Begabtenkurs

Gabriele Wickel & Katja Lengnink

SoSe 2008

Ahmet Altindas, Katharina Baumgärtner, Frank Dormann, Christian Eisen, Katrin Goldbach, Friederike Halm, Linda Hundt, Linda Huse, Kirsten Kölzer, Nicole Lötte, Giulia Nanni, Verena Sadel, Linda Schmidt, Sarah Schreiber, Claudia Sieper, Alexander Sippel, Nadja Stecker, Alexander Steup, Nadine terJung, Martin Ziegenberg

Redaktion & Gestaltung: Verena Sadel

Aufgaben (Lösung)

1. Arithmetisches / Algebraisches

2. Daten / Zufall / Kombinatorik

3. Geometrisches

4. Logik

5. Geschichtliches

Aufgaben

1. Arithmetisches / Algebraisches

1.1 Psephoi (Steinchen)

(Katharina Baumgärtner, Nadine terJung)

Die Steinchen-Arithmetik war bereits den antiken Griechen bekannt.
Diese Methode wird auch Figurenrechnen oder Rechnen mit figurierten Zahlen genannt. Dabei werden Zahlen durch verschiedene Objekte (Steinchen) dargestellt. Diese werden in einer Reihe angeordnet oder in geometrischen Figuren wie Quadrat, Rechteck oder Dreieck. Damit lassen sich nicht nur Zahlen, sondern auch Rechenverfahren und mathematische Sätze anschaulich machen.

Quadratzahlen

Mit Hilfe der Steinchen konnten Quadratzahlen gelegt werden. Diese können folgendermaßen ausgesehen haben:

```
          ○ ○
  ○       ○ ○     ...
```

Wie könnten diese Zahlen gebildet worden sein?
Wie sehen die nächsten Zahlen aus?

Dreieckzahlen

Auch Dreieckzahlen konnten mit den Steinchen gelegt werden. Wie könnten diese ausgesehen haben? Wie wurden diese gebildet?

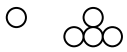
Untersuche nun, welcher Zusammenhang zwischen Dreieck- und Quadratzahlen besteht! Was entdeckst du?

Turm

Es gibt auch noch eine weitere interessante Form, die sich mit Steinchen legen lässt. Sie stammt jedoch nicht von den alten Griechen. Diese Form sieht aus wie ein kleiner Turm oder eine Pyramide.

Wie könnten diese Zahlen gebildet worden sein?

Wie sehen die nächsten Zahlen aus?

 **…**

Gibt es Gemeinsamkeiten zwischen dem Turm und den Quadrat- oder Dreieckszahlen?

1.2 <u>Die Autobahn</u>

(Martin Ziegenberg)

Der Bau von einem Kilometer einer sechsspurigen Autobahn kostet etwa 10 Millionen €.

a) Stell dir vor, du bekommst 15 € Taschengeld im Monat und möchtest davon ein Stück Autobahn kaufen.

- Wie viel kannst du dir von deinem Taschengeld kaufen?
- Wie lange musst du für einen Meter sparen, wenn deine 15 € nicht reichen?

b) Überlege, wenn deine Eltern 2500 € im Monat verdienen würden:

- Wie viel Autobahn könnten sie sich davon kaufen?
- Wie lange müssten sie für einen Meter Autobahn sparen?

c) Wenn euer Auto 20.000 € kostet, würde das reichen, um einen Meter zu kaufen?

- Wenn ja, für wie viele Meter würde es reichen?

d) Rechne wie in Aufgabe c)

- jetzt alles mit eurem Haus (300.000 €),
- sowie mit eurer Schule (4.000.000 €).

e) Aus Aufgabe a) weißt du, wie viel ein Meter Autobahn kostet. Nun überlege:

- Was kostet ein Quadratzentimeter Autobahn?
- Was kostet ein Quadratmeter Autobahn?

f) Stell dir vor, du bist Bürgermeister und möchtest ein Autobahnstück mit 10 Kilometer Länge bauen. Dies würde dich sehr viel Geld kosten. Was würdest du tun, um das Geld wieder zu verdienen? Hätte deine Autobahn zwei oder drei Spuren?

1.3 Magische Quadrate

(Kirsten Kölzer)

Bei den magischen Quadraten sollen die Summen der Zahlen in den einzelnen Spalten, Zeilen und Diagonalen gleich sein.

a) Wie löst man das folgende magische Quadrat?

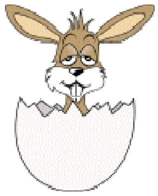
8			6
	7		5
4		4	
	5		3

b) Kann man ein magisches Quadrat aus vier oder fünf aufeinander folgenden Zahlen konstruieren?

c) Entwirf ein magisches Quadrat, bei dem die Summe der Zahlen in den Spalten, Zeilen und Diagonalen jeweils 24 ist.

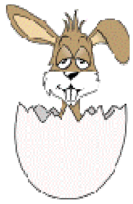
1.4 Kaninchen

(Frank Dormann)



Ein Forscher setzt am 1. Januar 2008 auf einer ansonsten unbewohnten Insel ein Pärchen neugeborener Kaninchen aus. Das Kaninchenpärchen braucht zunächst einen Monat um erwachsen zu werden. Nach genau zwei Monaten auf der Insel bekommt das Pärchen dann seinen ersten Nachwuchs: Ein neues Kaninchenpärchen. Von nun an bekommen die Kaninchen jeden Monat Kinder und zwar immer genau ein neues Kaninchenpärchen. Jedes der neugeborenen Kaninchenpärchen bekommt nun ebenfalls nach zwei Monaten sein erstes Pärchen Junge und erhält nun jeden Monat je ein neugeborenes Kinderpärchen.

a) Wie viele Kaninchen wird der Forscher nach genau einem Jahr auf der Insel finden, wenn er am 1. Januar 2009 wiederkommt? Finde dazu selbst einen geeigneten Weg, um die Aufgabe zu lösen.



b) Das Beispiel mit den Kaninchen ist zwar anschaulich, aber unrealistisch. Warum?

1.5 Gedankenlesen

(Linda Huse, Nadja Stecker)

"Ich kann eure Gedanken lesen!" erklärt Miriam ihrer Freundin Sina.

"Denke dir eine Zahl. Multipliziere sie mit 10. Addiere 4. Multipliziere das Ergebnis mit 2 und addiere hierzu 12. Jetzt multiplizierst du das Ergebnis mit 5. Und nun, nenne mir dein Ergebnis!"

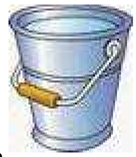
Sina antwortet: "Ich habe 1400 ausgerechnet." Miriam bestimmt sofort die gedachte Zahl: "Dann hast du dir die Zahl 13 ausgedacht."

Und das gelingt Miriam immer. Und Dir?

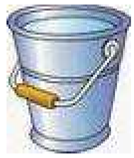
1) Erkläre den Trick!
2) Überlege dir auch einen mathematischen Zaubertrick!

1.6 Wassereimer

(Linda Huse, Nadja Stecker)



a) In einem Eimer befinden sich 2 Liter Wasser mehr als in einem gleichartigen Gefäß. Gießt man nun aus dem ersten soviel in den zweiten, wie schon darin sind, danach soviel aus dem zweiten in den ersten, wie darin sind, dann enthalten beide Eimer gleich viel Liter Wasser.



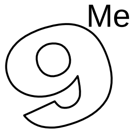
Wie viel Wasser ist am Schluss und wie viel war zu Beginn in den Eimern?

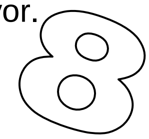
b) Wie kann man aus einer Regentonne genau 6 Liter Wasser herausholen, wenn man nur zwei Gefäße hat, einen 4-l-Eimer und einen 9-l-Eimer, um damit zu messen?

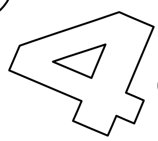
1.7 Eine merkwürdige Telefonnummer

(Katharina Baumgärtner, Nadine terJung)

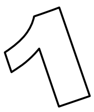
Meine Telefonnummer hat 10 Stellen und jede Ziffer kommt genau einmal vor.



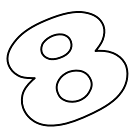


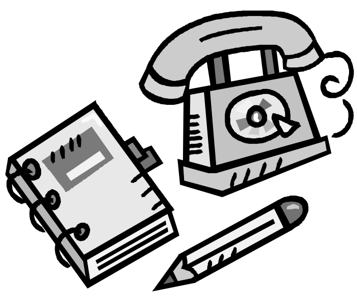


Die erste Stelle ist durch 1 teilbar,
die Zahl aus den ersten beiden Stellen durch 2 teilbar,
die aus den ersten drei durch 3 …!



Wie heißt meine Zahl?





1.8 Die Hängebrücke

(Ahmet Altindas)

Vier Wanderer müssen über eine unbeleuchtete Hängebrücke gehen. Es dürfen zur gleichen Zeit immer nur 2 Personen gehen. Es steht nur eine Taschenlampe zur Verfügung und für jede Überquerung brauchen Sie unbedingt eine Taschenlampe, die leider nur 60 Minuten brennt. Die vier Wanderer brauchen für den Weg über die Brücke eine unterschiedlich lange Zeit, (die Gehzeit zählt für jede Überquerung, egal ob hin oder zurück).
Wanderer A braucht 5 Minuten
Wanderer B braucht 10 Minuten
Wanderer C braucht 20 Minuten
Wanderer D braucht 25 Minuten
Gehen zwei Wanderer zusammen, zählt immer die Gehzeit des Langsamsten.

Wie gelangen die vier Wanderer über die Brücke?

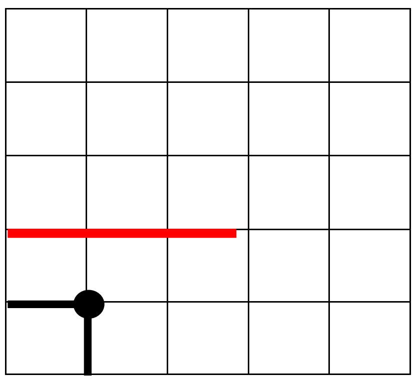
2. Daten / Zufall / Kombinatorik

2.1 Das Rechteckspiel

(Friederike Halm, Linda Hundt)

Dieses Spiel wird auf einem 5x5-Punkte-Feld gespielt. Der erste Spieler entscheidet sich für einen beliebigen Punkt. Alle Punkte die links von diesem Punkt liegen und alle Punkte die unterhalb liegen werden als nicht mehr vorhanden betrachtet. Nun wechseln sich die Spieler in ihren Zügen ab.
Verloren hat derjenige Spieler, der sich mit dem letzten Punkt in der rechten oberen Ecke begnügen muss.

a) Entwickle eine Strategie, damit du immer gewinnst!
b) Nun vergrößere das Punkte-Feld. Kannst du immer noch mit deiner entwickelten Strategie gewinnen?



2.2 Die Würfelschlange

(Friederike Halm, Linda Hundt)

Zuerst würfelst du mit allen 60 Würfeln und legst diese dann in beliebiger Reihenfolge in einer langen Schlange hintereinander. Nun musst du die Augenzahl der Würfel entlang der Reihe abzählen. Das bedeutet du nimmst den ersten Würfel und geht so viele Würfel weiter, entlang der Schlange, wie Punkte oben auf dem ersten Würfel sind. Von dort aus nimmst du die Augenzahl des betretenen Würfels und gehst die Anzahl der Augen des betretenen Würfels weiter. Dies machst du so lange bis du beim letzten Würfel angelangt bist, dessen Augenzahl du nicht mehr abzählen kannst. Die restlichen Würfel entfernst du.

a) Nun würfele nur mit dem ersten Würfel noch einmal und mach das gleiche Spiel von vorne. Was fällt dir auf? (Wenn du möchtest kannst du es noch einmal probieren.)

b) Nimm diesmal nur 10 Würfel und probier es noch einmal aus. Was fällt dir diesmal auf?

c) Woran könnte der Effekt liegen, den du herausgefunden hast?

2.3 100 Gewinnt

(Sarah Abele, Nicole Lötte)

***Zufall*?** 5 18 1

Das Spiel "**Hundert gewinnt**" könnt ihr zu zweit spielen. Gespielt wird abwechselnd.

Jeder Spieler, der an der Reihe ist, wählt eine Zahl zwischen 1 und 8 und nennt diese Zahl.

Die Zahl wird dann zur Summe der bisher genannten Zahlen addiert.

Es gewinnt derjenige, der die Summe 100 erreicht.

Spielt das Spiel zwei- bis viermal durch und überlegt, ob es ein System gibt, wonach man dieses Spiel in jedem Fall gewinnen kann.

89 100 31 12 75

2.4 Der verflixte Würfel

(Linda Huse, Nadja Stecker)

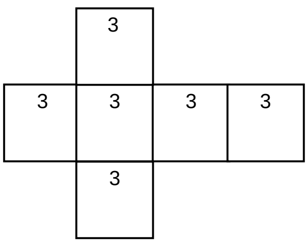
Ein Spieler bastelt sich 3 Würfel.
Die Seiten des roten Würfels tragen jeweils zweimal die Ziffern 2, 4, 9.
Die Seiten des blauen Würfels tragen jeweils zweimal die Ziffern 3, 5, 7.
Die Seiten des gelben Würfels tragen jeweils die Ziffern 1, 6, 8.

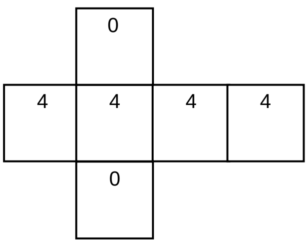
Die Summe der Seiten dieser Würfel war stets gleich und dennoch war sich jeder Spieler sicher, einen Würfel aussuchen zu können, der ihm eine bessere Chance gab. Allerdings nur dann, wenn er seinen Gegner zuerst einen Würfel auswählen ließ.
Erkläre es!

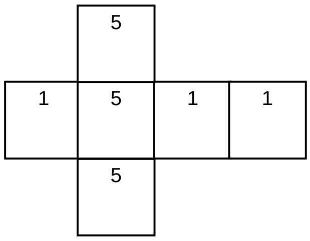
2.5 Merkwürdige Würfel

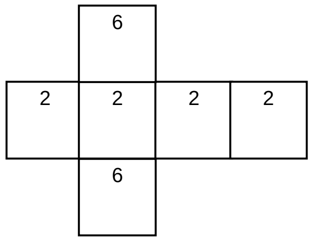
(Linda Schmidt, Claudia Sieper)

Es spielen immer zwei von euch gegeneinander. Zu Beginn des Spiels darf sich der jüngere Spieler einen Würfel aussuchen. Danach darf sich der andere Spieler einen der übrigen Würfel nehmen. Es wird 11-mal abwechselnd gewürfelt. Die höhere Zahl gewinnt. Notiert das Ergebnis nach jedem Wurf. Probiert dies ein paar Mal aus.









Mit welchem Würfel hat man die größte Chance zu gewinnen? Mit welchem verliert man vermutlich?

2.6 Die Affen

(Linda Schmidt, Claudia Sieper)

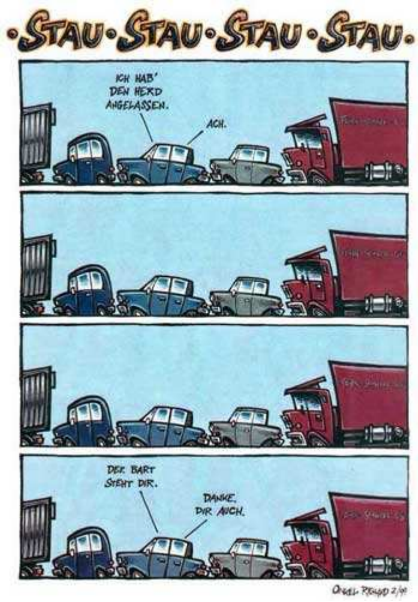
Letzten Sonntag waren Sarah, Lena und Daniel im Zoo. Sie hatten einen großen Beutel voll mit Erdnüssen dabei und wollten die Affen füttern. Sie liefen so schnell sie konnten zum Affenkäfig. Doch schon nach einiger Zeit setzten sie sich traurig nebeneinander auf eine Bank. Als ihre Mutter sie fragte, was denn los sei, antworteten sie:
„Wir wollten die Nüsse gerecht unter den Affen aufteilen, aber es geht nicht. Im ersten Käfig sind 11 Schimpansen, im zweiten 13 Paviane, im dritten 17 Gibbons. Wenn wir jedem Affen die gleiche Anzahl an Nüssen geben, so bleiben ein paar davon übrig. Aber auch wenn wir nur den Schimpansen, oder nur den Pavianen und den Gibbons die Erdnüsse geben, bleiben jeweils welche übrig.“
„Verteilt doch die Nüsse in nur einem Käfig“, schlug ihre Mutter vor. „Das geht auch nicht“, sagte Daniel, „Wenn wir die Nüsse unter den Schimpansen aufteilen, bleibt eine Nuss übrig, verteilen wir sie an die Paviane, bleiben 8 Nüsse übrig, und bei den Gibbons bleiben 3 übrig.“
„Ich habe eine Idee. Ihr verteilt die Nüsse so weit es geht an alle Affen, und die restlichen Erdnüsse esse ich.“, sagte die Mutter schließlich. Diese Idee fanden die Kinder toll.
„Dann bist du unsere vierte Affenart, Mama!“, meinte die kleine Lena.

Aufgabe:
Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Erdnüssen, die im Sack gewesen sein könnte?

(Mögliche Hilfestellung:
Wie viele Nüsse bleiben übrig, wenn man die N-Nüsse an die elf Schimpansen verteilt?)

2.7 Stau auf der Autobahn

(Christian Eisen)



Zu Beginn der Sommerferien geraten viele Menschen, die auf dem Weg in den Urlaub sind, wie jedes Jahr in Staus auf der Autobahn. Nur sehr mühsam kommen sie voran. Der längste Stau an diesem Tag ist auf der A1 zwischen Hamburg und Bremen mit 4 Kilometern!

Aufgaben:

a) Wie viele Fahrzeuge stehen in dem Stau? Gib zuerst eine Schätzung ab!
b) Wie viele Personen sitzen wohl insgesamt in den Fahrzeugen?
c) Wie groß wäre die Fläche, würde man die gesamten Fahrzeuge in einem Quadrat oder Rechteck anordnen?

2.8 Zahlenraten

(Alexander Sippel, Alexander Steup)

I.) Berechne die folgenden Differenzen! Bestimme dann die Quersumme des Ergebnisses! Was fällt dir auf?

1) 31 – 13 =
2) 534 – 435 =
3) 7542 – 5427 =
4) 5674321 – 3215674 =

II.) Denke dir selbst eine Aufgabe nach dem Schema in Aufgabe I.) aus!

III.) Sage zu deinem Freund:
'Schreibe eine beliebige Zahl auf, sie kann vierstellig, achtstellig oder zehnstellig sein. Schüttele diese Zahl gut durcheinander, d.h. schreibe dieselben Ziffern in einer anderen

Reihenfolge.
Subtrahiere die kleinere Zahl von der größeren und streiche irgendeine Ziffer aus dem Ergebnis, aber bitte keine NULL, falls eine darin vorkommt.
Schreibe das Ergebnis ohne die gestrichene Zahl auf.'

Er schreibt auf: 3703754

Aha, 3703754 !

(Frage: Wie lautet die gestrichene Zahl?)

3. Geometrisches

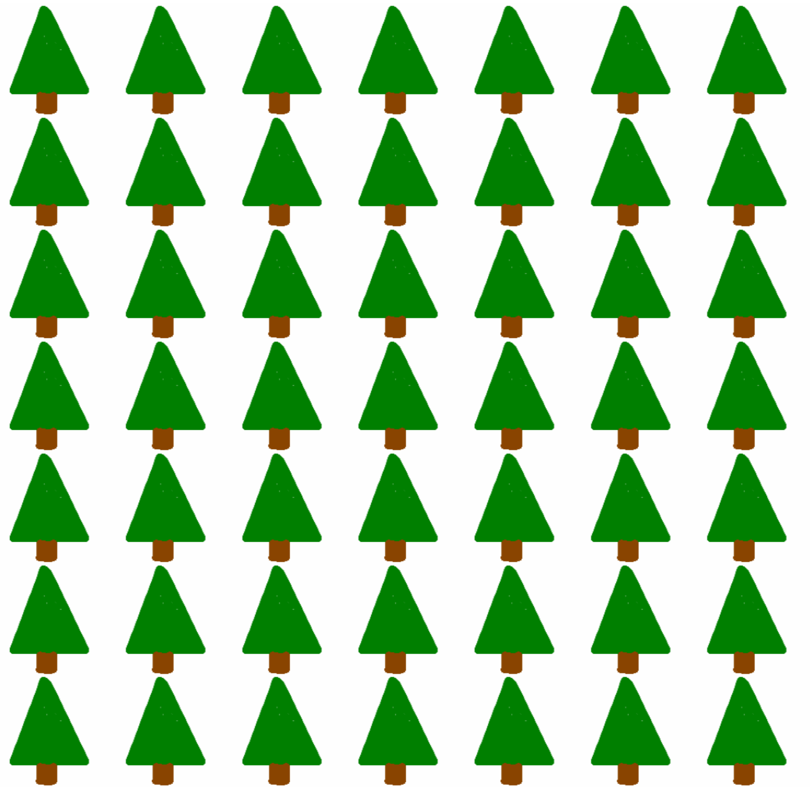
3.1 <u>Toblerone</u>

(Kirsten Kölzer)

Stell dir vor, du bist Produktdesigner bei KRAFT. Deine Aufgabe besteht darin, zu berechnen, wie viele Schokoladenstücke maximal in die Tobleroneverpackung passen. Wenn du mit der Berechnung fertig bist, setze dich mit deinem Team zusammen und vergleicht eure Ergebnisse.
Bastelt eure eigene Tobleroneschachtel und findet heraus, wie viele Schokoladenstücke maximal in eure Verpackung passen.

3.2 Wiederaufforstung

(Friederike Halm, Linda Hundt)



Ein Waldstück eines Forstamtes muss ausgelichtet werden.
Ursprünglich stehen auf einer 7 x 7 Fläche 49 Tannen.
Die Baumdichte soll von Waldarbeitern reduziert werden.
Die Waldarbeiter sollen ihrem Auftrag gemäß 29 Bäume fällen.
Die Bäume, die auf dem Gelände stehen bleiben, sollen
auf möglichst vielen Geraden mit je 4 Tannen stehen.

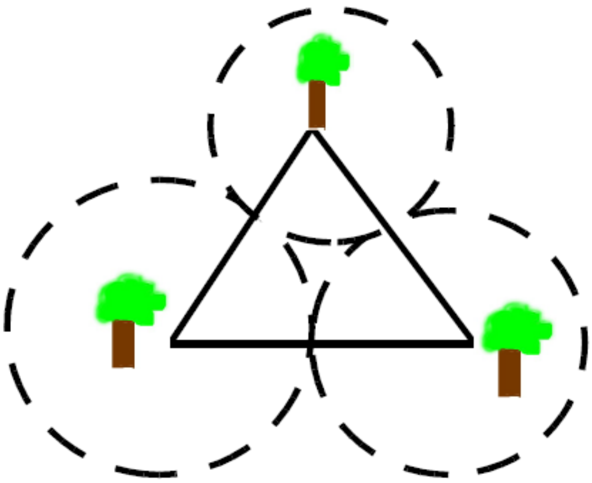
a) Wie viele Geraden mit je 4 Tannen kannst du einzeichnen, wenn du 29 Bäume von den 49 wie oben angeordneten Bäumen wegnimmst?

(Hinweise: Versuche möglichst viele Geraden zu finden. Die Geraden können kreuz und quer verlaufen. Jeder Baum kann auf mehreren Geraden liegen.)
Welche Bäume sind bei dir stehen geblieben?

b) Schaffst du es 18 Geraden mit je 4 Tannen zu finden?

3.3 Der Garten

(Friederike Halm, Linda Hundt)



Mein Nachbar Meister Blume rieb sich die Hände. Der alte Direktor Taler hatte ihn zu sich bestellt, und das bedeutete immer einen großen Auftrag für seine Gärtnerei. „Damit ist mein Urlaub finanziert“, meint er zu mir.

Gut gelaunt betrat er das teuer eingerichtete Arbeitszimmer in der Villa Taler. „Womit kann ich ihnen dienen, Herr Taler?“, fragt er. „Nehmen Sie erst einmal Platz, Meister Blume.“ Der alte Taler deutete auf einen Stuhl vor seinem Schreibtisch. „Ich möchte, dass Sie meinen Garten neu gestalten, und ich habe da schon einige Vorstellungen, wie er nachher aussehen soll.“ Direktor Taler nahm eine Zeichnung aus seinem Schreibtisch und schob sie dem Gärtner hin. „Sehen Sie, in meinem Garten stehen drei Bäume, eine Eiche, eine Buche und eine Linde. Ich habe sie zu den Geburten meiner drei Kinder gepflanzt. Und diese Bäume sollen das Gartenbild beherrschen. Darum möchte ich, dass Sie drei kreisförmige Rasenflächen anlegen, die einander berühren, und in deren Mittelpunkten die Bäume stehen. Den Rest des Gartens können Sie mit Blumen und Sträuchern bepflanzen.“

Meister Blume kratzte sich am Kopf und starrte auf die Zeichnung. Die drei Bäume waren voneinander 70, 80, 100 Meter entfernt. Geometrie war nicht gerade seine starke Seite, und er meinte nachdenklich: „Tja, ich weiß nicht so recht, ob das geht.“ Der alte Taler brauste auf. „Hören Sie, Meister Blum, ich zahle Ihnen viel Geld für ihre Arbeit, und ich will meinen Garten so haben, wie ich ihn mir vorstelle, und deshalb wird es auch gehen!“ Etwas kleinlaut sagte mein Nachbar, dass er es versuchen wolle und verabschiedete sich.

Zu Hause schloss er sich in sein Büro ein und brütete stundenlang über Direktor Talers

Zeichnung, ohne der Lösung auch nur einen Schritt näher zu kommen. Schließlich kramte er seinen alten Schulzirkel hervor und versuchte das Problem durch Ausprobieren zu lösen, aber ohne Erfolg. Er wollte gerade aufgeben und bei dem alten Taler anrufen, als sein Lehrling ins Büro kam. „Sie sehen ja so griesgrämig aus, Meister. Was ist passiert?“ Mein Nachbar erklärte ihm seine Sorgen, und der Lehrling meinte: „Kein Problem, Meister!“ Er setzte sich an den Schreibtisch, fing an zu rechnen und gab seinem Chef nach wenigen Minuten einen Zettel, auf dem drei Zahlen standen. „Bitte schön, das ist die Lösung!“

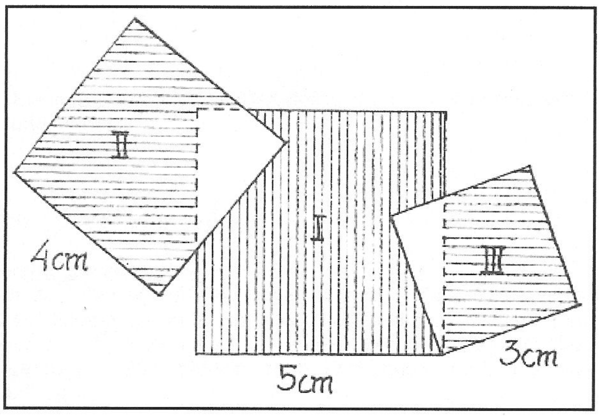
Kannst auch du Meister Blumes Problem knacken? Erkläre wie du zu deinem Ergebnis gekommen bist!
Wie wäre es, wenn der Garten kleiner wäre und die Bäume näher beieinander ständen? Kannst du dir weitere mögliche Entfernungen zwischen den Bäumen denken und die Größe der Kreise dazu bestimmen?

3.4 Die magischen Quadrate

(Giulia Nanni)

Denke dir 3 Quadrate mit den Seitenlängen 3 cm, 4 cm und 5 cm aus Kartonpapier ausgeschnitten und wie in der Abb.1 übereinander gelegt.

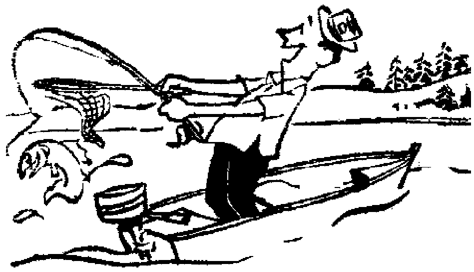
Welcher Flächeninhalt ist größer, der des Flächenstücks I oder der Inhalt der Flächenstücke II und III zusammen? Kannst du die Aufgabe lösen, ohne nachzumessen?



4. Logik

4.1 Wettangeln

(Sarah Abele, Nicole Lötte)



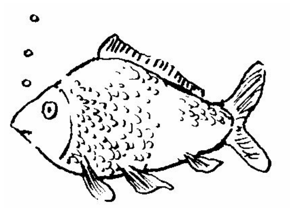
Lucas, Martin, Niklas und Peter wollen um die Wette angeln.

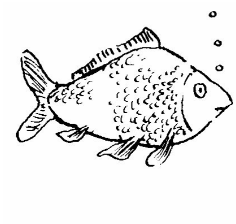
Nun kommt es ja nicht nur auf die Zahl der gefangenen Fische an, denn Fisch ist ja nicht gleich Fisch.

Deswegen werten sie einen gefangenen Hecht mit fünf Punkten, einen Barsch mit vier Punkten, eine Forelle mit zwei Punkten und eine Rotfeder mit einem Punkt.

Am Ende des Tages stand Folgendes fest:

1) Alle vier Fischarten wurden in diesem Wettbewerb gefangen.
2) Lucas fing nur einen Fisch, und zwar einen Hecht.
3) Insgesamt wurden drei Forellen geangelt.
4) Alle Angler zusammen kamen auf 18 Punkte.
5) Die wenigsten Punkte erhielt Martin, obwohl er die meisten Fische gefangen hatte.
6) Niklas und Martin hatten zusammen ebenso viele Punkte wie Lucas und Peter zusammen.
7) Alle hatten unterschiedliche Punktzahlen.





Was kannst du herausfinden?

4.2 <u>Gewichtiges</u>

(Alexander Sippel, Alexander Steup)

I.) Du hast neun Kugeln, die optisch nicht unterscheidbar sind. Acht sind gleich schwer, eine ist leichter. du sollst mit nur zwei Wägungen einer Balkenwaage herausfinden, welche die leichtere Kugel ist! Wie gehst du vor?





II.) du hast 10 Stapel mit je 10 Tafeln Schokolade. In neun dieser Stapel wiegen die Tafeln je 100 Gramm, aber die Tafeln eines Stapels wiegen je Tafel 110 Gramm (also 10g mehr als normale Tafeln).
du sollst nun durch das Abwiegen mit einer <u>elektronischen Waage</u> feststellen, welcher der 10 Stapel der Stapel mit den 110 Gramm Tafeln ist.
du darfst die Waage aber nur <u>einmal</u> benutzen! (wie viele Tafeln und von welchem Stapel du die Tafeln nimmst ist dir überlassen. Der Stapel mit den 110 Gramm Schokoladen muss an Hand der Grammanzeige ermittelt werden können.)

4.3 <u>Die Kunstsammler</u>

(Ahmet Altindas)

Drei Kunstsammlern ist es endlich gelungen, das schon so lang ersehnte Objekt zu ersteigern. Wer hat für welches Kunstobjekt wie viel Geld ausgegeben?

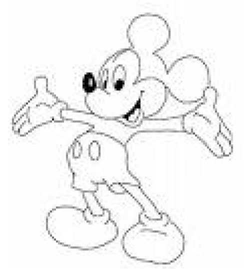
<u>Hinweise</u>**:**

1. Kurt ist ein großer Fan von Ringen. Er hat für den Ring weniger Geld ausgegeben als Herr Bruns.

2. Bernd hat sein Kunstobjekt für 750 € ersteigert.

3. Thomas hat kein Bild ersteigert. Er und Herr Müller haben für ihr Objekt einen anderen Betrag als 500 € ausgegeben.





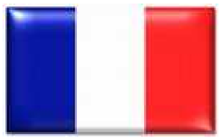
Wie heißen die Kunstsammler mit Nachnamen und wie viel haben sie für die Kunstwerke ausgegeben?

4.4 <u>Endlich Ferien!!!</u>

(Linda Huse, Nadja Stecker)

Anna, Svenja und Katrin haben Ferien. Als Reiseziele sind bekannt: ein kleines Dorf, das Meer, die Alpen, ein See, eine Ferienwohnung und Südfrankreich.





Weiterhin ist folgendes bekannt:

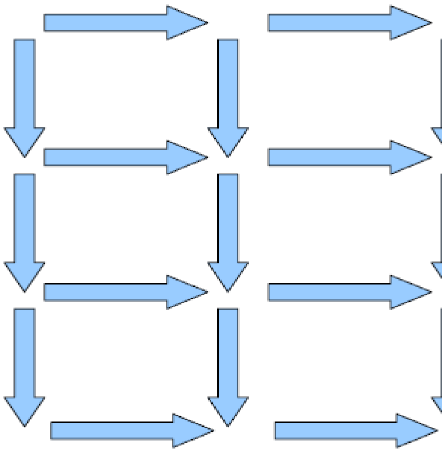
- Jedes Mädchen besucht genau zwei dieser Reiseziele, und jedes dieser Ziele wird von genau einem Mädchen besucht.
- Sowohl das Mädchen, das nach Südfrankreich fährt als auch das, das in die Ferienwohnung fährt, fahren mit dem Auto zu ihrem jeweiligen Ferienziel.
- In der Freizeit geht das Mädchen, das an das Meer fährt, das Mädchen, das an den See fährt und Anna gern schwimmen. Dabei gewinnt Katrin öfter das Wettschwimmen als das Mädchen, das nach Südfrankreich fährt und das Mädchen, das ans Meer fährt.

Wo genau verbringen die drei Mädchen ihren Urlaub?

4.5 Streichholzstation

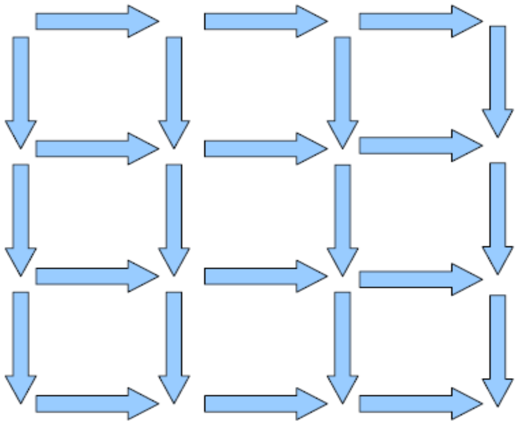
(Linda Schmidt, Claudia Sieper)

Streichholzrätsel Nr.1



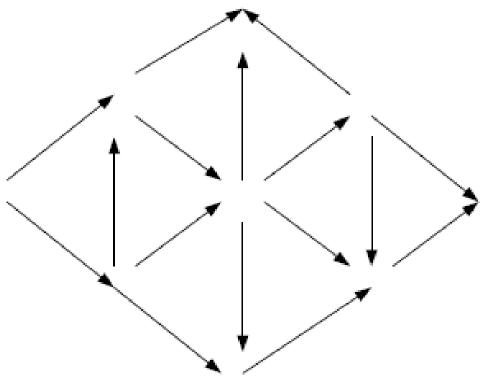
Hier siehst du 17 Streichhölzer.
a) Schaffst du es, 5 Streichhölzer so wegzunehmen, dass nur noch 3 gleich große Vierecke übrig bleiben?
b) Gibt es verschiedene Lösungen?
c) Warum geht es nur mit bestimmten Streichhölzern?

Streichholzrätsel Nr.2



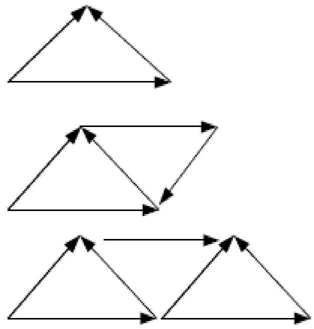
Hier siehst du 24 Streichhölzer.
a) Schaffst du es, 8 Streichhölzer so wegzunehmen, dass nur noch 2 Vierecke übrig bleiben? Die beiden Vierecke müssen nicht gleich groß sein.
b) Findest du vielleicht sogar verschiedene Lösungen?

Streichholzrätsel Nr.3



Hier siehst du 16 Streichhölzer.
a) Schaffst du es, 4 Streichhölzer so wegzunehmen, dass du genau 4 gleichgroße, gleichseitige Dreiecke erhälst?
b) Gibt es verschiedene Lösungen?
c) Warum geht es nur, wenn man ganz bestimmte Streichhölzer wegnimmt?

Streichholzrätsel Nr.4

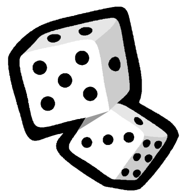


Nimm dir eine Schachtel Streichhölzer und lege Dreiecke wie auf dem Bild oben.
Für ein Dreieck brauchst du 3 Streichhölzer, für zwei Dreiecke 7 und so weiter. Leg immer mehr Dreiecke.

a) Wie viele Streichhölzer brauchst du für 4, 5, 6 Dreiecke?
b) Wie viele brauchst du für 10, wie viele für 11?
c) Und was passiert, wenn das Legen und Zählen ein bisschen schwer wird? Kannst du berechnen, wie viele Streichhölzer man für 39, 85 oder 100 Dreiecke braucht?
d) Gibt es einen Zusam,menhang zwischen der Anzahl der Dreiecke und der Anzahl der Streichhölzer?

4.6 Das Würfelskelett

(Katharina Baumgärtner, Nadine terJung)



Neulich kam Christina in das Arbeitszimmer ihres Vaters und drückte ihm ein Gebilde in die Hand, das man wohl am ehesten als Würfelskelett bezeichnen konnte. Es bestand aus 20 gewöhnlichen Spielwürfeln, die zu einem 3 · 3 · 3 – Würfel zusammengesetzt waren, bei dem der Zentralwürfel und die 6 Würfel in den Flächenmitten fehlten.

„Papi, sag mir mal, wie viele Augen insgesamt auf den 72 Würfelflächen zu sehen sind, die nicht durch aufgeklebte Würfel abgedeckt sind!“, forderte Christina ihren Vater auf. Der Vater begann zu zählen. Bei den 48 Flächen, die an dem Würfelskelett außen lagen, war es noch recht einfach, aber die 24 Flächen im Inneren des Skeletts bereiteten ihm ziemliche Mühe. Er vergaß beim Drehen des Skeletts leider immer wieder, welche Augen er schon gezählt hatte. Nach einigen Versuchen gab er auf.
Könnt ihr Christinas Vater helfen, das Rätsel zu lösen?

4.7 Symbolrätsel (1)

(Alexander Sippel, Alexander Steup)

Sicherlich kennst du Symbolrätsel, die man häufig in Rätselheften findet.
In einfachen Additions- und Subtraktionsaufgaben sind die Ziffern der vorkommenden Zahlen durch Symbole ersetzt. Gleiche Symbole bedeuten gleiche Ziffern, unterschiedliche Symbole sind unterschiedliche Ziffern und führende Nullen kommen nicht vor.
Aber warum findet man solche Rätsel immer nur für das Dezimalsystem, also für das Stellenwertsystem mit genau zehn Ziffern? Rechnen kann man doch auch im Oktalsystem (8 Ziffern), im System mit beispielsweise dreizehn oder mit sieben Ziffern. Deshalb gibt es für dich jetzt ein Rätsel im 7er-System.

Zur Erinnerung:
Das Dezimalsystem verwendet die Grundzahl (oder Basis) 10. Es ist heute das weltweit verbreitetste Zahlensystem und stammt ursprünglich aus Indien. Es dürfte seinen Ursprung in dem Umstand haben, dass der Mensch 10 Finger hat.
Die Zahl 157 wäre in diesem System also als $1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ dargestellt.

Im Siebenersystem sähe die Zahl etwas anders aus, nämlich so:
$157_{10} = 3 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 313_7$

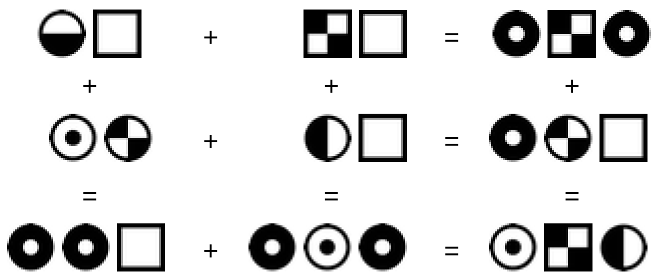
Es kommen im Siebenersystem also nur die Ziffern von 0 bis 6 vor. Dies wirkt sich natürlich auch auf Rechenaufgaben aus. So ist z.B. $6 + 1 \neq 7$ sondern
$6 + 1 = 10$, nämlich $1 \cdot 7^1 + 0 \cdot 7^0$

Damit du dich an das System etwas gewöhnen kannst, hier mal ein paar Rechenaufgaben.

3 + 2 =
5 + 4 =
12 + 6 =
66 + 1 =
134 + 11 =

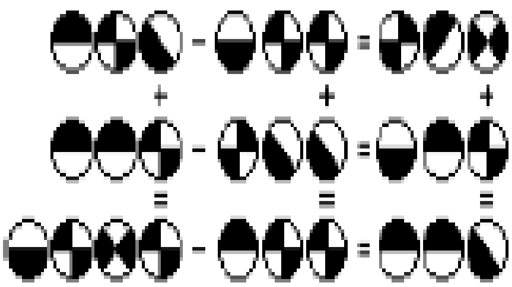
Stell dir mal vor, wir hätten statt unseren arabischen Ziffern folgende symbolische Ziffern, von denen jedes einer Ziffer von 0 bis 6 entspricht:

Versuche anhand folgender Rechnungen herauszubekommen, welches Symbol für welche Ziffer steht. Schreibe dabei auf, wie du vorgegangen bist, um auf die einzelnen Ziffern zu kommen. Unter die Symbole oben kannst du die dazugehörige arabische Ziffer eintragen. Hier die Rechenaufgaben:



4.8 <u>Symbolrätsel</u> (2)

(Sarah Abele, Nicole Lötte)



Ein Symbolrätsel ist eine Anordnung von Zeichen. Für Symbole müssen einstellige Zahlen gesucht werden, so dass sechs ineinander verschachtelte Gleichungen erfüllt sind.

Im Unterschied zu den Variablen in der gewöhnlichen Algebra bedeuten gleiche Symbole auch gleiche Zahlen, verschiedene Symbole verschiedene Zahlen.

4.9 Die Lügeninsel

(Ahmet Altindas)

Auf einer wenig bekannten Insel lügen die Männer immer montags, mittwochs sowie freitags und sagen an den anderen Tagen die Wahrheit. Die Frauen lügen immer nur am Donnerstag, Freitag und Samstag. Ein Forscher, der diese Eigenarten kennt, trifft an einem Morgen einen Mann und eine Frau. Auf die Frage nach dem heutigen Wochentag antwortet der Mann nach einigem Grübeln: "Gestern war für mich ein Lügentag." Die Frau ergänzt: "Ich habe gestern auch nur gelogen." An welchem Tag findet dieses Gespräch statt?

4.10 Der Barbier

(Giulia Nanni)

Ein Dorfbarbier bekam vom Bürgermeister des Dorfes in dem er lebte, den folgenden ungewöhnlichen Auftrag: er soll ein Jahr lang genau diejenigen Männer im Dorf rasieren, die sich nicht selbst rasieren können. Der beträchtliche Lohn wird nach Jahresfrist fällig, aber nur, wenn der Barbier seinen Auftrag exakt ausgeführt hat. Nach einem Jahr spricht der Barbier wieder vor und verlangt seinen Lohn. Der Bürgermeister fragt, wer ihn denn rasiert habe, da er keinen Bart trage. "Ich selbst natürlich", antwortet der Barbier.
Muss der Bürgermeister den Barbier bezahlen?
Wäre das Ergebnis das gleiche, wenn der Barbier sich selber nicht rasiert hätte?

5. Geschichtliches

5.1 Schatzsuche

(Kirsten Kölzer)

Vor vielen tausenden von Jahren ließ sich hier im Siegerland ein unbedeutender Wikingerstamm, den Halvar der Schreckliche anführte, nieder. Irgendwo hier in der Nähe hat Halvar seinen sagenumwobenen Schatz versteckt. Nun liegt es an euch, den Schatz mit Hilfe der Karte zu finden.
Jedoch hat die Sache einen Haken: Halvar und sein Stamm kannten nur die Zahlen von

0 bis 3. Statt Vier sagte man Eins-Null (geschrieben 10) und statt 10 sagte man Zwei-Zwei (geschrieben 22). Hier sind Stellenwerttabellen, die euch helfen sollen, Halvars Zahlensystem zu verstehen.

Stellenwerttabelle in unserem Zahlensystem

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
		8	2

Stellenwerttabelle in Halvars Zahlensystem

Vierundsechziger	Sechzehner	Vierer	Einer
1	1	0	2

Beispiel: Die Zahl 82 wird in unserer Stellenwerttafel und in Halvars Stellenwerttafel eingetragen. Bei Halvars Stellenwerttafel gehst du so vor: Wie oft passt die 64 in die 82? Einmal Rest 18. Die Eins wird in die Vierundsechzigerspalte eingetragen und nun verteilst du den Rest. 18 passt einmal in die Sechzehn und der Rest ist 2, also kommt eine Eins in die Sechzehnerspalte. 2 passt keinmal in die Viererspalte, also schreibst du eine 0 in die Viererspalte. Übrig bleibt der Rest 2, den du in die Einerspalte einträgst.

-> Die Zahl 82 wurde bei Halvars Stamm als 1102 dargestellt (gesprochen Eins-Eins-Null-Zwei).

Aufgabe

a) Lies die Schatzkarte und übersetze Halvars Angaben in unser Zahlensystem.

b) Vergleicht in eurem Team die Angaben und macht euch gemeinsam auf die Suche nach Halvars Schatz.

Stellenwerttafeln für die Umrechnungen

Halvars Zahlensystem

Vierundsechziger	Sechzehner	Vierer	Einer

Unser Zahlensystem

Zehner	Einer

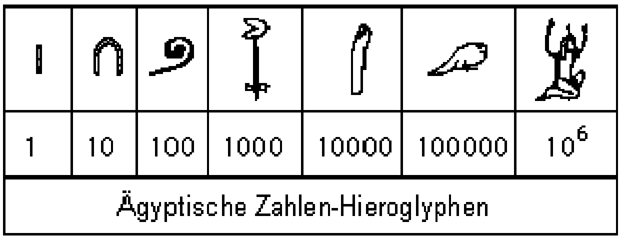
Halvars Schatzkarte

- Geh vom Startpunkt 32 Fußlängen nach Süden
- Dann beweg dich 203 Fußlängen nach Westen
- Danach geh 1111 Fußlängen nach Norden
- Nun wandere 131 Fußlängen nach Westen
- Jetzt geh 222 Fußlängen nach Süden
- Dann beweg dich 1100 Fußlängen nach Westen
- Darauf wandere 11 Fußlängen nach Süden
- Zuletzt geh 211 Fußlängen nach Westen und der Schatz ist dein!

5.2 Rechnen wie die alten Ägypter

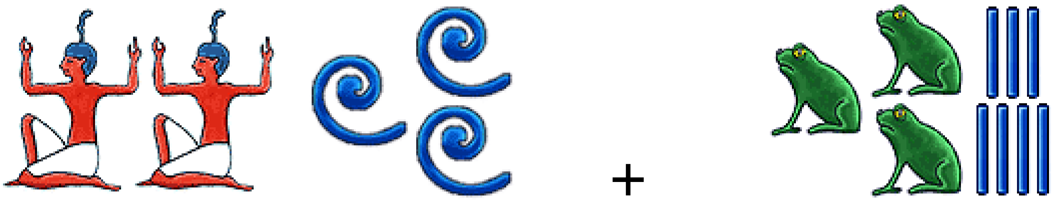
(Kirsten Kölzer)

Um die alten ägyptischen Steintafeln zu lesen, muss man nicht nur die Hieroglyphen entziffern können, sondern auch verstehen, wie die Ägypter gerechnet haben. Statt Zahlen haben die Ägypter verschiedene Symbole benutzt. Hier ist eine Tabelle mit ägyptischen Zahlzeichen.

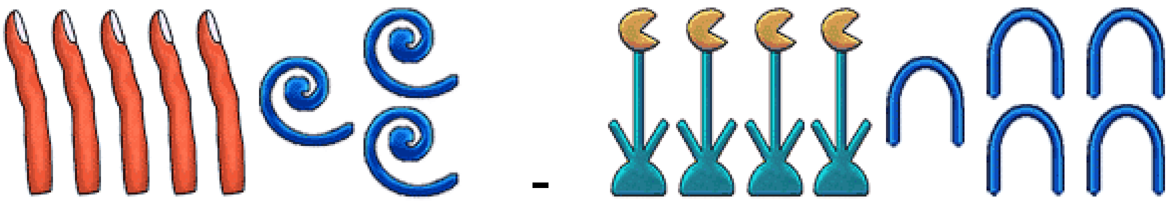


- **Stelle die Zahlen 1207098 und 567201 in ägyptische Zahlzeichen dar!**

- **Addiere folgende Symbole miteinander. Stelle die Summe in ägyptischen Zahlzeichnen und als „normale" Zahlen dar.**

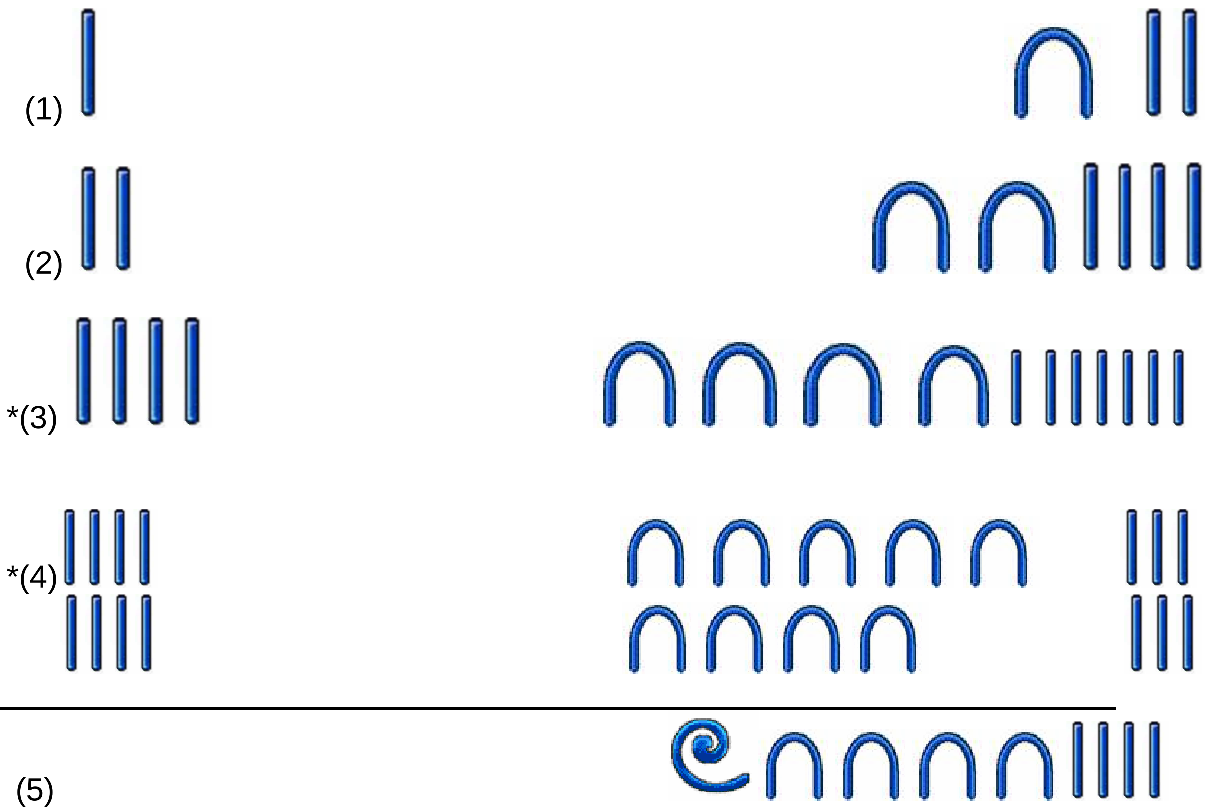


- **Subtrahiere folgende Symbole voneinander. Stelle die Summe in ägyptischen Zahlzeichnen und als „normale" Zahlen dar.**



Multiplikation

Bei der Multiplikation erhielten die Ägypter ihre Ergebnisse durch fortgesetztes Verdoppeln und Addieren. Um 12 x 12 auszurechnen, schrieben sie folgende Rechnung auf:



Die  und die  in Zeile (1) bedeuten 1 (mal 12 gleich) 12. In Zeile (2) wurden beide Zahlen verdoppelt 2-mal 12 gleich 24]. In der dritten Zeile wurden wiederum die Zahlen aus der zweiten Zeile verdoppelt 4-mal 12 gleich 48]. Die vierte Zeile wurde wiederum durch Verdoppeln erhalten 8-mal 12 gleich 96]. Die dritte und die vierte Zeile werden für die weitere Rechnung gebraucht, denn (4x12) + (8x12) sind 12x12. Das Endergebnis 144 aus Zeile (5) ergibt sich also, indem man die 48 aus der dritten Zeile und die 96 aus der vierten Zeile miteinander addiert.

12 x 12

	1	12
	2	24
*	4	48
*	8	96
		144

→ **Multipliziere wie die alten Ägypter folgende Zahlen miteinander**

i) 24 x 31 = ii) 17 x 14 =

e) **Division**: Für die Division verwendeten die alten Ägypter die fortgesetzte Addition. Auch die Rechnung gleicht derjenigen der Multiplikation. Hier ein Beispiel:

i. 216 : 12 =

1	12	
2	24	*
4	48	
8	96	
16	192	*
18		

*Wenn man diese Ergebnisse addiert, ist die Summe 216. Die 12 passt 18mal in die 216, da (16x12) +(2x12)= 18x12 (=216) *

Dividiere folgende Zahlen wie die Alten Ägypter

i) 315 : 15 ii) 748 : 22 =

f) Beschreibt mit eigenen Worten das Zahlensystem und die Rechenstrategie der Ägypter. Wo liegen die Vor- und Nachteile gegenüber unseren Zahlensystem und unserer Rechenweise.

5.3 Kryptogramme

(Sarah Abele, Nicole Lötte)

(1)

Ein Kryptogramm ist ein Aufgabensystem, bei dem jede Zeile und jede Spalte eine korrekte Aufgabe ergeben soll.

Dabei sind jeweils 2 Zahlen durch eine Grundrechenoperation (hier „+“) miteinander verknüpft.

Alle Ziffern der Zahlen werden durch Zeichen (hier „Buchstaben“) dargestellt.

Jedes gleiche Zeichen steht für die gleiche Ziffer; unterschiedliche Zeichen bedeuten unterschiedliche Ziffern.

Löse die folgenden Kryptogramme!
Die Buchstaben sollen bei jeder Aufgabe neu entschlüsselt werden, sie sind also nicht übertragbar.

1.

I
+ FEEL
GOOD

2.

MATHE
+ MACHT
GUTES

3.

ERNIE
+ ERNIE
STREET

(2)

1.

ARIE
+ ARIE
OPERA

2. S C H N E E
+ S C H N E E
W I N T E R

3. D R E I
+ D R E I
S E C H S

4. Kannst du dir selbst ein schönes Kryptogramm ausdenken?

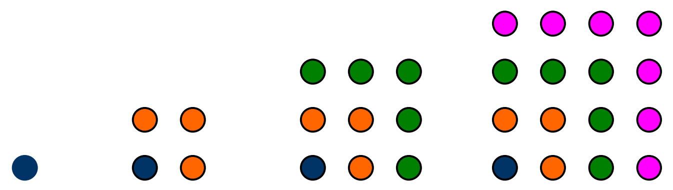
Lösungen

1. Arithmetisches / Algebraisches

1.1 **Psephoi-Steinchen** (Lösung):

Quadratzahlen:

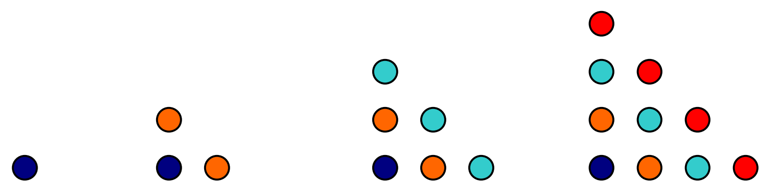
Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen



1 4 9 16 …

Dreieckzahlen

Die Summe von n aufeinander folgenden Zahlen



1 3 6 10 **…**

Es gibt verschiedene Zusammenhänge zwischen Quadrat- und Dreieckszahlen:

z.B.: Jede Dreieckszahl, die größer ist als 1, ist die Summe von zwei kleineren Dreieckszahlen und einer Quadratzahl.

1.2 **Die Autobahn** (Lösung):

zu a. 1) Für 10.000.000 € erhält man 1 km

1000 m = 100.000 cm = 1.000.000 mm Autobahn,

also 1 mm für 10 € oder 0,1 mm für 1 €
Man kann sich also 0,5 mm * 3 = 1,5 mm = 0,15 cm Autobahn für sein Taschengeld kaufen.

zu a. 2) 1 Meter = 100 cm = 1000 mm
1000mm Autobahn kosten 10.000 €. Dafür müsste man lange sparen:
10.000 / 15 = 2000 : 3 = 666 Monate, also 55,5 Jahre

zu b) Für 2.500€ erhält man 0,25 Meter Autobahn, man müsste also vier Monate dafür sparen.
10.000 € / 2.500= 0,25 m

zu c) Für das Auto kann man sich 2 Meter kaufen, (8 * 0,25 Meter)
wenn 2.500 € = 0,25 m ergeben und ein Auto 20.000 € kostet so erhält man:
20.000 / 2.500 = 8
<u>8 * 0,25 = 2</u>

zu d) für ein Haus kann man sich 30 Meter kaufen (15 * 2 Meter)
300.000 / 20.000 = 15
<u>15 * 2 = 30</u>

für ein Schulgebäude 400 Meter (200 * 2 Meter)
4.000.000 / 20.000 = 200
<u>200 * 2 = 400</u>

zu e) Eine sechsspurige Autobahn ist etwa 50 m breit.
Eine Fläche von 1 cm * 50 m = 1 cm * 5000 cm kostet 100 €, 1 Quadratzentimeter kostet also 100 € / 5000 = 10.000Cent / 5000 = 2 Cent

Eine Fläche von 1 Quadratmeter = 100 cm * 100 cm = 10.000 Quadratzentimeter aus der vorigen Rechnung folgt 10.000 * 2 Cent = 2 € * 100 = 200 €

zu f) Diese Aufgabe fordert die Eigeninitiative und spricht die Phantasie an. Es ist keine konkrete Lösung vorgegeben und daher sind jegliche Rechnung, bzw. Rechenschritte

und Überlegungen freigestellt. Die einzige Vorgabe lautet, mit den Überlegungen und Rechnungen auf die 10.000.000 € zu kommen.
Man könnte überlegen, ob man mit einem Mautsystem von den Autos und Lkws Geld einnimmt. Wenn man dies überlegt, müsste man sich etwa vorstellen wie viele Autos pro Tag die Strecke passieren, wie lange eine Refinanzierung brauchen würde und ob sich eine vier- statt sechsspurige Autobahn eher rechnen würde.

Anmerkung zu den Lösungen e und f:
Es handelt sich hier um eine Art Fermi-Aufgabe, bei der der Rechenweg, sowie die Rechnung freigestellt sind.

1.3 **Magische Quadrate** (mögliche Lösungen):

a)

8	4	4	6
5	7	5	5
4	6	4	8
5	5	9	3

b)

7	6	4	5
4	5	7	6
5	4	6	7
6	7	5	4

1	2	3	4	5
3	5	2	1	4
5	1	4	3	2
4	3	5	2	1
2	4	1	5	3

1	0	2	3
2	3	1	0
3	2	0	1
0	1	3	2

c)

6	4	10	4
10	4	6	4
4	10	4	6
4	6	4	10

4	7	4	9
8	2	8	6
10	5	9	0
2	10	3	9

12	0	0	12
12	0	0	12
0	12	12	0
0	12	12	0

Man kann durch das Ausprobieren von unterschiedlichen Zahlenkombinationen zum richtigen Ergebnis gelangen. Wenn in den Spalten und Zeilen die gleichen Zahlen vorkommen, gibt es ein Muster, mit dem man zum richtigen Ergebnis gelangt.
Bei einem Quadrat mit vier Zeilen/Spalten muss die Zahl in der dritten Zeile in der zweiten Spalte stehen, während die Zahl in der zweiten Zeile in der vierten Spalte stehen muss. Die Zahl, welche in der vierten Zeile steht, muss in der dritten Spalte eingetragen werden. Die Bedingung ist jedoch, dass die Zahlen in Spalten und Zeilen identisch sein müssen, sonst gelten diese Regeln nicht.
Bei einem Quadrat mit fünf Zeilen/Spalten muss die Zahl in der dritten Zeile in der zweiten Spalte stehen, während die Zahl in der zweiten Zeile in der fünften Zeile stehen muss. Die Zahl in der vierten Zeile muss auch in die vierte Spalte eingetragen werden, wohingegen die Zahl in der fünften Zeile in die dritte Spalte eingetragen wird. Auch diese Regeln gelten nur für Quadrate, bei denen die Zahlen in Zeilen und Spalten identisch sind.

1.4 <u>Kaninchen</u> (Lösung):

a) Man kann den Wachstumsbestand nach einem Jahr (n=13) in einer Tabelle darstellen:

Monate	**Anzahl Elternkaninchen-pärchen**	**Anzahl Kinderkaninchen-pärchen**	**Anzahl aller Kaninchen-pärchen**
1. Januar	0	1	1
1. Februar	1	0	1
1. März	1	1	2
1. April	2	1	3
1. Mai	3	2	5
1. Juni	5	3	8
1. Juli	8	5	13
1. August	13	8	21
1. September	21	13	34

1. Oktober	34	21	55
1. November	55	34	89
1. Dezember	89	55	144
1. Januar (nächsten Jahres)	**144**	**89**	**233**
...	233	144	377

Ergebnis: Nach einem Jahr gäbe es 144 (Eltern-) Kaninchenpärchen, 89 (Kinder-) Kaninchenpärchen, also **233 Pärchen (466 Kaninchen) insgesamt**. Bei der Zahlenentwicklung handelt es sich um die Fibonacci-Folge.

b) Da es sich um eine offene Aufgabe handelt, sind mehrere Antwortmöglichkeiten möglich. Zu erwarten wären zum Beispiel folgende Antworten:

1) Kaninchen bekommen nicht immer ein Pärchen als Nachwuchs
2) Eine Insel ist kein völlig von außen abgeschlossener Raum
3) Das Überleben aller Kaninchen ist unwahrscheinlich
4) ...

1.5 <u>Gedankenlesen</u> (Lösung):

Miriam rechnet:

$$[[(x \cdot 10) + 4] \cdot 2 + 12] \cdot 5 = 100x + 100$$

Das genannte Ergebnis E ist also: $E = 100x + 100$.

Daraus folgt: $x = (E : 100) - 1$

Sie dividiert das genannte Ergebnis durch 100 und subtrahiert vom Quotienten 1. Sie kann auch vom genannten Ergebnis 100 subtrahieren und die Differenz durch 100 dividieren, um die gedachte Zahl zu erhalten.

<u>Eine Möglichkeit für einen selbst ausgedachten Zaubertrick:</u>

„Denk’ dir eine Zahl. Addiere 5, multipliziere das Ergebnis mit 8. Dann subtrahiere 20 und addiere das Doppelte deiner gedachten Zahl. Dividiere das Ergebnis durch 2 und subtrahiere vom Quotienten 10. Das Ergebnis musst du noch mit 20 multiplizieren.“

(Lösung): $$[[(x+5)\cdot 8-20+2x]:2-10]\cdot 20=100x$$

Die gedachte Zahl wird durch Division durch 100 erhalten.

1.6 <u>Wassereimer</u> (Lösungen):

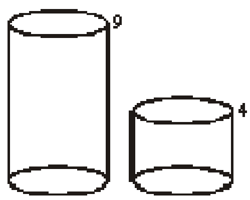
a)

$$\begin{array}{ll} x + 2 & = x \\ 2 & = 2x \\ 2 + 2 & = 2x - 2 \\ 4 & = 2x - 2 \\ 6 & = 2x \\ x & = 3 \end{array}$$

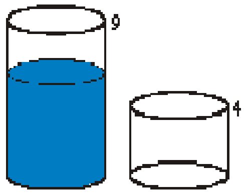
Zu Beginn waren im ersten Eimer 5 Liter Wasser, im zweiten Eimer 3 Liter Wasser.
Am Ende sind in beiden Eimern 4 Liter Wasser.

b) <u>Vorwärtsarbeiten</u>: Stellt man sich die Frage, was überhaupt gegeben ist, ist es z.B. sinnvoll, sich die beiden Gefäße mit gleicher Grundfläche und den Höhen 4 und 9 vorzustellen.

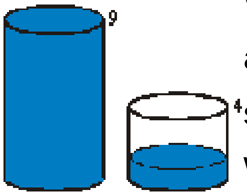
Beginnt man nun mit diesen beiden Gefäßen zu arbeiten, wird man sicherlich mehrere Möglichkeiten des Hin- und Herfüllens testen. Man kommt ohne Schwierigkeiten auf 4 (trivial), 9 (trivial), 5 (Umschütten von 4 Litern aus dem vollen großen in das kleine Gefäß), 8 (zweimaliges Befüllen des großen mit dem vollen kleinen Gefäß) oder 1 Liter (zweimaliges Füllen des kleinen aus dem vollen großen Gefäß), aber nicht ohne weiteres auf die verlangten 6 Liter.



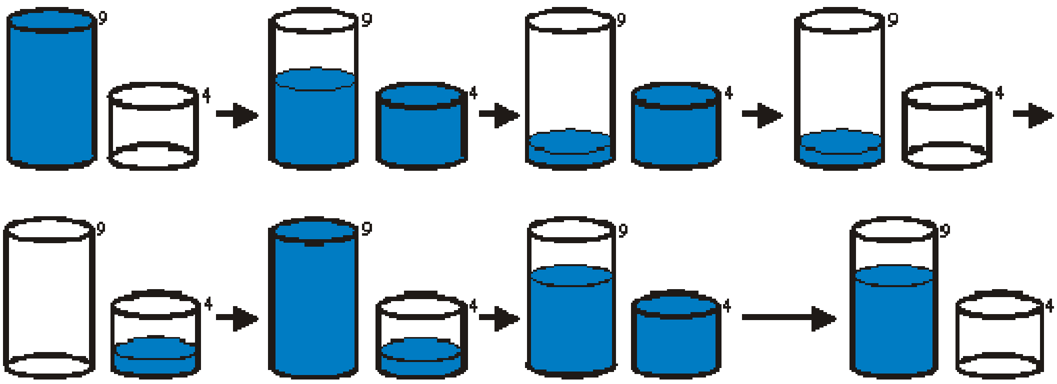
An dieser Stelle ist es sinnvoll zum Rückwärtsarbeiten zu wechseln.



Zuerst sollte man sich veranschaulichen, welchen Endzustand man erreichen will.
Danach versucht man den davor liegenden Lösungsschritt zu betrachten und fragt sich, wie die Gefäße im vorletzten Schritt gefüllt sein müssten, um durch einmaliges Umschütten 6 Liter im großen Gefäß erhalten zu können.
Im vorletzten Schritt müsste das 9-Liter-Gefäß voll sein und sich im 4-Liter-Gefäß 1 Liter befinden, damit man durch Umschütten von 3 Litern im großen Gefäß 6 Liter erhält.



Wie beim Rückwärtsarbeiten üblich, kann man nun von diesem Teilziel ausgehen und überlegen, wodurch sich dieses erreichen lässt. Es stellen sich folgende Fragen:
Was muss man tun, um diesen Schritt zu erreichen?
Wie gelingt es, in das kleinere Gefäß genau 1 Liter zu füllen?
Diese Frage lässt sich leicht beantworten, da man diese Füllmöglichkeiten bereits während des Vorwärtsarbeitens gefunden hat. Einen Liter erhält man, wenn man aus dem vollen großen Gefäß das kleine befüllt, diese 4 Liter ausschüttet und diesen Vorgang einmal wiederholt. Danach muss dieser eine Liter allerdings noch in das kleinere Gefäß umgeschüttet werden.
Die Lösung ist gefunden! Abschließend muss man nur noch die aus dem Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten gewonnenen Erkenntnisse in die richtige Reihenfolge bringen.



1.7 <u>**Eine merkwürdige Telefonnummer**</u> (Lösung):

In der Tat, eine sehr merkwürdige Telefonnummer. Da die systematische Herleitung der Lösung zwar nicht prinzipiell schwer ist, aber doch sehr umfangreich ist, verraten wir zunächst die Lösung, bevor wir dann erklären, wie man darauf kommt.
Die gesuchte Telefonnummer lautet:
3816547290

Um systematisch zu einer Lösung zu kommen, bezeichnen wir unsere Zahlen ganz allgemein mit a b c d e f g h i j.
Unsere Aufgabe ist es, diese zehn unbekannten Ziffern zu bestimmen:

- Der Anfang ist einfach: Da die Zahl aus den ersten zehn Ziffern (also die gesamte Zahl) durch 10 teilbar ist, muss j=0 sein. Unsere Zahl lautet also a b c d e f g h i 0
- Ein ähnliches Argument bestimmt auch die Ziffer e: Da abcde durch 5 teilbar ist, muss e entweder 0 oder 5 sein. Die Ziffer 0 ist aber schon vergeben; daher muss e=5 sein. Also lautet die Zahl abcd5fghi0. Die anderen Ziffern sind nicht so einfach zu bestimmen.
- Da die Zahl aus den ersten beiden Ziffern durch 2 teilbar ist, muss b eine der Ziffern 2,4,6,8 sein (0 ist ja schon vergeben). Da abcd durch 4, also auch durch 2 teilbar ist, muss auch d eine dieser Zahlen sein. Entsprechendes gilt für f und h. Damit bleiben für a,c,g und i nur die ungeraden Ziffern 1,3,7,9 übrig (5 ist bereits vergeben).

Nun müssen wir die einzelnen Fälle betrachten:

- Sei z.B. b=2. Da die Zahl abc = a2c durch 3 teilbar ist, muss die Quersumme a+2+c durch 3 teilbar sein. Damit ergeben sich für a und c nur die folgenden Möglichkeiten: a=1, c=9 oder a=9 und c=1 oder a=3 und c=7 oder a=7 und c= 3 oder a=7 und c=9 oder a=9 und c=7.
- Wir betrachten den Fall a=1 und c=9 weiter. Unsere Zahl lautet also 129d5fghi0
- Da die Zahl aus den ersten vier Ziffern durch 4 teilbar sein muss, muss auch die Zahl 9d durch 4 teilbar sein. Daher ist d=2 oder d=6. da die Ziffer 2 aber schon verbraucht ist, kommt nur d=6 in Frage. Nun geht es schnell. Unsere Zahl lautet: 129654g8i0.
- Da die Zahl aus den ersten acht Ziffern durch 8 teilbar ist, muss auch 4g8 durch 8 teilbar sein, wobei für g nur die Ziffern 3 und 7 in Frage kommen. Aber weder 438 noch 478 ist durch 8 teilbar. Also gibt es in diesem Fall (a=1, b=2 und c=9) keine Lösung.

So müssen alle möglichen Fälle durchprobiert werden. Das läuft immer nach dem gleichen Schema und ist schneller getan als aufgeschrieben.
Daher betrachten wir jetzt nur noch den Fall, der zur Lösung führt. Dies ist der Fall b=8. Die Zahl lautet also a8cd5fghi0

- Da die Zahl a8c durch 3 teilbar sein muss, ergeben sich für a und c nur die

Möglichkeiten a=1, c=3 oder a=3, c=1 oder a=1, c=9 oder a=9, c=1 oder a=3, c=7 oder a=7, c=3. Wir entscheiden uns dafür, die Möglichkeit a=3, c=1 weiterzuverfolgen. Dann lautet die zahl 381d5fghi0.

- Da die Zahl 381d aus den ersten vier Ziffern durch 4 teilbar sein muss, muss d=2 oder d=6 sein. Der Fall d=2 erweist sich als unmöglich, weil man dann die Ziffer f nicht mehr bestimmen kann. Also bleibt d=6, und unsere Zahl lautet 38165fghi0
- Da die Zahl 38165f aus den ersten sechs Ziffern durch 6 teilbar sein muss, muss die Quersumme 3+8+1+6+5+f = 23+f durch 3 teilbar sein. Daraus ergibt sich f=4 und damit h=2. Die Zahl ist nun schon fast bestimmt: 381654g2i0
- Wir betrachten jetzt die Teilbarkeit durch 8: da die Zahl aus den ersten acht Ziffern durch 8 teilbar sein muss, muss auch die Zahl 4g2 durch 8 teilbar sein. Außerdem stehen für g nur noch die Ziffern 7 und 9 zur Verfügung. Da 472 durch 8 teilbar ist, aber nicht 492, muss g=7 sein. Für i bleibt dann nur noch der Wert 9 übrig.
- In diesem Fall haben wir Glück, denn die Zahl 3816547 ist durch 7 teilbar.
- Also ist die Zahl 3816547290 die Lösung
- Die Teilbarkeit durch 9 konnte nicht verwendet werden, da jede neunstellige Zahl, in der jede der Ziffern zwischen 1 und 9 einmal vorkommt, durch 9 teilbar ist.

1.8 Die Hängebrücke (Lösung):

Wanderer A + B hin = 10 Minuten
Wanderer B zurück = 10 Minuten
Wanderer C + D hin = 25 Minuten
Wanderer A zurück = 5 Minuten
Wanderer A + B hin = 10 Minuten

Gesamt = 60 Minuten

2. Daten / Zufall / Kombinatorik

2.1 <u>Das Rechteckspiel</u> (Lösungen)

Zu a): Erkennen, dass man den ersten Zug machen muss, in einem quadratischen Spielfeld den ersten Punkt diagonal neben dem „Verliererpunkt“ wählen und jeden Zug seines Gegenspielers kopieren muss, um zu gewinnen.
Zu b): Derjenige der anfängt gewinnt. Man kann aber nicht mehr nur den Zug kopieren, sondern muss so spielen, dass der „Verliererpunkt“ übrig bleibt. Es liegt daran, dass sich die Form des Spielfeldes geändert hat; kein Quadrat mehr, nun ein Rechteck.

2.2 <u>Die Würfelschlange</u> (Lösungen)

Zu a): Man landet wieder auf dem letzten Würfel, egal wie oft man es versucht.

Zu b): Die Wahrscheinlichkeit ist sehr groß, dass es diesmal nicht klappt. Diese Teilaufgabe soll dabei helfen zu erkennen, dass die Anzahl der Würfel eine Rolle spielen.
Zu c): Je mehr Würfel, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass man auf dem letzten Würfel der Schlange wieder raus kommt.
Bei 60 Würfeln:
Bei einem „Neuwurf“ des ersten Würfel, beträgt die Wahrscheinlichkeit, das man auf einem markierten Würfel landet 5/6 (ca. 0,83). Beim zweiten Schritt ist es genau das selbe. Also hat man eine Wahrscheinlichkeit von 5/6 x 5/6 (ca. 0,69). Je mehr Schritte, desto kleiner wird die Wahrscheinlichkeit, nicht auf einen solchen Würfel zu treffen. Nach fünf Schritten ca. 0,4. Nach n Schritten $(5/6)^n$.

2.3 <u>100 Gewinnt</u> (Lösung):

Die Zahl 10 ist die Zahl, die man erzielen sollte, um das Spiel in jedem Fall zu gewinnen. Von hier an ist das Spiel bereits entschieden, wenn man nun immer neun zu der Zahl hinzu addiert, also:

→ 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100

Der Gegenspieler hat nun keine Chance mehr, da er nicht mehr auf die entscheidenden Zahlen kommen kann, die das Spiel gewinnen lassen.

Man muss das Spiel mehrmals durchspielen, bevor man eine Strategie erkennt.

Beispiel:
In diesem Spiel spielen Dennis und Jana gegeneinander:
Jana beginnt und nennt die Zahl 4.
Dennis nennt die 3. Die Summe ist 7.
Nun nennt Jana die Zahl 8. Die neue Summe ist 15.
Und so geht es weiter, bis einer auf die Summe 100 kommt.

2.4 Der verflixte Würfel (Lösung):

Wenn der Gegner rot wählt, nimmt der Spieler blau.
Wenn der Gegner blau wählt, nimmt der Spieler gelb.
Wenn der Gegner gelb wählt, nimmt der Spieler rot.

Im Durchschnitt hat jeder Spieler bei jeder Kombination die Chance fünf von neun Würfeldurchgängen zu gewinnen.
Die Zahlen auf den Seiten eines jeden Würfels ergeben in allen drei Fällen die gleiche Endsumme und es ist auch kein Würfel besser als jeder der beiden anderen. Um zu erkennen, warum der blaue Würfel dem roten überlegen ist, gilt es alle würfelbaren Zahlen der beiden Würfel zu beachten.

Der rote Würfel zeigt	Möglichkeiten des blauen Würfels		
2	$\underline{3}$	$\underline{5}$	$\underline{7}$
4	3	$\underline{5}$	$\underline{7}$
9	3	5	7

Die Situationen, in denen der blaue Würfel die höhere Punktzahl erzielt, wurden unterstrichen und bei diesen neun Kombinationen - jede von ihnen ist gleich wahrscheinlich - übertrifft der blaue den roten Würfel in fünf Fällen. Analog kann gezeigt werden, warum der gelbe dem blauen und der rote dem gelben Würfel überlegen ist.

2.5 Merkwürdige Würfel (Lösung):

Auf den ersten Blick ist es schwer zu entscheiden, welcher Würfel der „Beste“ ist. Man muss die Stärken und Schwächen der einzelnen Würfel gegeneinander abwägen. Um das systematisch zu beurteilen, sind Tabellen hilfreich. Hier werden jeweils zwei der Würfel miteinander verglichen und ermittelt, welcher von ihnen öfter gewinnt.
Es sieht zunächst so aus, als ob man die besten Chancen mit dem 6-2er Würfel hätte und mit dem 0-4er Würfel die schlechtesten. Bei den vorgegebenen Spielregeln stimmt das aber nicht: Da der erste Spieler immer einen Würfel auswählt, kann der zweite Spieler stets einen anderen Würfel finden, der in 24 von 36 möglichen Fällen gewinnt. Beim 6-2er Würfel ist es der 3er, beim 3er ist es der 0-4er, beim 0-4er ist es der 1-5er, beim 1-5er ist es der 6-2er.
Man sollte also das Spiel tunlichst nicht beginnen. Wenn man es lange genug wiederholt wird man (sofern das Gegenüber den richtigen Würfel auswählt) in zwei Drittel der Fälle verlieren.

Die Bewertung der Würfel ändert sich allerdings, wenn man zu viert spielt. Jetzt sind alle vier Würfel im Spiel und man hat mit dem 6-2er in der Tat die besten Chancen. Dieser Würfel ist der einzige, der gegen zwei der anderen drei Würfel klar im Vorteil ist.

2.6 Die Affen (Lösung):

Verteilt man N Nüsse an die 11 Schimpansen, so bekommt jeder Affe n Nüsse, und es bleibt eine Nuss übrig. Verteilt man sie an die Paviane, so erhält jedes Tier m Nüsse, und acht Nüsse bleiben übrig.
Es gibt also $N= 11n+1 = 13m + 8$.
Die kleinsten Zahlen, die diese Bedingungen erfüllen, sind $n=3$ und $m=2$ und somit $N=34$. Da $11 \times 13 = 143$ Nüsse sind, die auf die Schimpansen und die Paviane verteilt werden können, ergibt auch jede Anzahl $N=143k + 34$ die Reste 1 bzw. 8. Jetzt braucht

man nur noch die Zahlen zu überprüfen, die eingesetzt für k einen Rest von 3 ergibt, und ob sie nicht durch 11+13=24, nicht durch 11+17=28 und nicht durch 13+17=30 und nicht durch 11+13+17=41 teilbar sind. Die kleinste Zahl, die dies alles erfüllt, ist 143 x 15 + 34 =2179. Die Kinder hatten also 2179 Nüsse in ihrem Beutel.

2.7 <u>Stau auf der Autobahn</u> (Lösungen):

Da jeder eine andere Anzahl von Fahrzeugzusammenstellungen im Kopf haben wird, sind auch die Lösungen sehr unterschiedlich. Der eine rechnet mit mehr Bussen (= weniger Autos, aber dafür mehr Personen), ein anderer mit mehr LKW’s. Auch die Spuren der Autobahn sind nicht vorgegeben und könne beliebig gewählt werden.

Beispiellösung:

a)

- Länge eines Autos (Durchschnitt): 4,5 m
- Länge eines Busses: 12 m
- Länge eines Motorrades: 2 m

Hinzu komme noch die Abstände zwischen den Fahrzeugen: Auto (+3 m), Bus (+3 m), Motorrad (+1 m). Somit ergeben sich die Gesamtlängen von 7,50 m (Auto), 15 m (Bus) und 3 m (Motorrad).

Geht man von einer 2-spurigen Autobahn aus, so ergibt sich bei einem Stau von 4 km eine Gesamtlänge aller Fahrzeuge von 8 km.
Beispielsweise werden diese 8km so eingeteilt: 5 km Autos, 2,5 km Busse und 0,5 km Motorräder.

Berechnungen:

1. Auto
1 km Autos (7,50 m): 1000 m : 7,50 m = 133 Autos * 5 (km) = 665 Autos
1 km Busse (15 m): 1000 m : 15 m = 67 Busse * 2,5 (km) = 167 Busse

1 km Motorräder (2 m): 1000 m : 3 m = 333 Mo.[1] * 0,5 (km) = 167 Mo.

Insgesamt sind es also 999 Fahrzeuge!

b) In den PKW's sitzen durchschnittlich 3 Personen, in den Bussen 35 und auf den Motorrädern 1 Person.

Berechnungen:

Auto: 665 * 3 = 1995 Personen
Bus: 167 * 35 = 5845 Personen
Mo.: 167 * 1 = 167 Personen

Insgesamt sitzen 8007 Personen in den Fahrzeugen!

c) Um die Grundflächen der Fahrzeuge berechnen zu können, werden neben der Länge auch die Angabe der Breite benötigt

Berechnung:

1. Grundflächen eines Fahrzeuges:
Auto (Länge 4,50m, Breite 2m): 4,50m * 2m = 9qm
Bus (Länge 12m, Breite 3m): 12m * 3m = 36qm
Mot. (Länge: 2 m, Breite: 0,4 m): 2 m * 0,4 m = 0,8 qm

2. Fläche aller Fahrzeuge
Auto: 9 qm * 665 = 5985 qm
Bus : 36 qm * 167 = 6012 qm
Mot: 0,8 qm * 167 = 134 qm
Insgesamt sind es 12131 qm. Zerlegt man diese Zahl jetzt multiplikativ, z.B.
2 m * 6065,5 m, so bekommt man die Fläche eines Rechteckes. Zieht man die Wurzel aus 12131, so erhält man die Maße eines Quadrates, also hier 110 m * 110 m.

---

[1] Mo. = Motorräder.

Hinweise:

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Fermi-Aufgabe. Es gibt dabei nicht die „eine“ richtige Lösung. Jedes Kind wählt einen anderen Zugangsweg zu diesem Problem.

Um auf die Maße der Fahrzeuge zu kommen, kann man im Internet nachschauen. Auf Wikipedia muss z.B. nur ein Fahrzeugname eingegeben werden (Passat, Corsa etc.). Buslängen findet man z.B. unter:
www.orp-busse.de/info/info.htm oder Busse+Längen bei google eintippen.

Auch können die Kinder eine dreispurige Autobahn auswählen, die Gesamtfahrzeuglänge wächst dann auf 12km an. Die Abstände zwischen den Fahrzeugen sind ebenfalls variabel und können von jedem anders bestimmt werden.

2.8 <u>Zahlenraten</u> (Lösungen):

Die Aufgaben I.) und II.) dienen als Hinführung zu Aufgabe III.) „Zahlenraten“. Es soll auffallen, dass die Quersummen von den gebildeten Differenzen immer durch neun teilbar sind. (Anmerkung: Dieser zahlentheoretische Sachverhalt begründet sich in der Tatsache, dass die beiden Zahlen bei Division durch neun den gleichen Rest bilden. Die Subtraktion der Zahlen führt dann zum „Aufheben“ dieses Restes und das Ergebnis lässt den Rest 0 mod 9; ist also durch neun teilbar.)
Außerdem solle man die Systematik der Aufgaben verstehen und eine neue Aufgabe nach diesem Schema entwerfen. Hierbei ist die Erkenntnis entscheidend, dass die gegebenen Zahlen aus den gleichen Ziffern bestehen, diese jedoch in ihrer Reihenfolge vertauscht wurden.

Die Ergebnisse sehen wie folgt aus:

I.)	1)	31 – 13	=	18	Quersumme = 9
	2)	534 – 435	=	99	Quersumme = 18
	3)	7542 – 5427	=	2115 ,	Quersumme = 9
	4)	5674321 – 3215674	=	2458647,	Quersumme = 36

II.) Eine mögliche Lösung wäre: 321 – 123 = 198, Quersumme = 18

III.) „Zahlenraten“

Die Aufgabe wurde entnommen von www.mathespass.de aufgerufen am 13.04.2008.

Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich folgendermaßen:

Zur Bestimmung der gesuchten Zahl reicht es aus, die Quersumme der vom Freund genannten Zahl zu berechnen. Die Differenz zu der nächst höheren Zahl, die durch neun teilbar ist, ist dann die gesuchte Zahl. Sollte die Quersumme jedoch durch neun teilbar sein, so ist die neun die gestrichene Zahl. Für das Zahlenbeispiel in der Aufgabe gilt:

Bestimme die Quersumme der genannten Zahl:
3 + 7 + 0 + 3 + 7 + 5 + 4 = 29
diese Quersumme 29 musst du nun vom nächsten Vielfachen von 9, das ist 36, subtrahieren
36 – 29 = 7.

7 ist damit die gestrichene Zahl!

3. Geometrisches

3.1 <u>Toblerone</u> (Lösungen):

a) **mit Messungen**

Man berechnet zuerst das Volumen der Tobleroneschachtel und dann das Volumen eines Tobleronestücks. Dann teilt man das Volumen der Tobleroneverpackung durch das Volumen des Tobleronestücks und erhält somit die Anzahl der Tobleronestücke.

Rechnung:
Bei der Tobleroneschachtel handelt es sich um ein Prisma dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist. Durch das Ausmessen mit dem Lineal/Maßband erhält man folgende Angaben:
Seitelänge des Dreiecks = 3,5 cm
Höhe des Dreiecks = 3,1 cm
Höhe der Verpackung = 21 cm
Nun berechnet man den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks und multipliziert

diesen mit der Höhe der Verpackung. Somit erhält man das Volumen der Tobleroneverpackung.

$$\frac{(3{,}5\text{cm} \times 3{,}1\text{cm})}{2} \times 21\text{ cm} = 113{,}925\text{cm}^3$$

Das Tobleronestück ist ebenfalls ein Prisma und hat dasselbe gleichseitige Dreieck als Grundfläche wie die Tobleroneverpackung. Bloß die Höhe ist verschieden: Die Höhe des Tobleronestücks ist 1,5cm und man erhält diese Angabe durch Ausmessen. Nun berechnet man den Flächeninhalt es Dreiecks und multipliziert das Ergebnis mit der Höhe des Tobleronestücks.

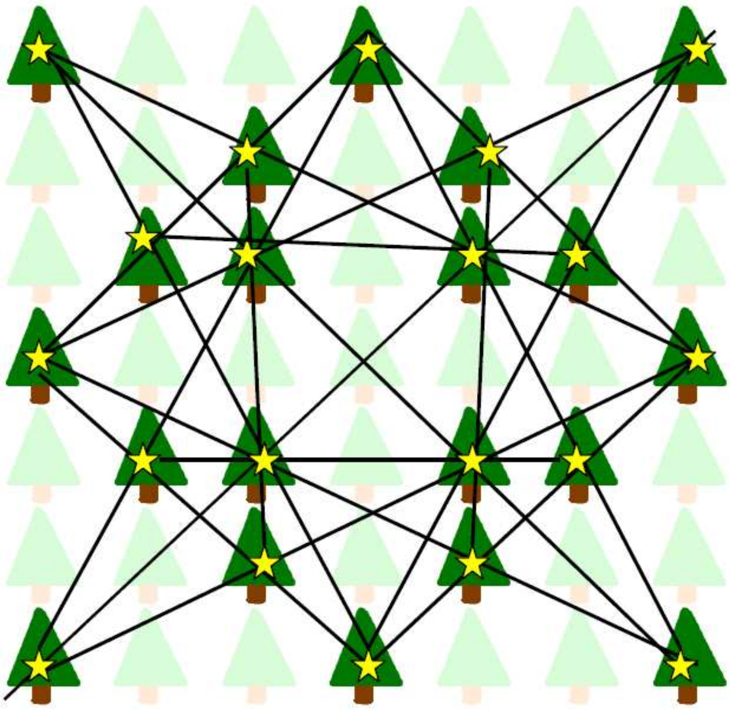
$$\frac{(3{,}5\text{cm} \times 3{,}1\text{cm})}{2} \times 1{,}5\text{cm} = 8{,}1375\text{cm}^3$$

Nun dividiert man das Volumen der Tobleroneschachtel mit dem Volumen eines Tobleronestücks und erhält die Anzahl der Tobleronestücke.
$113{,}925\text{cm}^3 : 8{,}1375\text{cm}^3 = 14$ Tobleronestücke

b) **mit Skizze**
Man skizziert die Tobleroneverpackung und das Tobleronestück, indem man die Querschnitte der beiden Objekte auf ein kariertes Blatt zeichnet. Dann unterteilt man die Skizze der Tobleroneverpackung in einzelne Abschnitte, welche jeweils die Länge des Tobleronestücks haben. Die Anzahl der eingezeichneten Abschnitte beschreibt die Anzahl der Tobleronestücke, die in eine Verpackung passen.

3.2 **Wiederaufforstung** (Lösung):

Für Aufgabenteil a) gibt es viele Lösungen, deshalb wird hier nur die Lösung für Aufgabenteil b) vorgestellt:



3.3 Der Garten (Lösung):

Die Radien der drei Kreise werden als r_1, r_2, r_3 und die Abstände ihrer Mittelpunkte als a, b, c (siehe Zeichnung) bezeichnet. Dann kann folgende Gleichungen aufgestellt werden:

G_1: $a = r_1 + r_2$ G_2: $b = r_2 + r_3$ G_3: $c = r_1 + r_3$

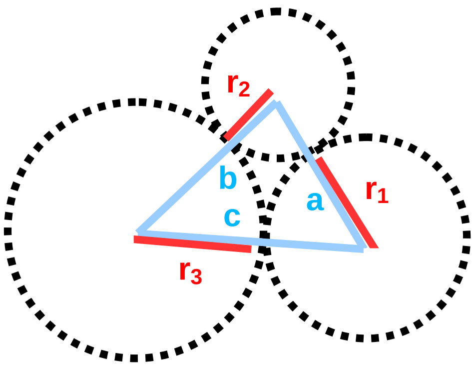
Addiert man Gleichung 1 und Gleichung 3, so erhält man:

$a + c = 2\, r_1 + r_2 + r_3$

davon subtrahiert man die Gleichung 2 und erhält:

$r_1 = (a+c-b)/2$

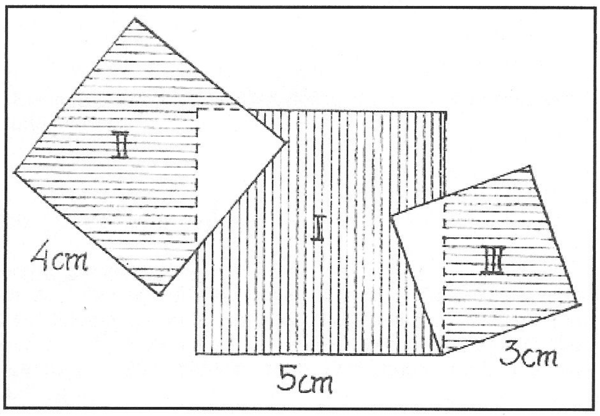
Durch Einsetzen von a = 70m, b = 80m und c = 100m erhält man r_1 = 45m. Durch weiteres Umformen oder Einsetzen erhält man dann r_2 = 25m und r_3 = 55m.



3.4 Die magischen Quadrate (Lösung):

Der Flächeninhalt der beiden kleineren Quadraten zusammen (16 cm^2 + 9 cm^2 = 25 cm^2) ist gleich dem Flächeninhalt des großen Quadrats (25 cm^2).
Hilfreich ist es, die Abbildung nachzubauen. Dazu müssten drei Quadrate mit den Kantenlängen 3 cm, 4 cm und 5 cm ausgeschnitten und dann wie auf der Abbildung platziert werden.
Dabei könnte es sinnvoll sein, die Situation zunächst zu vereinfachen. Und zwar in dem man nur zwei der Quadrate überlappt und beobachtet, wie sich das Verhältnis der Flächeninhalte, der sich nicht überlappenden Teilstücke I und II verändert, wenn man die Quadrate gegeneinander verschiebt. Es wird deutlich, dass die beiden Flächen immer um die selbe Größe a zu- bzw. abnehmen. Dieses kann anschließend auf die Situation mit drei Quadraten übertragen werden.
Nun erkennt man,
1. dass der Flächeninhalt der beiden kleineren Quadraten, gleich dem Flächeninhalt des großen Quadrats ist und
2. dass die Anordnung der Quadrate beliebig ist, da beim Verschieben der Quadrate, die Teilfläche I immer genau um dieselbe Größe a wächst (oder abnimmt) wie die Teilflächen II und III zusammen (oder abnehmen).

Denken wir uns (in der Abb.1) das linke Quadrat (16 cm) oder das rechte Quadrat (9 cm) oder beide Quadrate etwas nach außen verschoben, so nimmt I genau um die selbe Größe a zu wie auch II + III wachsen. Ist schließlich (bei Weiterbewegung) die nicht schraffierte Fläche null geworden, so sind I = 25 cm und II + III = 16 cm + 9 cm = 25 cm, also einander gleich. Also gilt die Gleichheit schon vorher, bei der Überlappung.



Rechnerische Lösung:
Die nicht schraffierten Inhalte seien "x" und "y".
Dann gilt:

x + II = 16

y + III = 9

$$I = 25 - x - y$$

$$II + III = 16 - x + 9 - y = 25 - x - y$$

Daraus folgt:

$$I = II + III$$

4. Logik

4.1 **Wettangeln** (Lösung):

(Algorithmisch):

Lucas	5	1 Hecht
Peter	4	2 Forellen
Martin	3	3 Rotfedern
Niklas	6	1 Barsch, 1 Forelle

4.2 **Gewichtiges** (Lösungen):

I.)

Für die Bestimmung der leichteren Kugel müssen die Kugeln in 3 Gruppen a 3 Kugeln aufgeteilt werden. Diese werden zur Einfachheit der Formulierung mit A, B und C bezeichnet.

Zunächst wiegt man zwei „Kugelgruppen“ gegeneinander auf. Z.B. legt man Gruppe A und C auf die Balkenwaage. Dafür ergeben sich drei Möglichkeiten:

1. Fall: A und C unterscheiden sich in ihrem Gewicht nicht. Also ist die leichtere Kugel in Gruppe B.
2. Fall: A ist leichter, als C. Demnach ist die gesuchte Kugel in Gruppe A.
3. Fall: A ist schwerer, als C. Also befindet sich die leichtere Kugel in Gruppe C.

Ganz egal in welcher Gruppe sich die gesuchte Kugel befindet, die Anzahl der möglichen Kugeln wurde in jedem Fall auf drei begrenzt. Nun wiegt man zwei Kugeln der betroffenen Gruppe und kann somit sagen, welche der drei die leichtere ist.

II.)

Wenn ich nur einmal wiegen darf, muss ich einen Weg finden, mit dem ich Wiegen durch Berechnen ersetzen kann.

Eine ziemlich gute Idee besteht darin, von jedem Stapel unterschiedlich viele Tafeln zu nehmen:

ich nehme:

von Stapel 1 : 1 Tafel

von Stapel 2 : 2 Tafeln

von Stapel 3 : 3 Tafeln

von Stapel 4 : 4 Tafeln

von Stapel 5 : 5 Tafeln

von Stapel 6 : 6 Tafeln

von Stapel 7 : 7 Tafeln

von Stapel 8 : 8 Tafeln

von Stapel 9 : 9 Tafeln

von Stapel 10 : 10 Tafeln

----

insgesamt: 55 Tafeln

Nun wiege ich die 55 Tafeln.

Würden alle Tafeln 100 g wiegen, dann würde die Waage bei 5500 g stehen bleiben.

Die Waage zeigt aber mehr an, weil die falschen Tafeln schwerer sind.

Nun rechne ich:

Waagen-anzeige	schwere Tafeln in
5510 g	Stapel 1
5520 g	Stapel 2
5530 g	Stapel 3
5540 g	Stapel 4

5550 g | Stapel 5

5560 g | Stapel 6

5570 g | Stapel 7

5580 g | Stapel 8

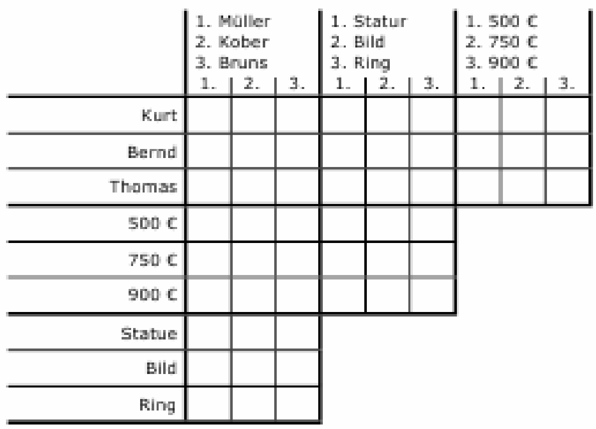
5590 g | Stapel 9

5600 g | Stapel 10

Beispiel 1:
Meine Waage zeigt 5600 g an, das sind 100 g mehr als der Stapel wiegen müsste. Und da ich weiß, dass die schweren Tafeln 10 g mehr wiegen als die normalen, dann habe ich 10 Tafeln, die schwerer sind. 10 Tafeln habe ich aber von Stapel 10 genommen; demzufolge gehörten die schweren Tafeln zu Stapel 10.

Beispiel 2:
Meine Waage zeigt 5630 g an, das sind 30 g mehr als der Stapel wiegen müsste. Und da ich weiß, dass die schweren Tafeln 10 g mehr wiegen als die normalen, dann habe ich 3 Tafeln, die schwerer sind. 3 Tafeln habe ich aber von Stapel 3 genommen; demzufolge gehörten die schweren Tafeln zu Stapel 3.
usw.

4.3 <u>Die Kunstsammler</u> (Lösung):



Im ersten Hinweis steht, dass Kurt ein großer Fan von Ringen ist. Setzen Sie also ein (+) in das Feld Kurt / Ring. Da Kurt weniger Geld ausgegeben hat als Herr Bruns, kann Kurt nicht Herr Bruns sein. Setzen Sie also ein (-) in das Feld Kurt / Bruns. Zudem kann Kurt nicht das meiste Geld ausgegeben haben. Setzen Sie also ein (-) in das Feld Kurt / 900 €. Da Kurt weniger Geld ausgegeben hat als Herr Bruns, kann Herr Bruns nicht das wenigste Geld ausgegeben haben. Setzen Sie also ein (-) in das Feld 500 € / Bruns.
Verfahren Sie mit den nächsten beiden Hinweisen genauso.

Das Diagramm müsste nun folgendermaßen aussehen:

	1. Müller 2. Kober 3. Bruns			1. Statur 2. Bild 3. Ring			1. 500 € 2. 750 € 3. 900 €		
	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.
Kurt			–			+			–
Bernd								+	
Thomas	–				–		–		
500 €	–		–						
750 €									
500 €									
Statue									
Bild									
Ring									

Machen Sie jetzt am besten mit den (+)-Feldern weiter.
Da Bernd 750 € ausgegeben hat, können diese nicht von Kurt ausgegeben worden sein. Kurt hat auch keine 900 € ausgegeben. Dies bedeutet, dass Kurt 500 € ausgegeben hat, und dieses wiederum, dass Thomas 900 € ausgegeben hat.
Da Kurt einen Ring ersteigert hat, kann dieser nicht von Thomas und Bernd ersteigert worden sein. Da Thomas auch das Bild nicht ersteigert hat, muss er die Statue ersteigert haben. Damit bleibt für Bernd das Bild.
Da Kurt den Ring ersteigert hat und 500 € ausgegeben hat, muss der Ring 500 € gekostet haben. Das Bild dementsprechend 750 € und die Statue 900 €.
Das Diagramm sieht nun folgendermaßen aus:

	1. Müller 2. Kober 3. Bruns			1. Statur 2. Bild 3. Ring			1. 500 € 2. 750 € 3. 900 €		
	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.
Kurt			–	–	–	+	+	–	–
Bernd				–	+	–	–	+	–
Thomas	–			+	–	–	–	–	+
500 €	–		–	–	–	+			
750 €				–	+	–			
900 €				+	–	–			
Statue									
Bild									
Ring									

Jetzt fehlen nur noch die Nachnamen.

Da Herr Müller und Herr Bruns die 500 € nicht ausgegeben haben, müssen diese von Herrn Kober ausgegeben worden sein. Herr Kober muss daher mit Vornamen Kurt heißen. Da Thomas nicht Müller heißt und wie wir jetzt wissen, auch nicht Kober, muss der Nachname von Thomas Bruns lauten. Bernd heißt demzufolge Müller mit Nachnamen.

4.4 **Endlich Ferien!!!** (Lösung):

Die Aussagen in der Aufgabe werden der Reihenfolge nach durchnummeriert. Dann ergibt sich:

(4) Nach der 3. Aussage fährt Anna nicht an das Meer und nicht an den See.

(5) Katrin fährt nicht ans Meer und wegen (4) kann dann nur Svenja ans Meer fahren.

(6) Wegen (4) und (5) fährt Kathrin an den See.

(7) Da Katrin nicht nach Südfrankreich fährt (3, 6) und wegen (5) fährt Anna nach Südfrankreich.

(8) Aus (7) folgt dann, dass Anna nicht in einer Ferienwohnung wohnen wird. Die weiteren Urlaubsziele sind nicht genau bestimmbar.

Es ergeben sich jetzt folgende Möglichkeiten A, B:

A: Svenja fährt in die Ferienwohnung,

B: Katrin fährt in die Ferienwohnung.

Möglichkeit A:

(9) Katrin fährt wegen (8) nicht die Ferienwohnung.

(10) Svenja fährt wegen (1) nicht in die Alpen.

Dann ergeben sich zwei Möglichkeiten. Katrin fährt in ein kleines Dorf und Anna in die Alpen bzw. Anna fährt in ein kleines Dorf und Katrin in die Alpen.

Möglichkeit B:

(9) Svenja fährt wegen (8) nicht in die Ferienwohnung.

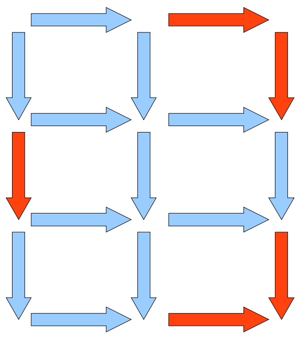
Dann ergeben sich zwei Möglichkeiten: Anna fährt in ein kleines Dorf und Svenja in die Alpen (und wegen (5) auch gleichzeitig ans Meer: sehr unwahrscheinlich!!) bzw. Svenja in ein kleines Dorf und Anna in die Alpen.

Es ergeben sich also 4 Möglichkeiten, von denen eine unpraktisch wäre.

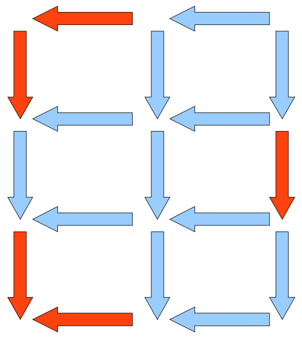
4.5 <u>Streichholzstation</u> (Lösungen):

Streichholzrätsel Nr.1)

Lösungsmöglichkeit 1:

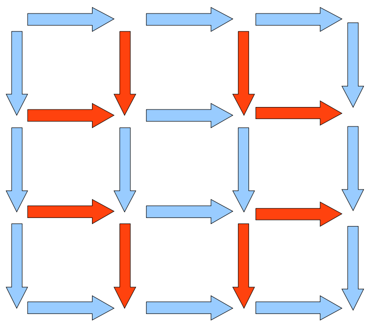


Lösungsmöglichkeit 2:

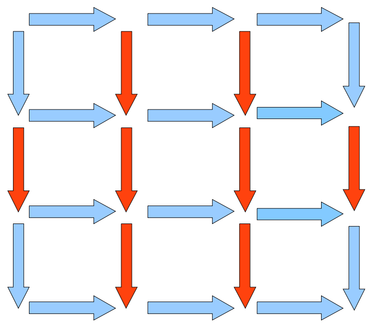


Streichholzrätsel Nr.2)

Lösungsmöglichkeit 1:

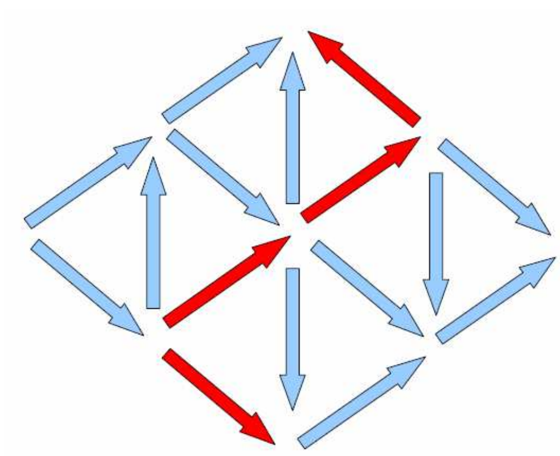


Lösungsmöglichkeit 2:

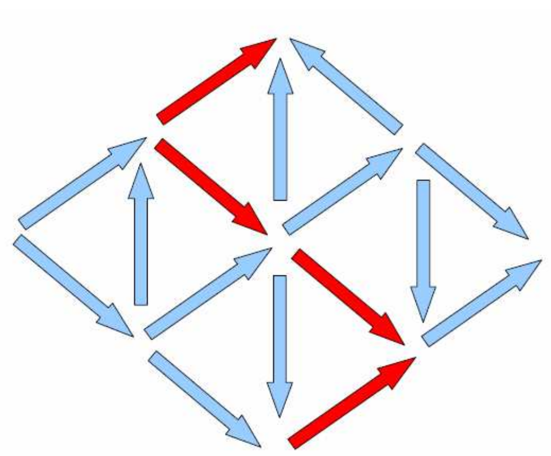


Streichholzrätsel Nr.3)

Lösung 1:



Lösung 2:



Streichholzrätsel Nr 4)

Erstellen einer Tabelle:

Dreiecke	Streichhölzer	Rechnung	
1	3	= 1 + 2	= 1 + 1 x 2
2	5	= 1 + 4	= 1 + 2 x 2
3	7	= 1 + 6	= 1 + 3 x 2
4	9	= 1 + 8	= 1 + 4 x 2

Anzahl Streichhölzer = 1 + Anzahl Dreiecke x 2

4.6 <u>Das Würfelskelett</u> (Lösung):

1. Phase: Aufgabe verstehen

- Die verschiedenen Bedingungen der Aufgabe könnten folgendermaßen notiert werden:
  - 20 Würfel > 3x3x3- Würfelskelett > Zentralwürfel und die 6 Würfel in den Flächenmitten fehlen
  - Würfelflächen mit der gleichen Augenzahl liegen aufeinander
  - Wie viele Augen sind insgesamt auf den Würfeln zu sehen?

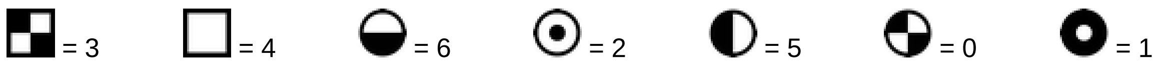
2. und 3. Phase: Ausdenken und Ausführen des Planes

Für das Lösen dieser Aufgabe ist es wichtig zu wissen, dass jeweils auf gegenüberliegenden Seiten des Würfels 7 Augenzahlen abgebildet sind (1/6; 2/5; 3/4) und dass die gesamte Augenzahl eines Würfels demnach 21 beträgt. Ist dies klar, kann diese Einsicht auf mehrere Würfel – in diesem Fall 20 – übertragen werden. Wenn 1 Würfel 21 Augenzahlen hat, so haben 20 Würfel 20x21 = 420 Augenzahlen (Variation der Aufgabe, indem erst ein Spezialfall betrachtet wird und dann die Lösung auf einen Aspekt der eigentlichen Aufgabe übertragen wird.

Im nächsten Schritt muss nun die Bedingung beachtet werden, dass beim Bau des Würfelskelettes immer die Seiten mit derselben Augenzahl aufeinander gelegt wurden. Daraus ergibt sich nun die Frage: Wie viele Augen wurden bei den

aufeinandergelegten Würfeln insgesamt verdeckt? Schaut man sich zunächst nur eine beliebige Seite des Würfels an und bestimmt daran die verdeckte Augenzahl, so kommt man zum Ergebnis, dass hier insgesamt 14 Augen verdeckt sind. Überträgt man dies nun auf den gesamten Würfel, der aus insgesamt 12 Seiten besteht, dann lässt sich berechnen, dass auf dem gesamten Würfelskelett 12x14 = 168 Augenzahlen verdeckt wurden.
Die Aufgabe bestand jedoch darin, die sichtbare Augenzahl zu bestimmen. Darum müssen nun die zwei einzelnen Ergebnisse in Zusammenhang gebracht werden. Wie komme ich nun mit Hilfe der 2 erarbeiteten Angaben zur Lösung des Rätsels? Es müssen nun von 420 Augenzahlen, die insgesamt auf den 20 Würfeln vorhanden sind, 168 Augenzahlen, die durch das Aneinanderkleben verdeckt wurden, abgezogen werden.
Die Aufgabe lautet also: 420 A. – 168 A. = 252 A.
Insgesamt sind also auf dem Würfelskelett 252 Augen sichtbar.

4.7 **Symbolrätsel** **(1)** (Lösung):



4.8 **Symbolrätsel** **(2)** (Lösung):

6 2 0	–	1 2 2	=	4 9 8
+				+
6 6 2	–	5 0 0	=	1 6 2
=				=
1 2 8 2	–	6 2 2	=	6 6 0

4.9 **Die Lügeninsel** (Lösung):

Nur am Donnerstag antworten beide mit "Gestern war Lügentag", weshalb das Gespräch an einem Donnerstag stattfand. Die Frau hat bei ihrer Antwort gelogen, der Mann die Wahrheit gesagt.

4.10 Der Barbier (Lösung):

Man soll erkennen, dass aus rein logischen Gründen der Auftrag des Bürgermeisters widersprüchlich und daher unausführbar ist. Egal ob der Barbier sich rasiert oder sich nicht rasiert, er kann den Auftrag des Bürgermeisters nicht erfüllen und bekommt somit nie einen Lohn.

5. Geschichtliches

5.1 Schatzsuche (Lösungen):

unser Zahlensystem	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Halvars Zahlensystem	0	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33	40	41

Die Zahlen werden vom Vierersystem ins Zehnersystem umgerechnet

a) $32 = 3x4 + 2 = 12+ 2 = 14$ Fußlängen
b) $203 = 4^2x2 + 0x4 + 3 = 35$ Fußlängen
c) $1111 = 4^3x1 + 4^2x1 + 4x1 + 1 = 85$ Fußlängen
d) $131 = 4^2x1 + 4x3 + 1 = 29$ Fußlängen
e) $222 = 4^2x2 + 4x2 + 2 = 42$ Fußlängen
f) $1100 = 4^3x1 + 4^2x1 = 80$ Fußlängen
g) $11 = 4x1 + 1 = 5$ Fußlängen
h) $211 = 4^2x2 + 4x1 + 1 = 37$ Fußlängen

Die erste Ziffer (von rechts nach links) stellt die Einer dar, die zweite Ziffer die Vierer, die dritte Ziffer die Sechzehner (4^2), die vierte Ziffer die Vierundsechziger (4^3), usw. Nun zerlege ich die Zahl in ihre einzelnen Ziffern und multipliziere die Ziffern mit ihrer jeweiligen Viererpotenz. Dann werden die Summen miteinander addiert und somit gelangt man zum Ergebnis.

5.2 **Rechnen wie die alten Ägypter** (Lösungen):

a) i. 24 mal 31 =

	1	31
	2	62
	4	124
*	8	248
*	16	496
		744

* Diese Ergebnisse werden addiert, da (8x31) + (16x31)= 24x31

ii. 17 mal 14 =

*	1	14
	2	28
	4	56
	8	112
*	16	224
		238

* Diese Ergebnisse werden addiert, da (16x14) + (1x14)= 17x14

b)
i. 315 : 15 =

1	15	*
2	30	
4	60	*
8	120	
16	240	*
21		

* Wenn man diese Ergebnisse addiert, erhält man 315. Auf der linken Seite ergibt sich 21, also passt die 15 genau 21mal in die 315.

ii. 748 : 22 =

1	22	
2	44	*
4	88	
8	176	
16	352	
32	704	*
34		

*Wenn man diese Ergebnisse addiert, ist die Summe 748. Die 22 passt 34mal in die 784, da (2x22) + (32x22) = 34x22 (=748)

5.3 **Kryptogramme** (Lösungen):

(1)

	AUFGABE:	**LÖSUNG:**
1)	I	7
	+ F E E L	+ 3 9 9 5
	G O O D	4 0 0 2
2)	M A T H E	3 9 6 2 5
	+ M A C H T	+ 3 9 0 2 6
	G U T E S	7 8 6 5 1
3)	E R N I E	7 0 3 8 7
	+ E R N I E	+ 7 0 3 8 7
	S T R E E T	1 4 0 7 7 4

(2)

1) Eine Lösung ist: 6948 + 6948 = 13896
2) Eine Lösung ist: 235099 + 235099 = 470198
3) Es gibt keine Lösung.