Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.

31. Oktober 2014

Funktionalanalysis

Übungen Wintersemester 2014/2015
2. Blatt

Abgabe bis Montag, 27. Oktober 2014, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die $(l^p, \|.\|_p)$ für $(1 \leq p < +\infty)$ normierte Räume sind.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Eine Norm $\|\cdot\|$ ist genau dann durch ein Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induziert, wenn sie die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

für alle x und y aus dem Raum erfüllt. Zeigen Sie für jedes der folgenden Räume, dass sie keine Hilberträume sind.

a) l^p, $p \in [1, +\infty[\setminus\{2\}$

b) $\mathrm{L}^p[0,1]$, $p \in [1, +\infty[\setminus\{2\}$

c) $\mathrm{L}^\infty[0,1]$

d) $\mathrm{C}[0,1]$

Aufgabe 7: (2 Punkte)

Sei $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und $(x_n)_n$ eine Folge in E, die gegen $\xi \in E$ konvergiert, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - \xi\| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\langle x_n - \xi, x_n - \xi\rangle} = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle \xi, y\rangle$$

für alle $y \in E$ gilt, d. h. die Abbildung $x \mapsto \langle x, y\rangle$ ($y \in E$ fest) ist stetig.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

$\mathrm{C}[a,b]$ versehen mit dem L^2–Skalarprodukt, d. h. der Prä-Hilbertraum $(\mathrm{C}[a,b], \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{L}^2[a,b]})$, ist nicht vollständig! Weisen Sie das an folgendem Beispiel nach ($[a,b]=[0,2]$):

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x \le 1 \\ 1+(1-x)^n, & 1 < x \le 2 \end{cases},$$

$n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ in diesem Raum eine Cauchyfolge ist, aber nicht darin konvergiert.

Aufgabe 9: (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit

$$f_n(t) = \gamma_n e^{int}, \quad t \in [0,2\pi],\ \gamma_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ konstant}, i^2 = -1,$$

ein orthogonales System in $\mathrm{L}^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ ist. Bestimmen Sie die Konstanten γ_n, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein ONS ist.