Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme
— Präsenz-Übungsblatt 7 —

Aufgabe 13 (Lineare Anfangswertprobleme, Variation der Konstanten)

Lösen Sie die folgenden linearen Anfangswertprobleme, z.B. mit Variation der Konstanten:

(i) $x'(t) + x(t) = e^{-t}, \quad x(0) = 1, \quad t \in \mathbb{R}$

(ii) $tx'(t) + x(t) = t^2, \quad x(1) = -1, \quad t > 0$

(iii) $x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$

(2+2+4)

Aufgabe 14 (Bernoulli-Differentialgleichung)

Die *Bernoulli-Differentialgleichung* hat die Form

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t)^\gamma,$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen a, b und Exponent $\gamma \in \mathbb{R}$.

(i) Lösen Sie die Bernoulli-Differentialgleichung für $\gamma \in \{0, 1\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass man die Bernoulli-Differentialgleichung für $\gamma \notin \{0, 1\}$ durch eine Substitution $y(t) = x(t)^p$, $p \notin \{0, 1\}$, auf eine lineare Differentialgleichung für y zurückführen kann.

(je 2)

Aufgabe 15 (Matrix-Exponentielle)

Die *Matrix-Exponentielle* von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist definiert als $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

(i) Zeigen Sie, z.B. durch eine passende Majorante, dass e^A für jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert.

(ii) Berechnen Sie e^A

- für eine Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$;
- für eine diagonalisierbare Matrix $A = X \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix} X^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, mit $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$;
- für eine nilpotente Matrix der Form $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(je 2)

Besprechung: 2.12.2013