Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme
— Präsenz-Übungsblatt 4 —

Aufgabe 7 (Maximales Existenzintervall)

Betrachten Sie folgende Anfangswertprobleme und bestimmen Sie jeweils das maximale Existenzintervall $(t_-, t_+) \ni 0$ der Lösung. Was passiert jeweils bei $t = t_\pm$?

(i) $x'(t) = \frac{1}{x(t)}, \quad x(0) = 1$

(ii) $x'(t) = x(t)^{3/4}, \quad x(0) = 1$

(iii) $x'(t) = \sin(t)x(t)^2, \quad x(0) = 2$

(je 2)

Aufgabe 8 (Exakte Differentialgleichungen)

(i) Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in D$ und $F : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass alle Lösungen $x \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial F\big(t, x(t)\big)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F\big(t, x(t)\big)}{\partial t} = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]$$

implizit gegeben sind durch die Gleichung

$$F\big(t, x(t)\big) = F(t_0, x_0), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T],$$

d.h. der Graph von x liegt auf einer Höhenlinie von F.

(ii) Eine Differentialgleichung der Form

$$p\big(t, x(t)\big)x'(t) + q\big(t, x(t)\big) = 0 \qquad (*)$$

mit $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $p : D \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $q : D \to \mathbb{R}^n$ heißt *exakt*, wenn eine differenzierbare Abbildung $F : D \to \mathbb{R}$ existiert mit $p = \frac{\partial F}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial F}{\partial t}$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz im Fall $D \subset \mathbb{R}^2$ mit $p, q \in C^1(D)$:

$$(*) \text{ exakt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

Tipp: Betrachten Sie die Funktion

$$F(t,x) := (t-t_0)\int_0^1 q\big(t_0+s(t-t_0), x_0+s(x-x_0)\big)\,\mathrm{d}s + (x-x_0)\int_0^1 p\big(t_0+s(t-t_0), x_0+s(x-x_0)\big)\,\mathrm{d}s$$

(iii) Lösen Sie mit Hilfe von (i),(ii) folgende Anfangswertprobleme in einer Umgebung von t_0:

(a) $2tx(t)x'(t) + x(t)^2 = 0, \quad x(1) = 2$

(b) $\big(t^2 - x(t)\big)x'(t) + 2tx(t) = 0, \quad x(0) = 1$

(1+2+4)

Besprechung: 11.11.2013