Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme

— Präsenz-Übungsblatt 5 —

Aufgabe 9 (Integrierender Faktor)

Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen sowie $p \in C^1(D, \mathbb{R}^{n \times n})$, $q \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. Falls die Differentialgleichung

$$p\big(t, x(t)\big)x'(t) + q\big(t, x(t)\big) = 0$$

nicht exakt ist (vgl. Aufgabe 8, Kriterium $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}$), kann man sie eventuell durch Multiplikation mit einer nullstellenfreien Funktion $\mu \in C^1(D)$ äquivalent zu einer exakten Differentialgleichung

$$\mu\big(t, x(t)\big)p\big(t, x(t)\big)x'(t) + \mu\big(t, x(t)\big)q\big(t, x(t)\big) = 0$$

umformen. μ heißt dann *integrierender Faktor*.

(i) Zeigen Sie: μ ist genau dann ein integrierender Faktor, wenn $\frac{\partial(\mu p)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu q)}{\partial x}$.

(ii) Zeigen Sie: Falls $n = 1$, $p \neq 0$ und $\varphi := \frac{\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x}}{p}$ nur von t abhängt, also $\varphi = \varphi(t)$, dann ist jede Lösung $\mu = \mu(t)$ von $\mu' = -\varphi\mu$, z.B. $\mu(t) := e^{-\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s}$, ein integrierender Faktor.

Bemerkung: Analog ist für $n = 1$ die Funktion $\mu = \mu(x) := e^{\int_{x_0}^{x} \psi(z)\,\mathrm{d}z}$ ein integrierender Faktor, falls $q \neq 0$ und $\psi := \frac{\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q}$ nur von x abhängt.

(iii) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit geeigneten integrierenden Faktoren.

(a) $x'(t) + \big(1 - x(t)\big)\cos t = 0, \quad x(0) = 2$

(b) $tx'(t) - tx(t)^2 - x(t) = 0, \quad x(1) = -1$

(c) $x'(t) - g(t)x(t) - h(t) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad$ mit $g, h \in C(\mathbb{R})$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$

(1+2+6)

Aufgabe 10 (Räuber-Beute-Modell von Lotka/Volterra)

Das *Räuber-Beute-Modell* hat die Form eines Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \qquad & x(t_0) &= x_0,\\ y'(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \qquad & y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $x_0, y_0 \geq 0$ und Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Dabei beschreibt $x(t)$ die Populationsgröße der Beutetiere, $y(t)$ die Populationsgröße der Raubtiere. In der rechten Seite modelliert $\alpha x(t)$ das Wachstum der Beutepopulation, $-\gamma y(t)$ das Absterben der Raubtierpopulation und die gemischten Terme die Interaktion beider Spezies (Wachstum der Räuber auf Kosten der Beutetiere). Durch Umskalieren der Größen können wir o.B.d.A. $\alpha = \beta = \delta = 1$ wählen (*skaliertes Räuber-Beute-Modell*).

(i) Welche Lösungen hat das skalierte Räuber-Beute-Modell, falls $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$?

(ii) Zeigen Sie, dass für $x_0, y_0 > 0$ eine eindeutige Lösung mit $x(t), y(t) > 0$ für alle $t \geq t_0$ existiert.

(iii) Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi(x, y) = x + y - \gamma \ln x - \ln y$ entlang einer Lösungskurve $(x(t), y(t))$ mit $x(t), y(t) > 0$ konstant bleibt. Was bedeutet das für $t \to \infty$?

(je 2)

Besprechung: 18.11.2013