Universität Siegen
Department Mathematik
Arbeitsgruppe Geomathematik

Prof. Dr. V. Michel
S. Orzlowski, M. Sc.
04. Juni 2015

Funktionalanalysis II: Inverse Probleme
Übungen Sommersemester 2015
8. Blatt

Abgabe bis Donnerstag, 11. Juni 2015 vor dem Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Beweisen Sie den Satz von Poincaré-Fischer:

Sei T ein kompakter, selbstadjungierter und positiver Operator in einem Hilbertraum H. Dann gilt für die Eigenwerte λ_n von T

$$\lambda_n = \max_{\substack{H_n \subset H \\ \dim H_n = n}} \min_{\substack{x \in H_n \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle.$$

Aufgabe 30: (4 Punkte)

Beweisen Sie das Courant'sche Minimum-Maximum-Prinzip:

Sei T ein kompakter, selbstadjungierter und positiver Operator in einem Hilbertraum H. Dann gilt für seine Eigenwerte

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle,$$
$$\lambda_{n+1} = \min_{\substack{H_n \subset H \\ \dim H_n = n}} \max_{\substack{x \perp H_n \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle.$$

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Sei $T \in \mathcal{L}(H, H)$, wobei H ein Hilbertraum ist. Zur approximativen Lösung der Gleichung

$$Tx = y, \qquad x, y \in H,$$

wobei y gegeben und x gesucht ist, geht das Galerkin-Verfahren wie folgt vor:
Sei $H_n = \operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_n\}$ ein n-dimensionaler Teilraum von H. Man sucht nun ein $\xi = \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j \in H_n$, so dass das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \langle T z_j, z_k \rangle = \langle y, z_k \rangle, \qquad \forall k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

erfüllt ist. Sei $P \colon H \to H_n$ die Orthogonalprojektion auf H_n. Zeigen Sie, dass (1) äquivalent zur folgender Gleichung ist:

$$PTP\xi = Py. \tag{2}$$

Aufgabe 32: (4 Punkte)

Das Galerkin-Verfahren „dämpft“ die Eigenwerte von T:
Sei $T \in \mathcal{L}(H, H)$ kompakt, selbstadjungiert und positiv. Sind $\lambda_n(PTP)$ die Eigenwerte des Operators PTP aus (2) und $\lambda_n(T)$ die von T, zeigen Sie, dass dann

$$\lambda_n(PTP) \leq \lambda_n(T)$$

für alle n gilt.