

Siegen, den 22. Februar 2012

**Vorlesungsankündigung für das Sommersemester 2012**  
**„Konstruktive Approximation:**  
**Fourier-, Spline- und Waveletverfahren“**

**Termine:**

- Vorlesung
  - montags, 14:15-15:45, ENC-B 205
  - donnerstags, 12:15-13:45, ENC-D 120
- Übung
  - donnerstags, 14:00-15:30, ENC-D 114

**Inhalt:**

Bei den meisten praktischen Problemen sind von einer Funktion nur endlich viel Werte bekannt. Deshalb besteht oft der Bedarf, die unbekannt Funktion entweder zu interpolieren oder zu approximieren. Im Fokus der Vorlesung stehen hierbei nicht nur Funktionen auf Intervallen in  $\mathbb{R}$ , sondern auch Funktionen, die auf einer Sphäre oder Kugel im  $\mathbb{R}^3$  gegeben sind. Letztere sind insbesondere bei Anwendungen in den Geowissenschaften (Analyse von Satellitendaten, Seismologie, Meteorologie, Gravimetrie, Geomagnetik, ...) und der medizinischen Bildgebung (CT, MRT, inverse EEG und MEG) von Bedeutung. Neben der reinen Interpolation und Approximation ist ferner eine Analyse der untersuchten Funktion von Interesse, wenn man beispielsweise lokale zeitliche Veränderungen erkennen will, u.a. wenn es um klimatische Veränderungen geht.

Ein klassischer Weg der Approximation und Analyse stellt die Fourierentwicklung bezüglich einer orthonormalen Basis dar. Hierfür werden üblicherweise so genannte orthogonale Polynome verwendet. Ein Nachteil der Fourieranalyse ist jedoch, dass sie ein globales Verfahren darstellt. Dies bedeutet, dass immer nur das gesamte Signal in seinen räumlichen (oder zeitlichen) Mittelwerten analysiert werden kann. Neuere lokale Techniken wie Splines und Wavelets erlauben hingegen ein „Zoomen“ in kleinere Bereiche des Signals. So kann man beispielsweise mittels sphärischer Wavelets jahreszeitliche Veränderungen im Gravitationsfeld des Amazonas (in Folge des Wasserkreislaufs) erkennen.

Die Vorlesung liefert eine Einführung in die Grundlagen dieser Methoden, zunächst kurz im euklidischen Fall (Intervall in  $\mathbb{R}$ ), dann als Schwerpunkt im sphärischen Fall und schließlich auch für die Kugel.

Die Stichworte der behandelten Themen sind: orthogonale Polynome auf Intervallen (insbesondere Jacobi- und speziell Legendre-Polynome), der Sphäre (Kugelflächenfunktionen) und der Kugel; spezielle Aspekte der Differentiation und Integration auf der Sphäre (Oberflächengradient, Oberflächenrotationsgradient, Beltrami-Operator); Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen; Fourierentwicklung; Funk-Hecke-Formel; reproduzierende Kerne und sphärische Sobolev-Räume; Splines; Approximative Identitäten; Skalierungsfunktionen, Wavelets und Multiresolutionsanalyse sowie spezielle Aspekte der numerischen Integration auf der Sphäre.

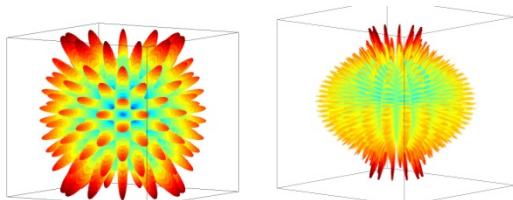
**Voraussetzungen:** Die Vorlesung ist für Studierende ab dem 5. Semester Bachelor bzw. im Master-Studium geeignet. Insbesondere gute Kenntnisse in Analysis sind erforderlich.

**Studiengänge:** Bachelor/Master in Mathematik mit Spezialisierung CSE/Mathe-NT sowie Lehramtsstudium (Gymnasium)

#### Literatur:

- C. Chui, C.K. Chui: An introduction to wavelets.
- P.J. Davis: Interpolation and approximation.
- W. Freeden, T. Gervens, M. Schreiner: Constructive approximation on the sphere.
- W. Freeden, V. Michel: Multiscale potential theory.
- W. Freeden, M. Schreiner: Spherical functions of mathematical geosciences: a scalar, vectorial, and tensorial setup.
- A.K. Louis, P. Maaß, A. Rieder: Wavelets – Theorie und Anwendungen.
- V. Michel: A multiscale approximation for operator equations in separable Hilbert spaces – case study: reconstruction and description of the Earth's interior.
- V. Michel: Wavelets on the 3-dimensional ball, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM), 5 (2005), 775-776.
- V. Michel: Tomography - problems and multiscale solutions, Beitrag zum "Handbook of Geomathematics" (Hrsg. W. Freeden, M.Z. Nashed, T. Sonar), 2011.
- H.R. Schwarz, N. Köckler: Numerische Mathematik.
- G.P. Szegö: Orthogonal polynomials.

**Univ.-Prof. Dr. V. Michel**



Orthogonale Polynome auf der Sphäre



Lokale Basisfunktionen auf der Sphäre,  
konzentriert auf Siegen

