Universität Siegen
Fakultät IV, Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. R. Telschow

21. Mai 2012

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2012
Blatt 6

Abgabe bis Mittwoch, den 30. Mai 2012, 12:00 Uhr im Postfach der AG Geomathematik.

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Oberflächenrotationsgradienten L^* folgendes gilt:

$$L^* \cdot L^* = \Delta^*,$$

wobei Δ^* der Beltrami–Operator ist.

Aufgabe 22: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie:
$$\left(\Delta^*_\eta - (\Delta^*)^\wedge(n)\right) K_{\mathrm{Harm}_n(\Omega)}(\xi,\eta) = 0, \quad \eta \in \Omega,$$
für alle $\xi \in \Omega$.

b) Zeigen Sie, dass $K_{\mathrm{Harm}_n(\Omega)}$ der einzige Reprokern von $\mathrm{Harm}_n(\Omega)$ ist.

Aufgabe 23: (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben und $Y_n \in \mathrm{Harm}_n(\Omega)$ eine beliebige Kugelflächenfunktion. Zeigen Sie, dass die Funktionen $H_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $H_{-n-1} : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, welche definiert sind durch

$$\begin{aligned} H_n(x) &:= r^n Y_n(\xi), \quad x = r\xi \in \mathbb{R}^3, \\ H_{-n-1}(x) &:= r^{-n-1} Y_n(\xi), \quad x = r\xi \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}, \end{aligned}$$

beide harmonisch sind.

Aufgabe 24: (4 Punkte)

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein beliebiger Hilbertraum.

a) Beweisen Sie die Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \; \|y\|$$

für alle $x, y \in H$.

b) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die gegen $x \in H$ in der $\langle\cdot,\cdot\rangle$–Topologie konvergiert, nennt man stark konvergent. Beweisen Sie, dass die starke Konvergenz stets die schwache Konvergenz impliziert, d.h. es gilt:

$$\langle y, x_n\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle y, x\rangle \quad \forall y \in H.$$