auf eine bessere Ausbildung der Mathematiklehrer an Gymnasien, um so die Qualität des Unterrichts zu steigern. Das Vorhaben habe eine riesige Resonanz gefunden und werde nun auf weitere Universitäten übertragen, berichtet Kinkel.