

Übungen zur Vorlesung
Mathematische Modelle der Erdbebenforschung
Sommersemester 2016
Blatt 5

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 02. Juni 2016.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Ein Tensor T der Stufe $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt isotrop, wenn für jede orthogonale 3×3 -Matrix R , d.h. $R^T = R^{-1}$, Folgendes gilt:

$$T(Ru_1, \dots, Ru_q) = T(u_1, \dots, u_q) \quad \forall u_1, \dots, u_q \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass ein isotroper Tensor der Stufe 2 stets die folgende Form hat:

$$T = \lambda I,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt und I die Identität ist.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Levi-Civita-Symbols ε_{ijk} :

$$(a) \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km},$$

$$(b) \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn},$$

$$(c) \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6.$$

Aufgabe 19: (3+1 Punkte)

Sei U eine Verschiebung in $C^{(1)}$. Hierzu definieren wir

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(U) &:= \frac{1}{2} (\nabla_X U + (\nabla_X U)^T), \\ \mathcal{R}(U) &:= \frac{1}{2} (\nabla_X U - (\nabla_X U)^T).\end{aligned}$$

a) Beweisen Sie:

$$\mathcal{R}(U) = \frac{1}{2} (\text{rot } U) \times I.$$

b) Geben Sie eine Rechtfertigung für die folgende Approximation an:

$$F \simeq I + \mathcal{E} + \mathcal{R}.$$

Aufgabe 20: (4 Punkte)

\hat{E} sei definiert durch

$$\hat{E}(C) = \alpha_0 + \Upsilon : C + \frac{1}{2} \Gamma : (C \otimes C),$$

wobei α_0 , Υ und Γ Tensoren der Stufen 0, 2 bzw. 4 sind. Bestimmen Sie den zweiten Piola–Kirchhoff’schen Spannungstensor S und den zweiten Elastizitätstensor Ξ .