Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
21. Mai 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
7. Blatt

Abgabe bis Mittwoch, 3. Juni 2015 12:00 Uhr, im Postfach oder Donnerstag, 4. Juni 2015, per E-Mail an `orzlowski@mathematik.uni-siegen.de` .

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Sei $T\colon B(\mathbb{R}_0^+) \to B(\mathbb{R}_0^+)$ definiert durch

$$(Tf)(x) \coloneqq e^{-x} f(x), \quad x \in \mathbb{R}_0^+,\ f \in B(\mathbb{R}_0^+),$$

wobei $B(\mathbb{R}_0^+)$ als der Raum aller reellen, beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert ist. Ist T

a) injektiv,

b) stetig,

c) offen,

d) auf seinem Bild stetig invertierbar?

Aufgabe 26: (4 Punkte)

Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ist bekannt, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} f_j(x) y^{(j)}(x) = r(x), \quad x \in [a,b], \\ y^{(k)}(a) = b_k, \quad k = 0, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

wobei $f_j \in \mathrm{C}[a,b]$ für alle $j = 0, \ldots, n-1$, für jede gegebene rechte Seite $r \in \mathrm{C}[a,b]$ und jedem Vektor von Anfangswerten $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $y \in \mathrm{C}^{(n)}[a,b]$ besitzt. Ist die Lösung auch stabil?

Hinweis: $\mathrm{C}^{(n)}[a,b]$ ist hier der Banachraum mit der Norm $\|y\|_{\mathrm{C}^{(n)}} \coloneqq \sum_{j=0}^{n} \|y^{(j)}\|_\infty$.

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Sei die Radon-Transformation $R\colon \mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(Z)$ mit $Z := [-1,1] \times [0,2\pi]$, $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ gegeben durch

$$Rf(s,\varphi) := \int_{-w(s)}^{w(s)} f(s\omega(\varphi) + t\omega^{\perp}(\varphi))\,\mathrm{d}t$$

mit $\omega(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^{\mathrm{T}}$, $\omega^{\perp}(\varphi) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))^{\mathrm{T}}$ und

$$w(s) := \begin{cases} \sqrt{1-s^2} & |s| \leq 1, \\ 0 & |s| > 1. \end{cases}$$

a) Beweisen Sie, dass R linear und beschränkt ist mit $\|R\| \leq 4\pi$.

b) Zeigen Sie, dass die Adjungierte von R gegeben ist durch

$$R^*g(x) = \int_0^{2\pi} g(x \cdot \omega(\varphi), \varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \qquad x \in \Omega,$$

wobei $\cdot$ das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 28: (4 Punkte)

Sei X ein Hilbertraum.

a) Beweisen Sie die verallgemeinerte Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung: Ist $A\colon X \to X$ positiv und selbstadjungiert, so gilt

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle \qquad \forall x, y \in X.$$

b) Sei A ein selbstadjungierter, kompakter Operator auf X mit der Darstellung

$$Ay = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle y, u_n\rangle\, u_n \qquad \forall y \in X$$

und sei $x \in X$ fest mit $Ax \neq 0$. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|A^{2k+2}x\|}{\|A^{2k}x\|} = \alpha^2 > 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\langle A^{2k+2}x, x\rangle}{\langle A^{2k}x, x\rangle} = \alpha^2, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{A^{2k}x}{\|A^{2k}x\|} = u > 0,$$

wobei $\|u\| = 1$ und $A^2u = \alpha^2 u$. Insbesondere ist die Folge $\left(\frac{\langle A^{2k+2}x,x\rangle}{\langle A^{2k}x,x\rangle}\right)_k$ monoton wachsend.

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass A positiv ist und dass $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist (Warum ist dies keine Einschränkung?). Zeigen Sie die Aussage für $2k+2 = j+1$. Übertragen Sie dann das Ergebnis auf A^2.