Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
07. Mai 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
5. Blatt

Abgabe bis Mittwoch, 13. Mai 2015 18:00 Uhr, im Postfach oder Donnerstag, 14. Mai 2015, per E-Mail an `orzlowski@mathematik.uni-siegen.de` .

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Sei X ein Banachraum, $D \subset X$ eine stark dichte Teilmenge, (d. h. $\overline{D}^{\|\cdot\|_X} = X$) und $\mathcal{F} \subset X^*$ eine stark dichte Teilmenge (d. h. $\overline{\mathcal{F}}^{\|\cdot\|_{X^*}} = X^*$). Beweisen Sie:

a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset X$ konvergiert schwach gegen $\xi \in X$ genau dann, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \|x_n\| < +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

b) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset X^*$ konvergiert schwach* gegen $\varphi \in X^*$ genau dann, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \|f_n\| < +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in D$.

Aufgabe 19: (4 Punkte)

Sei X ein reflexiver Banachraum. Beweisen Sie:

Für jedes $f \in X^*$ existiert ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$ und $f(x_0) = \|f\|$.

Aufgabe 20: (4 Punkte)

Sei $F \subset \ell^p$ die Menge aller Folgen, die nur eine endliche Anzahl nicht-verschwindender Komponenten haben. Der Operator A sei definiert durch

$$A\colon F \to \ell^p \qquad (\xi_n) \mapsto (n\xi_n),$$

wobei $1 < p < +\infty$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

a) Beweisen Sie, dass F dicht in ℓ^p liegt.

b) Bestimmen Sie den dualen Operator von A, falls er existiert.

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Ein selbstadjungierter Operator T auf einem Hilbertraum H wird positiv genannt, wenn $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$ gilt. Man schreibt $T_1 \geq T_2$ falls $T_1 - T_2$ ein positiver Operator ist.
Beweisen Sie: Falls $S\colon H \to H$ und $T\colon H \to H$ kommutieren (d. h. $ST = TS$), selbstadjungiert und positiv sind, dann ist auch ST positiv.

Hinweis: Definieren Sie $T_1 \coloneqq \|T\|^{-1}T$, $T_{n+1} \coloneqq T_n - T_n^2$ für $n \geq 1$, zeigen Sie, dass $0 \leq T_n \leq I$ für alle n gilt und stellen Sie T mit Hilfe der Folge $(T_n)_n$ dar.