Potentialtheorie – Übungsblatt 4

Prof. Dr. Volker Michel
Dr. Roger Telschow
Max Kontak, M. Sc.

AG Geomathematik, Department Mathematik
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Universität Siegen

Sommersemester 2015 **Abgabe am 05.05.2015 in der Übung**

Aufgabe 13 (1+1+2 Punkte):

Es sei Σ eine reguläre Fläche. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind $U, V \in \mathrm{C}^2(\Sigma_{\mathrm{int}})$ harmonisch, so ist ihr Produkt $U\,V$ genau dann harmonisch, wenn

$$\nabla U(x) \cdot \nabla V(x) = 0$$

für alle $x \in \Sigma_{\mathrm{int}}$ gilt.

(b) Ist $U \in \mathrm{C}^2(\Sigma_{\mathrm{int}})$ harmonisch und zusätzlich auch die Abbildung $x \mapsto (U(x))^2$ harmonisch, so ist U konstant.

(c) Ist $g \in \mathrm{C}^2(\Sigma_{\mathrm{int}})$ und $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, so gilt:

$$\Delta(f \circ g)(x) = f''(g(x))|\nabla g(x)|^2 + f'(g(x))\Delta g(x),$$

wobei $f \circ g$ wie üblich die Verkettung der beiden Abbildungen f und g bezeichnet.

Aufgabe 14 (2+2 Punkte):

Es sei Σ eine reguläre Fläche. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix. Für jedes $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \ker A$ gilt:

$$\Delta(|Ax|) = \frac{|Ax|^2 \|A\|_2^2 - \left|A^{\mathrm{T}} A x\right|^2}{|Ax|^3},$$

wobei $\|A\|_2^2 = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{jk}^2$ die *Frobenius-Norm* der Matrix $A = (a_{jk})_{j,k=1,2,3}$ bezeichnet.

(b) Ist $U \in \mathrm{C}^2(\Sigma_{\mathrm{int}})$ harmonisch, so ist auch die Abbildung $x \mapsto x \cdot \nabla U(x)$ harmonisch.

Aufgabe 15 (4 Punkte):

Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine reguläre Matrix. Betrachten Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) A ist ein skalares Vielfaches einer orthogonalen Matrix, also $A^{\mathrm{T}} A = \lambda^2 I_3$ mit der 3×3-Einheitsmatrix I_3 und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Für alle $U \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$ gilt: Die Abbildung $x \mapsto U(Ax)$ ist genau dann harmonisch auf $\mathbb{R}^3$, wenn U harmonisch auf $\mathbb{R}^3$ ist.

Beweisen Sie, dass aus Aussage (a) die Aussage (b) folgt. Dass auch die Umkehrung gilt, wird in der Übung bewiesen.

Aufgabe 16 (4 Punkte):

Beweisen Sie den *Satz von Liouville*:

Eine Funktion $U \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$, die auf dem ganzen $\mathbb{R}^3$ harmonisch und beschränkt ist, ist konstant.