Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme

— Präsenz-Übungsblatt 9 —

Aufgabe 19 (Ansätze)

Lösen Sie die folgenden linearen Anfangswertprobleme mit konstanten Koeffizienten jeweils durch einen geeigneten Ansatz:

(i) $x'(t) = 3x(t) - 2t + 1, \quad x(0) = 4$

(ii) $x'(t) = 2x(t) + \sin t, \quad x(0) = 1$

(iii) $x''(t) + 4x'(t) - 5x(t) = e^{-t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$

(je 2)

Aufgabe 20 (Schießverfahren)

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, und betrachten Sie das Randwertproblem 2. Ordnung

$$x''(t) + g\big(x(t)\big) = 0, \quad x(0) = x(1) = 0, \quad \text{für alle } t \in [0, 1]. \tag{$*$}$$

Das *Schießverfahren* zur Lösung von $(*)$ basiert darauf, stattdessen das parameterabhängige Anfangswertproblem 2. Ordnung

$$y''(t) + g\big(y(t)\big) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = p, \quad \text{für alle } t \in [0, 1], \tag{$**$}$$

zu verwenden und dabei $p \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass $y(1) = y(1; p) = 0$ gilt. Zeigen Sie:

(i) Jede Lösung $x \in C^2[0, 1]$ von $(*)$ löst auch $(**)$ für $p = x'(0)$. Umgekehrt ist eine Lösung $y = y(; p) \in C^2[0, 1]$ von $(**)$ genau dann auch Lösung von $(*)$, wenn $y(1; p) = 0$ gilt.

(ii) $(*)$ hat eine eindeutige Lösung $x \in C^2[0, 1]$, falls $|g(z)| \leq M$ für ein $M \geq 0$ und alle $z \in \mathbb{R}$.

(iii) Falls g stetig differenzierbar ist, sucht man eine Nullstelle von $\varphi(p) := y(1; p)$ meist mit dem Newton-Verfahren

$$p_0 \in \mathbb{R} \text{ geeignet}, \quad \varphi'(p_k)(p_{k+1} - p_k) = -\varphi(p_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

wobei $\varphi'(p) = (\frac{\partial y}{\partial p}(p))(1)$. Welches Anfangswertproblem 2. Ordnung löst $\frac{\partial y}{\partial p}(p) \in C^2[0, 1]$?

(je 2)

Besprechung: 6.1.2014