Universität Siegen
Fakultät IV, Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. K. Seibert

05. Mai 2015

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2015
Blatt 4

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Freitag, den 15. Mai 2015.

Aufgabe 13: (3 + 1 = 4 Punkte)

a) Sei $f \in \mathrm{C}^{(2)}[a,b]$ und sei S ein kubischer Spline zum Punktgitter $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\|f'' - S''\|^2_{\mathrm{L}^2[a,b]} &= \|f''\|^2_{\mathrm{L}^2[a,b]} - \|S''\|^2_{\mathrm{L}^2[a,b]} \\ &\quad -2\left[\left(f'(x) - S'(x)\right) S''(x)\Big|_a^b - \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x) - S(x)\right) S'''(x)\Big|_{x_i+}^{x_{i+1}-}\right]\end{aligned}$$

gilt, wobei x_i+ und $x_{i+1}-$ für den rechts– bzw. linksseitigen Grenzwert steht.

b) Beweisen Sie den Satz von Holladay: Der natürliche kubische Spline S, der $S(x_j) = y_j$ für alle $j = 0, \ldots, n$ erfüllt, minimiert $\|F''\|_{\mathrm{L}^2[a,b]}$ unter allen $F \in \mathrm{C}^{(2)}[a,b]$, für die $F(x_j) = y_j$ für alle $j = 0, \ldots, n$ ($a = x_0$, $b = x_n$) gilt.

Aufgabe 14: (2 + 2 = 4 Punkte)

Bezüglich einer streng monoton wachsenden Folge $(t_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ mit $\lim_{j\to\pm\infty} t_j = \pm\infty$ definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\begin{aligned} B_{i,1} &:= \chi_{[t_i, t_{i+1}[}\ , \\ \omega_{i,k}(x) &:= \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}\, \chi_{[t_i, t_{i+k-1}[}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ B_{i,k} &:= \omega_{i,k} B_{i,k-1} + \left(1 - \omega_{i+1,k}\right) B_{i+1,k-1}\ . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass jedes $B_{i,k}$ stückweise polynomial vom Grad $< k$ ist.
(Anmerkung: Die Funktionen $B_{i,k}$ heißen B-Splines und das System $\{B_{i,4}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ kann als Basis für kubische Splines verwendet werden.)

b) Plotten Sie $B_{0,4}$ für $t_i = i$, $i \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 15: $(2 + 2 = 4$ Punkte$)$

Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ein gegebenes Punktgitter. Die Funktionen L_j, $j = 0, \ldots, n$, die die so genannte Lagrange–Basis bezüglich des Punktgitters bilden, definiert man durch

$$L_j(x) := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom P vom Grad $\leq n$ darstellbar ist als

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} P(x_j)\, L_j(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Beweisen Sie: Für jedes gegebene Punktgitter existieren Konstanten $w_0, \ldots, w_n$, so dass

$$\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} w_j P(x_j) \quad \text{für alle } P \in \mathrm{Pol}_{0 \ldots n}$$

gilt. Ermitteln Sie eine Formel für $w_0, \ldots, w_n$.

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Haar–Wavelet–Koeffizienten $d_{j,k}$ und alle Haar–Skalierungsfunktionskoeffizienten $c_{j,k}$ von $f(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$.