Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

**Dynamische Systeme**
— Präsenz-Übungsblatt 1 —

**Aufgabe 1** (Matrixpotenzen/Homogene lineare Rekursion)
Betrachten Sie für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Startwert $x(0) \in \mathbb{R}^n$ die homogene lineare Rekursionsgleichung

$$x(k+1) := Ax(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Gibt es Gleichgewichtspunkte $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$? Sind sie auch stabil und/oder attraktiv?

*Tipp*: Der Spektralradius von $A$ ist entscheidend.

(4)

**Aufgabe 2** (Diskrete logistische Gleichung für kleine Wachstumsparameter)
Für einen Parameter $a \geq 0$ und einen Startwert $x(0) \in (0, 1)$ sei die diskrete logistische Gleichung

$$x(k+1) := ax(k)\big(1 - x(k)\big), \quad k = 0, 1, \dots$$

gegeben. Weisen Sie folgende Eigenschaften von $x(k)$ für $k \to \infty$ nach:

(i) Für $0 \leq a < 1$ gilt $x(k) \leq a^k x(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. $x(k) \searrow 0$, $k \to \infty$.

(ii) Für $a = 1$ gilt $x(k+1) - x(k) = -x(k)^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und $x(k) \searrow 0$ für $k \to \infty$.

(iii) Für $a > 0$ und $z_2 := 1 - \frac{1}{a}$ gilt

$$x(k+1) - z_2 = \big(1 - ax(k)\big)\big(x(k) - z_2\big), \quad k = 0, 1, \dots$$

(iv) Für $1 < a \leq 2$ gilt $x(k) \in (0, 1)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und $x(k) \to z_2$ für $k \to \infty$.
*Tipp*: (iii)

(à 2)

**Besprechung: 21.10.2013**