Potentialtheorie – Übungsblatt 7

Prof. Dr. Volker Michel
Dr. Roger Telschow
Max Kontak, M. Sc.

AG Geomathematik, Department Mathematik
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Universität Siegen

Sommersemester 2015 **Abgabe am 28.05.2015 in der Übung**

Aufgabe 23 (4 Punkte):

Es sei U harmonisch und nicht-negativ in $\mathcal{B}_R(x_0)$, sowie stetig auf $\overline{\mathcal{B}_R(x_0)}$. Zeigen Sie, dass

$$R\frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}U(x_0) \leq U(x) \leq R\frac{R+\rho}{(R-\rho)^2}U(x_0)$$

für alle $x \in \mathcal{B}_R(x_0)$ gilt, wobei $\rho = |x - x_0|$.

Aufgabe 24 (6 Punkte):

Es sei Σ eine reguläre Fläche. Zeigen Sie, dass für jede zusammenhängende Menge $\mathcal{K} \Subset \Sigma_{\text{int}}$ eine Konstante $C > 0$ existiert (die nur von $\mathcal{K}$ und Σ abhängt), so dass für jede nicht-negative harmonische Funktion die Ungleichung

$$\max_{x\in\overline{\mathcal{K}}} U(x) \leq C \min_{x\in\overline{\mathcal{K}}} U(x)$$

gilt.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass für beliebige $x, x' \in \mathcal{B}_R(x_0)$ eine Konstante $\tilde{C} > 0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{\tilde{C}}U(x') \leq U(x) \leq \tilde{C}\, U(x')$$

gilt und wenden Sie dieses Resultat auf eine geeignete endliche Menge von Punkten $\{y_0, \ldots, y_N\} \subset \overline{\mathcal{K}}$ an.

Aufgabe 25 (4 Punkte):

Beweisen Sie das so genannte Harnacksche Prinzip:

Sei Σ eine reguläre Fläche und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Σ_{int}, so dass

$$U_n(x) \leq U_{n+1}(x)$$

für alle $x \in \Sigma_{\text{int}}$. Dann konvergiert $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Σ_{int} gegen eine harmonische Funktion oder es gilt $\lim_{n\to\infty} U_n(x) = \infty$ für alle $x \in \Sigma_{\text{int}}$

Hinweis: Man nennt die Ungleichungen aus den Aufgaben 23 und 24 auch *Harnacksche Ungleichungen*.

Aufgabe 26 (2 Punkte):

Es sei für $x \in \mathcal{B}_R(0)$ und $y \in \Omega_R$ der innere Abel-Poisson-Kern gegeben durch

$$\mathcal{D}(x,y) = \frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3}.$$

Zeigen Sie, dass die Kelvin-Transformation (bzgl. x) von $\mathcal{D}$ gegeben ist durch:

$$\widehat{\mathcal{D}}(\widehat{x},y) = \frac{1}{4\pi R}\frac{|\widehat{x}|^2 - R^2}{|\widehat{x}-y|^3}.$$