Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme

— Präsenz-Übungsblatt 3 —

Aufgabe 5 (Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertproblemen)

Überlegen Sie sich für die folgenden Anfangswertprobleme, ob jeweils eine Lösung $x \in C^1[0,1]$ existiert (welche?) und ob die Lösung eindeutig ist.

(i) $x'(t) = f(t)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f \in C[0,1]$

(ii) $x'(t) = \sqrt{x(t)}$, $x(0) = 0$

(iii) $x'(t) = 2\big|x(t)\big|$, $x(0) = -1$

(je 2)

Aufgabe 6 (Trennung der Variablen)

Ein Anfangswertproblem der speziellen Form

$$x'(t) = f(t)g\big(x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T], \tag{$**$}$$

mit stetigen $f : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x_0) \neq 0$, lässt sich zumindest für T nahe bei t_0 durch folgende Technik der *Variablentrennung* lösen:

Betrachte $\Phi(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y$ für x aus einer Umgebung von x_0, mit $\Phi'(x) = \frac{1}{g(x)}$ und $\Phi(x_0) = 0$. Dann ist Φ wegen $g(x_0) \neq 0$ streng monoton und umkehrbar, mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi^{-1}(z) = \frac{1}{\Phi'\big(\Phi^{-1}(z)\big)} = g\big(\Phi^{-1}(z)\big)$$

und damit nach der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Phi^{-1}\Big(\int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s\Big)\right) = f(t)g\left(\Phi^{-1}\Big(\int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s\Big)\right).$$

Die eindeutige (!) Lösung $x(t)$ von $(**)$ bestimmt sich also durch (Auf-)Lösen von

$$x(t) = \Phi^{-1}\Big(\int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s\Big), \quad x(t_0) = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Lösen Sie mit dieser Technik die folgenden Anfangswertprobleme auf $[0, T]$:

(i) $x'(t) = x(t)^k$, $x(0) = 1$, $k = 0, 1, \ldots$

(ii) $x'(t) = tx(t)^k$, $x(0) = 1$, $k = 0, 1, \ldots$

(iii) $x'(t) = tx(t)^2 + t$, $x(0) = 1$

(je 2)

Besprechung: 4.11.2013