

# Spielend gewinnen

Kann man mit Kinderspielen eine Million Dollar gewinnen?

Jan Fricke

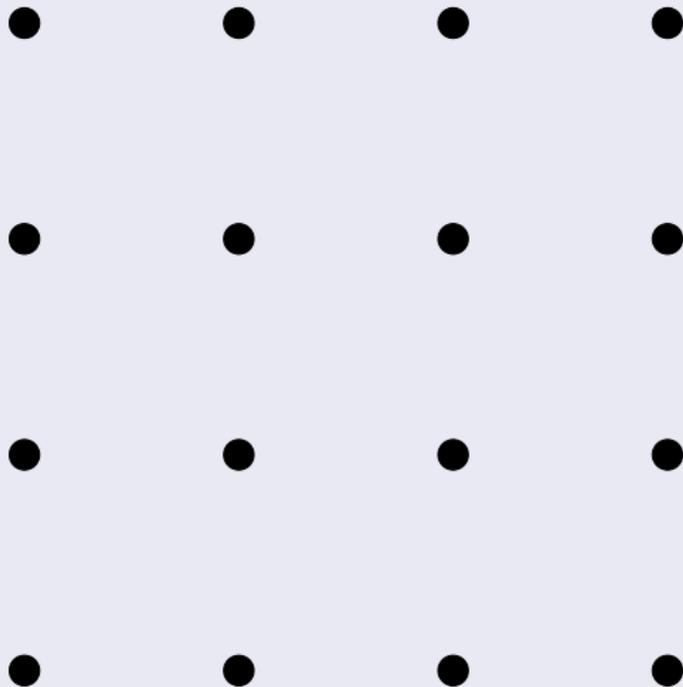
Fachbereich Mathematik  
Universität Siegen

Girl's Day 2008

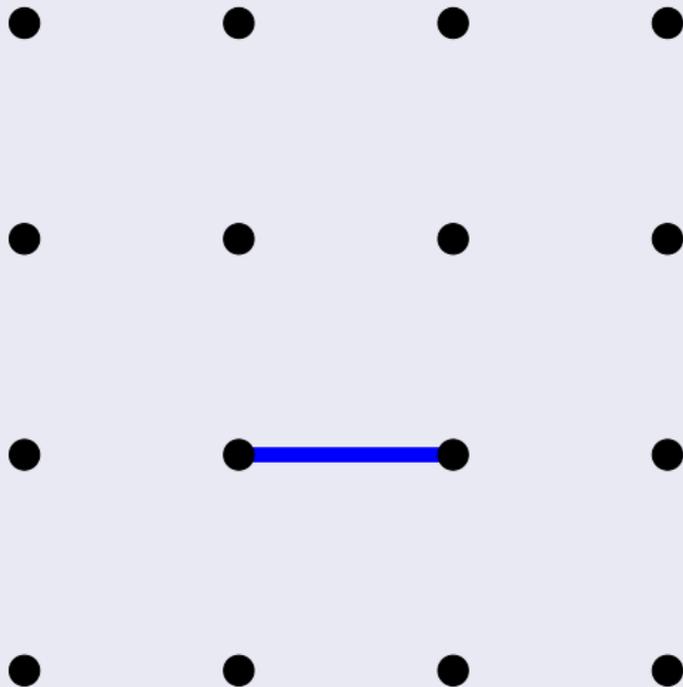
## Was erwartet Sie?

- Tipps und Tricks für Käsekästchen
- Die Grenzen dieser Tricks
- Beziehungen zu anderen Problemen
- Wie man eine Million Dollar gewinnen kann

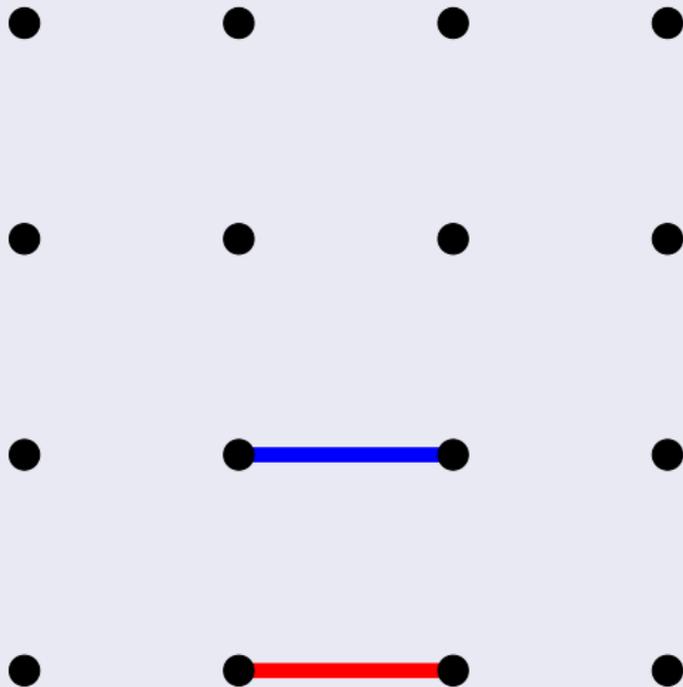
## Eine typische Partie



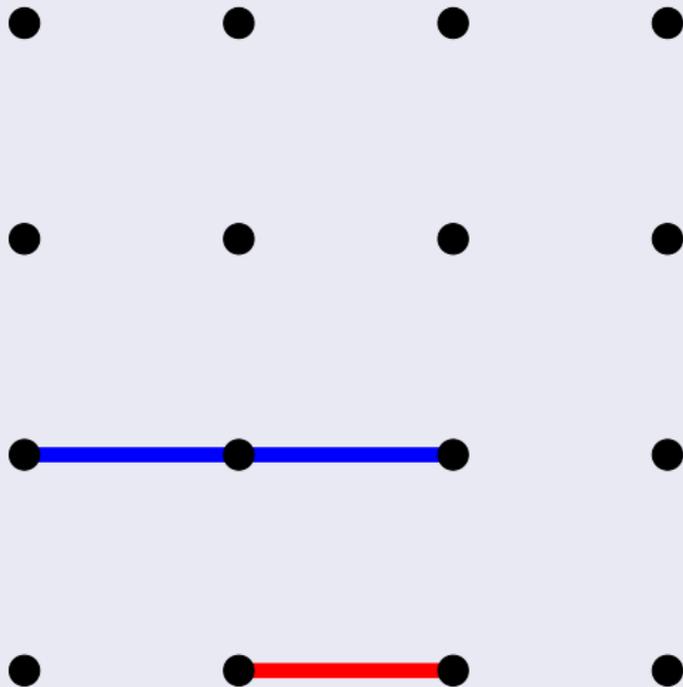
## Eine typische Partie



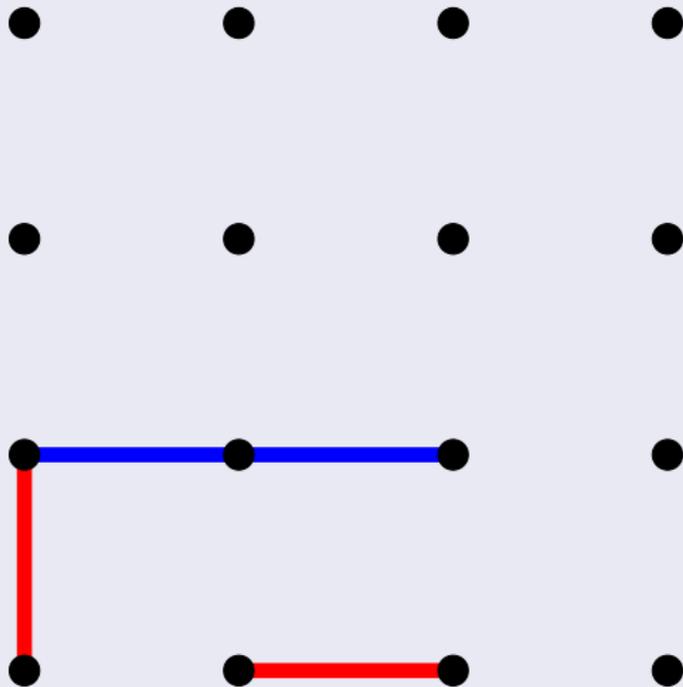
## Eine typische Partie



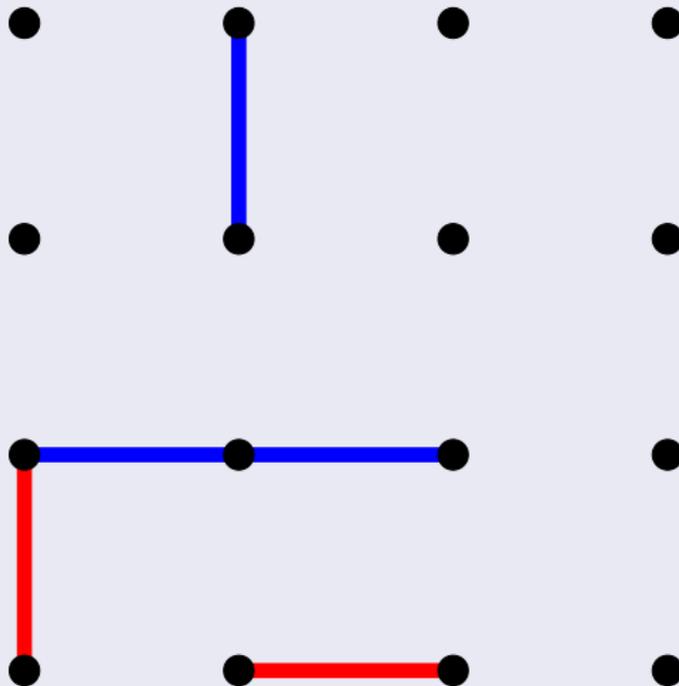
## Eine typische Partie



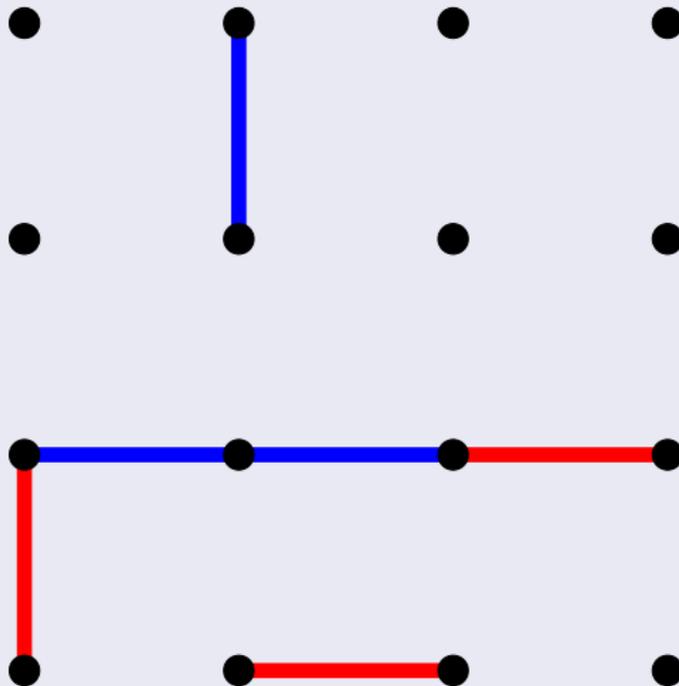
## Eine typische Partie



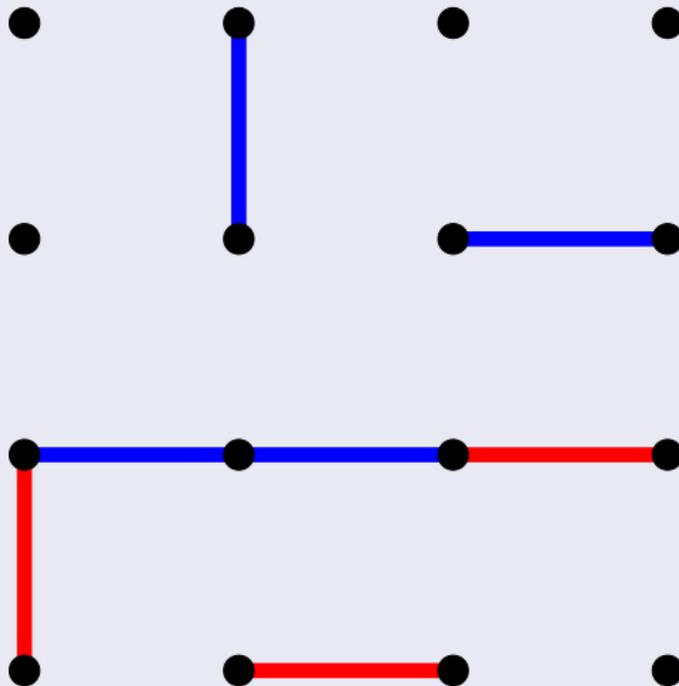
## Eine typische Partie



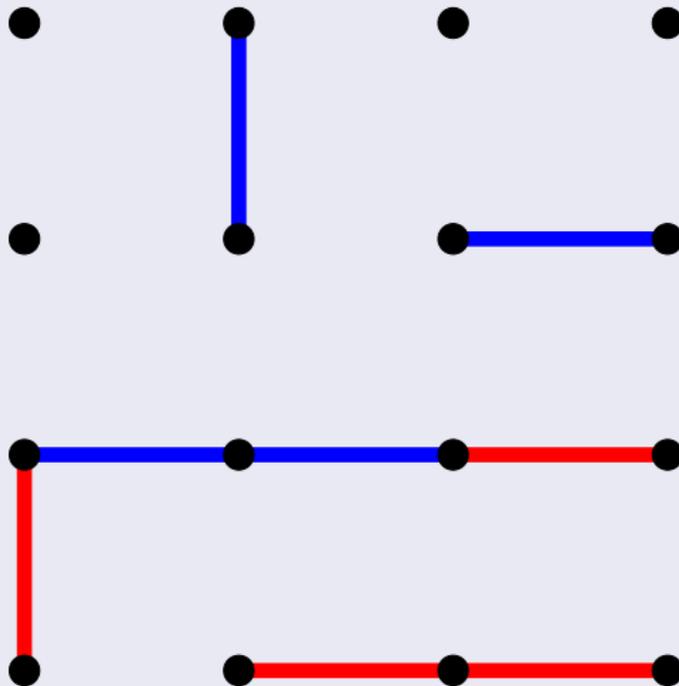
## Eine typische Partie



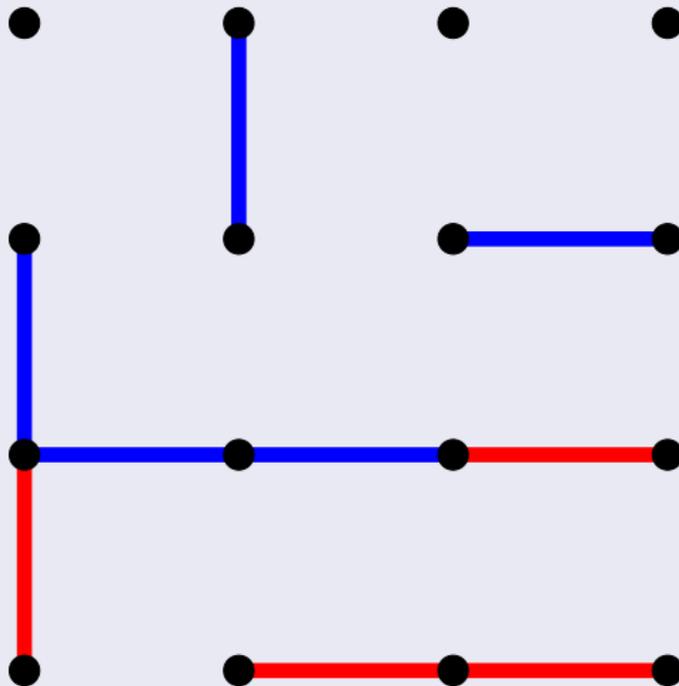
## Eine typische Partie



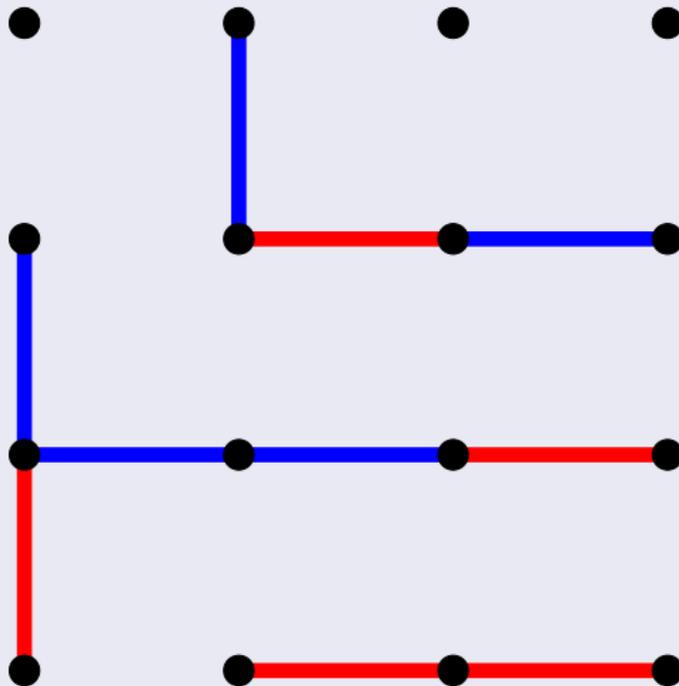
## Eine typische Partie



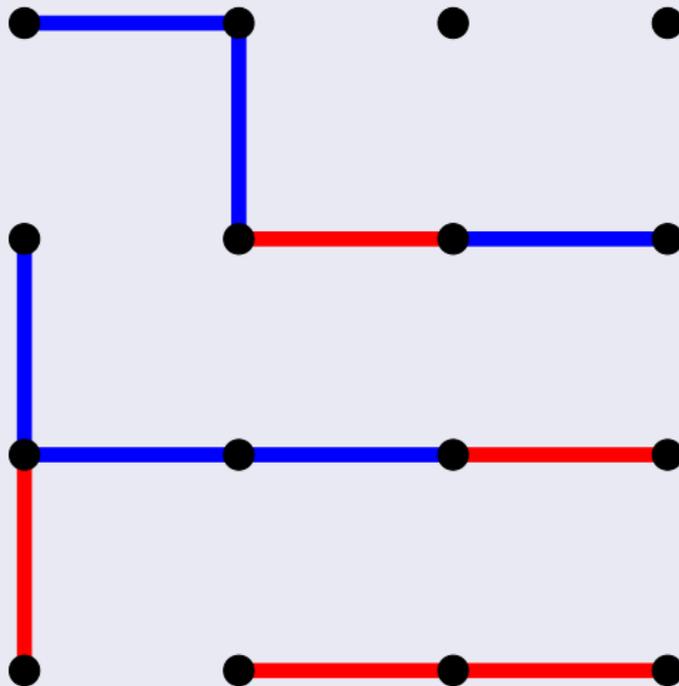
## Eine typische Partie



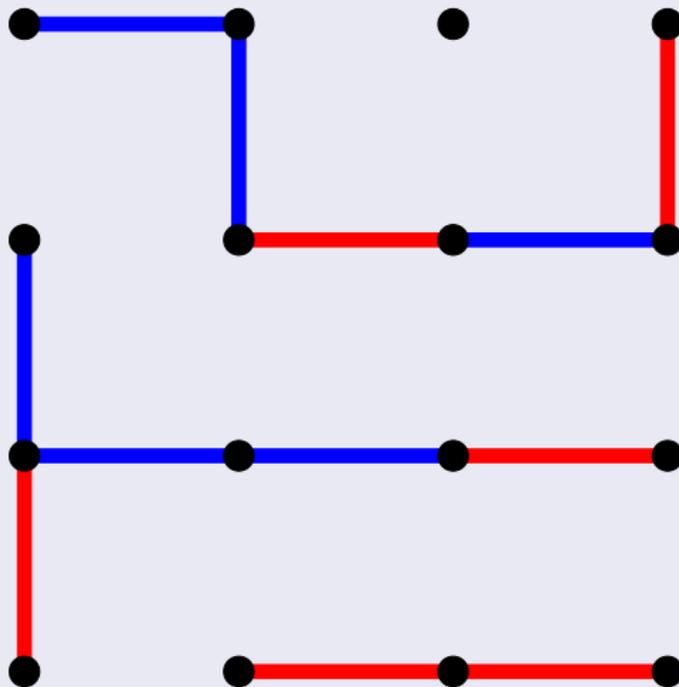
## Eine typische Partie



## Eine typische Partie

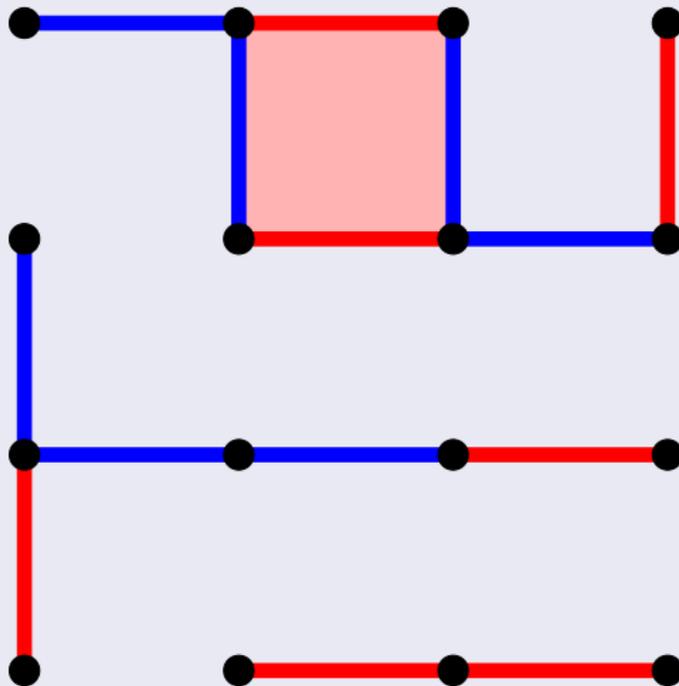


## Eine typische Partie

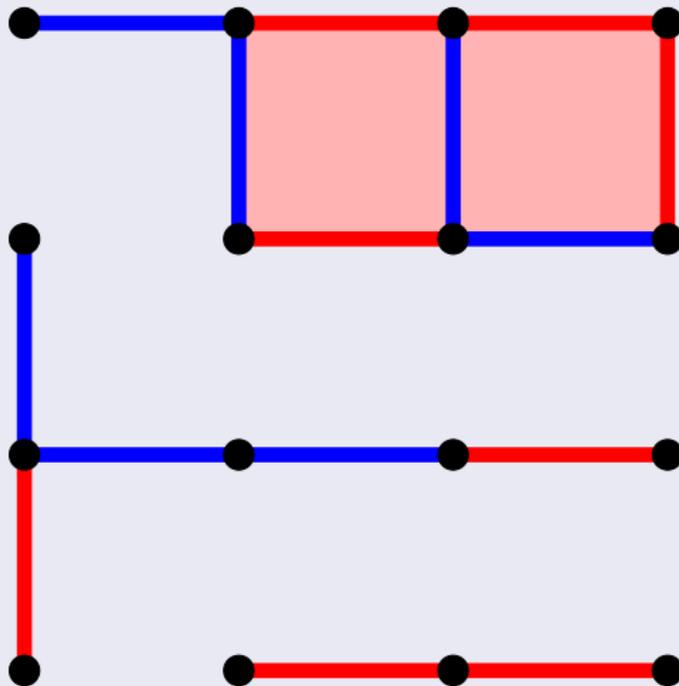




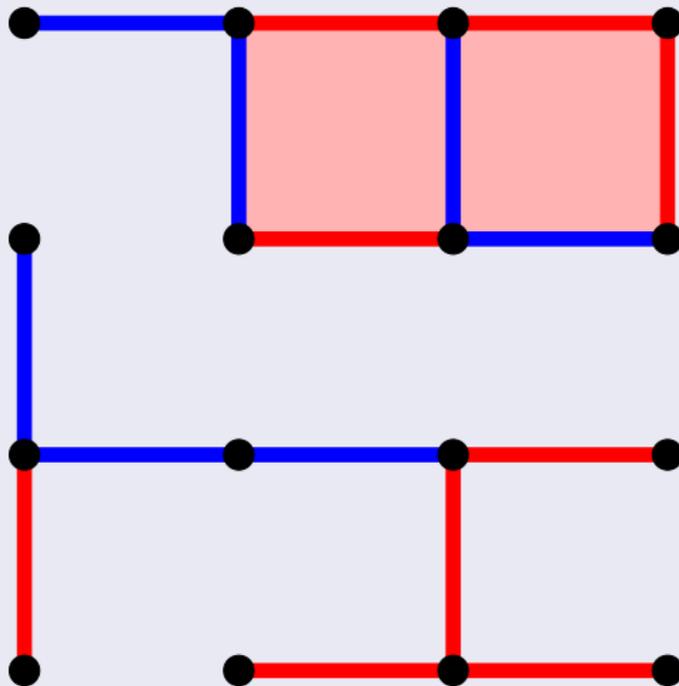
## Eine typische Partie



## Eine typische Partie



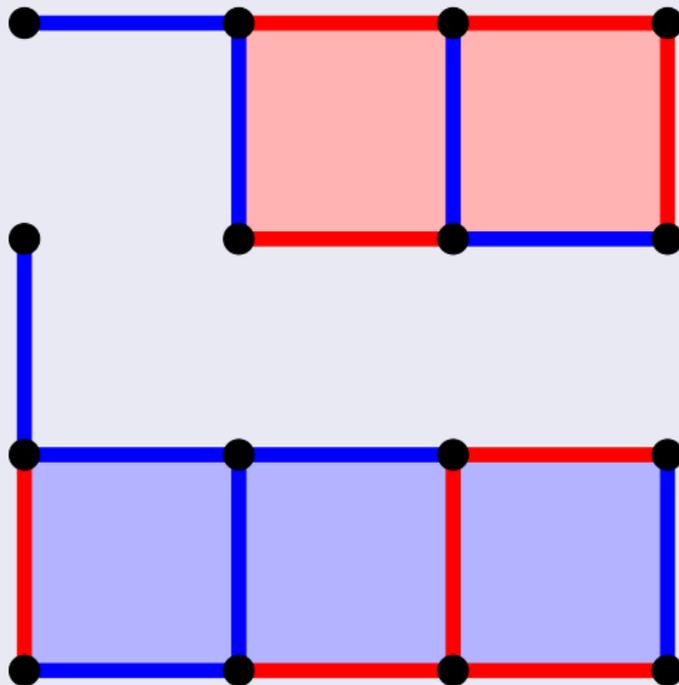
## Eine typische Partie



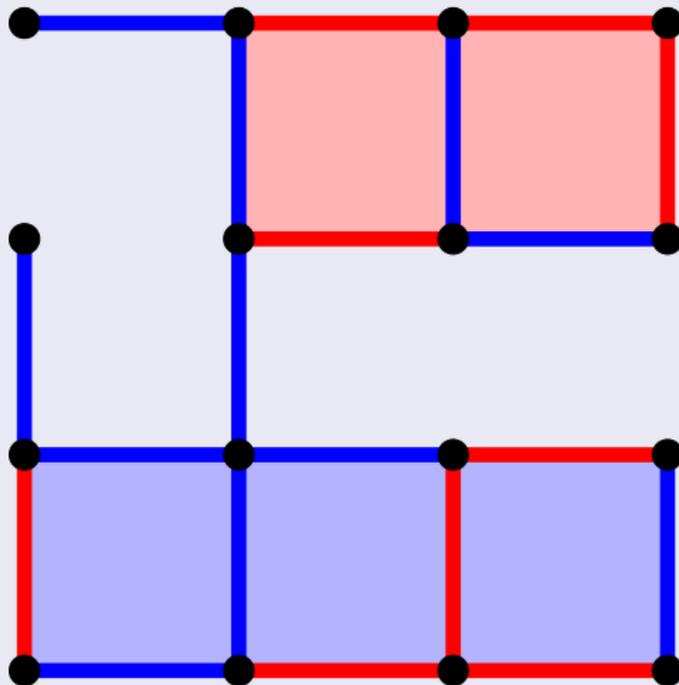




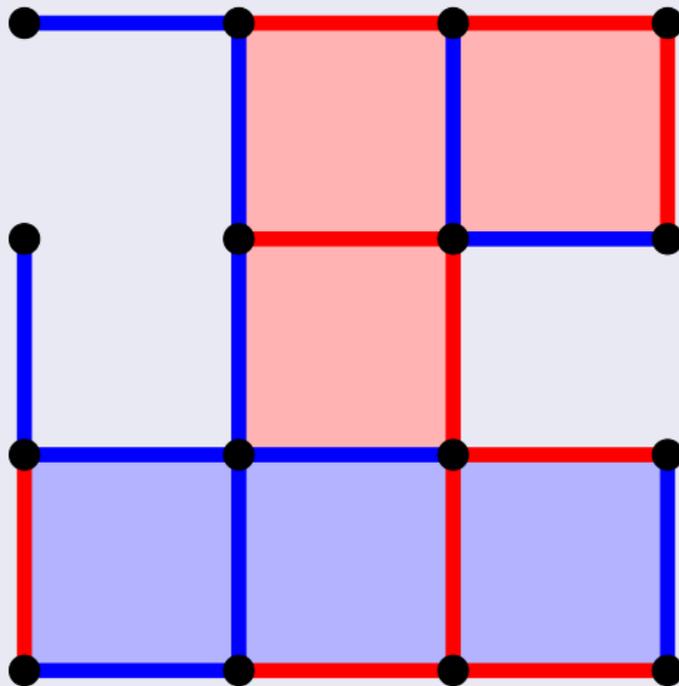
## Eine typische Partie



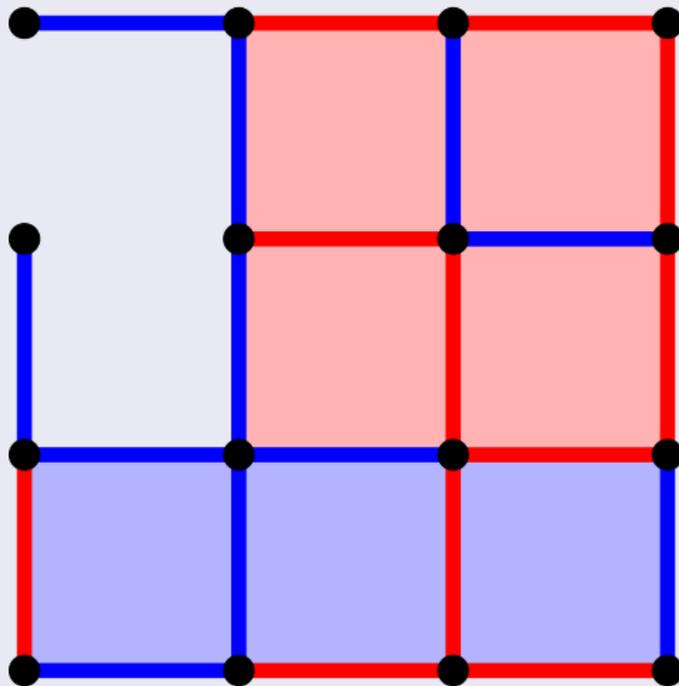
## Eine typische Partie



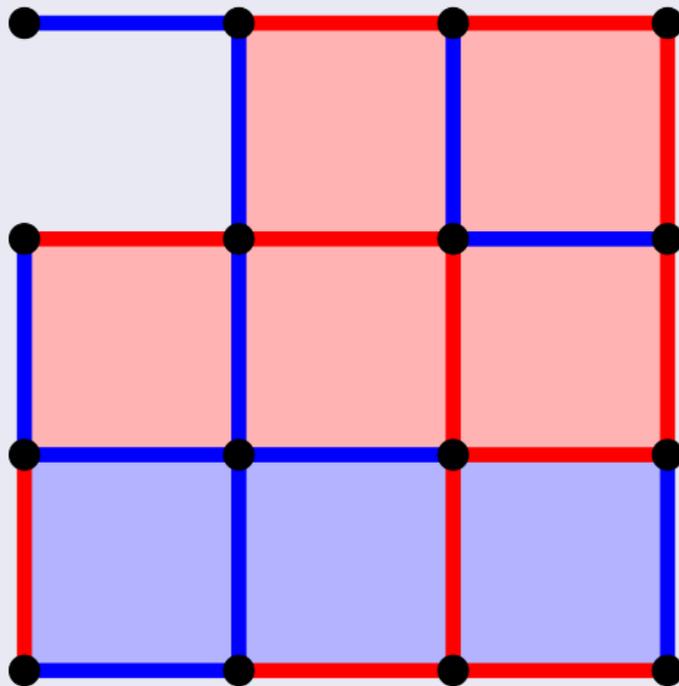
## Eine typische Partie



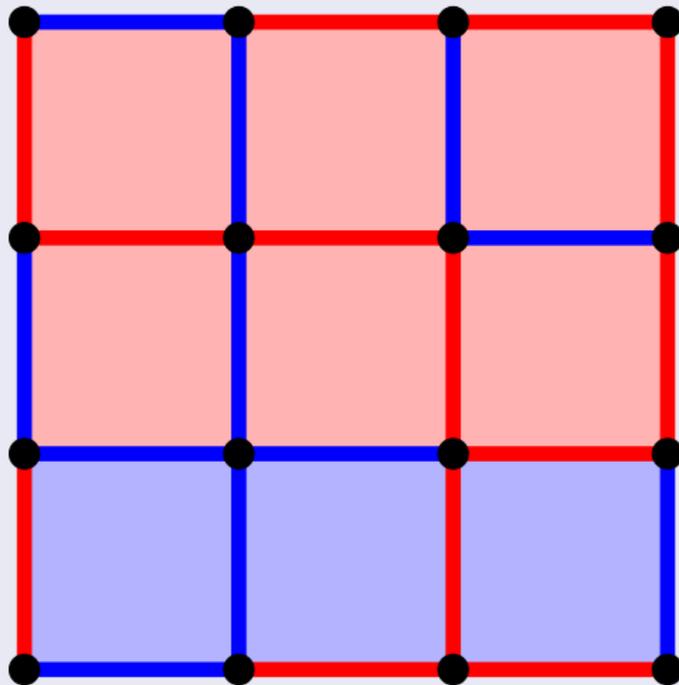
## Eine typische Partie



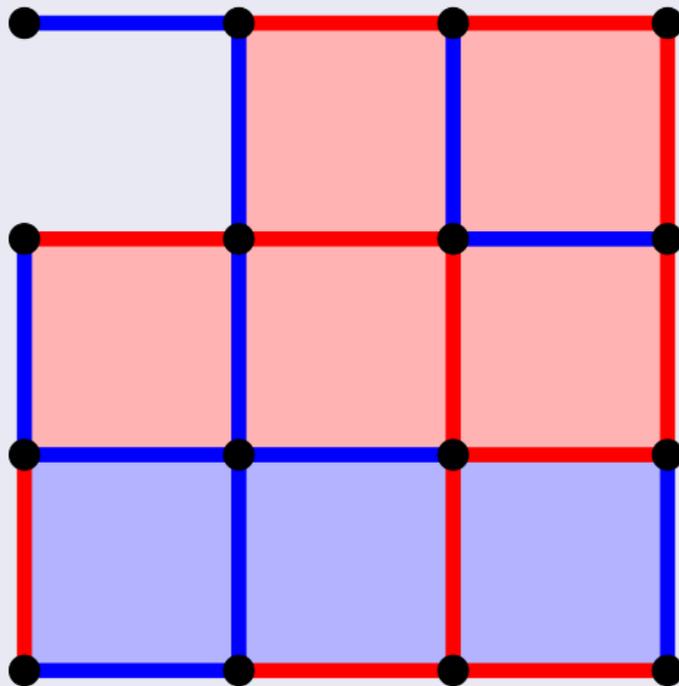
## Eine typische Partie



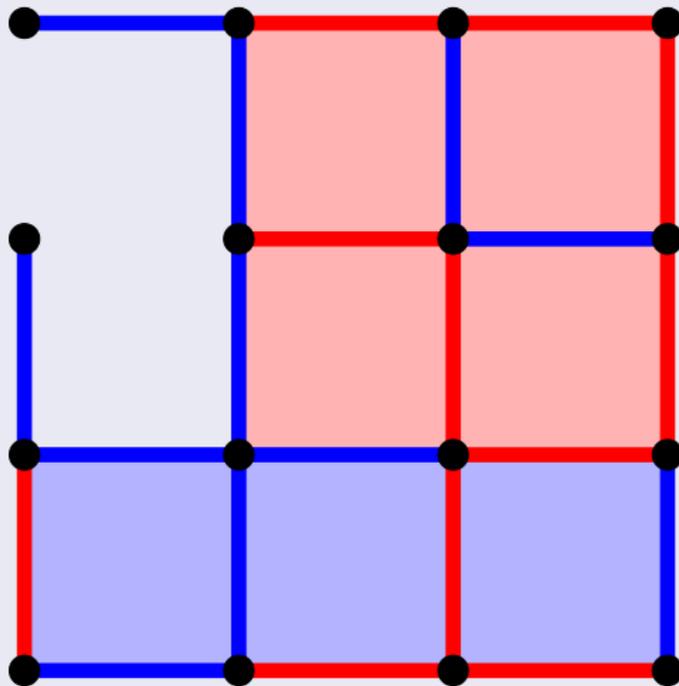
## Eine typische Partie



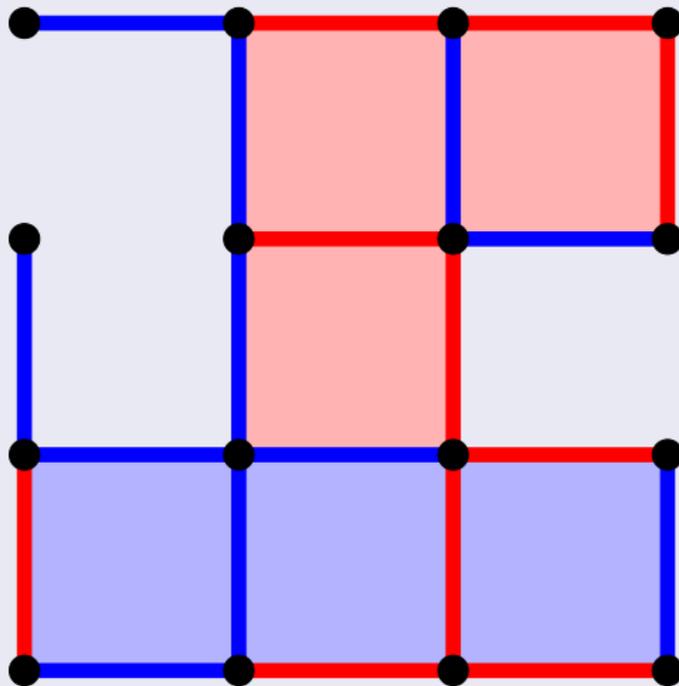
## Eine typische Partie



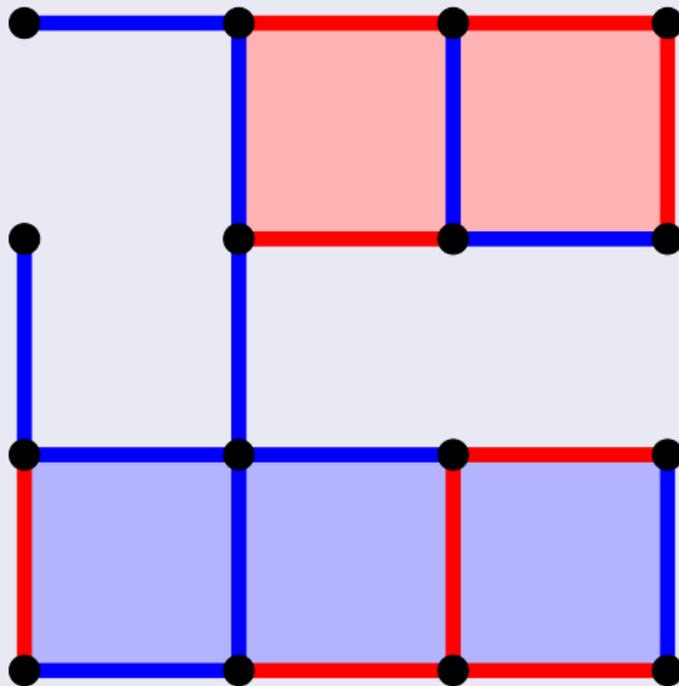
## Eine typische Partie



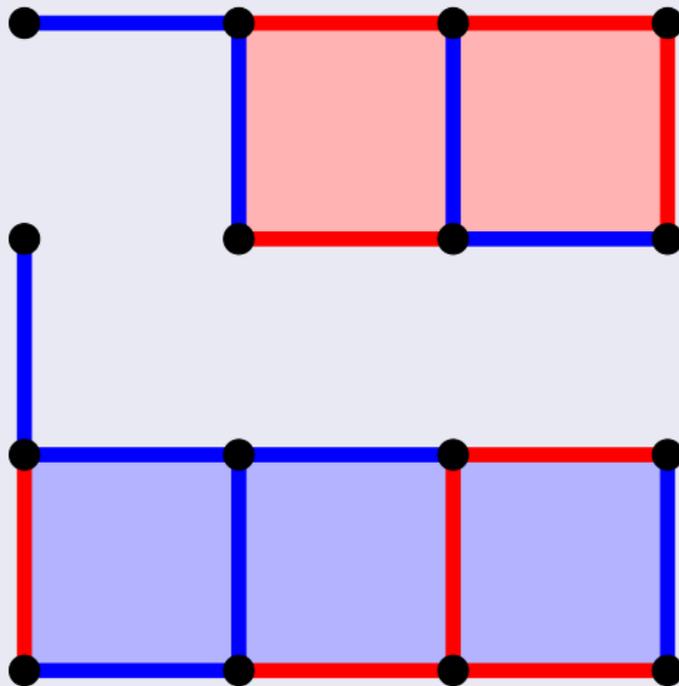
## Eine typische Partie



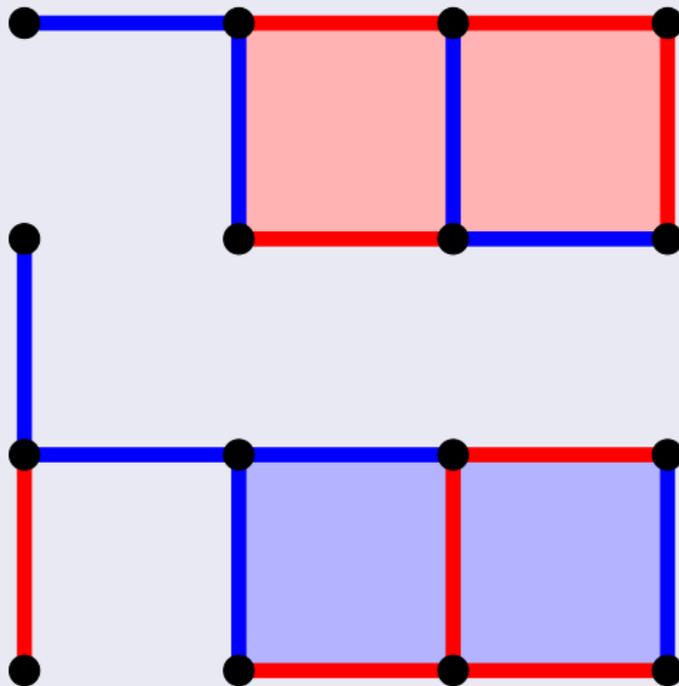
## Eine typische Partie



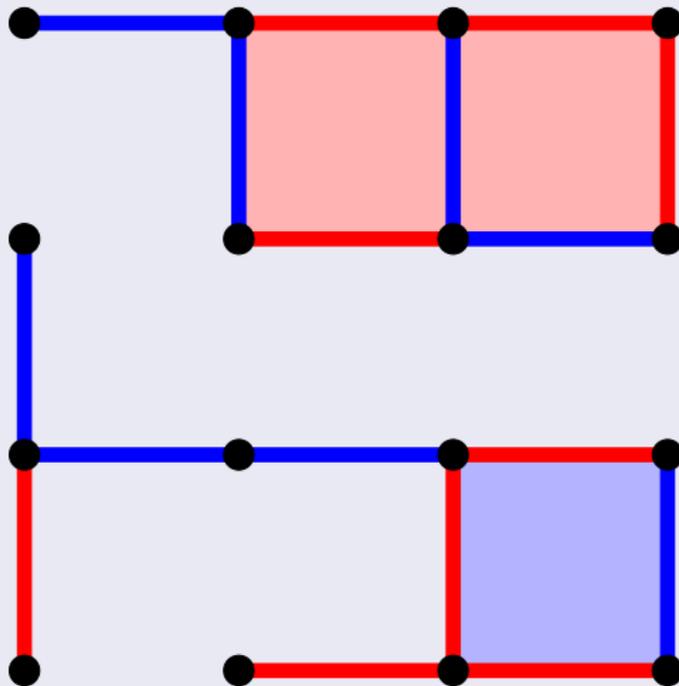
## Eine typische Partie



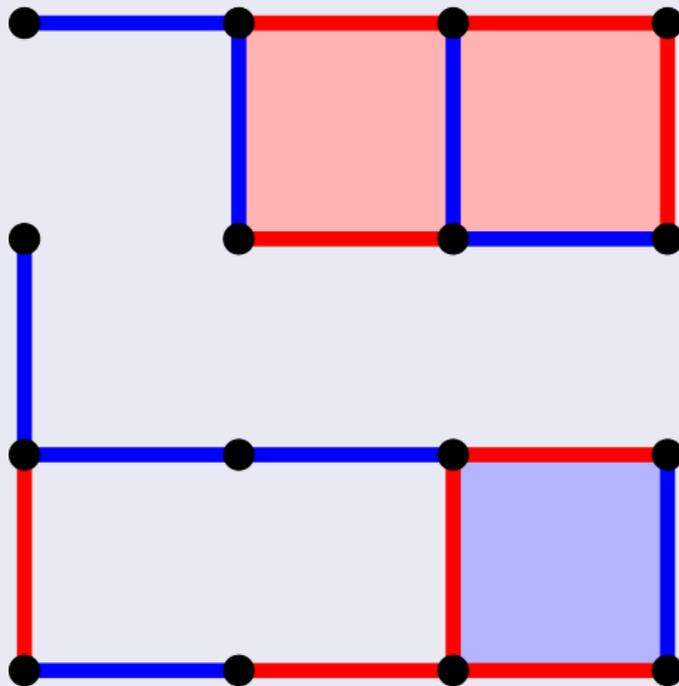
## Eine typische Partie



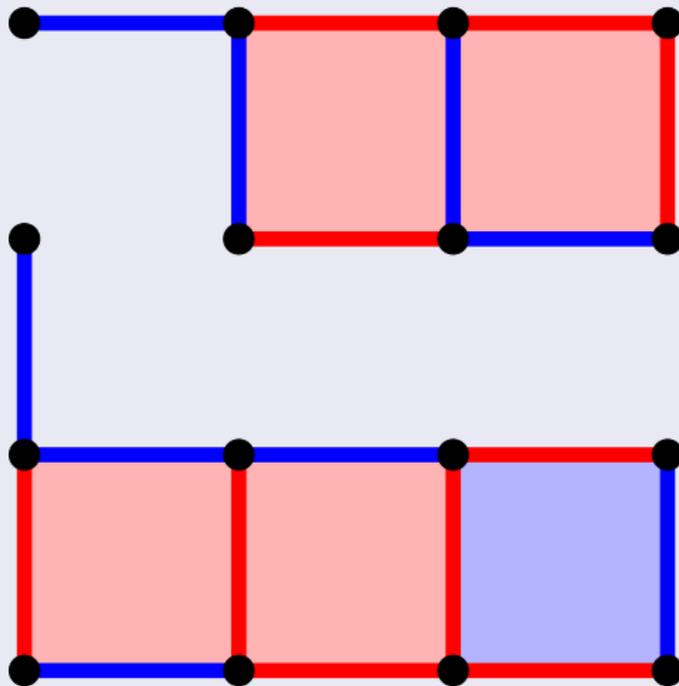
## Eine typische Partie



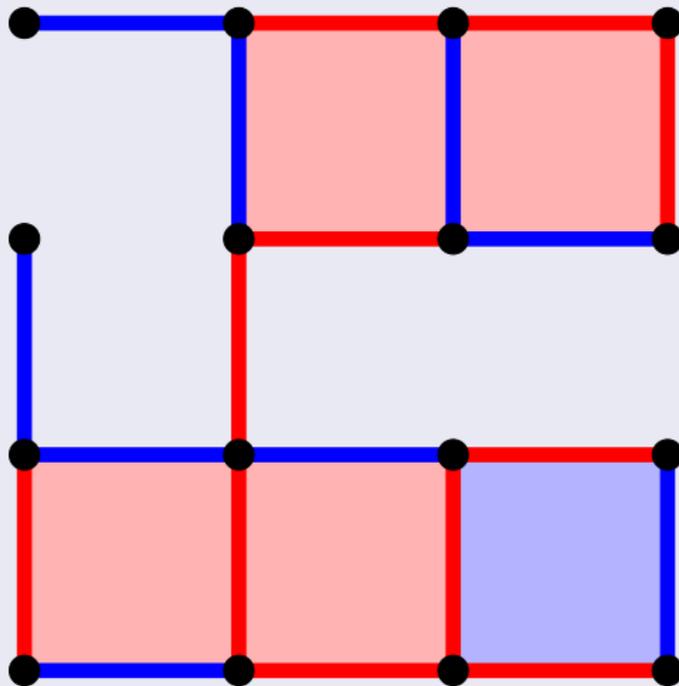
## Eine typische Partie



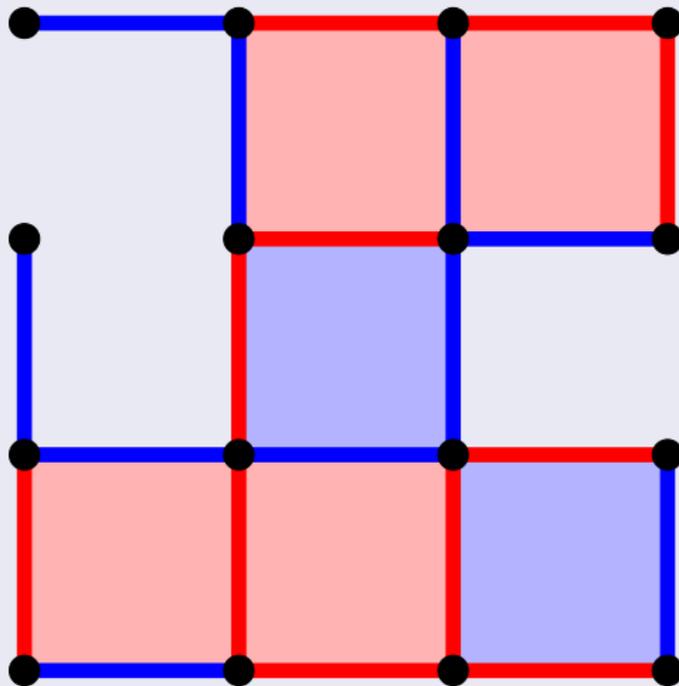
## Eine typische Partie



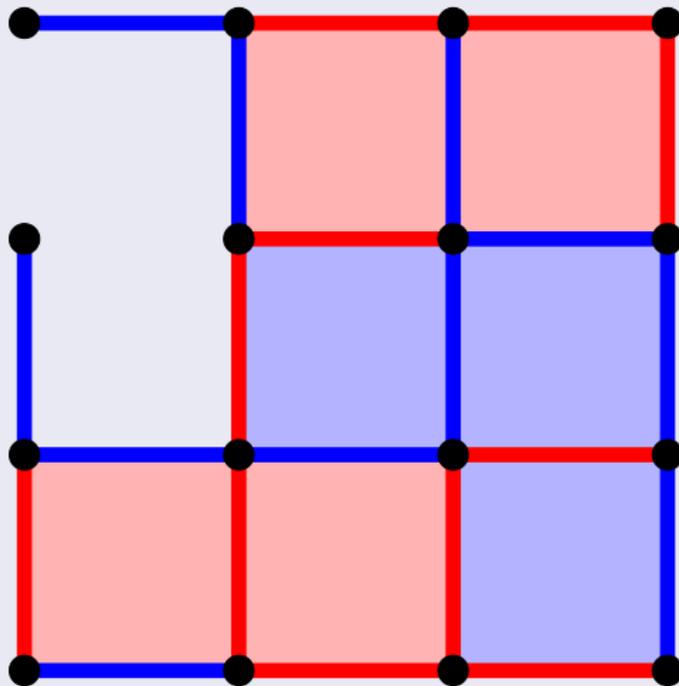
## Eine typische Partie



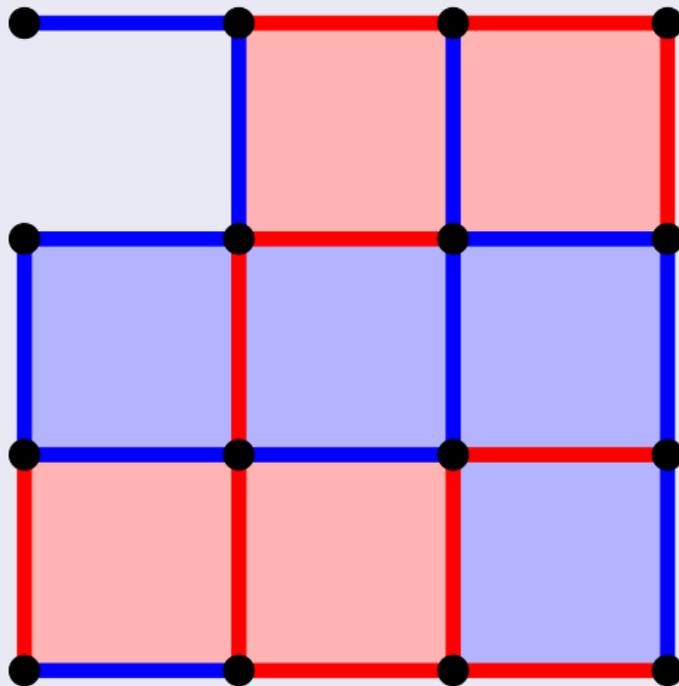
## Eine typische Partie



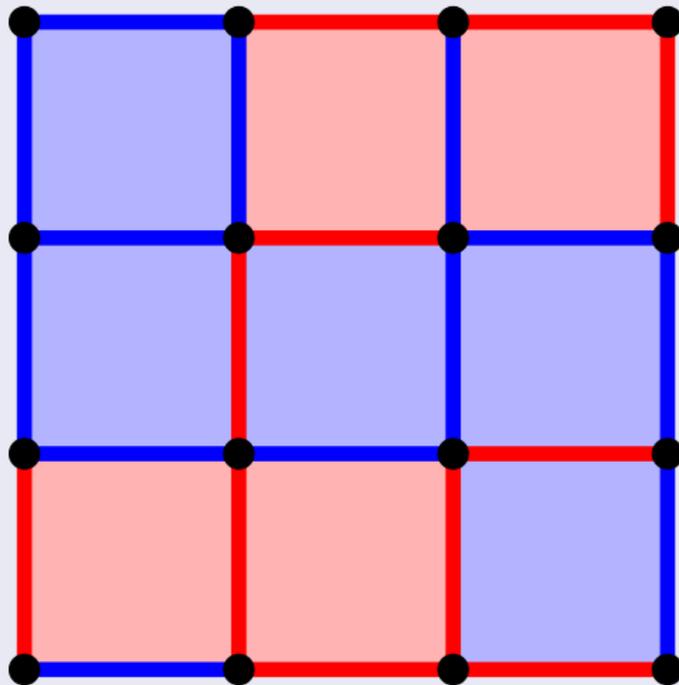
## Eine typische Partie



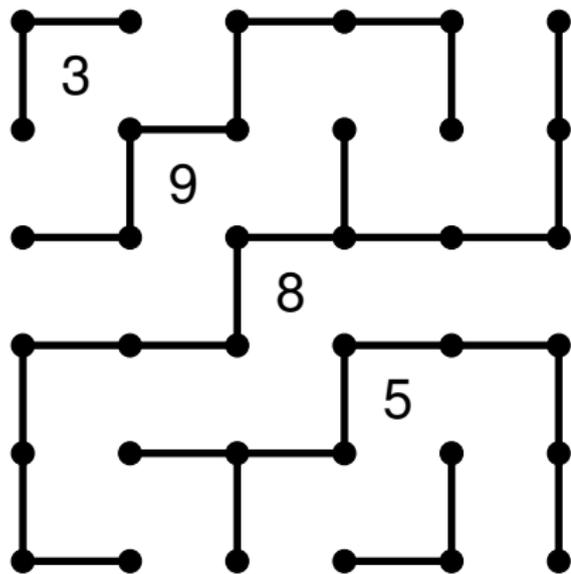
## Eine typische Partie



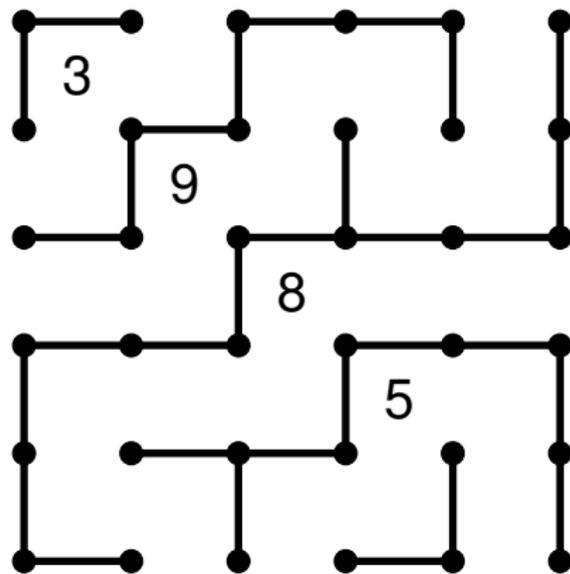
## Eine typische Partie



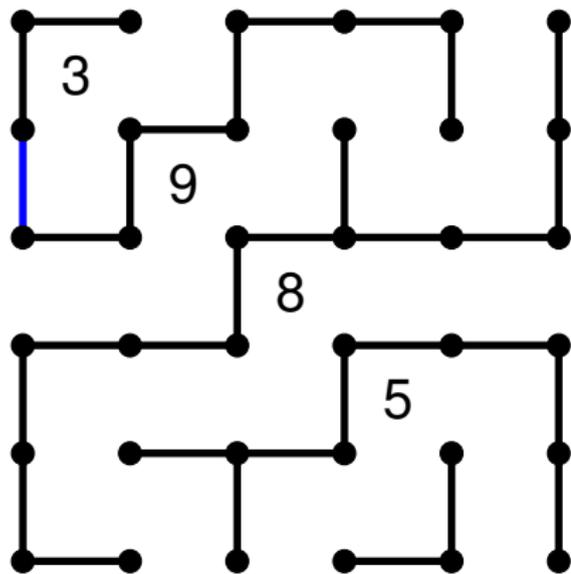
„Standard“-Strategie



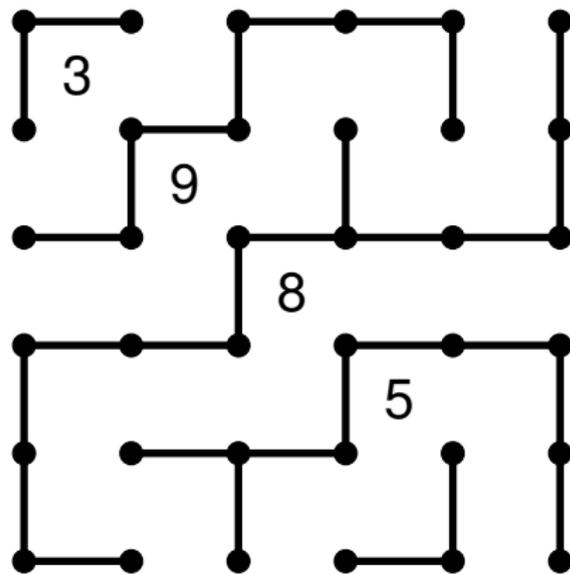
„Almosen“-Strategie



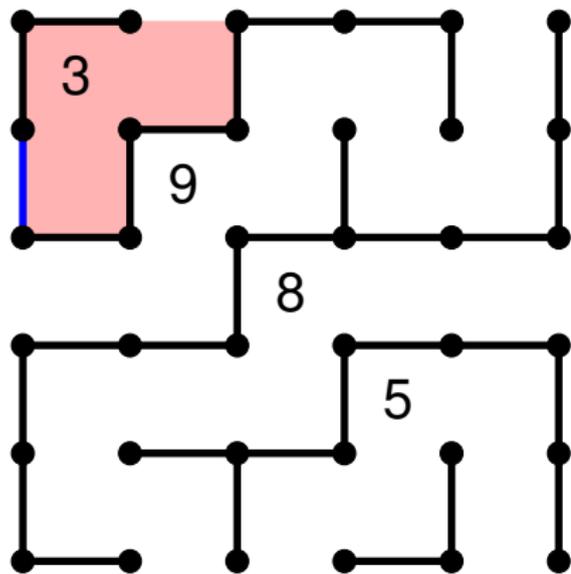
„Standard“-Strategie



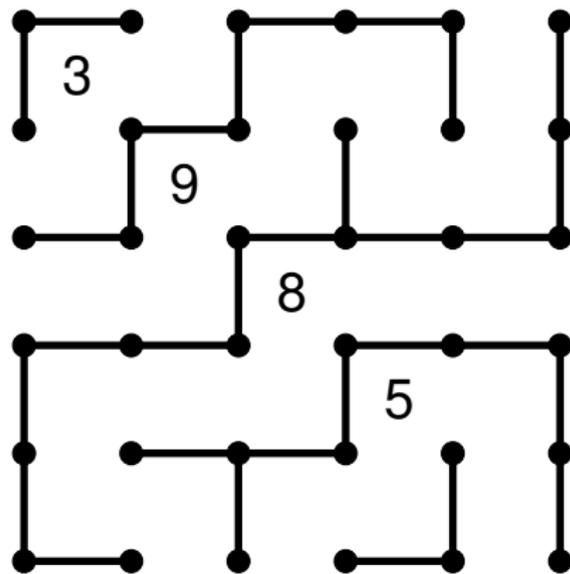
„Almosen“-Strategie



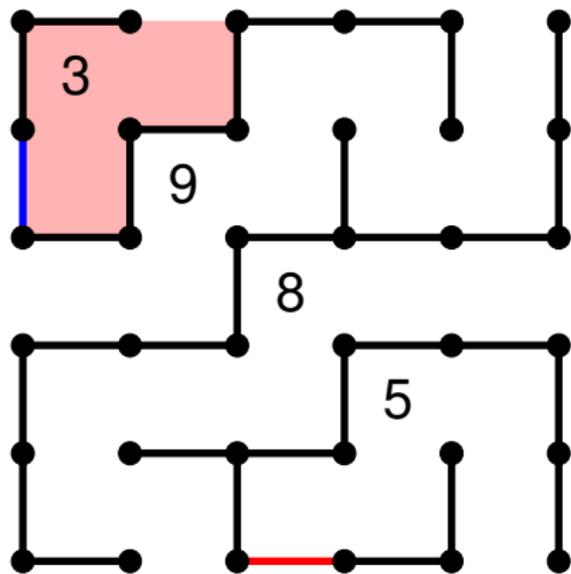
„Standard“-Strategie



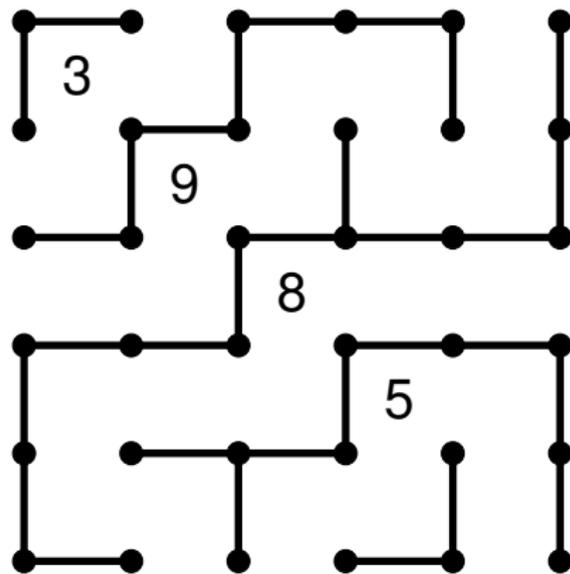
„Almosen“-Strategie



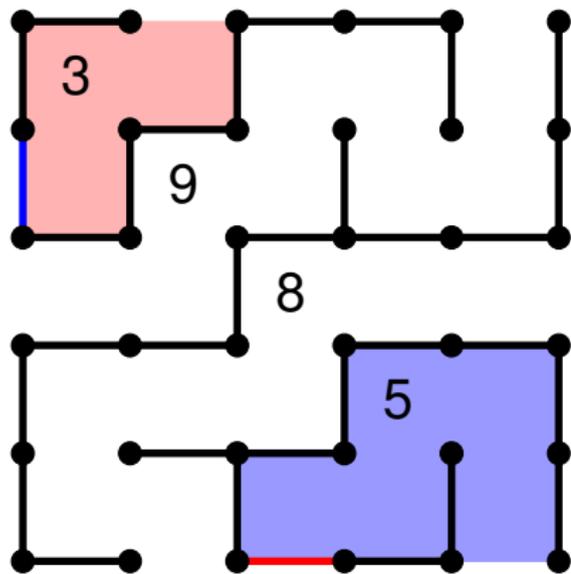
„Standard“-Strategie



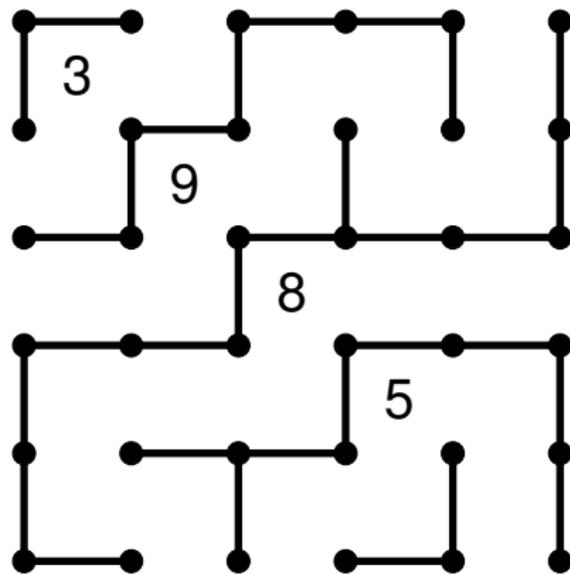
„Almosen“-Strategie



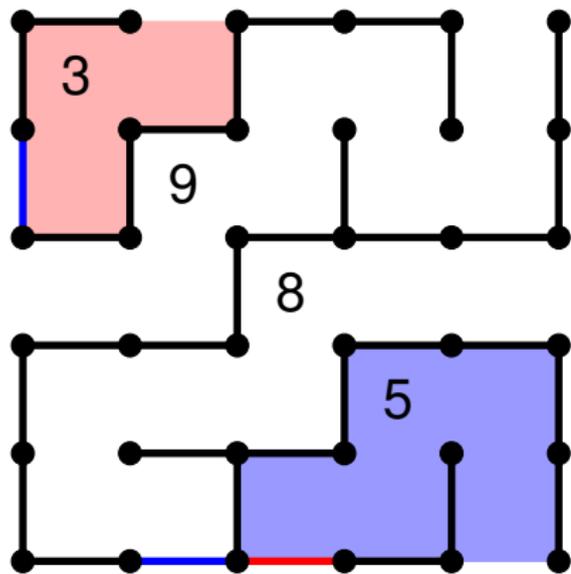
„Standard“-Strategie



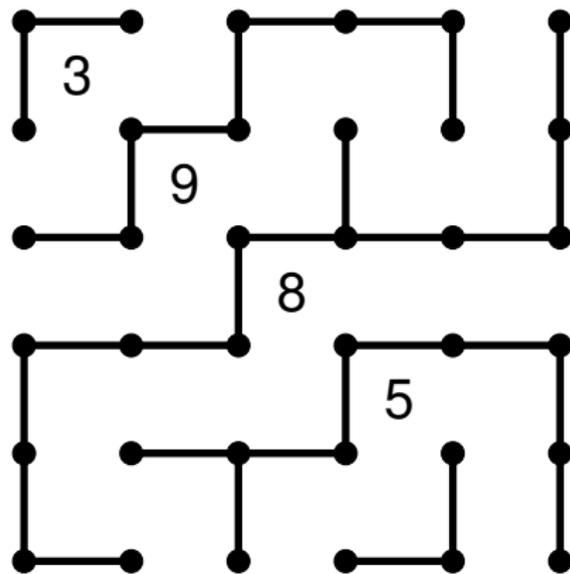
„Almosen“-Strategie



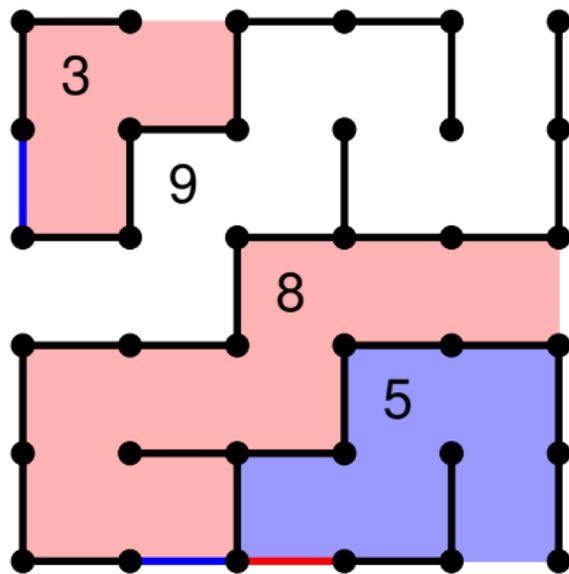
„Standard“-Strategie



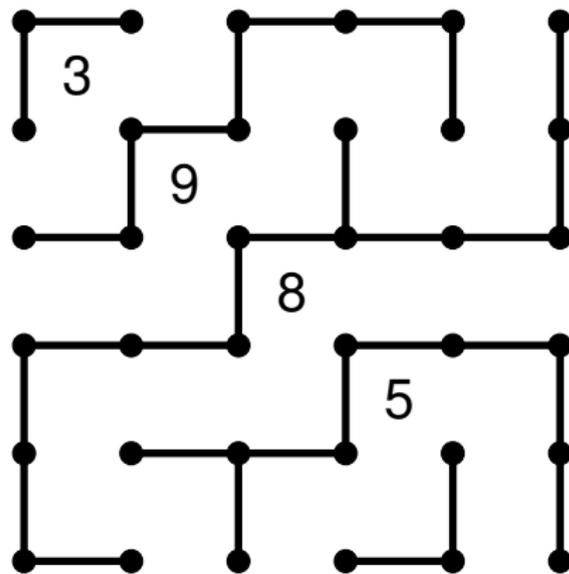
„Almosen“-Strategie



„Standard“-Strategie

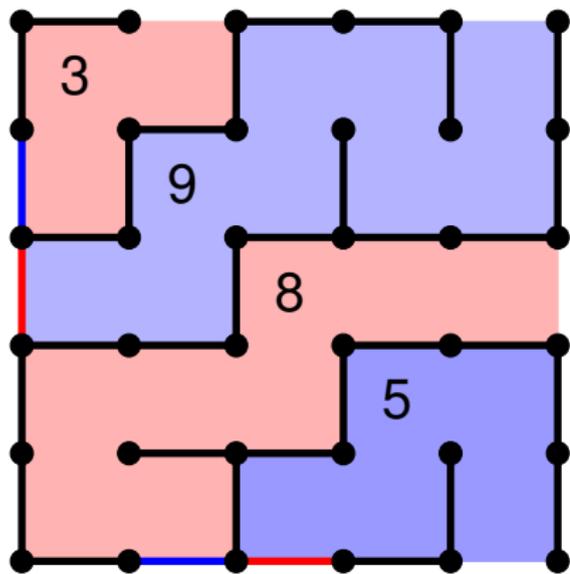


„Almosen“-Strategie

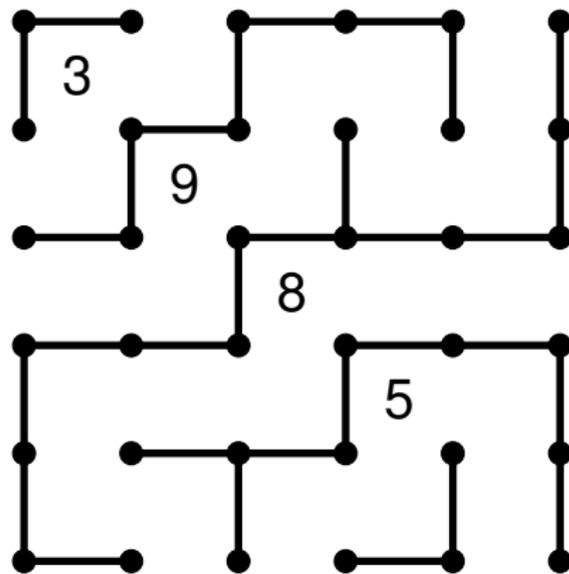




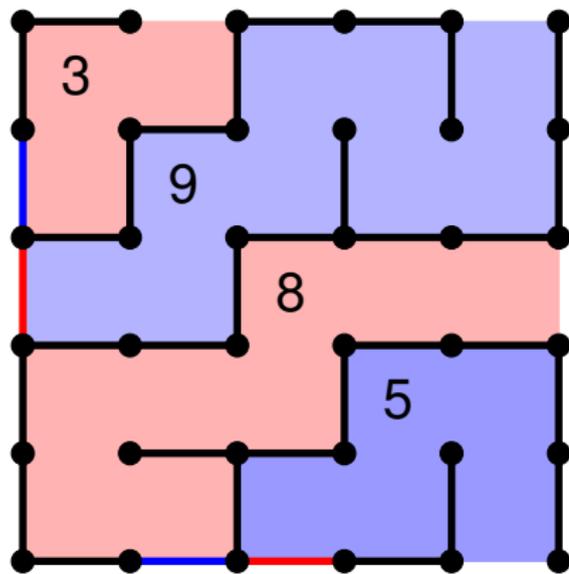
„Standard“-Strategie



„Almosen“-Strategie

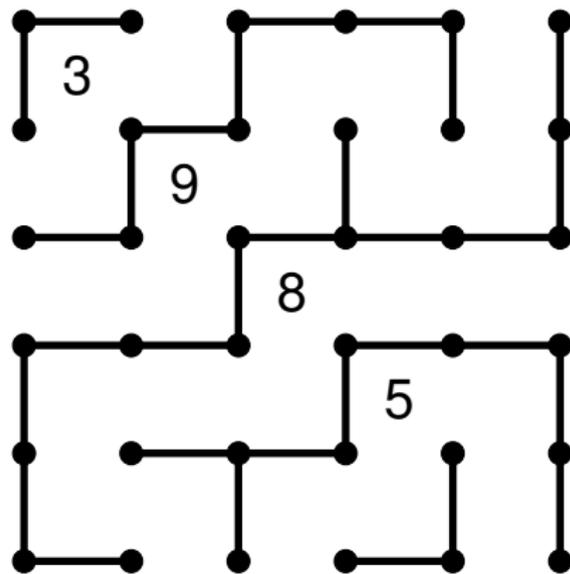


„Standard“-Strategie

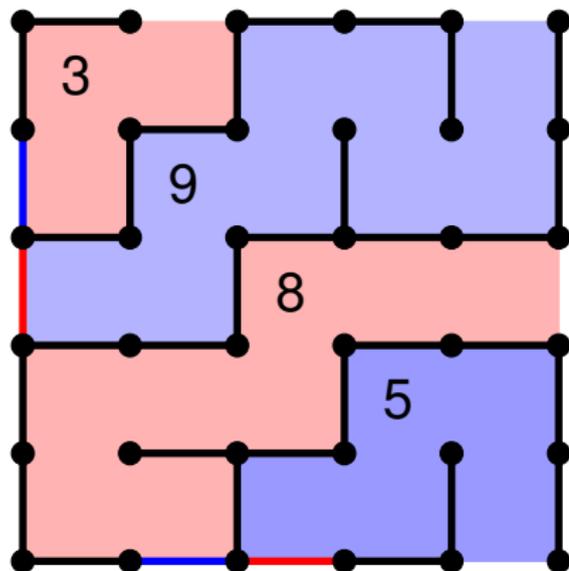


14:11

„Almosen“-Strategie

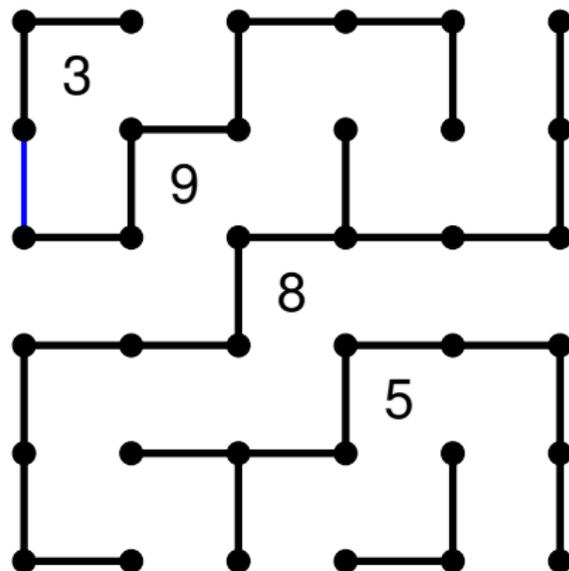


„Standard“-Strategie

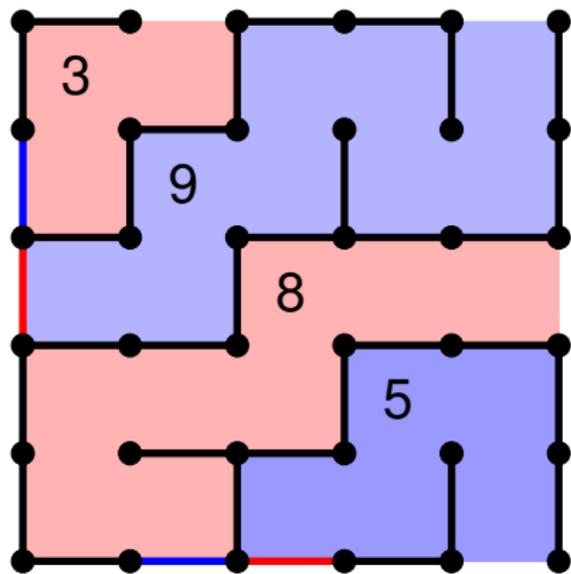


14:11

„Almosen“-Strategie

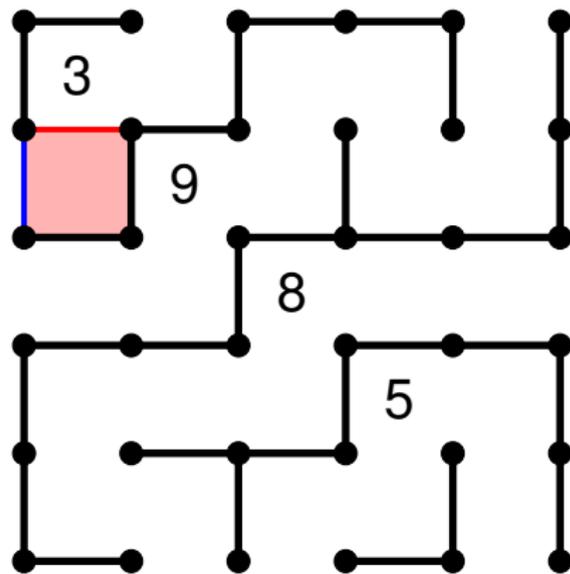


„Standard“-Strategie

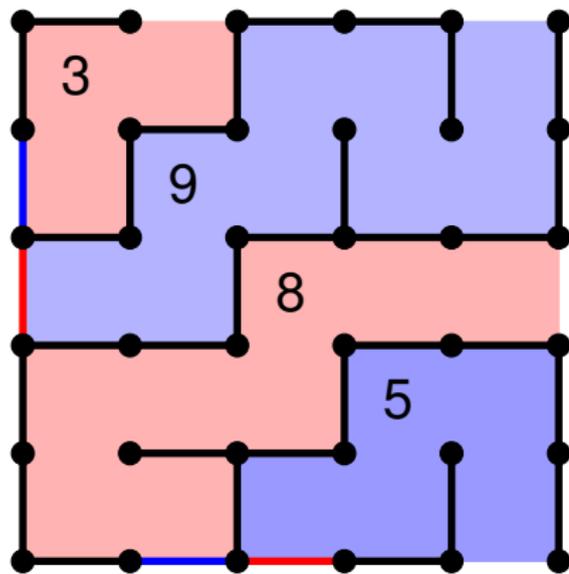


14:11

„Almosen“-Strategie

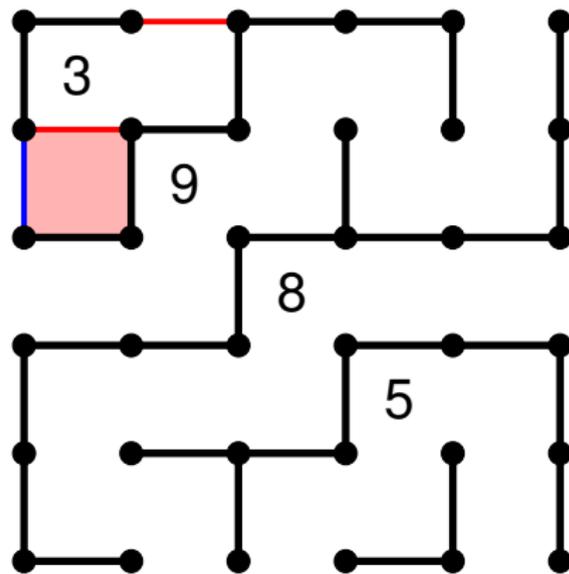


„Standard“-Strategie

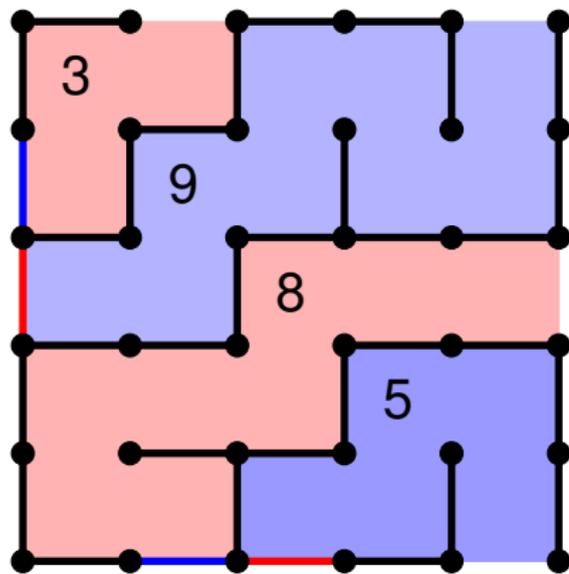


14:11

„Almosen“-Strategie

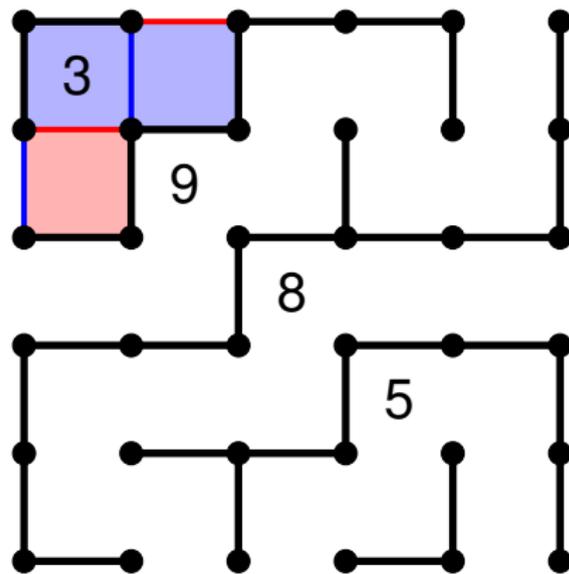


„Standard“-Strategie

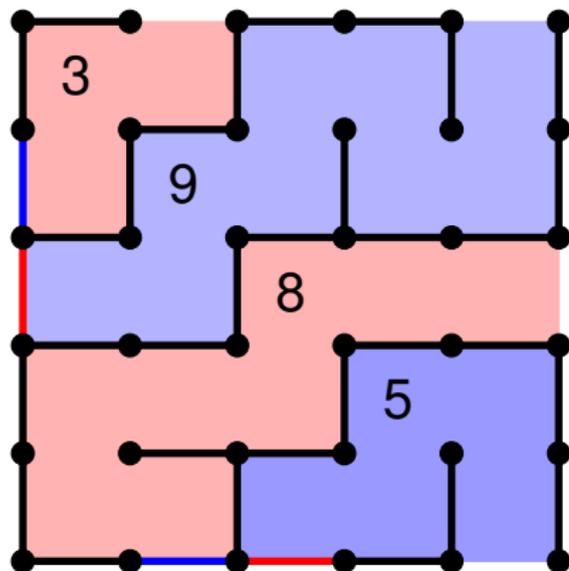


14:11

„Almosen“-Strategie

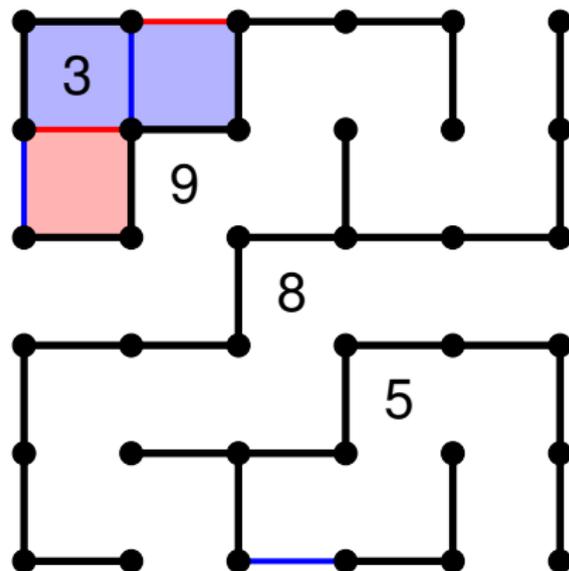


„Standard“-Strategie

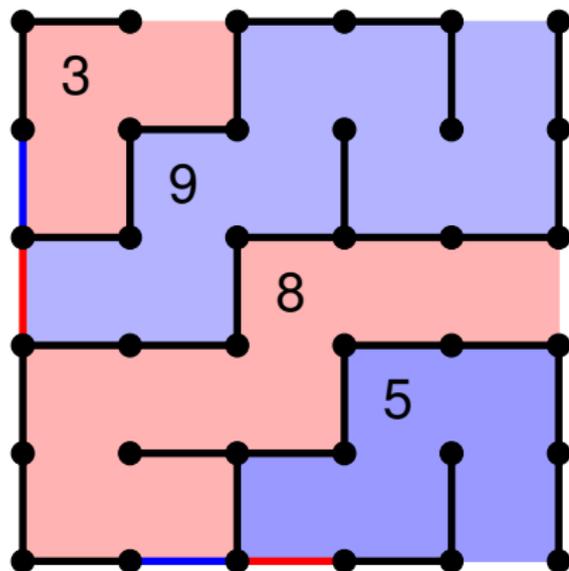


14:11

„Almosen“-Strategie

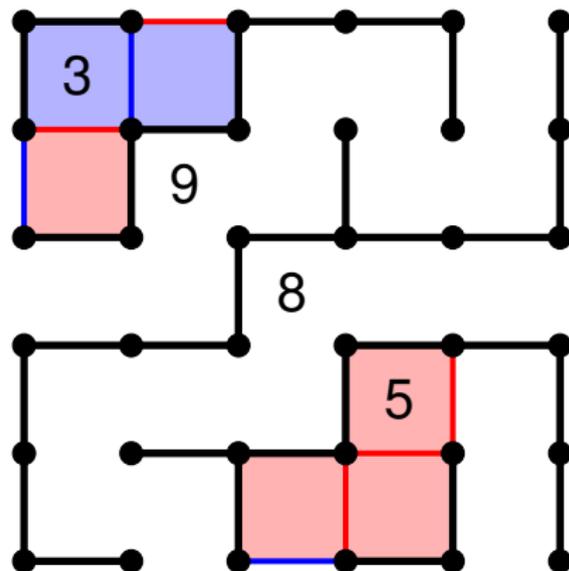


„Standard“-Strategie



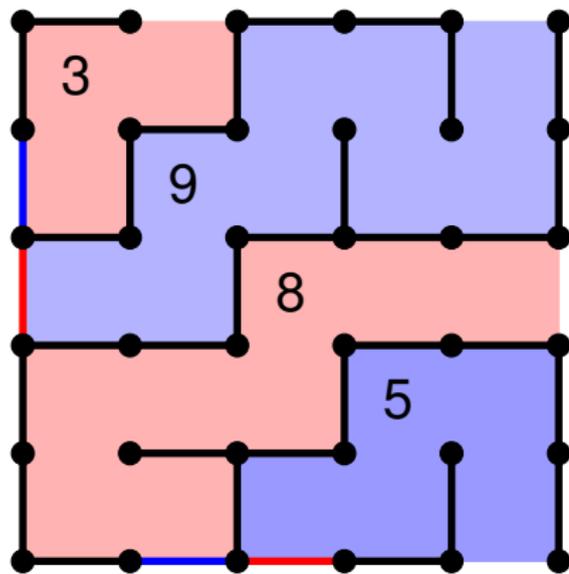
14:11

„Almosen“-Strategie



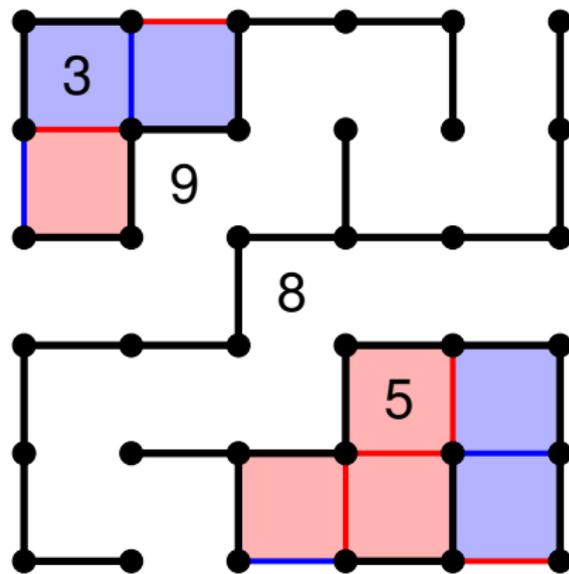


„Standard“-Strategie

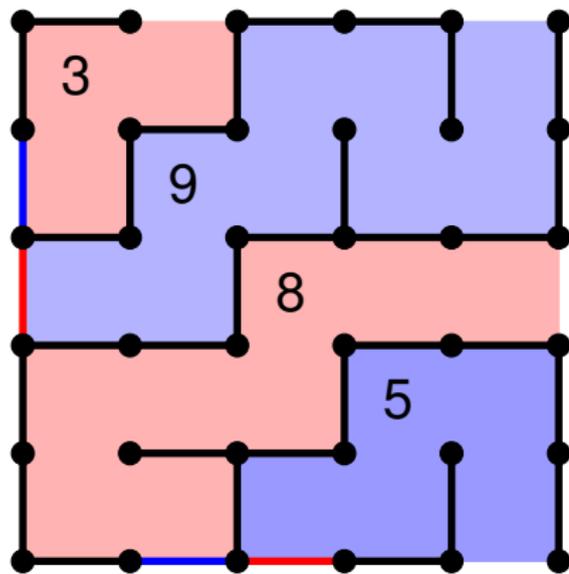


14:11

„Almosen“-Strategie

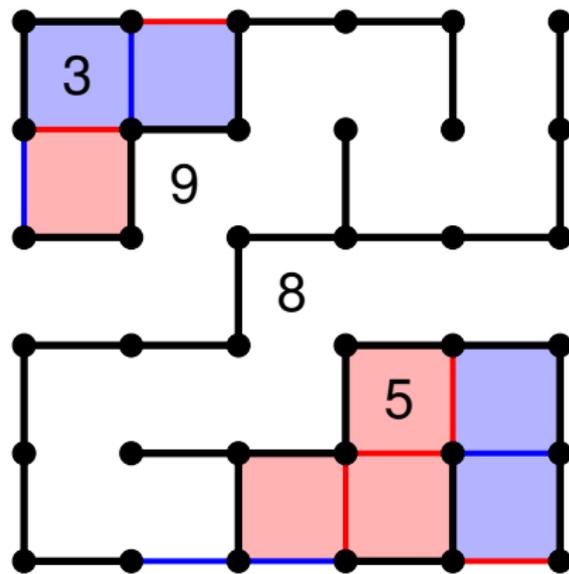


„Standard“-Strategie

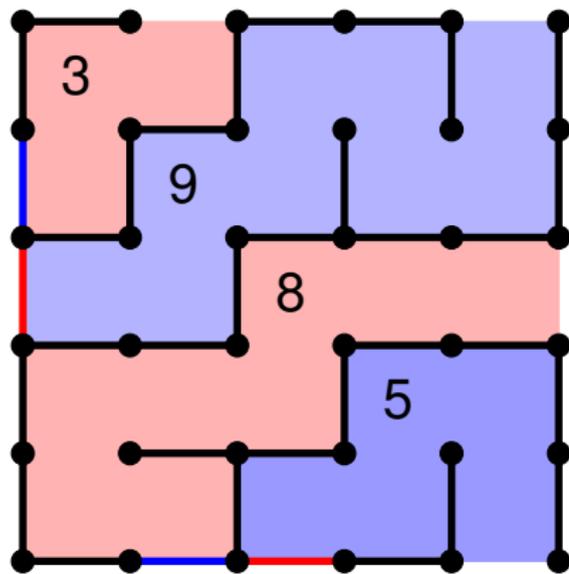


14:11

„Almosen“-Strategie

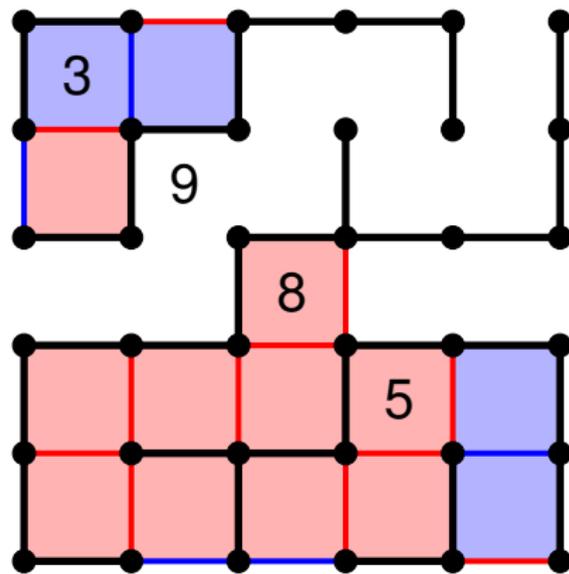


„Standard“-Strategie

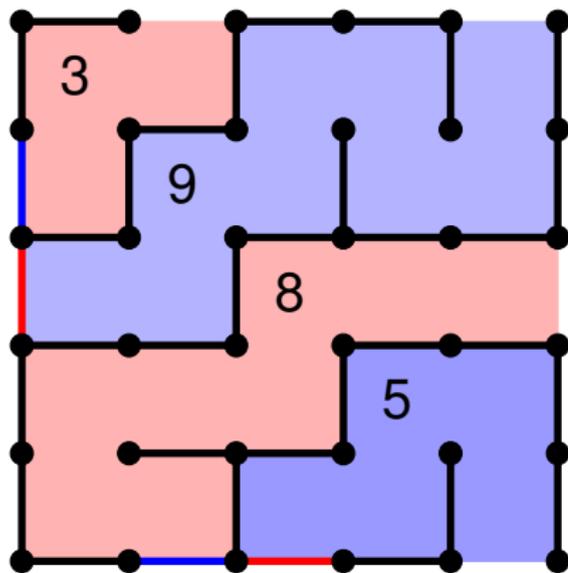


14:11

„Almosen“-Strategie

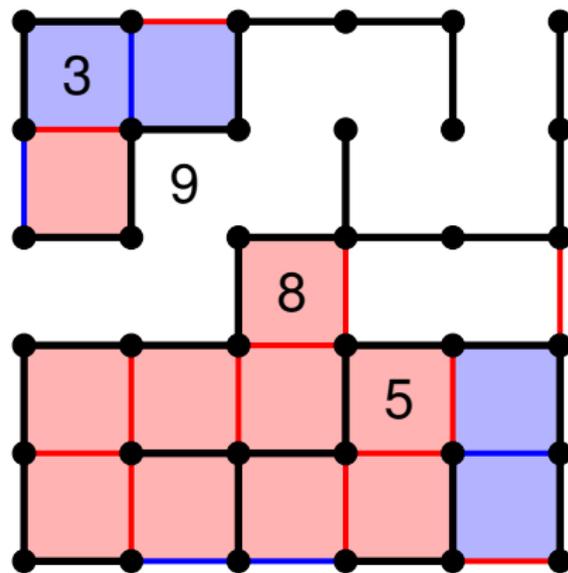


„Standard“-Strategie

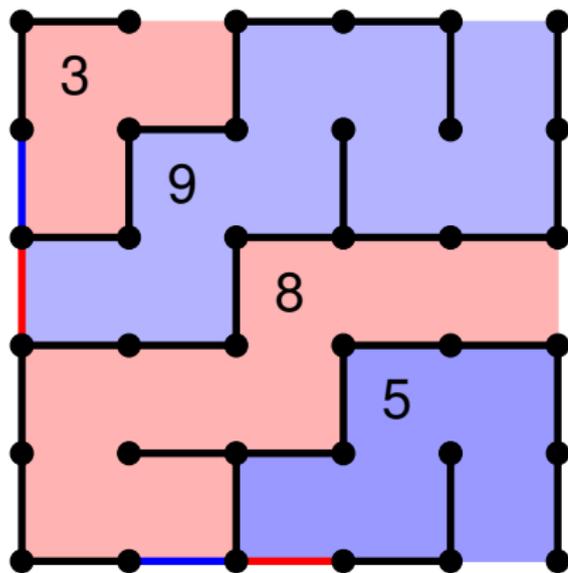


14:11

„Almosen“-Strategie

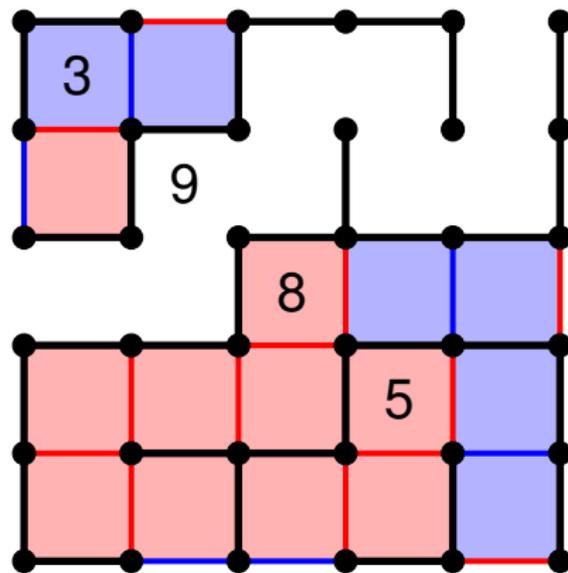


„Standard“-Strategie

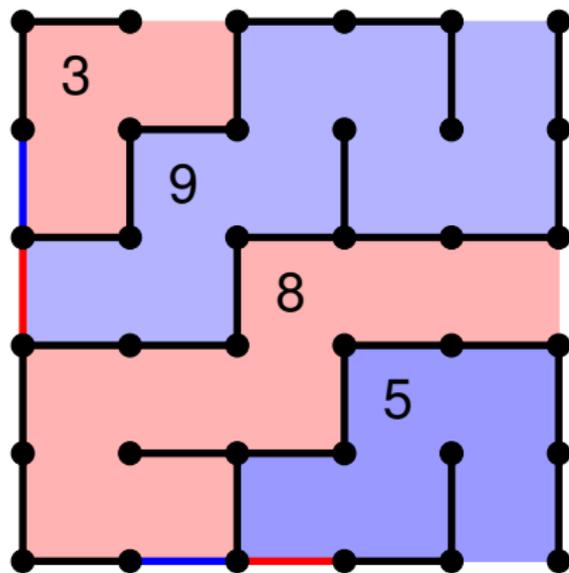


14:11

„Almosen“-Strategie

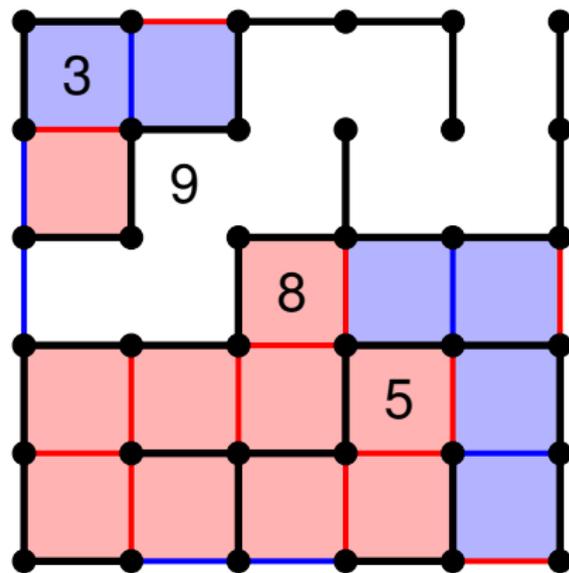


„Standard“-Strategie



14:11

„Almosen“-Strategie







## Schlussfolgerung

Der andere Spieler muss am Zug sein, wenn die Ketten geöffnet werden.

## Schlussfolgerung

Der andere Spieler muss am Zug sein, wenn die Ketten geöffnet werden.

## Wie erreicht man das?

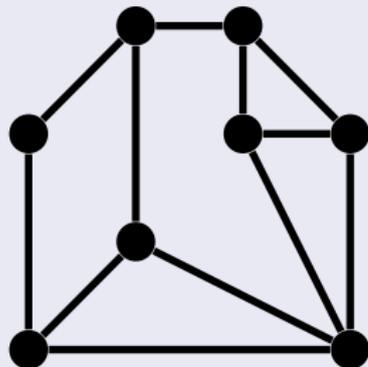
## Schlussfolgerung

Der andere Spieler muss am Zug sein, wenn die Ketten geöffnet werden.

## Wie erreicht man das?

- # Züge = # Knoten + # Doppelkästchenzüge

## Eulerscher Polyedersatz



Für verbundene ebene Graphen gilt:

$$\# \text{ Kanten} + 1 = \# \text{ Knoten} + \# \text{ Flächen.}$$

## Anwendung

$$\# \text{ Kanten} = (\# \text{ Züge} - 1) + \# \text{ Flächen} + \# \text{ Doppelkästchenzüge}$$

## Schlussfolgerung

Der andere Spieler muss am Zug sein, wenn die Ketten geöffnet werden.

## Wie erreicht man das?

- # Züge = # Knoten + # Doppelkästchenzüge

## Schlussfolgerung

Der andere Spieler muss am Zug sein, wenn die Ketten geöffnet werden.

## Wie erreicht man das?

- # Züge = # Knoten + # Doppelkästchenzüge
- Wer als letzter zog, bekam die Ketten.

## Schlussfolgerung

Der andere Spieler muss am Zug sein, wenn die Ketten geöffnet werden.

## Wie erreicht man das?

- # Züge = # Knoten + # Doppelkästchenzüge
- Wer als letzter zog, bekam die Ketten.
- Richtige Parität von # Knoten + # Doppelkästchenzüge

## Schlussfolgerung

Der andere Spieler muss am Zug sein, wenn die Ketten geöffnet werden.

## Wie erreicht man das?

- # Züge = # Knoten + # Doppelkästchenzüge
- Wer als letzter zog, bekam die Ketten.
- Richtige Parität von # Knoten + # Doppelkästchenzüge
- Jede Kette außer der letzten führt zu genau einem Doppelkästchenzug.

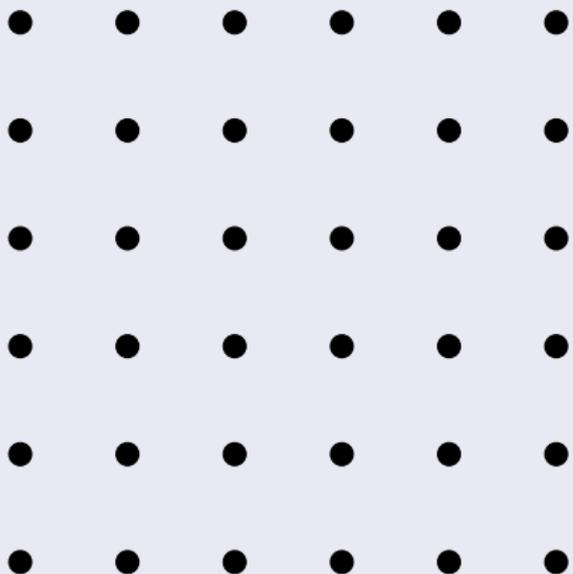
## Schlussfolgerung

Der andere Spieler muss am Zug sein, wenn die Ketten geöffnet werden.

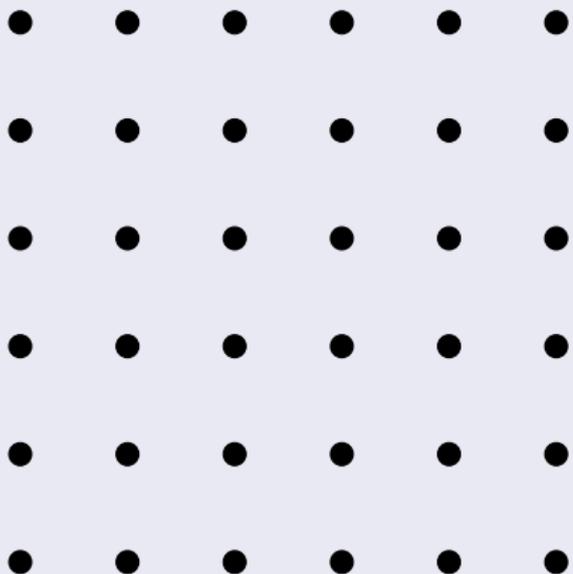
## Wie erreicht man das?

- # Züge = # Knoten + # Doppelkästchenzüge
- Wer als letzter zog, bekam die Ketten.
- Richtige Parität von # Knoten + # Doppelkästchenzüge
- Jede Kette außer der letzten führt zu genau einem Doppelkästchenzug.
- Umgekehrte Parität von # Knoten + # Ketten ( + # Randstücke)

## Beispiel

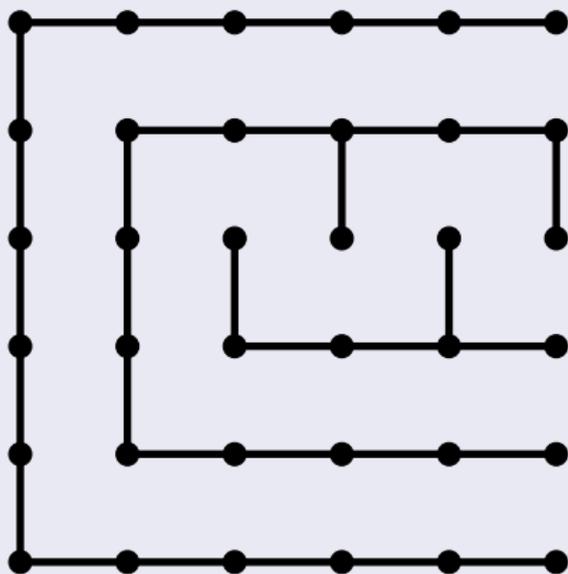


## Beispiel



6 · 6 Knoten  $\Rightarrow$  gerade

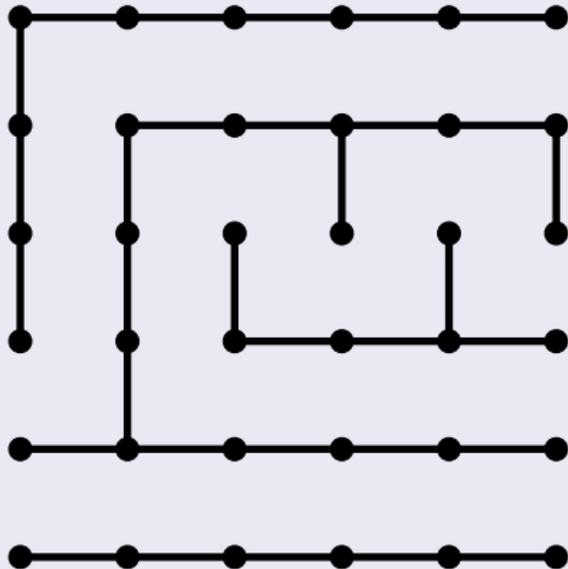
## Beispiel



$6 \cdot 6$  Knoten  $\Rightarrow$  gerade

1. Spieler versucht:  
gerade Kettenanzahl

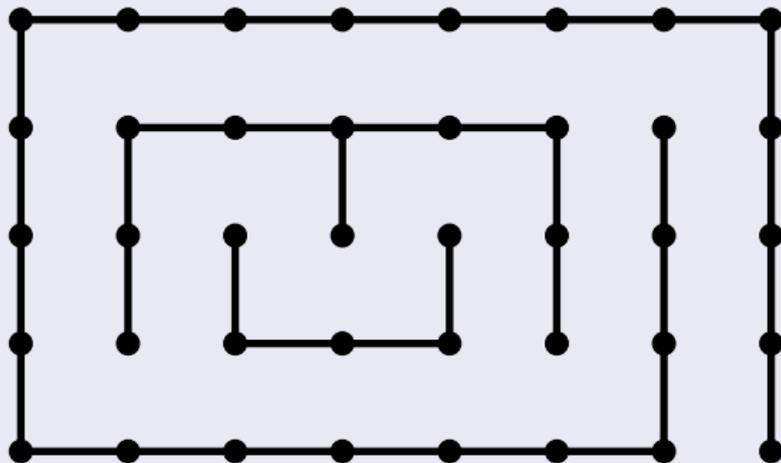
## Beispiel



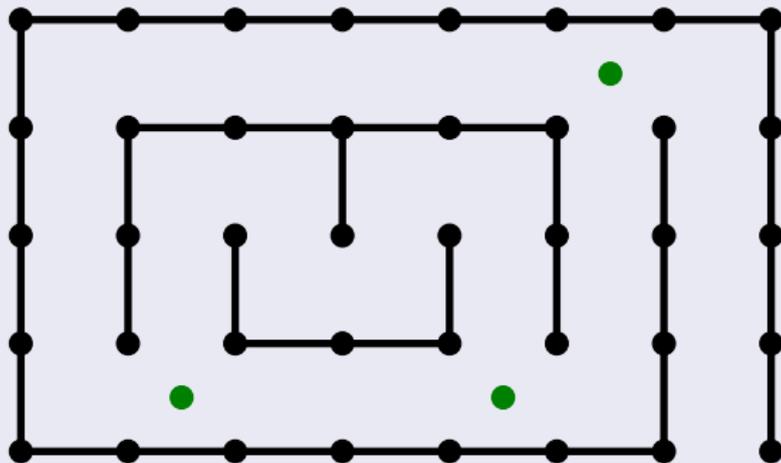
$6 \cdot 6$  Knoten  $\Rightarrow$  gerade

2. Spieler versucht:  
ungerade Kettenanzahl

## Wie zählt man verzweigte Ketten?

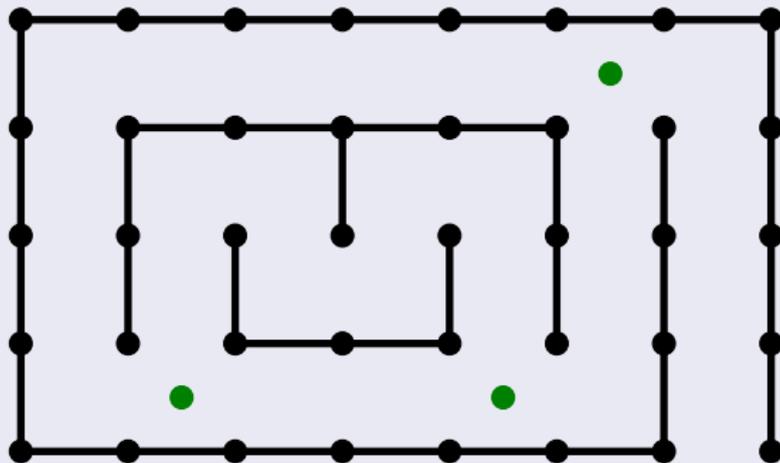


## Wie zählt man verzweigte Ketten?



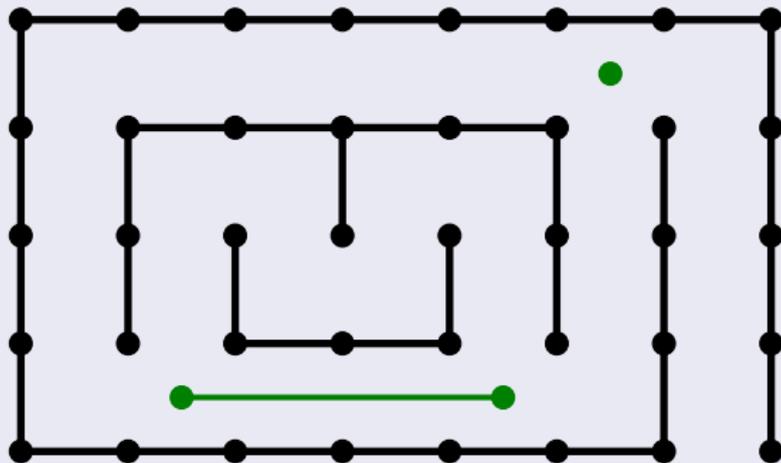
- Verzweigungspunkte suchen.

## Wie zählt man verzweigte Ketten?



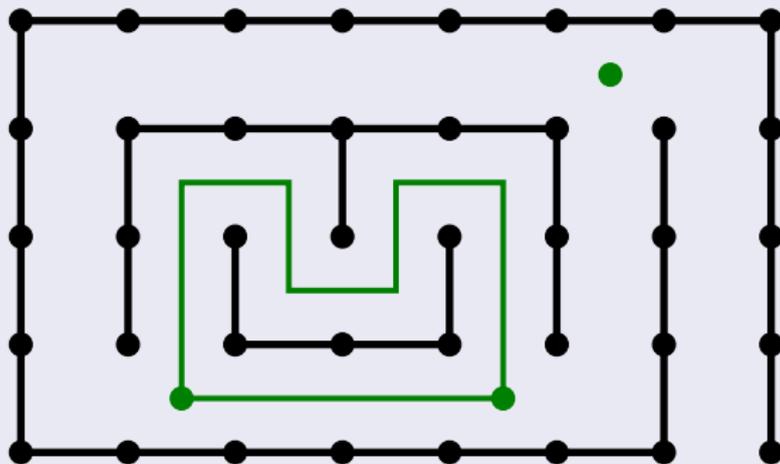
- Verzweigungspunkte suchen.
- Verbindungslinien zählen:

## Wie zählt man verzweigte Ketten?



- Verzweigungspunkte suchen.
- Verbindungslinien zählen: 1

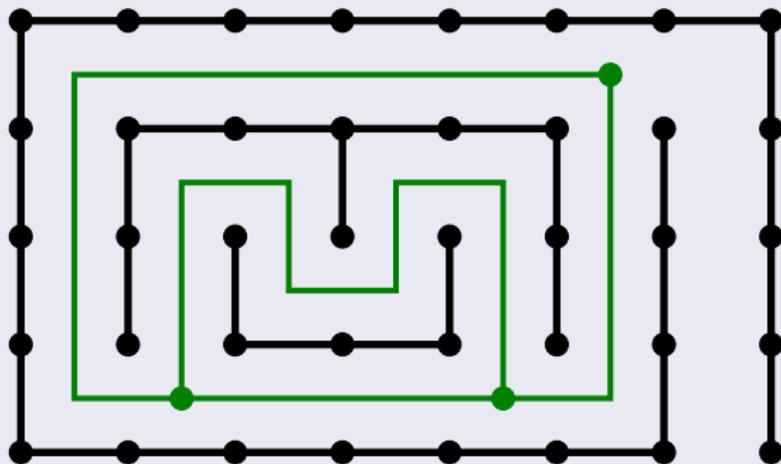
## Wie zählt man verzweigte Ketten?



- Verzweigungspunkte suchen.
- Verbindungslinien zählen: 2



## Wie zählt man verzweigte Ketten?



- Verzweigungspunkte suchen.
- Verbindungslinien zählen: 4

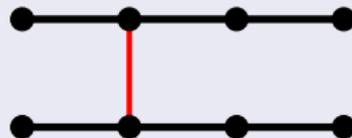
## Wie lang muss eine Kette sein?

Mindestens 3 Kästchen:



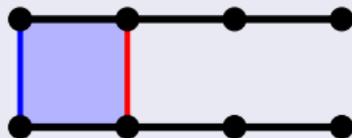
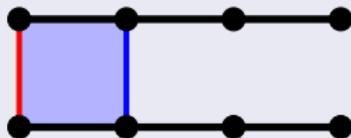
## Wie lang muss eine Kette sein?

Mindestens 3 Kästchen:



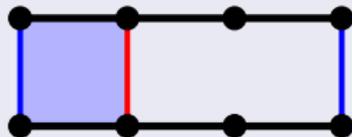
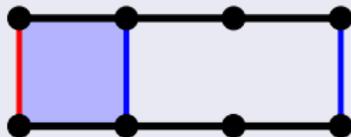
## Wie lang muss eine Kette sein?

Mindestens 3 Kästchen:



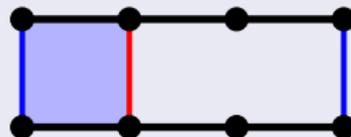
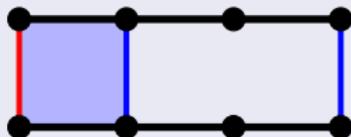
## Wie lang muss eine Kette sein?

Mindestens 3 Kästchen:

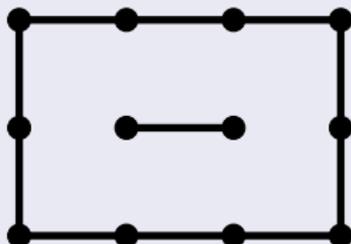


## Wie lang muss eine Kette sein?

Mindestens 3 Kästchen:

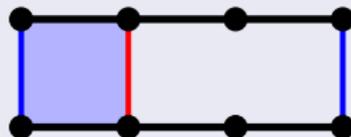
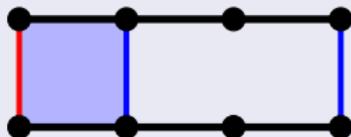


Schleife = 2 Ketten:

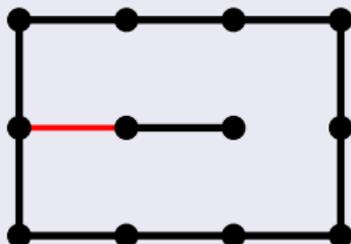


## Wie lang muss eine Kette sein?

Mindestens 3 Kästchen:

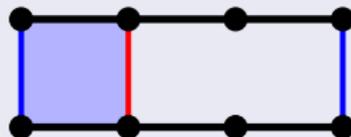
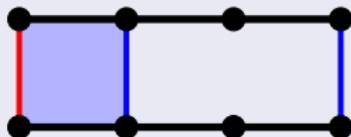


Schleife = 2 Ketten:

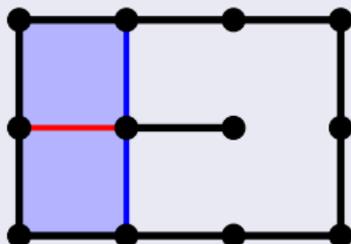


## Wie lang muss eine Kette sein?

Mindestens 3 Kästchen:

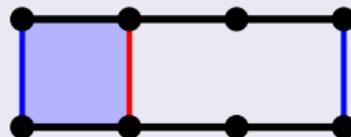
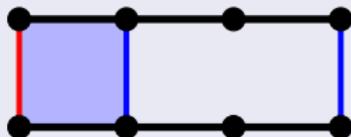


Schleife = 2 Ketten:

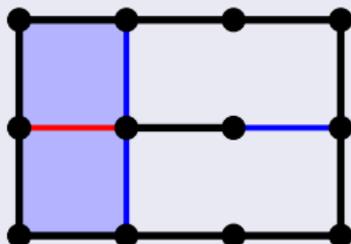


## Wie lang muss eine Kette sein?

Mindestens 3 Kästchen:



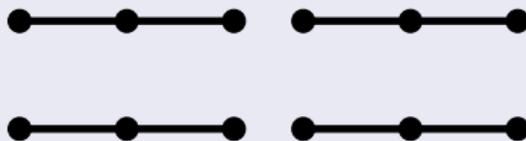
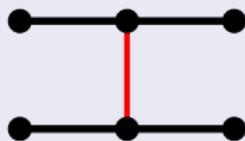
Schleife = 2 Ketten:



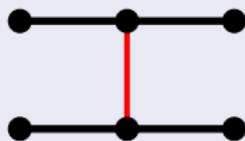
... und was ist mit Zweierketten?



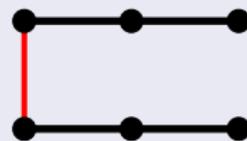
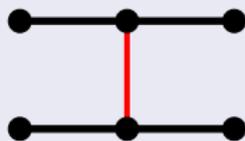
... und was ist mit Zweierketten?



... und was ist mit Zweierketten?

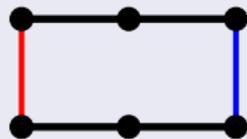
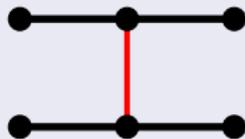


... und was ist mit Zweierketten?

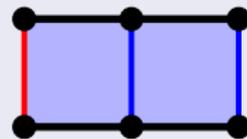


Rot am Zug

... und was ist mit Zweierketten?

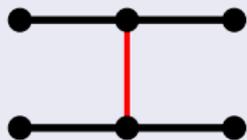


Rot am Zug

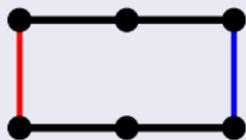


Blau am Zug

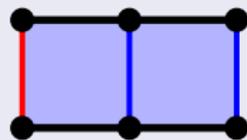
... und was ist mit Zweierketten?



hartherziges Almosen



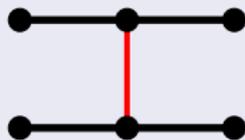
Rot am Zug



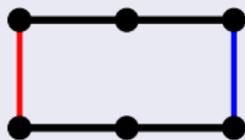
Blau am Zug

halbherziges Almosen

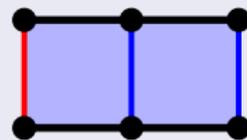
## ... und was ist mit Zweierketten?



hartherziges Almosen



Rot am Zug

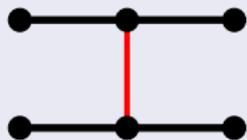


Blau am Zug

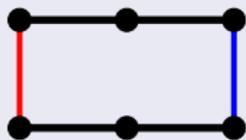
halbherziges Almosen

## Mondsüchtige Positionen

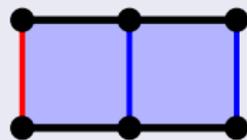
## ... und was ist mit Zweierketten?



hartherziges Almosen



Rot am Zug



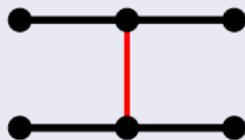
Blau am Zug

halbherziges Almosen

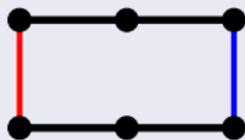
## Mondsüchtige Positionen

- Spieler entscheidet, wer als nächstes am Zug ist.

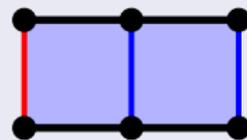
## ... und was ist mit Zweierketten?



hartherziges Almosen



Rot am Zug



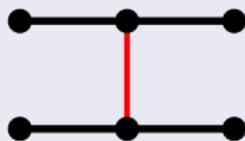
Blau am Zug

halbherziges Almosen

## Mondsüchtige Positionen

- Spieler entscheidet, wer als nächstes am Zug ist.
- Durch „Strategienklau“ kann man wenigstens die Hälfte der restlichen Punkte bekommen.

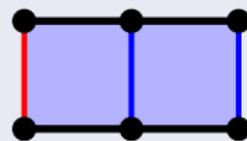
## ... und was ist mit Zweierketten?



hartherziges Almosen



Rot am Zug



Blau am Zug

halbherziges Almosen

## Mondsüchtige Positionen

- Spieler entscheidet, wer als nächstes am Zug ist.
- Durch „Strategienklau“ kann man wenigstens die Hälfte der restlichen Punkte bekommen.
- Reine Existenzaussage – keine konkrete Strategie.

## Spiellevel

## Spiellevel

- 0 „Standard“-Strategie.

## Spiellevel

- 0 „Standard“-Strategie.
- 1 „Almosen“-Strategie.

## Spiellevel

- 0 „Standard“-Strategie.
- 1 „Almosen“-Strategie.
- 2 Paritätsregel.

## Spiellevel

- 0 „Standard“-Strategie.
- 1 „Almosen“-Strategie.
- 2 Paritätsregel.
- 3 Sprague-Grundy-Theorie.

## Spiellevel

- 0 „Standard“-Strategie.
- 1 „Almosen“-Strategie.
- 2 Paritätsregel.
- 3 Sprague-Grundy-Theorie.
- 4 Graphenanalyse.

## Spiellevel

- 0 „Standard“-Strategie.
- 1 „Almosen“-Strategie.
- 2 Paritätsregel.
- 3 Sprague-Grundy-Theorie.
- 4 Graphenanalyse.
- 5 Zweierkegeln.

## Spiellevel

- 0 „Standard“-Strategie.
- 1 „Almosen“-Strategie.
- 2 Paritätsregel.
- 3 Sprague-Grundy-Theorie.
- 4 Graphenanalyse.
- 5 Zweierkegeln.

## Ergebnis

## Spiellevel

- 0 „Standard“-Strategie.
- 1 „Almosen“-Strategie.
- 2 Paritätsregel.
- 3 Sprague-Grundy-Theorie.
- 4 Graphenanalyse.
- 5 Zweierkegeln.

## Ergebnis

- Käsekästchen ist schwer.

## Spiellevel

- 0 „Standard“-Strategie.
- 1 „Almosen“-Strategie.
- 2 Paritätsregel.
- 3 Sprague-Grundy-Theorie.
- 4 Graphenanalyse.
- 5 Zweierkegeln.

## Ergebnis

- Käsekästchen ist schwer.
- Käsekästchen ist sogar NP-schwer.

## Komplexitätstheorie

Die Komplexitätstheorie untersucht

- den Aufwand eines Algorithmus,
- den Schwierigkeitsgrad eines Problems.

Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

$$\begin{array}{r} 3 \\ +8 \\ \hline 11 \end{array}$$

Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

$$\begin{array}{r} 3 \\ +8 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 73 \\ +28 \\ \hline 101 \end{array}$$

Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

$$\begin{array}{r} 3 \\ +8 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 73 \\ +28 \\ \hline 101 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8973 \\ +1528 \\ \hline 10501 \end{array}$$

## Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

3	73	8973	43708973
+8	+28	+1528	+19711528
11	101	10501	63420501

## Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

3	73	8973	43708973	$n$ -mal so viele Stellen
+8	+28	+1528	+19711528	$\Rightarrow n$ -facher Aufwand
11	101	10501	63420501	

## Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

3	73	8973	43708973	$n$ -mal so viele Stellen
+8	+28	+1528	+19711528	$\Rightarrow$ $n$ -facher Aufwand
11	101	10501	63420501	Lineare Komplexität

## Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

3	73	8973	43708973	$n$ -mal so viele Stellen
+8	+28	+1528	+19711528	$\Rightarrow$ $n$ -facher Aufwand
11	101	10501	63420501	Lineare Komplexität

## Wie schwer ist die Multiplikation zweier Zahlen?

## Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

3	73	8973	43708973	$n$ -mal so viele Stellen
+8	+28	+1528	+19711528	$\Rightarrow n$ -facher Aufwand
11	101	10501	63420501	Lineare Komplexität

## Wie schwer ist die Multiplikation zweier Zahlen?

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 8 \\ \hline 24 \end{array}$$

## Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

3	73	8973	43708973	$n$ -mal so viele Stellen
+8	+28	+1528	+19711528	$\Rightarrow n$ -facher Aufwand
11	101	10501	63420501	Lineare Komplexität

## Wie schwer ist die Multiplikation zweier Zahlen?

$$\begin{array}{r}
 3 \cdot 8 \\
 \hline
 24
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 73 \cdot 28 \\
 \hline
 146 \\
 584 \\
 \hline
 2044
 \end{array}$$

## Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

3	73	8973	43708973	$n$ -mal so viele Stellen
+8	+28	+1528	+19711528	$\Rightarrow n$ -facher Aufwand
11	101	10501	63420501	Lineare Komplexität

## Wie schwer ist die Multiplikation zweier Zahlen?

		8973 · 1528
	73 · 28	8973
3 · 8	146	44865
24	584	17946
	2044	71784
		13710744

## Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

3	73	8973	43708973	$n$ -mal so viele Stellen
+8	+28	+1528	+19711528	$\Rightarrow$ $n$ -facher Aufwand
11	101	10501	63420501	Lineare Komplexität

## Wie schwer ist die Multiplikation zweier Zahlen?

		8973 · 1528	
	73 · 28	8973	$n$ -mal so viele Stellen
3 · 8	146	44865	$\Rightarrow$ $n^2$ -facher Aufwand
24	584	17946	
	2044	71784	
		13710744	

## Wie schwer ist die Addition zweier Zahlen?

3	73	8973	43708973	$n$ -mal so viele Stellen
+8	+28	+1528	+19711528	$\Rightarrow n$ -facher Aufwand
11	101	10501	63420501	Lineare Komplexität

## Wie schwer ist die Multiplikation zweier Zahlen?

		8973 · 1528	
	73 · 28	8973	$n$ -mal so viele Stellen
3 · 8	146	44865	$\Rightarrow n^2$ -facher Aufwand
24	584	17946	Quadratische
	2044	71784	Komplexität
		13710744	

Wie schwer ist es, ein Zahlenschloss zu knacken?

## Wie schwer ist es, ein Zahlenschloss zu knacken?

- $n$  Dezimalstellen

## Wie schwer ist es, ein Zahlenschloss zu knacken?

- $n$  Dezimalstellen
- $10^n$  Versuche im „ungünstigsten“ Fall

## Wie schwer ist es, ein Zahlenschloss zu knacken?

- $n$  Dezimalstellen
- $10^n$  Versuche im „ungünstigsten“ Fall
- $10^n/2$  Versuche im Durchschnitt

## Wie schwer ist es, ein Zahlenschloss zu knacken?

- $n$  Dezimalstellen
- $10^n$  Versuche im „ungünstigsten“ Fall
- $10^n/2$  Versuche im Durchschnitt
- exponentielle Komplexität

## Wie schwer ist es, ein Zahlenschloss zu knacken?

- $n$  Dezimalstellen
- $10^n$  Versuche im „ungünstigsten“ Fall
- $10^n/2$  Versuche im Durchschnitt
- exponentielle Komplexität

... und wenn Sie raten dürfen?

## Wie schwer ist es, ein Zahlenschloss zu knacken?

- $n$  Dezimalstellen
- $10^n$  Versuche im „ungünstigsten“ Fall
- $10^n/2$  Versuche im Durchschnitt
- exponentielle Komplexität

## ... und wenn Sie raten dürfen?

- $n$  Dezimalstellen

## Wie schwer ist es, ein Zahlenschloss zu knacken?

- $n$  Dezimalstellen
- $10^n$  Versuche im „ungünstigsten“ Fall
- $10^n/2$  Versuche im Durchschnitt
- exponentielle Komplexität

## ... und wenn Sie raten dürfen?

- $n$  Dezimalstellen
- $n$  Ziffern einstellen

## Wie schwer ist es, ein Zahlenschloss zu knacken?

- $n$  Dezimalstellen
- $10^n$  Versuche im „ungünstigsten“ Fall
- $10^n/2$  Versuche im Durchschnitt
- exponentielle Komplexität

## ... und wenn Sie raten dürfen?

- $n$  Dezimalstellen
- $n$  Ziffern einstellen
- lineare Komplexität

## Komplexitätsklassen

- P** Probleme, die in **polynomieller** Zeit lösbar sind.
- NP** Probleme, die **nichtdeterministisch** in **polynomieller** Zeit lösbar sind.
- PSPACE** Probleme, die mit **polynomiellem Platz** **aufwand** lösbar sind.

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE$$

## Komplexitätsklassen

- P** Probleme, die in **polynomieller** Zeit lösbar sind.
- NP** Probleme, die **nichtdeterministisch** in **polynomieller** Zeit lösbar sind.
- PSPACE** Probleme, die mit **polynomiellem Platz** **aufwand** lösbar sind.

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE$$

## Praktische Bedeutung

P ist die Klasse der praktisch lösbaren Probleme.

## Satz von Stephen Cook (1971)

SAT ist NP-vollständig.

## Satz von Stephen Cook (1971)

SAT ist NP-vollständig.

## Liste von Richard Karp (1972)

- 21 NP-vollständige Probleme
- u.a. Hamiltonkreise und Rucksackproblem

## Satz von Stephen Cook (1971)

SAT ist NP-vollständig.

## Liste von Richard Karp (1972)

- 21 NP-vollständige Probleme
- u.a. Hamiltonkreise und Rucksackproblem

## weitere NP-vollständige Probleme

- Rundreiseproblem
- Verschlüsselung

## NP-vollständige Spiele

- Käsekästchen
- Minesweeper
- Tetris

## PSPACE-vollständige Spiele

- Dame
- Go
- Reversi
- Sokoban

## Millennium-Probleme (jeweils eine Million Dollar für die Lösung)

- Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer,
- Vermutung von Hodge,
- Analyse der Navier-Stokes-Gleichungen,
- P-NP-Problem,
- Poincaré-Vermutung (2002 gelöst von G. Perelman),
- Riemannsche Vermutung,
- Erforschung der Gleichungen von Yang-Mills.

## Fazit

- Wenn Sie ein Programm schreiben, das in polynomialer Zeit für jede Käsekästchen-Position den optimalen Zug findet, dann bekommen Sie eine Million Dollar.
- Wenn Sie nachweisen, dass es so ein Programm nicht geben kann, dann bekommen Sie eine Million Dollar.