Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme
— Präsenz-Übungsblatt 2 —

Aufgabe 3 (Dynamik des komplexen Quadrierens)

Betrachten Sie die „reelle Version" der Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) := (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)^\top.$$

(i) Bestimmen Sie alle Fixpunkte $\widehat{x} \in \mathrm{Fix}(f)$. Überprüfen Sie jeweils, ob $\widehat{x}$ attraktiv, abstoßend und/oder stabil ist. Berechnen Sie jeweils die stabilen Mengen $W^+(\widehat{x})$.

Tipp: Es gilt $\|f(x)\|_2 = \|x\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Überlegen Sie sich, dass $\mathrm{Per}(f) \subset \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$. Gilt auch Gleichheit?

Tipp: Was bedeutet $f^p(\widehat{x}) = \widehat{x}$ für den Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ von $\widehat{x} = (\cos\varphi, \sin\varphi)^\top$?

(iii) Zeigen Sie, dass alle p-periodischen Punkte $\widehat{x} \in \mathrm{Per}(f)$ mit $p \geq 2$ abstoßend sind.

(je 2)

Aufgabe 4 (Cournot-Duopol)

Zwei Anbieter beliefern exklusiv einen Markt mit dem gleichen Produkt, und zwar unabhängig voneinander mit zeitabhängigen Produktionsmengen $x_1(k)$, $x_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Der erzielte Preis P in diesem Duopol hängt von der insgesamt produzierten Menge $y = x_1 + x_2$ und damit von den Entscheidungen *beider* Anbieter ab. Wir nehmen an, dass $P(y) = \alpha - \beta y$ mit $\alpha, \beta > 0$. Beide Anbieter sind zu jedem Zeitpunkt k bestrebt, ihre Gewinnfunktionen G_1, G_2 zu maximieren. Wir nehmen an, dass $G_j(x_1, x_2) = P(x_1 + x_2)x_j - c_j x_j$ für $j = 1, 2$ mit Kostenfaktoren $c_1, c_2 \geq 0$.

(i) Angenommen, Anbieter 1 wüsste bereits, welche Menge $x_2(k+1)$ Anbieter 2 zum Zeitpunkt $k+1$ produzieren wird. Zeigen Sie, dass die gewinnmaximale Produktionsmenge für Anbieter 1 dann bei

$$x_1^*(k+1) = f_1\big(x_2(k+1)\big) := \max\Big\{\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\alpha - c_1}{\beta} - x_2(k+1)\big), 0\Big\}$$

läge, und im umgekehrten Fall für Anbieter 2 bei

$$x_2^*(k+1) = f_2\big(x_1(k+1)\big) := \max\Big\{\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\alpha - c_2}{\beta} - x_1(k+1)\big), 0\Big\}.$$

(ii) In der Praxis könnten die Anbieter ihre Produktionsmengen zum Beispiel iterativ an die vorige Zeitperiode anpassen, gemäß

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_1\big(x_2(k)\big) \\ f_2\big(x_1(k)\big) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Hat dieses diskrete dynamische System ein Gleichgewicht $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)^\top$ mit $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2 > 0$? Ist ein solches Gleichgewicht auch attraktiv?

(je 2)

Besprechung: 28.10.2013