Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme
— Präsenz-Übungsblatt 11 —

Aufgabe 23 (Instabilität beim Vinograd-System)

Das *Beispiel von Vinograd*[1] für ein attraktives, aber instabiles Gleichgewicht basiert auf dem AWP

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)^2(y(t)-x(t))+y(t)^5}{(x(t)^2+y(t)^2)(1+(x(t)^2+y(t)^2)^2)} \\ y'(t) = \frac{y(t)^2(y(t)-2x(t))}{(x(t)^2+y(t)^2)(1+(x(t)^2+y(t)^2)^2)} \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0. \tag{V}$$

(i) Zeigen Sie, dass $(\widehat{x}, \widehat{y})^\top = (0,0)^\top$ einziges Gleichgewicht von (V) ist.

(ii) Bestimmen Sie die Nullklinen zu $x'(t) = 0$ bzw. $y'(t) = 0$ in der oberen Halbebene $y \geq 0$ und skizzieren Sie diese in einem x–y–Diagramm.

Tipp: Ansatz $y = \lambda x$ mit $\lambda \neq 0$ und Auflösung nach $x = x(\lambda)$.

(iii) Betrachten Sie das Dreieck $T := \{(x,y)^\top : x \geq 0, 3x \leq y \leq a\}$ mit $0 < a < 1/\sqrt{27}$ und Spitze im Ursprung. Zeigen Sie, dass alle durch T laufenden Lösungskurven von (V) das Dreieck durch die linke bzw. rechte Seite betreten und erst an der oberen Seite wieder verlassen. Begründen Sie die Existenz eines Punktes $R = (x,a)^\top \in \partial T$, $0 < x < a/3$, dessen zugehörige Lösungsbahn rückwärts in den Nullpunkt verfolgt werden kann, d.h. die Instabilität von $(0,0)^\top$.

(2+2+4)

Aufgabe 24 (Stabilität bei eindimensionalen Anfangswertproblemen)

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig mit $f(0) = 0$ und $f(x) \neq 0$ für $0 < |x| < r$. Charakterisieren Sie die Stabilität, asymptotische Stabilität und Instabilität des Gleichgewichts $\widehat{x} = 0$ von

$$x'(t) = f\big(x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0$$

mit Hilfe von Vorzeichenbedingungen an f im Intervall $(-r, r)$.

(4)

Aufgabe 25 (Stabilität bei linearen Anfangswertproblemen)

Untersuchen Sie jeweils die Stabilitätseigenschaften des Gleichgewichts $(\widehat{x}, \widehat{y})^\top = (0,0)^\top$:

(i) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = -6x(t) - 5y(t) \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - 5y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 2y(t) \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases}$

(je 2)

Besprechung: 20.01.2014

[1] Vinograd, R.E., Inapplicability of the Method of Characteristic Exponents to the Study of Nonlinear Differential Equations, *Mat. Sbornik (N.S.)* **41**(83):4, 421–438, 1957; s.a. W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer, 1967, S. 191ff.