Universität Siegen
Department Mathematik
Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch
M.Sc. Roger Telschow

WS 2013/2014

Dynamische Systeme
— Präsenz-Übungsblatt 12 —

Aufgabe 26 (Brüsselator)

Der *Brüsselator*[1] von Prigogine und Levever[2] ist ein einfaches Modell zur Beschreibung von Oszillationen bei autokatalytischen chemischen Reaktionen. Es ist gegeben durch das Anfangswertproblem mit Parametern $a, b > 0$

$$\begin{cases} x'(t) = a - (b+1)x(t) + x(t)^2 y(t) \\ y'(t) = bx(t) - x(t)^2 y(t) \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0. \tag{B}$$

(i) Zeigen Sie, dass zu Anfangswerten $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$ eine globale Lösung existiert mit $x(t) > 0$ und $y(t) > 0$ für alle $t > 0$.

(ii) Bestimmen Sie alle Gleichgewichte $\widehat{x}, \widehat{y} \geq 0$ von (B) und deren Stabilitätseigenschaften.

(2+4)

Aufgabe 27 (Normschranke für Matrix-Exponentialfunktion)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $\omega > s(A) := \max_{1 \leq k \leq n} \operatorname{Re} \lambda_k$. Zeigen Sie, dass ein $M = M(\omega) > 0$ existiert mit $\|e^{tA}\|_2 \leq M e^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$. Gilt dies auch im Fall $\omega = s(A)$?

(3)

Aufgabe 28 (Stabilität bei Hamilton-Systemen)

Sei $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$. Das zu H gehörende *Hamilton-System* ist definiert durch

$$\begin{cases} q'(t) = \frac{\partial H}{\partial p}\big(q(t), p(t)\big), \\ p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}\big(q(t), p(t)\big), \end{cases} \quad q(t_0) = q_0, \quad p(t_0) = p_0, \quad t \geq t_0. \tag{H}$$

Typische Beispiele sind Systeme mit Energieerhaltung, z.B. das Pendel ohne Dämpfung, das Räuber-Beute-Modell oder Modelle der Himmelsmechanik.

(i) Zeigen Sie, dass H eine Ljapunov-Funktion für (H) ist.

(ii) Wann ist ein Gleichgewicht von (H) stabil, wann asymptotisch stabil?

(2+4)

Besprechung: 27.01.2014

[1] Brüssel + Oszillator

[2] I. Prigogine und R. Levever, Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems II, *Journal of Chemical Physics* **48**(1968), 1695–1700.