Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme
— Präsenz-Übungsblatt 10 —

Aufgabe 21 (Sensitivität separabler Anfangswertprobleme bzgl. der Anfangsdaten)
Betrachten Sie zu $g, h \in C(\mathbb{R})$ mit $h(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$x'(t) = g(t)h\big(x(t)\big), \quad x(\tau) = y,$$

und berechnen Sie die Sensitivitäten $\frac{\partial x}{\partial \tau}$ bzw. $\frac{\partial x}{\partial y}$ der Lösung $x = x(\cdot; \tau, y)$ nach dem Anfangszeitpunkt $\tau \in \mathbb{R}$ und dem Anfangswert $y \in \mathbb{R}$.

Tipp: Trennung der Variablen... (3)

Aufgabe 22 (Fitzhugh-Nagumo-Modell)
Das *Fitzhugh-Nagumo-Modell* beschreibt den Prototyp eines anregbaren Systems und kann zur (stark vereinfachten) Modellierung eines Neurons herangezogen werden:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)\big(x(t) - a\big)\big(x(t) - b\big) - y(t), \\ y'(t) = \sigma x(t) - \gamma y(t), \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

wobei $0 < a < b$ und $\sigma, \gamma > 0$.

(i) Überlegen Sie sich, dass eine eindeutige Lösung für alle $t \geq 0$ existiert.

(ii) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen des Systems, d.h. alle *Gleichgewichtspunkte*.

(iii) Bestimmen Sie die beiden *Nullklinen*, d.h. Kurven im Phasenraum $\mathbb{R}^2$, bei denen sich eine der beiden dynamischen Variablen x bzw. y nicht ändert. Die Gleichgewichtspunkte aus (ii) sind die Schnittpunkte der Nullklinen.

(iv) Skizzieren Sie das Phasenportrait, d.h. zeichnen Sie das Vektorfeld der rechten Seite, die Nullklinen, die Gleichgewichtspunkte und einige mögliche Lösungskurven $\big(x(t), y(t)\big)^\top$ in der Ebene.

(v) Wie lauten die Differentialgleichungen für $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$ und $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$?

(je 2)

Besprechung: 13.1.2014