Potentialtheorie – Übungsblatt 3

Prof. Dr. Volker Michel
Dr. Roger Telschow
Max Kontak, M. Sc.

AG Geomathematik, Department Mathematik
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Universität Siegen

Sommersemester 2015 **Abgabe am 28.04.2015 in der Übung**

Aufgabe 9 (4 Punkte):

Es seien $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $U \in \mathrm{C}(\mathcal{G})$ erfülle die Gaußsche Mittelwerteigenschaft in $\mathcal{G}$, d. h. für alle $x \in \mathcal{G}$ und alle $R > 0$ mit $\mathcal{B}_R(x_0) \Subset \mathcal{G}$ gelte:

$$U(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\Omega_R(x_0)} U(x)\, \mathrm{d}\omega(x).$$

Zeigen Sie: $U \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{G})$

Bemerkung: Jede harmonische Funktion erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Als Folgerung erhält man also, dass jede harmonische Funktion beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 10 (4 Punkte):

Es seien $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $U \in \mathrm{C}(\mathcal{G})$ erfülle wie in Aufgabe 9 die Gaußsche Mittelwerteigenschaft in $\mathcal{G}$.

Zeigen Sie: U ist harmonisch in $\mathcal{G}$.

Aufgabe 11 (4 Punkte):

Es sei $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf einem Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ mit $\lim_{k\to\infty} U_k(x) = U(x)$ gleichmäßig in jeder Kugel $\overline{\mathcal{B}_R} \subset \mathcal{G}$.

Zeigen Sie: U ist harmonisch in $\mathcal{G}$.

Aufgabe 12 (4 Punkte):

Es sei $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $\overline{\mathcal{G}}$, die harmonisch in $\mathcal{G}$ sind und die auf $\partial\mathcal{G}$ gleichmäßig konvergieren.

Zeigen Sie, dass diese Folge in $\overline{\mathcal{G}}$ gleichmäßig konvergiert und dass der Grenzwert eine harmonische Funktion auf $\mathcal{G}$ ist.