

Übungen zur Vorlesung
**Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und
Waveletverfahren**

Sommersemester 2012
Blatt 5

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Montag, den 21. Mai 2012.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass die Vektoren ε^r , ε^φ und ε^t ein Orthonormalsystem im \mathbb{R}^3 bilden. Weisen Sie ferner nach, dass $\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\varphi = \varepsilon^t$ gilt.
- b) Sei $F \in C^{(1)}(\Omega)$. Beweisen Sie, dass die Vektoren $\xi F(\xi)$, $\nabla_\xi^* F(\xi)$ und $L_\xi^* F(\xi)$ für jedes feste $\xi \in \Omega$ paarweise orthogonal sind.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Gradient ∇ auf $C^{(1)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ wie folgt darstellbar ist:

$$\nabla = \varepsilon^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla^* .$$

Aufgabe 19: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Oberflächenrotationsgradient L^* wie folgt dargestellt werden kann:

$$L^* = -\varepsilon^\varphi \sqrt{1-t^2} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^t \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

Aufgabe 20: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Beltrami-Operator Δ^* auf $C^{(2)}(\Omega)$, der definiert ist durch

$$\Delta^* = \frac{\partial}{\partial t} (1-t^2) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{1-t^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 ,$$

folgendes erfüllt:

$$\nabla^* \cdot \nabla^* = \Delta^* .$$