Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.

12. November 2014

Funktionalanalysis

Übungen Wintersemester 2014/2015
6. Blatt

Abgabe bis Montag, 24. November 2014, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 23: (4 Punkte)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{K}(X,Y)$ ist ein Vektorraum, d. h. sind S, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ und λ, $\mu \in \mathbb{K}$, so ist $\lambda S + \mu T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

b) Sind $S \in \mathcal{K}(X,Y)$ und $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$, so ist $TS \in \mathcal{K}(X,Z)$.

c) Sind $S \in \mathcal{K}(Y,Z)$ und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, so ist $ST \in \mathcal{K}(X,Z)$.

Aufgabe 24: (4 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X,X)$ mit $\|A\| < 1$. Zeigen Sie, dass dann $I - A$ eine stetige Inverse besitzt, für die gilt:

$$(I-A)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} A^j =: \sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

(Bemerkung: I bezeichnet die Identität und A^j die j-fache Ausführung des Operators A: $A^0 := I$, $A^{j+1} := A^j A$).

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zu $A \in \mathcal{L}(X, X)$ ist die *Resolventenmenge* $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ definiert als

$$\rho(A) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ hat eine stetige Inverse}\}$$

und das *Spektrum* $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ definiert als

$$\sigma(A) \coloneqq \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Zeigen Sie, dass die Resolventenmenge offen und das Spektrum kompakt ist.

Aufgabe 26: (4 Punkte)

Untersuchen Sie, welche der folgenden Operatoren kompakt sind.

a) $T\colon \mathrm{C}[1,2] \to \mathrm{C}[1,2]$, $f \mapsto ([1,2] \ni t \mapsto tf(t))$.

b) $T\colon \ell^2 \to \ell^2$, $(b_n)_n \mapsto (a_n b_n)_n$. Hierbei sei $(a_n)_n$ eine gegebene
   i) beschränkte Folge.
   ii) Nullfolge.

   (D. h. betrachten Sie zwei getrennte Fälle.)

c) $T\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$, $(b_n)_n \mapsto (b_{2n})_n$.