Universität Siegen
Fakultät IV, Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. R. Telschow

23. Januar 2014

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Wintersemester 2013/14
Blatt 13

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 30. Januar 2014.

Aufgabe 48: (4 Punkte)

Die Funktionen $Y_{0,1}, Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3} : \Omega \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} Y_{0,1}\left(\varepsilon^r(\varphi, \cos\vartheta)\right) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_{1,1}\left(\varepsilon^r(\varphi, \cos\vartheta)\right) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \\ Y_{1,2}\left(\varepsilon^r(\varphi, \cos\vartheta)\right) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\vartheta\cos\varphi, \\ Y_{1,3}\left(\varepsilon^r(\varphi, \cos\vartheta)\right) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\vartheta\sin\varphi, \end{aligned}$$

$\varphi \in [0, 2\pi[, \vartheta \in [0, \pi]$.

Zeigen Sie, dass die Systeme $\{Y_{0,1}, Y_{1,1}\}, \{Y_{0,1}, Y_{1,1}, Y_{1,2}\}$ und $\{Y_{0,1}, Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3}\}$ jeweils nicht unisolvent sind, indem Sie für jedes Funktionensystem ein Punktsystem bestimmen, für das die zugehörige Matrix singulär ist.

Aufgabe 49: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das System $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ auf jedem Intervall $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ unisolvent ist.

- bitte wenden -

Aufgabe 50: (4 Punkte)

Beweisen Sie den Satz von Aronszajn: Damit der (reelle) Hilbertraum X von Funktionen auf S einen Reprokern besitzt, ist die folgende Aussage notwendig und hinreichend: Für jedes feste $y \in S$ ist das lineare Funktional $\mathrm{L} : X \to \mathbb{R}$, welches gegeben ist durch

$$\mathrm{L}(f) := f(y), \quad f \in X,$$

beschränkt:

$$|\mathrm{L}(f)| \leq \|\mathrm{L}\| \cdot \|f\| \quad \forall f \in X,$$

wobei $\|\mathrm{L}\| < \infty$.

Aufgabe 51: (4 Punkte)

Sei K der Reprokern von X aus Aufgabe 50 und sei $\mathrm{L} : X \to \mathbb{R}$ ein beliebiges beschränktes, lineares Funktional. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : S \to \mathbb{R}$ mit

$$g(y) := \mathrm{L}_x K(x, y), \quad y \in S,$$

ein Element von X ist und

$$\mathrm{L}(f) = \langle f, g \rangle \; = \; \langle f, \mathrm{L}_x K(x, \cdot) \rangle$$

für alle $f \in X$ gilt.