Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
16. April 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
2. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 23. April 2015, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein linearer Teilraum. Beweisen Sie: Wenn $B \in \mathcal{L}(Y, \ell^\infty)$, dann existiert ein Operator $A \in \mathcal{L}(X, \ell^\infty)$, so dass $A|_Y = B$ und $\|A\| = \|B\|$, d. h. A ist eine stetige Fortsetzung von B.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Beweisen Sie das Lemma von Auerbach.
Hinweis: Wählen Sie beliebige lineare Elemente $z_1, \ldots, z_n \in Y$ und untersuchen Sie die Abbildung $F\colon M^n \to \mathbb{R}$ mit

$$M := \{g \in Y^* : \|g\| \leq 1\}, \qquad F(g_1, \ldots, g_n) := |\det(g_i(z_j))_{i,j=1,\ldots,n}|.$$

Erinnern Sie sich an Resultate aus Analysis und lineare Algebra und benutzen Sie anschließend den Satz von Hahn-Banach.

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. M ist genau dann absolut konvex, wenn M kreisförmig und konvex ist.

b) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $M \subset X$ eine absorbierende und absolut konvexe Teilmenge, dann ist das Minkowski-Funktional P_M eine Halbnorm auf X.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Seien X, Y normierte Räume, $D \subset X$ ein linearer Teilraum von X und $T\colon D \to Y$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie:

a) Wenn T eine stetige Abbildung und D eine abgeschlossene Menge ist, dann ist T eine abgeschlossene Abbildung.

b) Wenn T eine stetige und abgeschlossene Abbildung ist und Y vollständig ist, dann ist D eine abgeschlossene Menge.

c) Die Identität $I\colon D \to D$ ist stetig. Sie ist abgeschlossen genau dann, wenn D abgeschlossen ist.