Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme
— Präsenz-Übungsblatt 6 —

Aufgabe 11 (SIR-Modell von Kermack/McKendrick, „Grippewelle“)

Für Parameter $\alpha, \beta > 0$ betrachten wir das (einfachste) Kermack-McKendrick-Modell zur Ausbreitung einer Infektionskrankheit. Dabei stehen $u(t)$, $v(t)$ und $w(t)$ für die Anzahl der gesunden, infizierten und immunisierten Individuen einer Population zur Zeit $t \geq t_0$:

$$\begin{cases} u'(t) = -\alpha u(t)v(t) \\ v'(t) = \alpha u(t)v(t) - \beta v(t) \\ w'(t) = \beta v(t) \end{cases}, \quad u(t_0) = u_0 \geq 0, \quad v(t_0) = v_0 \geq 0, \quad w(t_0) = w_0 \geq 0.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine eindeutige Lösung $(u, v, w) \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R}^3)$ existiert mit $0 \leq u(t), v(t), w(t) \leq c := u_0 + v_0 + w_0$ für alle $t \geq t_0$. Wir interessieren uns für $t \to \infty$:

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionen u und w monoton fallend bzw. wachsend sind und folgern Sie daraus die Existenz der Grenzzustände $\widehat{u} := \lim_{t\to\infty} u(t)$, $\widehat{v} := \lim_{t\to\infty} v(t)$ und $\widehat{w} := \lim_{t\to\infty} w(t)$.

(ii) Sei $0 \leq u_0 < \frac{\beta}{\alpha}$. Zeigen Sie, dass dann v monoton fällt, d.h. die Krankheit bricht nicht aus.

(iii) Sei $g \in C^1[t_0, \infty)$, und seien $\lim_{t\to\infty} g(t)$ sowie $\lim_{t\to\infty} g'(t)$ existent. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes auf $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{t\to\infty} g'(t) = 0$.

(iv) Folgern Sie aus (i)+(iii), dass $\widehat{v} = 0$, d.h. Anzahl der Infizierten strebt für $t \to \infty$ gegen 0.

(v) Begründen Sie, z.B. mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$e^{\beta t} v(t) = e^{\beta t_0} v_0 - \int_{t_0}^{t} e^{\beta s} u'(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{für alle } t \geq t_0,$$

und folgern Sie für $u_0 > 0$ durch Integration von $\frac{u'}{u} = -\alpha v$ über $[t_0, t]$ und $t \to \infty$, dass $\widehat{u} > 0$ und $\ln \frac{\widehat{u}}{u_0} = \frac{\alpha}{\beta}(\widehat{u} - u_0 - v_0)$. Wie groß ist $\widehat{u}$ ungefähr für $u_0 = 0.95$, $v_0 = 0.05$, $\alpha = 0.4$ und $\beta = 0.1$?

(2+1+2+1+3)

Aufgabe 12 (Fundamentalsystem)

Bestimmen Sie zu folgenden Differentialgleichungen jeweils ein Fundamentalsystem X und die dazugehörige Wronski-Determinante $\varphi(t) := \det X(t)$.

(i) $x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad t \in \mathbb{R}$

(ii) $x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{t} \\ 1-t & 1 \end{pmatrix} x(t), \quad t > 0$

(je 2)

Besprechung: 25.11.2013