

Skript zur Vorlesung im WS 2013/2014

Dynamische Systeme

Thorsten Raasch

3. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
1 Grundbegriffe und Beispiele	4
2 Diskrete dynamische Systeme	12
3 Lösungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen	25
3.1 Eindeutigkeit von Lösungen	25
3.2 Existenz von Lösungen	27
3.3 Differential- und Integralungleichungen	33
3.4 Globale Existenz von Lösungen	37
4 Lineare Differentialgleichungen	42
4.1 Homogene Systeme	42
4.2 Inhomogene Systeme	45
4.3 Systematische Bestimmung von Fundamentalsystemen	47
4.3.1 Die d'Alembert-Reduktion	47
4.3.2 Konstante Koeffizienten	49
5 Stetige und differenzierbare Abhängigkeit	57
5.1 Stetige Abhängigkeit	57
5.2 Anwendungen der stetigen Abhängigkeit	59
5.2.1 Nicht strikte Differentialungleichungen	60
5.2.2 Nichtnegativität von Lösungen	60
5.3 Differenzierbarkeit nach den Daten	62
5.3.1 Autonome Probleme	62
5.3.2 Nichtautonome Probleme	64
6 Stabilitätstheorie	68
6.1 Stabilität von Gleichgewichtslösungen	68
6.2 Homogene lineare Differentialgleichungen	71
6.3 Linearisierte Stabilität	77
6.4 Ljapunov-Funktionen	79

Einleitung

Unter einem dynamischen System versteht man das mathematische Modell eines zeitabhängigen Prozesses, häufig motiviert durch Probleme aus der Wirtschaft, aus Natur- und Lebenswissenschaften sowie technischen Anwendungen. Typische Beispiele dynamischer Systeme sind Märkte, Modelle der Himmelsmechanik, Klimamodelle, chemische Reaktionskinetik, elektrische Schaltkreise sowie Fragestellungen der mathematischen Biologie (z.B. Räuber-Beute- und Epidemie-Modelle).

Man unterscheidet generell zwischen dynamischen Systemen mit diskreter Zeit, die durch eine einfache Rekursionsvorschrift für die Zustandsgröße x gegeben sind, wie

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

und dynamischen Systemen mit kontinuierlicher Zeit, welche durch ein Anfangswertproblem beschrieben werden, z.B.

$$x(0) = x_0, \quad x'(t) = f(x(t)), \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

In der Theorie der dynamischen Systeme geht es darum, das qualitative Verhalten von Lösungen eines dynamischen Systems zu klären, möglichst ohne einzelne Lösungen analytisch oder numerisch bestimmen zu müssen. Typische Fragestellungen sind hierbei:

- Existenz/Eindeutigkeit von Lösungen (im Fall kontinuierlicher Zeit)
- Existenz und Stabilität von Gleichgewichtspunkten
- Verhalten/Beschränktheit der Lösung für große Zeiten
- Existenz zeitlich periodischer Lösungen
- Änderung des qualitativen Verhaltens bei Variation von Parametern (Verzweigung/Bifurkation, Chaos)
- Erhaltungseigenschaften

Die Vorlesung liefert eine Einführung in die mathematische Behandlung dynamischer Systeme mit endlich-dimensionalem Zustandsraum. Zur Klärung der Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen bei kontinuierlicher Zeit behandelt die Vorlesung auch die Theorie linearer und nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen.

1 Grundbegriffe und Beispiele

Bei dynamischen Systemen beobachtet man Größen $x(t)$ aus einem Zustands- oder Phasenraum \mathcal{Z} , welche sich in Abhängigkeit von der Zeit t aus einer Zeitskala \mathcal{T} ändern. Wir nehmen in dieser Vorlesung an, dass der Zustandsraum endlich-dimensional und reell ist, $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Hinsichtlich der Zeitskala nehmen wir an, dass $(\mathcal{T}, +)$ zumindest eine Halbgruppe mit Neutralelement $0 \in \mathcal{T}$ ist, d.h. $(s, t) \mapsto s + t$ sei wohldefiniert und assoziativ, mit $t + 0 = 0 + t = t$ für alle $t \in \mathcal{T}$. Typische (Minimal-)Beispiele sind $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0$ oder $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, allerdings sind auch die Gruppen $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ oder $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ erlaubt.

Definition 1.1. Eine stetige Abbildung $\varphi : \mathcal{T} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ heißt dynamisches System oder auch Fluss eines dynamischen Systems, wenn gilt

$$\varphi(0, x) = x, \quad \text{für alle } x \in \mathcal{Z} \quad (1.1a)$$

und

$$\varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x)), \quad \text{für alle } s, t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{Z}. \quad (1.1b)$$

Wir interpretieren den Fluss φ als Lösungsabbildung des dynamischen Systems. Durch den Fluss ist für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathcal{Z}$ zum Zeitpunkt $0 \in \mathcal{T}$ ein eindeutiger Orbit (*Bahn, Trajektorie, Flusslinie*)

$$\gamma(x_0) := \{\varphi(t, x_0) : t \in \mathcal{T}\} \quad (1.2)$$

festgelegt. Dabei bewirkt (1.1a), dass der Orbit $\gamma(x_0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den Anfangswert $x_0 \in \mathcal{Z}$ verläuft. Die *Kozykleneigenschaft* (1.1b) bewirkt, dass der Orbit $\gamma(x_0)$ aus mehreren Orbits zu verschiedenen Anfangszeitpunkten zusammengesetzt werden kann, d.h. die konkrete Wahl des Anfangszeitpunkts ist aus späteren Beobachtungen $\varphi(t, x_0)$ nicht mehr rekonstruierbar. Wir bezeichnen solche zeitunabhängigen Systeme auch als *autonom*.

Durch die Halbgruppeneigenschaft von \mathcal{T} ist die positive Zeitrichtung besonders ausgezeichnet, Anfangswerte $x_0 \in \mathcal{Z}$ werden durch den Fluss φ in die Zukunft transportiert. Ist die Zeitskala \mathcal{T} eine Gruppe, d.h. existiert eine inverse Zeit $t \mapsto -t$ für alle $t \in \mathcal{T}$, so nennen wir ein auf \mathcal{T} aufbauendes dynamisches System *reversibel*. Anfangswerte x_0 können in diesem Fall wegen (1.1b) auch eindeutig in die Vergangenheit zurückverfolgt werden:

$$x_0 = \varphi(0, x_0) = \varphi(t - t, x_0) = \varphi(t, \varphi(-t, x_0)),$$

d.h. die Umkehrabbildung $\varphi(t, \cdot)^{-1} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ existiert mit

$$\varphi(-t, x_0) = \varphi(t, \cdot)^{-1}(x_0), \quad \text{für alle } x_0 \in \mathcal{Z}.$$

Im reversiblen Fall sind zwei gegebene Orbits entweder identisch oder disjunkt. Im nicht reversiblen Fall existieren zu gegebenen $t \in \mathcal{T}$ und $x \in \mathcal{Z}$ möglicherweise mehrere $y, z \in \mathcal{Z}$ mit $\varphi(t, y) = \varphi(t, z) = x$, d.h. hier können sich ursprünglich verschieden verlaufende Orbits nach endlicher Zeit schneiden und dann wegen (1.1b) gemeinsam weiterlaufen. Wir werden sehen, dass durch hinreichend glatte gewöhnliche Differentialgleichungen gegebene dynamische Systeme reversibel sind.

Zur Illustration und Motivation betrachten wir im Folgenden zwei ausführliche Beispiele und interessieren uns hierbei unter anderem für Gleichgewichtspunkte und ihre Stabilitätseigenschaften.

Definition 1.2. $\hat{x} \in \mathcal{Z}$ heißt Gleichgewichtspunkt (Ruhepunkt, Äquilibrium) des dynamischen Systems $\varphi : \mathcal{T} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$, wenn $\varphi(t, \hat{x}) = \hat{x}$ für alle $t \in \mathcal{T}$. Das Gleichgewicht $\hat{x} \in \mathcal{Z}$ heißt

- (i) stabil, wenn zu jeder offenen Umgebung $V \ni \hat{x}$ eine offene Umgebung $U \ni \hat{x}$ existiert mit $\varphi(t, x) \in V$ für alle $t \in \mathcal{T}$ und $x \in U$;
- (ii) instabil, wenn es nicht stabil ist;
- (iii) attraktiv, wenn eine Umgebung $U \ni \hat{x}$ existiert mit $\varphi(t, x) \rightarrow \hat{x}$ für alle $t \in \mathcal{T}$ und $x \in U$;
- (iv) asymptotisch stabil, wenn es stabil und attraktiv ist.

Beispiel 1.3 (Das mathematische Pendel). Wir betrachten eine Masse m , die an einer um den Nullpunkt beweglichen, masselosen Stange der Länge L aufgehängt ist, siehe Abbildung 1.1. Auf die Masse m wirke senkrecht nach unten die Gravitationskraft

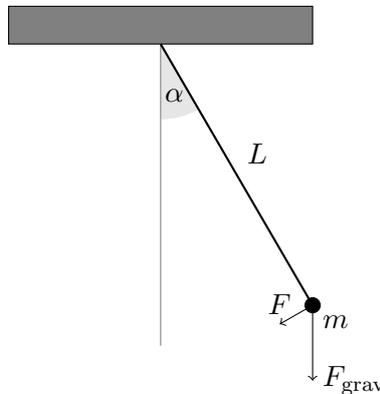


Abbildung 1.1: Das mathematische Pendel

$F_{\text{grav}} = mg$, mit der Gravitationskonstanten g . Bei Auslenkung der Stange um den Winkel α ist die Rückstellkraft F proportional zu $\sin \alpha$. Nach dem Newtonschen Gesetz ist im reibungsfreien Fall die Beschleunigung der Masse entgegengesetzt zu dieser

Kraft $F = -mg \sin \alpha$. Für den unbekanntem, zeitabhängigen Winkel α erhalten wir die Differentialgleichung

$$mL\alpha''(t) = -mg \sin \alpha(t). \quad (1.3)$$

Der konkrete Wert für die Masse $m > 0$ lässt sich weggürzen und ist somit irrelevant. Der Parameter $\omega^2 := \frac{g}{L} > 0$ bestimmt die Grundfrequenz der Pendelschwingung. Durch Streckung der Zeitachse $\tau := \omega t$ können wir auch noch den Parameter ω^2 eliminieren und erhalten für $x(\tau) := \alpha(\tau/\omega)$ die parameterfreie Differentialgleichung in künstlicher Zeit τ

$$x''(\tau) = -\sin x(\tau). \quad (1.4)$$

Falls Reibung berücksichtigt werden soll (z.B. Luftwiderstand), erhält man auf ähnliche Weise die Differentialgleichung

$$x''(\tau) = -\sin x(\tau) - \beta x'(\tau), \quad (1.5)$$

mit einem Dämpfungsparameter $\beta \geq 0$. Mit $y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ ist (1.5) äquivalent zum Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\sin y_1(t) - \beta y_2(t) \end{pmatrix} =: f(y(t)). \quad (1.6)$$

Die rechte Seite f ist glatt, so dass für jeden Anfangswert $y(0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung (1.6) existiert (siehe Satz von Picard-Lindelöf). Wir erhalten ein kontinuierliches dynamisches System mit dem Fluss $\varphi(t, y_0) = y(t)$, wobei $y_0 = y(0)$. Approximiert man für kleine Winkel α den Sinus linear, $\sin \alpha \approx \alpha$, so erhält man aus (1.5) die lineare Schwingungsgleichung $x'' + \beta x' + x = 0$, welche man explizit lösen kann. Analytische Lösungen der nichtlinearen Originalgleichung (1.5) lassen sich dagegen nicht so einfach angeben. In Abbildung 1.2 sieht man das Richtungsfeld f im ungedämpften Fall $\beta = 0$. Lösungen der Differentialgleichung (1.6) sind Kurven, die das Richtungsfeld f verfolgen. Der Punkt $\hat{y} := (0, 0)^\top$ (Ruhelage) ist ein Gleichgewichtspunkt, d.h. $y(t) \equiv \hat{y}$ ist eine zeitlich konstante Lösung von (1.6), da dort das Richtungsfeld verschwindet. Weitere Gleichgewichtspunkte befinden sich bei $(\pm\pi, 0)^\top$, diese entsprechen dem Hochpunkt des Pendels (die Decke muss man sich dabei wegdenken) und sind instabil. In der Nähe von $\hat{y} = (0, 0)^\top$ ergeben sich zeitlich periodische Lösungen, die bei kleiner Amplitude $\|y(t)\|$ fast kreisförmig aussehen, $y(t) \approx c(\cos t, \sin t)^\top$, also wie harmonische Schwingungen mit Periode 2π . Hieraus folgt, dass $\hat{y} = (0, 0)^\top$ stabil ist. Ist die Startgeschwindigkeit $x'(0)$ groß genug, ergibt sich eine nichtperiodische Lösung, das Überschwingen. Zwischen diesen beiden Lösungstypen existiert eine in der Praxis so gut wie nicht vorkommende periodische, spindelförmige Lösung, die von $(\pi, 0)^\top$ nach $(-\pi, 0)^\top$ und zurück verläuft. Dies entspricht einer Bewegung des Pendels vom Hochpunkt zum Hochpunkt, was aber unendlich lange dauern würde.

Die Existenz zeitlich periodischer Lösungen im ungedämpften Fall sieht man am einfachsten so, indem man die „Energie“

$$H(y) := \frac{1}{2}y_2^2 - \cos y_1 \quad (1.7)$$

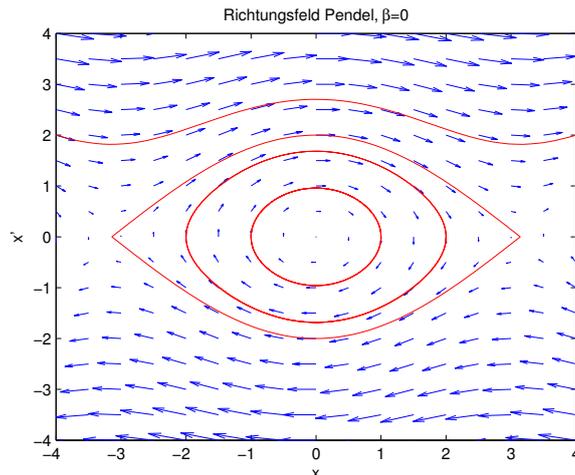


Abbildung 1.2: Richtungsfeld f aus (1.6) für das ungedämpfte mathematische Pendel ($\beta = 0$) mit einigen Lösungskurven $y(t)$, $0 \leq t \leq 20$.

betrachtet, d.h. kinetische plus potentielle Energie. Entlang einer Lösung y von (1.6) ist H konstant, denn mit (1.5) und $\beta = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}H(y(t)) &= y_2(t)y_2'(t) + y_1'(t) \sin y_1(t) \\
 &= x'(t)(-\sin x(t) - \beta x'(t)) + x'(t) \sin x(t) \\
 &= -\beta x'(t)^2 \\
 &= 0, \quad \text{für alle } t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Also liegen Lösungskurven y auf Höhenlinien der glatten Funktion H und sind somit zwangsläufig geschlossen, d.h. zeitlich periodisch.

Abbildung 1.3 zeigt die gleiche Situation mit eingeschalteter Dämpfung, $\beta > 0$. Hier laufen Lösungen für $t \rightarrow \infty$ spiralförmig auf den Gleichgewichts-/Ruhezustand $\hat{y} = (0, 0)^\top$ zu, dieser ist attraktiv. Im gedämpften Fall existieren außer den Gleichgewichtszuständen keine zeitlich periodischen Lösungen mehr. Das Energiefunktional H aus (1.7) fällt für wachsende Zeit t wegen $\beta > 0$, sofern $x'(t) \neq 0$.

Beispiel 1.4 (Die diskrete logistische Gleichung). Als Beispiel für ein diskretes dynamisches System betrachten wir für einen Parameter $a \geq 0$ die einstufige Rekursion

$$x(k+1) := f(x(k)) := ax(k)(1-x(k)), \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.8)$$

Diese Iteration wird diskrete logistische Gleichung genannt und ist ein mathematisches Modell für das Wachstum einer Population unter beschränkten Ressourcen. $x(k)$ bezeichnet dabei die Populationsgröße in der k -ten Generation, relativ zu einer Maximalpopulation. Der Parameter a steuert das Wachstum der Population. Für kleine $0 \leq x(k) \ll 1$ liegt

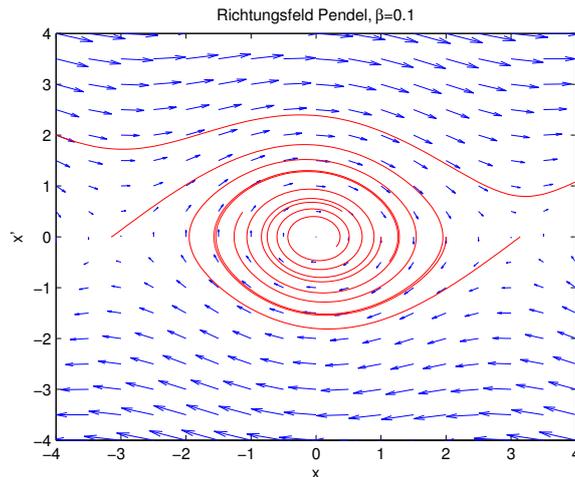


Abbildung 1.3: Richtungsfeld f aus (1.6) für das gedämpfte mathematische Pendel ($\beta = 0.1$) mit einigen Lösungskurven $y(t)$, $0 \leq t \leq 20$.

wegen (1.8) annähernd lineares Wachstum vor, $x(k+1) \approx ax(k)$. Bei großem $0 \ll x(k) \leq 1$ bremst dagegen der Faktor $1 - x(k)$ das Wachstum stark (Überbevölkerung).

Gleichgewichtslösungen $\hat{x} = f(\hat{x})$ lassen sich an den Fixpunkten von f ablesen, siehe auch Abbildung 1.4. Als Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{R} besitzt f die Fixpunkte $z_1 := 0$ und

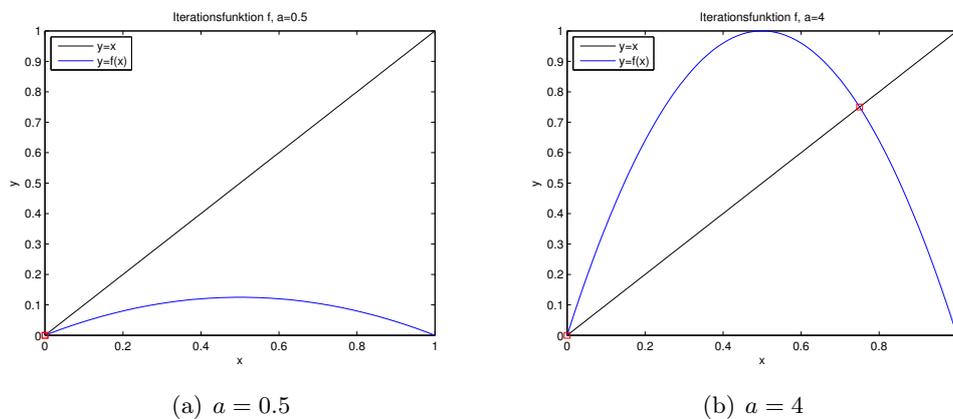


Abbildung 1.4: Iterationsfunktion f (in blau) und Fixpunkte der diskreten logistischen Gleichung (in rot) für verschiedene Werte von a .

$z_2 := 1 - \frac{1}{a} < 1$ (falls $a > 0$). Dabei gilt $z_2 > 0$ für $a > 1$. Für den Parameter a sind nur Werte ≤ 4 sinnvoll, da sonst f nicht mehr nach $[0, 1]$ abbildet, vgl. Abbildung 1.4.

Den Iterationsverlauf kann man schön in einem sogenannten Cobweb-/Spinnennetz-Diagramm verfolgen. Man zeichnet dabei die einzelnen Iterierten $x(k)$ als stückweise

lineare Kurve in Abbildung 1.4 ein, indem man abwechselnd die Punkte $(x(k), x(k+1))^\top$ und $(x(k+1), x(k+1))^\top$ besucht, für $k \geq 0$. Typische Cobweb-Diagramme findet man in in Abbildung 1.5.

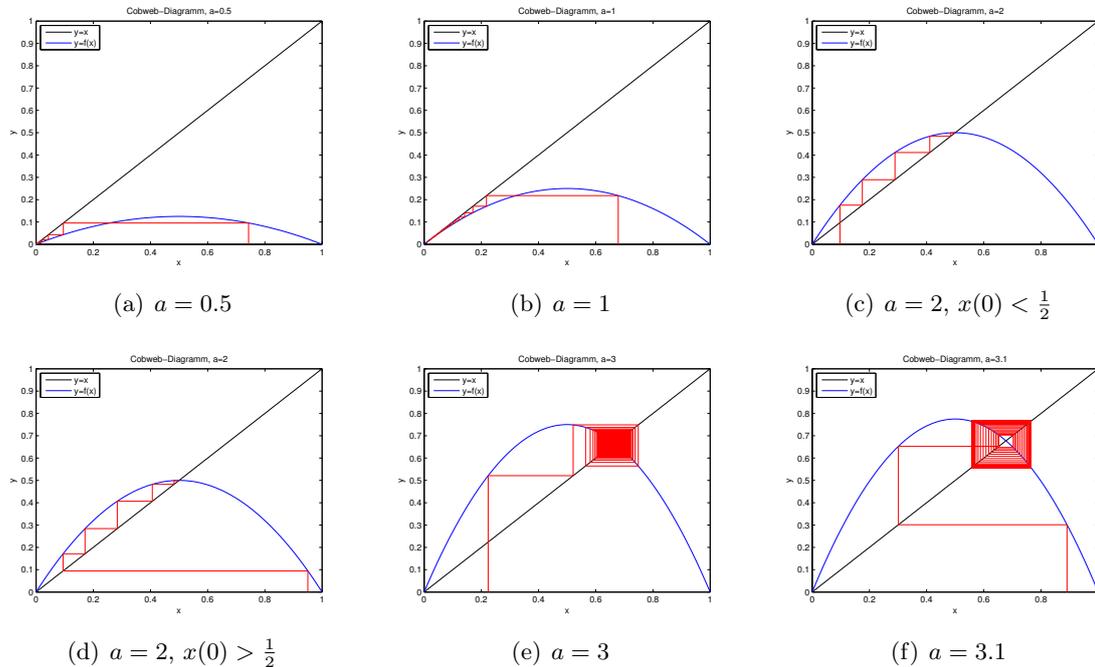


Abbildung 1.5: Cobweb-Diagramme von Iterationsverläufen der diskreten logistischen Gleichung, für verschiedene zufällig gewählte $x(0)$ und verschiedene Parameter $0 < a < 3$.

Wegen $f'(x) = a(1 - 2x)$ und somit $f'(z_1) = a$, $f'(z_2) = 2 - a$ ist f kontraktiv in einer Umgebung von z_1 für $a < 1$ und in einer Umgebung von z_2 für $1 < a < 3$. Daher konvergiert $x(k)$ — zumindest lokal, aber in der Tat auch global (vgl. Übung) — gegen $z_1 = 0$, falls $0 \leq a < 1$ (Aussterben der Population), und gegen $z_2 = 1 - \frac{1}{a}$, falls $1 < a < 3$ (positiver Gleichgewichtszustand), siehe auch Abbildung 1.6. Für $a > 3$ konvergiert $x(k)$ nicht mehr für $k \rightarrow \infty$. Denn wegen $f'(z_1) = a > 3$ und $f'(z_2) = 2 - a < -1$ gilt $|f'(z_{1/2})| > 1$ und somit für alle x aus einer kleinen Umgebung um $z_{1,2}$ $|f'(x)| \geq 1 + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Wir erhalten

$$|f(x) - z_{1/2}| = |f(x) - f(z_{1/2})| = \left| \int_{z_{1/2}}^x f'(s) ds \right| \geq (1 + \varepsilon)|x - z_{1/2}|,$$

sobald x nahe genug an $z_{1/2}$ liegt, d.h. $z_{1/2}$ sind abstoßende Fixpunkte. Statt einzelner Fixpunkte entstehen für $k \rightarrow \infty$ mehrere Häufungspunkte, siehe z.B. Abbildung 1.6. Dies kann man verifizieren, indem man von f zu $f^2 := f \circ f$ übergeht, womit man die geraden

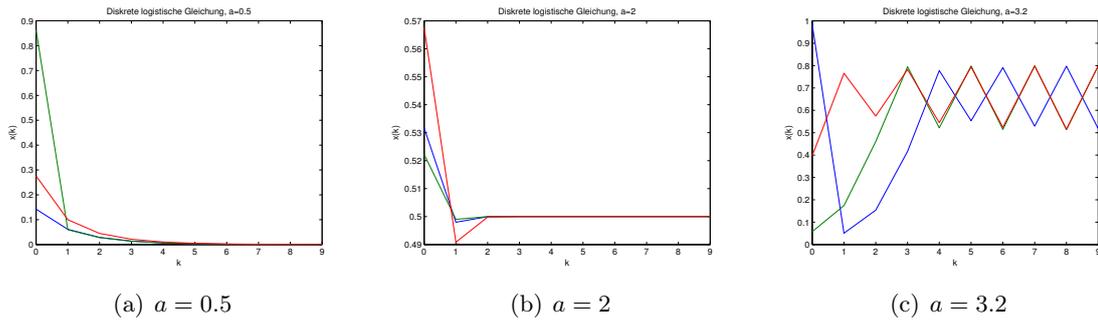


Abbildung 1.6: Konvergenz bei der diskreten logistischen Gleichung für $a \in \{0.5, 2, 3.2\}$ und zufällige Startwerte $x(0)$.

bzw. ungeraden Folgenglieder $x(2k)$, $x(2k + 1)$ beschreiben kann:

$$\begin{aligned}
 f^2(x) &= af(x)(1 - f(x)) \\
 &= a^2x(1 - x)(1 - ax(1 - x)) \\
 &= a^2x(1 - x)(1 - ax + ax^2).
 \end{aligned}$$

f^2 besitzt die „alten“ Fixpunkte $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - \frac{1}{a}$, ferner die „neuen“ Fixpunkte $z_{3/4} = \frac{1}{2a}(a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3})$. Für $a > 3$ gilt $z_3 \neq z_4$ sowie $f(z_3) = z_4$, $f(z_4) = z_3$. Ferner ist f in einer Umgebung von $z_{3/4}$ kontraktiv.

Für noch größere Werte von a wird das Verhalten der Häufungspunktmengen sehr kompliziert. Ein wichtiges technisches Hilfsmittel ist dabei das Feigenbaumdiagramm. Hierbei plottet man verschiedene Werte des Parameters a (Feigenbaumparameter) gegen (stabile) Häufungspunkte, siehe Abbildung 1.7. Jenseits von $a \geq 3$ an ergeben sich zwei, vier,

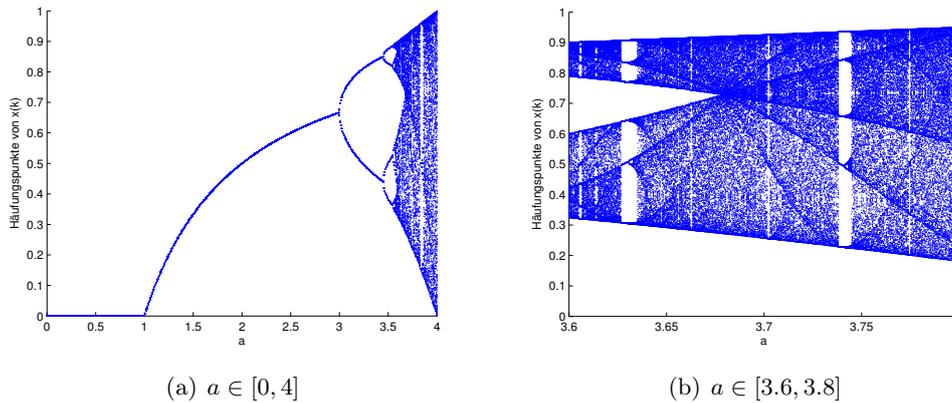


Abbildung 1.7: Feigenbaumdiagramme der diskreten logistischen Gleichung für verschiedene Laufbereiche von a

acht, ... Häufungspunkte, die sich für wachsende a jeweils in zwei Häufungspunkte verzweigen (Bifurkation). Für Werte etwa ab $a \geq 3.57$ sind einzelne Häufungspunkte nicht mehr auszumachen, lediglich in kleinen „Inseln der Ordnung“ (etwa bei $a \approx 3.74$). Die Iteration hängt sehr sensitiv vom Anfangswert $x(0)$ ab: Chaos. Die Menge der Häufungspunkte liegt für $a \rightarrow 4$ dicht in $[0, 1]$.

2 Diskrete dynamische Systeme

In diesem Kapitel wollen wir diskrete dynamische Systeme der Form

$$x(k+1) := f(x(k)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

genauer betrachten. Hierbei ist $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ eine Abbildung des Zustandsraums $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n$ in sich. Gleichgewichtspunkte $\hat{x} \in \mathcal{Z}$ entsprechen Fixpunkten von f . Die Menge aller Fixpunkte von f bezeichnen wir mit

$$\text{Fix}(f) := \{\hat{x} \in \mathcal{Z} : \hat{x} = f(\hat{x})\}.$$

Wie wir in Beispiel 1.4 gesehen haben, kann die Menge der Häufungspunkte von $x(k)$ für $k \rightarrow \infty$ aber auch komplizierter aussehen. Zum Beispiel können mehrere Häufungspunkte auftreten, die im Lauf der Iteration periodisch besucht werden.

Definition 2.1. $\hat{x} \in \mathcal{Z}$ heißt periodisch mit Periode $p \in \mathbb{N}$ oder auch p -periodisch, wenn $\hat{x} \in \text{Fix}(f^p)$, d.h.

$$\hat{x} = f^p(\hat{x}) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{p\text{-mal}}(\hat{x}).$$

Die Menge aller periodischen Punkte von f bezeichnen wir mit

$$\text{Per}(f) := \{\hat{x} \in \mathcal{Z} : \exists p \in \mathbb{N} \text{ mit } \hat{x} = f^p(\hat{x})\}.$$

Wir nehmen im Folgenden stets an, dass die Periodenlänge p minimal ist (Primperiode), d.h. zu einem periodischen Punkt \hat{x} gilt immer $f^m(\hat{x}) \neq \hat{x}$ für alle $m = 1, \dots, p-1$.

Bemerkung 2.2. (i) Es gilt $\text{Fix}(f) \subset \text{Per}(f)$, denn Fixpunkte sind 1-periodisch.

(ii) Falls \hat{x} periodisch ist mit Periode p , so gilt für den dort startenden Orbit

$$\gamma(\hat{x}) = \{\hat{x}, f(\hat{x}), \dots, f^{p-1}(\hat{x})\},$$

d.h. der Orbit von \hat{x} besitzt p Elemente (da p minimal). Die Umkehrung dieser Folgerung gilt im Allgemeinen nicht, d.h. Orbits der Länge p werden nicht zwingend p -periodisch durchlaufen. Ein Gegenbeispiel ist ein Fixpunkt $\hat{x} = f(\hat{x})$, der durch eine nicht injektive Abbildung f auch von $x \neq \hat{x}$ abgebildet wird, $f(x) = \hat{x}$. Es folgt $\gamma(x) = \{x, \hat{x}\}$, aber weder x noch \hat{x} sind offenbar 2-periodisch.

Wir wollen jetzt analog zur Stabilität von Fixpunkten auch die Stabilität periodischer Punkte fassen.

Definition 2.3. $x \in \mathcal{Z}$ heißt vorwärts-asymptotisch zu einem p -periodischen Punkt $\hat{x} \in \text{Per}(f)$, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kp}(x) = \hat{x}. \quad (2.2)$$

Die Menge aller zu $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ vorwärts-asymptotischen Punkte heißt stabile Menge von \hat{x} ,

$$W^+(\hat{x}) := \left\{ x \in \mathcal{Z} : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{kp}(x) = \hat{x} \right\}. \quad (2.3)$$

$\hat{x} \in \text{Per}(f)$ heißt attraktiv, wenn eine offene Umgebung $U \ni \hat{x}$ existiert mit $U \subset W^+(\hat{x})$.

Beispiel 2.4. Bei der diskreten logistischen Gleichung 1.8 mit $f(x) = ax(1-x)$ liegen die folgenden periodischen Punkte und Stabilitätseigenschaften vor (vgl. Beispiel 1.4):

- Falls $0 \leq a \leq 1$, so gilt $\text{Fix}(f) = \{0\}$. Die Folge der $x(k)$ ist monoton fallend (vgl. Übung), so dass keine weiteren periodischen Punkte außer dem Fixpunkt 0 existieren können, d.h. $\text{Per}(f) = \{0\}$. Für jeden Startwert $x(0) \in [0, 1]$ gilt $x(k) \searrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, also ist 0 attraktiver Fixpunkt mit stabiler Menge $W^+(0) = [0, 1]$.
- Falls $1 < a < 3$, so gilt $\text{Fix}(f) = \{0, 1 - \frac{1}{a}\}$. Wie schon in Beispiel 1.4 diskutiert, ist wegen $|f'(0)| = a > 1$ der Fixpunkt 0 nicht attraktiv (sogar abstoßend, s.u.). Der andere Fixpunkt $z_2 := 1 - \frac{1}{a}$ ist wegen $|f'(1 - \frac{1}{a})| = a - 2 < 1$ attraktiv. Die nachfolgende Konvergenzuntersuchung wird zeigen, dass neben den Fixpunkten keine weiteren periodischen Punkte existieren können, $\text{Per}(f) = \{0, z_2\} = \text{Fix}(f)$.
 - Falls $x(0) \in \{0, 1\}$, so folgt $x(1) = 0$ und damit $x(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. die Iteration springt von 1 in den Fixpunkt $\hat{x} = 0$.
 - Falls $x(0) \in \{\frac{1}{a}, z_2\}$, so folgt $x(1) = z_2$ und damit $x(k) = z_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die Iteration springt von $\frac{1}{a}$ in den Fixpunkt $\hat{x} = z_2$.
 - Für ein allgemeines $x(0) \in (0, 1)$ beobachten wir, dass wegen $1 < a < 3$

$$x(1) = ax(0)(1-x(0)) \begin{cases} \leq \frac{a}{4} \\ > 0 \end{cases}.$$

und mit Induktion $x(k) \in (0, \frac{a}{4}]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ferner benutzen wir (Übg.), dass

$$x(k+1) - z_2 = (x(k) - z_2)(1 - ax(k)), \quad \text{für alle } k = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

- * Im Fall $1 < a \leq 2$ erhalten wir aus $x(k) \in (0, 1)$, dass $1 - ax(k) \in (-1, 1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (2.4) erzwingt, dass

$$|x(k+1) - z_2| = |x(k) - z_2| |1 - ax(k)|, \quad \text{für alle } k = 0, 1, \dots$$

d.h. $|x(k) - z_2|$ fällt monoton für $k \rightarrow \infty$. Dabei ist die Monotonie streng, falls $x(k) \neq z_2$. Hieraus folgt schon, dass $x(k) \rightarrow z_2$ für $k \rightarrow \infty$. Denn wegen

$$x(k) = |x(k)| \geq z_2 - |x(k) - z_2| \geq z_2 - |x(0) - z_2| > 0, \quad \text{für alle } k = 0, 1, \dots$$

existiert ein $\epsilon > 0$ mit $x(k) \in [\epsilon, \frac{a}{4}]$ und damit $1 - ax(k) \in [1 - \frac{a^2}{4}, 1 - a\epsilon]$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Somit existiert ein $0 < q < 1$ mit $|1 - ax(k)| \leq q < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, d.h. f ist kontraktiv in $(0, 1)$. Wir erhalten aus dieser Überlegung für $1 < a \leq 2$ die stabilen Mengen $W^+(0) = \{0, 1\}$ und $W^+(1 - \frac{1}{a}) = (0, 1)$. Auf Grund der monotonen Konvergenz aller $x(0) \in [0, 1]$ gegen 0 oder $1 - \frac{1}{a}$ können gar keine weiteren periodischen Punkte von f existieren.

* Im Fall $2 < a < 3$ gilt möglicherweise $1 - ax(k) \leq -1$ für manche $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $|x(k) - (1 - \frac{1}{a})|$ nicht unbedingt monoton fällt, $k \rightarrow \infty$. Hier hilft eine weitere Fallunterscheidung zur Lage von $x(0) \in (0, 1)$:

• Falls $x(0) \in \{\frac{1}{a}, z_2\}$, so folgt $x(1) = z_2$ und damit $x(k) = z_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$, siehe oben.

• Falls $x(0) \in (\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a})$, betrachte das Polynom 3. Grades

$$g(z) := (1 - az)(1 - af(z)) = (1 - az)(1 - a^2z(1 - z)),$$

denn wir wollen gleich den Betrag von $(1 - ax(0))(1 - ax(1)) = g(x(0))$ nach oben abschätzen. g hat wegen $2 < a < 3$ die drei reellen Nullstellen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a^2}}$. Dabei gilt wegen $a > 2$ die Abschätzung $\frac{2}{a^2} < \frac{1}{a}$ und somit $(\frac{1}{2} - \frac{1}{a})^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{a^2}$, so dass $0 < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a^2}} < \frac{1}{a}$.

Analog erhält man $z_2 = 1 - \frac{1}{a} < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a^2}}$. Auf $(\frac{1}{a}, z_2)$ hat g somit keinen Vorzeichenwechsel, $g(z) > 0$ für alle $z \in (\frac{1}{a}, z_2)$. g ist auf $(\frac{1}{a}, z_2)$ streng monoton wachsend. Denn

$$g'(z) = -a(3a^2x^2 - 2(a^2 + a)x + a + 1),$$

eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen $\frac{1}{3} \frac{a+1}{a} \pm \sqrt{\frac{(a+1)^2}{9a^2} - \frac{a+1}{3a^2}}$. Beide liegen außerhalb von $(\frac{1}{a}, z_2)$. Denn wegen $a > 2$ ist $1 - \frac{2}{a} > 0$ und $\frac{(a+1)^2}{9a^2} - \frac{a+1}{3a^2} > 0$, so dass einerseits

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{a+1}{a} - \sqrt{\frac{(a+1)^2}{9a^2} - \frac{a+1}{3a^2}} < \frac{1}{a} &\Leftrightarrow \frac{1}{3}(1 - \frac{2}{a}) < \sqrt{\frac{(a+1)^2}{9a^2} - \frac{a+1}{3a^2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{9}(1 - \frac{2}{a})^2 < \frac{(a+1)^2}{9a^2} - \frac{a+1}{3a^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{9}(1 - \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}) < \frac{1}{9a^2}((a+1)^2 - 3(a+1)) \\ &\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 < a^2 - a - 2 \\ &\Leftrightarrow 3a > 6, \end{aligned}$$

was wegen $a > 2$ richtig ist. Andererseits gilt $1 - 2a < 0$, so dass

$$\sqrt{\frac{(a+1)^2}{9a^2} - \frac{a+1}{3a^2}} > 0 > \frac{2}{3}(1 - 2a) = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{3} \frac{a+1}{a},$$

so dass $z_2 < \frac{1}{3} \frac{a+1}{a} + \sqrt{\frac{(a+1)^2}{9a^2} - \frac{a+1}{3a^2}}$. Insgesamt ergibt dies $g'(z) > 0$ für alle $z \in (\frac{1}{a}, z_2)$, also kann man abschätzen

$$\sup_{z \in (\frac{1}{a}, z_2)} |g(z)| = \sup_{z \in (\frac{1}{a}, z_2)} g(z) \leq g(z_2) = (2 - a)^2 < 1,$$

denn $a < 3$. Es folgt

$$(1 - ax(0))(1 - ax(1)) = g(x(0)) < (2 - a)^2 < 1.$$

Mit der Darstellung

$$\frac{x(k+2) - (1 - \frac{1}{a})}{x(k) - (1 - \frac{1}{a})} = (1 - ax(k))(1 - ax(k+1)), \quad \text{für alle } k = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

ergibt das $|x(2) - (1 - \frac{1}{a})| < |x(0) - (1 - \frac{1}{a})|$ und somit $x(2) \in (\frac{1}{a}, \frac{3}{4}]$. Mit Induktion erhalten wir $x(2k) \in (\frac{1}{a}, \frac{3}{4}]$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $|x(2k) - (1 - \frac{1}{a})|$ fällt streng monoton und damit wie im Fall $a < 2$ $x(2k) \rightarrow 1 - \frac{1}{a}$, $k \rightarrow \infty$. Mit Hilfe von (2.4) rechnen wir daher für die ungeraden Iterierten

$$|x(2k+1) - (1 - \frac{1}{a})| = |x(2k) - (1 - \frac{1}{a})| |1 - ax(2k)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

also insgesamt $x(k) \rightarrow 1 - \frac{1}{a}$, $k \rightarrow \infty$.

Definition 2.5. $x \in \mathcal{Z}$ heißt rückwärts-asymptotisch zu einem p -periodischen Punkt $\hat{x} \in \text{Per}(f)$, wenn Urbilder $x(k) \in \mathcal{Z}$ existieren mit $x(0) = x$ und $x(k) = f(x(k-1))$ für $k = 0, -1, -2, \dots$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} x(kp) = \hat{x}. \quad (2.6)$$

Die Menge aller zu $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ rückwärts-asymptotischen Punkte heißt instabile Menge von \hat{x} ,

$$W^-(\hat{x}) := \left\{ x \in \mathcal{Z} : x(0) = x, x(k) = f(x(k-1)), \lim_{k \rightarrow -\infty} x(kp) = \hat{x} \right\}. \quad (2.7)$$

$\hat{x} \in \text{Per}(f)$ heißt abstoßend, wenn eine offene Umgebung $U \ni \hat{x}$ existiert mit $U \subset W^-(\hat{x})$.

Die Umgebung U des abstoßenden Punktes wird also nach endlich vielen Iterationen verlassen, aber möglicherweise später nochmals besucht.

Beispiel 2.6. Betrachte die diskrete logistische Gleichung 1.8 mit $1 < a \leq 4$ und den Fixpunkt $\hat{x} = 0 \in \text{Fix}(f)$. Wir behaupten, dass

$$W^-(0) = \begin{cases} [0, 1 - \frac{1}{a}) & , 1 < a \leq 2 \\ [0, \frac{a}{4}] & , 2 < a \leq 4 \end{cases},$$

d.h. insbesondere ist $\hat{x} = 0$ abstoßend.

- Im Fall $1 < a \leq 2$ haben wir schon in Beispiel 2.4 gesehen, dass das dynamische System $x \mapsto f(x) := ax(1-x)$ jeden Startwert aus einer Nullumgebung streng monoton wachsend zum Fixpunkt $z_2 := 1 - \frac{1}{a}$ iteriert. Größere Werte als z_2 werden dabei nicht angenommen, zudem gilt $f^{-1}(z_2) = \{z_2, \frac{1}{a}\}$, mit $\frac{1}{a} \geq z_2$ wegen $a \leq 2$, d.h. z_2 wird durch die Iteration auch nicht angenommen. Es folgt $W^-(0) \subset [0, z_2)$.

Für die umgekehrte Inklusion betrachte ein $x \in [0, z_2)$. Falls $x = 0$, wähle die konstante Folge $x(k) := 0$ für alle $k \leq 0$, welche $x(k) = f(x(k-1))$ und $x(k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow -\infty$ erfüllt. Falls $0 < x < z_2$, wähle $x(0) := x$ und $x(k)$ induktiv über die Gleichung

$$x(k-1) := \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x(k)}{a}}, \quad k = 0, -1, \dots$$

Dann ist $x(k-1)$ wohldefiniert und echt kleiner als $x(k)$. Denn angenommen, es gelte $0 < x_k < z_2 \leq \frac{a}{4}$. Dann folgt $\frac{1}{4} - \frac{x(k)}{a} \in [0, \frac{1}{4})$, also $x(k-1) > 0$, und $x(k-1)$ ist die kleinste reelle Lösung von

$$az^2 - az + x(k) = 0 \Leftrightarrow x(k) = az(1-z) = f(z).$$

Für die strenge Monotonie betrachtet man die Äquivalenz

$$\begin{aligned} x(k-1) < x(k) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x(k)}{a}} < x(k) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - x(k) < \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x(k)}{a}}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{4} - \frac{x(k)}{a} \geq 0$ ist die Wurzel reell und nichtnegativ, und es ist $x(k) < z_2 \leq \frac{1}{2}$. Also ist $x(k-1) < x(k)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - x(k)\right)^2 < \frac{1}{4} - \frac{x(k)}{a} &\Leftrightarrow \frac{1}{4} - x(k) + x(k)^2 < \frac{1}{4} - \frac{x(k)}{a} \\ &\Leftrightarrow x(k)(ax(k) + 1 - a) < 0, \end{aligned}$$

was wegen $0 < x(k) < z_2$, also $ax(k) + 1 - a < 0$, richtig ist. Aus der strengen Monotonie von $x(k)$ folgt schon die Konvergenz gegen 0. Denn ein Grenzwert existiert durch die Beschränktheit $x(k) > 0$, und der Grenzwert muss ein Fixpunkt von f sein. Da $x(k) < x(0) < z_2$ für alle $k \leq -1$, ergibt sich $x(k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow -\infty$, und damit $W^-(0) = [0, z_2)$.

- Im Fall $2 < a \leq 4$ argumentiert man ähnlich. Hier ist $W^-(0) \subset [0, \frac{a}{4}]$ alleine auf Grund der Tatsache, dass dies gerade der Bildbereich von f ist. Für die umgekehrte Inklusion betrachte o.B.d.A. $0 < x \leq \frac{a}{4}$ und wieder $x(0) := x$ sowie

$$x(k-1) := \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x(k)}{a}}, \quad k = 0, -1, \dots$$

Wie oben überlegt man sich zunächst, dass für ein gegebenes $x(k) \in (0, \frac{a}{4}]$ die Wurzel in $[0, \frac{1}{2})$ liegt und somit $x(k-1) > 0$ gilt. Auch hier ist $x(k-1) < x(k)$. Denn entweder gilt $x(k) > \frac{1}{2} \geq x(k-1)$, oder aus $x(k) \leq \frac{1}{2} < z_2$ folgt $ax(k) + 1 - a < az_2 + 1 - a = 0$, siehe oben. Aus der strengen Monotonie von $x(k)$ folgt wieder die Konvergenz, da der Fixpunkt $z_2 > \frac{1}{2}$ spätestens bei der ersten Iterierten $x(1)$ unterschritten wird.

Attraktivität und Abstoßung periodischer Punkte $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ kann man an Eigenschaften der Jacobimatrix $(f^p)'$ der p -fachen Iterationsfunktion $(f^p)' : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ im Punkt \hat{x} ablesen.

Satz 2.7. Sei $f \in C^1(U, U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist ein p -periodischer Punkt $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ attraktiv, wenn alle Eigenwerte von $(f^p)'(\hat{x})$ Betrag kleiner als Eins haben, und abstoßend, wenn alle Eigenwerte von $(f^p)'(\hat{x})$ Betrag größer als Eins haben.

Beweis: Im ersten Fall gibt es eine induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$ mit $\|(f^p)'(\hat{x})\| < 1$ und somit $\|(f^p)'(x)\| \leq 1 - \epsilon$, $\epsilon > 0$, für alle x aus einer offenen Umgebung von \hat{x} . Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass f^p lokal kontraktiv ist, d.h. \hat{x} ist attraktiv.

Der zweite Fall kann auf den ersten zurückgeführt werden, indem man in einer Umgebung von \hat{x} die lokale Inverse $(f^p)^{-1}$ von f^p betrachtet. Diese existiert, denn $(f^p)'(\hat{x})$ ist invertierbar, so dass der Satz von der inversen Abbildung anwendbar ist. \square

Satz 2.8. Seien f stetig und $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ p -periodisch sowie attraktiv bzw. abstoßend. Dann sind auch alle anderen Punkte aus dem Orbit $\gamma(\hat{x}) = \{\hat{x}, f(\hat{x}), \dots, f^{p-1}(\hat{x})\}$ attraktiv bzw. abstoßend, d.h. man kann komplette periodische Orbits auch als attraktiv bzw. abstoßend bezeichnen.

Beweis: Sei $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ p -periodisch und attraktiv. Nach Definition existiert eine offene Umgebung $U \ni \hat{x}$ mit $f^{kp}(x) \rightarrow \hat{x}$, $k \rightarrow \infty$, für alle $x \in U$. Für jedes $1 \leq m \leq p-1$ ist das Urbild $V := (f^{p-m})^{-1}(U)$ eine offene Menge (da f^{p-m} stetig), die $f^m(\hat{x})$ enthält wegen $f^{p-m}(f^m(\hat{x})) = f^p(\hat{x}) = \hat{x}$. Es folgt wegen der Stetigkeit von f^m für jedes $z \in V$

$$f^{kp}(z) = f^{(k-1)p+m}(\underbrace{f^{p-m}(z)}_{=:x \in U}) = f^m(f^{(k-1)p}(x)) \rightarrow f^m(\hat{x}), \quad k \rightarrow \infty,$$

d.h. $f^m(\hat{x})$ ist attraktiv.

Den abstoßenden Fall beweist man analog: sei $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ p -periodisch und abstoßend. Nach Definition existieren eine offene Umgebung $U \ni \hat{x}$ sowie für jedes $x \in U$ Urbilder $x(k)$, $k = 0, -1, \dots$ mit $x(0) = x$, $x(k) = f(x(k-1))$ und $x(kp) \rightarrow \hat{x}$ für $k \rightarrow -\infty$. Betrachte für jedes feste $1 \leq m \leq p-1$ die offene Menge $V := (f^{p-m})^{-1}(U)$, welche wie oben $f^m(\hat{x})$ enthält wegen $f^{p-m}(f^m(\hat{x})) = f^p(\hat{x}) = \hat{x}$. Für jedes $z \in V$ setze $x := f^{p-m}(z) \in U$. Nach Voraussetzung existieren $x(k) \in U$ mit $x(0) = x$, $x(k) = f(x(k-1))$ für alle $k = 0, -1, \dots$ und $x(kp) \rightarrow \hat{x}$ für $k \rightarrow -\infty$. Setze $z(k) := f^m(x(k))$ für alle $k = 0, -1, \dots$, so dass $z(0) = f^m(x(0)) = f^m(x)$ und

$$z(k) = f^m(f(x(k-1))) = f^{m+1}(x(k-1)) = f(z(k-1)), \quad \text{für alle } k = 0, -1, \dots$$

Die Stetigkeit von f^m liefert, dass

$$z(kp) = f^m(x(kp)) \rightarrow f^m(\hat{x}), \quad k \rightarrow -\infty,$$

d.h. $f^m(\hat{x})$ ist abstoßend. \square

Definition 2.9. Ein p -periodischer Punkt $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ heißt stabil, wenn für jede offene Umgebung $V \ni \hat{x}$ eine offene Umgebung $U \ni \hat{x}$ existiert, so dass $f^{kp}(x) \in V$ für alle $x \in U$ und $k \in \mathbb{N}$. \hat{x} heißt asymptotisch stabil, wenn \hat{x} stabil und attraktiv ist.

Satz 2.10. Ein periodischer Punkt $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ ist genau dann stabil, wenn alle Punkte in seinem Orbit $\gamma(\hat{x}) \subset \text{Per}(f)$ stabil sind.

Beweis: Analog Beweis zu Satz 2.8. □

Beispiel 2.11. Betrachte die diskrete logistische Gleichung (1.8) für $3 < a < 1 + \sqrt{6}$, mit $f(x) = ax(1 - x)$. Wie schon in Beispiel 1.4 andiskutiert, besitzt

$$f^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f^2(x) = a^2x(1 - x)(1 - ax(1 - x))$$

die Fixpunkte $z_{3/4} = \frac{1}{2a}(a+1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3})$, welche 2-periodisch für f sind mit $f(z_3) = z_4$, $f(z_4) = z_3$. Die periodischen Punkte $z_{3/4}$ und damit ihr periodischer Orbit $\{z_3, z_4\}$ sind stabil, denn sie sind stabil als Fixpunkte von f^2 : aus der Kettenregel $(f^2)'(x) = f'(f(x))f'(x)$ folgt

$$\begin{aligned} (f^2)'(z_{3/4}) &= f'(z_{4/3})f'(z_{3/4}) \\ &= a^2(1 - 2z_{4/3})(1 - 2z_{3/4}) \\ &= a^2\left(1 - \frac{1}{a}(a+1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3})\right)\left(1 - \frac{1}{a}(a+1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3})\right) \\ &= (1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3})(1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}) \\ &= 4 - a^2 + 2a, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |(f^2)'(z_{3/4})| &= |4 - a^2 + 2a| < 1 \Leftrightarrow -1 < 4 - a^2 + 2a < 1 \\ &\Leftrightarrow 4 < (a - 1)^2 < 6 \\ &\Leftrightarrow 3 < a < 1 + \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Für $a > 1 + \sqrt{6}$ existiert der 2-periodische Orbit $\{z_3, z_4\}$ natürlich immer noch, allerdings ist er dann instabil — sogar abstoßend nach Satz 2.8, denn es gilt $|(f^2)'(z_{3,4})| > 1$.

Bei einem diskreten dynamischen System lässt sich das Verhalten bei Störung eines Fixpunktes wie folgt quantifizieren.

Satz 2.12 (Störungssatz für Fixpunkte diskreter dynamischer Systeme). Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in einer offenen Umgebung U eines Fixpunkts $\hat{x} \in \text{Fix}(f)$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist der Fluss des Systems $\varphi(k, x) = x(k) = f^k(x(0))$, $x(0) = x$ nach x differenzierbar und für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $C > 0$, so dass für genügend kleine $h \in \mathbb{R}^n$ und $A := f'(\hat{x})$

$$\|\varphi(k, \hat{x} + h) - \varphi(k, \hat{x}) - A^k h\|_2 \leq C \|h\|_2^2, \quad (2.8)$$

d.h. $\frac{\partial}{\partial x} \varphi(k, \hat{x}) = A^k$.

Beweis: Wegen $\hat{x} \in \text{Fix}(f)$ gilt $\varphi(k, \hat{x}) = \hat{x}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Betrachte eine in U liegende abgeschlossene Kugel $K_r(\hat{x}) = \{x \in U : \|x - \hat{x}\|_2 \leq r\}$ mit Radius $r > 0$. Da f zweimal stetig differenzierbar, ist $q := \max_{x \in K_r(\hat{x})} \|f'(x)\|_2$ endlich, insbesondere gilt $\|A\|_2 \leq q$. In $K_r(\hat{x})$ erfüllt f die Lipschitzbedingung

$$\|f(x) - f(y)\|_2 = \left\| \int_0^1 f'(y + t(x - y))(x - y) dt \right\|_2 \leq q \|x - y\|_2, \quad \text{für alle } x, y \in K_r(\hat{x}).$$

Wir zeigen (2.8) durch Induktion über k . Da f zweimal stetig differenzierbar, gilt für ein $C > 0$ die Taylorapproximation

$$\|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\|_2 \leq C \|y - x\|_2^2, \quad \text{für alle } x, y \in K_r(\hat{x}).$$

Dabei hängt C vom Radius r ab. Es folgt für $k = 1$ für jedes h mit $\hat{x} + h \in K_r(\hat{x})$

$$\begin{aligned} \|\varphi(1, \hat{x} + h) - \varphi(1, \hat{x}) - Ah\|_2 &= \|f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) - f'(\hat{x})h\|_2 \\ &\leq C \|h\|_2^2. \end{aligned}$$

Für den Induktionsschritt überlegen wir uns, dass für jedes feste $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq k$ und $h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \|f^m(\hat{x} + h) - \hat{x}\|_2 &= \|f^m(\hat{x} + h) - f^m(\hat{x})\|_2 \\ &\leq q \|f^{m-1}(\hat{x} + h) - f^{m-1}(\hat{x})\|_2 \\ &\leq q^2 \|f^{m-2}(\hat{x} + h) - f^{m-2}(\hat{x})\|_2 \\ &\vdots \\ &\leq q^m \|h\|_2 \\ &\leq \max\{1, q^k\} \|h\|_2. \end{aligned}$$

Für genügend kleines h erhalten wir $\|f^m(\hat{x} + h) - \hat{x}\|_2 \leq r$ für alle $1 \leq m \leq k$, d.h. $f^m(\hat{x} + h) \in K_r(\hat{x})$ für kleine h , so dass die Taylorapproximation anwendbar ist. Wir erhalten unter mehrfacher Ausnutzung von $f(\hat{x}) = \hat{x}$

$$\begin{aligned} \|f^k(\hat{x} + h) - \hat{x} - A^k h\|_2 &= \|f(f^{k-1}(\hat{x} + h)) - f(\hat{x}) - A^k h\|_2 \\ &\leq \left\| f(f^{k-1}(\hat{x} + h)) - f(\hat{x}) - A(f^{k-1}(\hat{x} + h) - \hat{x}) \right\|_2 \\ &\quad + \left\| A(f^{k-1}(\hat{x} + h) - \hat{x}) - A^k h \right\|_2 \\ &\leq C \|f^{k-1}(\hat{x} + h) - \hat{x}\|_2^2 + q \|f^{k-1}(\hat{x} + h) - \hat{x} - A^{k-1} h\|_2 \\ &\leq C q^{2k-2} \|h\|_2^2 + q \|f^{k-1}(\hat{x} + h) - \hat{x} - A^{k-1} h\|_2, \end{aligned}$$

so dass induktiv

$$\|f^k(\hat{x} + h) - \hat{x} - A^k h\|_2 \leq C \sum_{j=k+1}^{2k-2} q^j \|h\|_2^2.$$

Dabei ist die Summe für $q < 1$ in k gleichmäßig beschränkt (geometrische Reihe), für $q \geq 1$ wächst die Konstante in (2.8) ggf. mit k . \square

Störungssätze für periodische Punkte $\hat{x} \in \text{Per}(f)$ lassen sich analog beweisen.

Beispiel 2.13. Zum Abschluss klassifizieren wir noch die Dynamik im Fall einer linearen Iterationsfunktion $f(x) = Ax$ für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Falls A keinen Eigenwert 1 hat, gilt $\text{Fix}(f) = \{0\}$, ansonsten ist $\text{Fix}(f) = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : A\hat{x} = \hat{x}\}$ der komplette Eigenraum zum Eigenwert 1 (Übung).

Da A reell ist, sind die beiden Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ entweder reell oder komplex konjugiert, $\mathbb{R} \not\ni \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ mit $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

- (i) Falls beide Eigenwerte λ_1, λ_2 reell sind und A reell diagonalisierbar, d.h. die Eigenwerte sind geometrisch einfach,

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^{-1},$$

wobei $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ in seinen Spalten die beiden Eigenvektoren v_1, v_2 zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 enthält, gilt

$$x(k) = f^k(x) = A^k x = V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} V^{-1} x, \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Falls $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$, konvergiert $x(k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Der attraktive Fixpunkt $\hat{x} = 0$ heißt Senke. Je nach Betrag der Eigenwerte sind die Trajektorien linear oder gekrümmt und können bei negativem Vorzeichen auch oszillieren, vergleiche Abbildung 2.1. Falls $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$, divergiert $\|x(k)\|_2 \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Der abstoßende Fixpunkt 0 heißt Quelle, zu Trajektorien siehe Abbildung 2.2. Für $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ ergibt sich ein sogenannter Sattelpunkt bei $\hat{x} = 0$. Er ist weder anziehend, abstoßend noch stabil, da sich die Projektionen der Iterierten auf die beiden Eigenräume komplementär verhalten, siehe Abbildung 2.3. Hat schließlich mindestens einer der reellen Eigenwerte Betrag 1, laufen die Iterierten entlang von Geraden. Sie oszillieren, falls einer der Eigenwerte gleich -1 ist, siehe Abbildung 2.4.

- (ii) Ist der reelle Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2$ doppelt, d.h. ist A ähnlich zu einem Jordanblock

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} V^{-1},$$

wobei V in seiner ersten Spalte den Eigenvektor v_1 zu λ_1 enthält und in seiner zweiten Spalte den Hauptvektor v_2 mit $(A - \lambda_1 I)v_2 = v_1$, gilt

$$x(k) = f^k(x) = A^k x = V \begin{pmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} \\ 0 & \lambda_1^k \end{pmatrix} V^{-1}, \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Für $|\lambda_1| < 1$ konvergiert $x(k) \rightarrow 0$, für $|\lambda_1| \geq 1$ divergiert $\|x(k)\|_2 \rightarrow \infty$, und es ergeben sich ganz ähnliche Trajektorien wie im ersten Fall, siehe Abbildung 2.5.

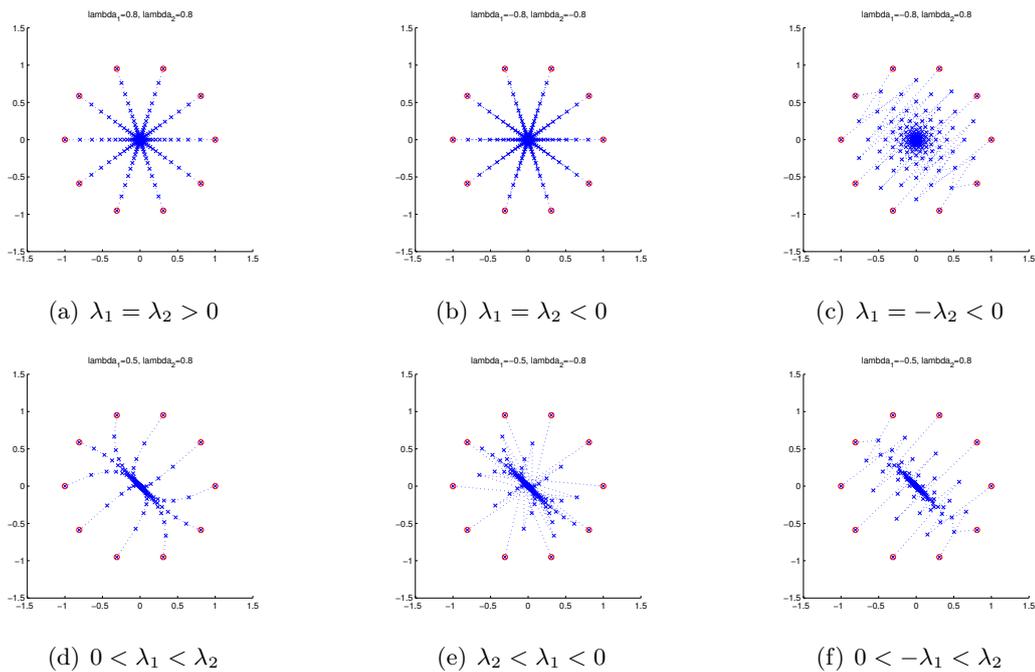


Abbildung 2.1: Typische Orbits beim diskreten dynamischen System $x(k+1) = Ax(k)$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: reell-diagonalisierbarer Fall, $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ (Senke)

(iii) Sind die Eigenwerte $\lambda_1 = a + ib = \bar{\lambda}_2 \notin \mathbb{R}$ komplex konjugiert, gilt

$$A = V \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} V^{-1},$$

wobei die Spalten von X Eigenvektoren zu λ_1 und $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ enthalten (komplexe Jordan-Normalform). Hier können nur die Fälle $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ (stabiler Strudel), $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ (instabiler Strudel) und $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ (Wirbelzentrum) vorkommen, siehe Abbildung 2.6.

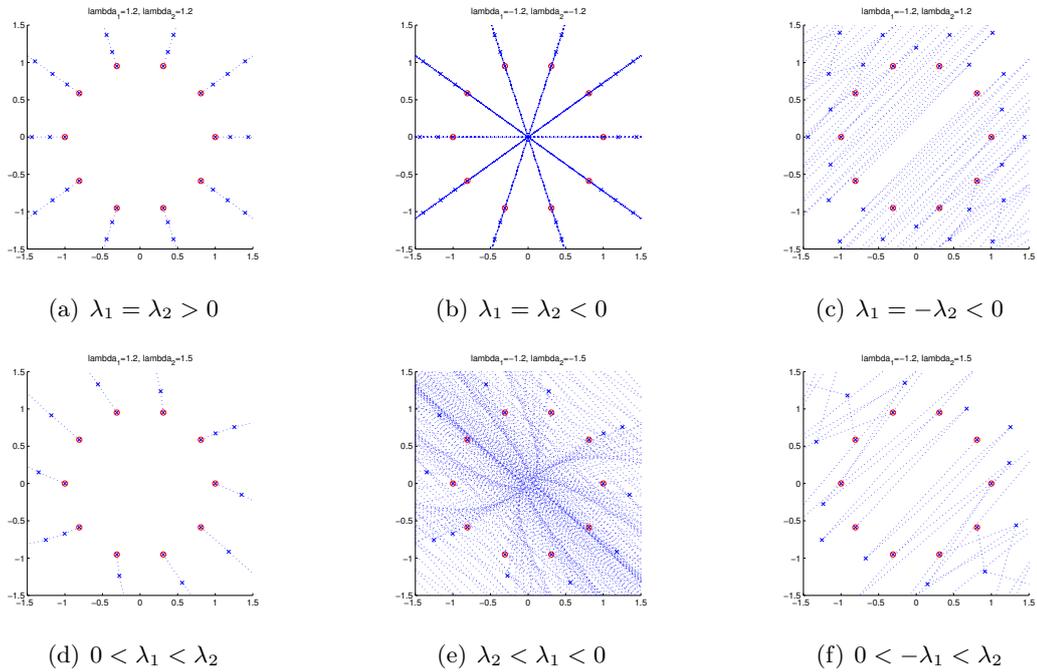


Abbildung 2.2: Typische Orbits beim diskreten dynamischen System $x(k+1) = Ax(k)$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: reell-diagonalisierbarer Fall, $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$ (Quelle)

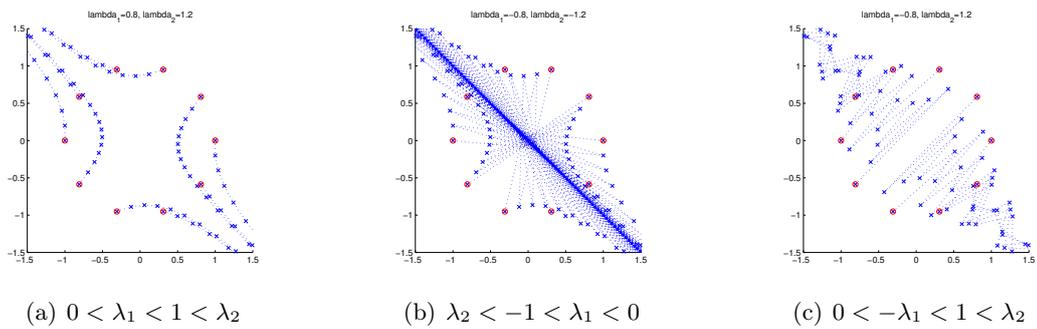


Abbildung 2.3: Typische Orbits beim diskreten dynamischen System $x(k+1) = Ax(k)$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: reell-diagonalisierbarer Fall, $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ (Sattelpunkt)

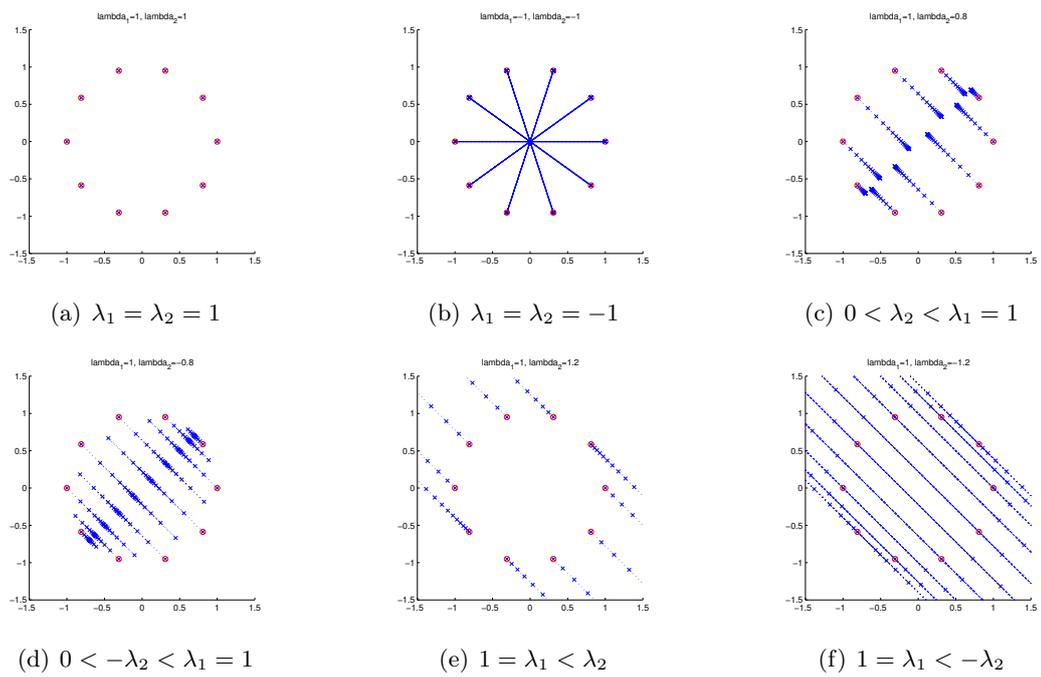


Abbildung 2.4: Typische Orbits beim diskreten dynamischen System $x(k+1) = Ax(k)$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: reell-diagonalisierbarer Fall, $|\lambda_1| = 1$

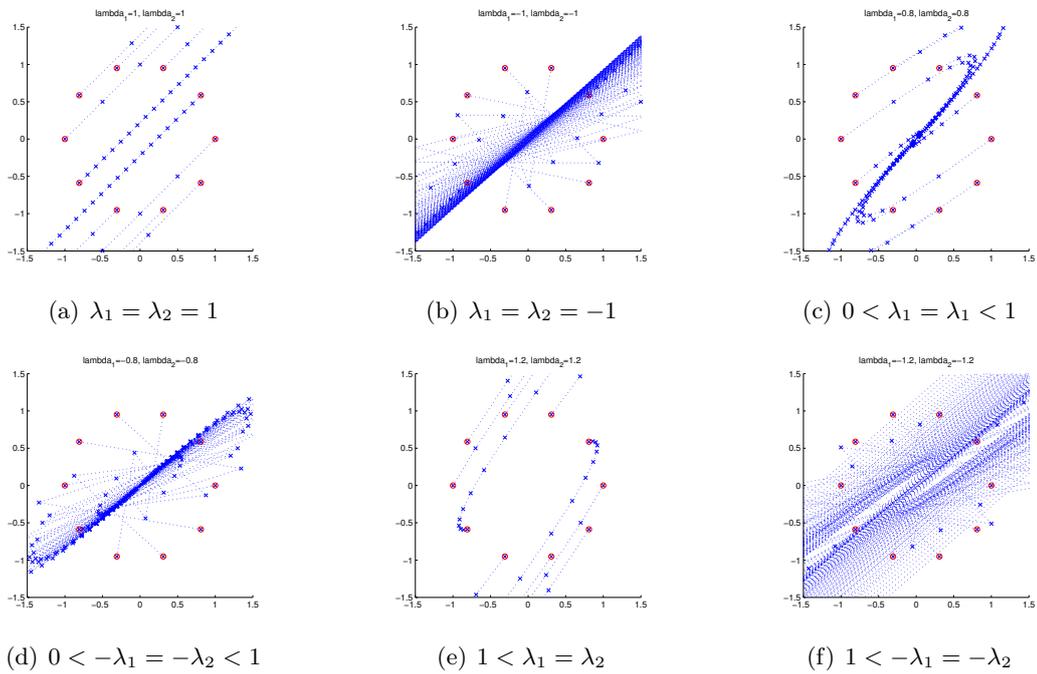


Abbildung 2.5: Typische Orbits beim diskreten dynamischen System $x(k+1) = Ax(k)$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: reeller, nicht-diagonalisierbarer Fall (Jordanblock), $\lambda_1 = \lambda_2$

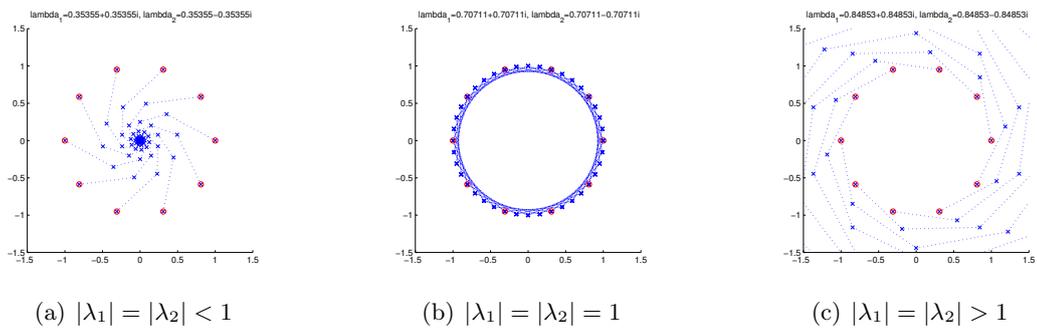


Abbildung 2.6: Typische Orbits beim diskreten dynamischen System $x(k+1) = Ax(k)$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: komplex konjugierter Fall $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

3 Lösungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wir befassen uns jetzt mit der Lösungstheorie von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \quad (3.1)$$

Dabei sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig für eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $(t_0, x_0) \in D$.

3.1 Eindeutigkeit von Lösungen

Die Eindeutigkeit von Lösungen zu (3.1) kann garantiert werden, wenn f zumindest lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments ist.

Definition 3.1. $f : \mathbb{R}^{n+1} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments x , falls zu jedem $(t_1, x_1) \in D$ $\epsilon, r > 0$ existieren, so dass $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon] \times K_r(x_1) \subset D$, wobei $K_r(x_1) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_1\|_2 \leq r\}$, und falls eine Lipschitz-Konstante $L = L(t_1, x_1) \geq 0$ existiert mit

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2, \quad \text{für alle } (t, x), (t, y) \in [t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon] \times K_r(x_1). \quad (3.2)$$

$f : \mathbb{R}^{n+1} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt global Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments x , wenn die Lipschitz-Konstante L in (3.2) unabhängig von $(t_1, x_1) \in D$ ist, d.h.

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2, \quad \text{für alle } (t, x), (t, y) \in D. \quad (3.3)$$

Lemma 3.2. Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bezüglich x , und es sei $K \subset D$ kompakt. Dann ist die Einschränkung $f|_K : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ global Lipschitz-stetig bezüglich x .

Beweis: Da f lokal Lipschitz-stetig bezüglich x , existieren zu jedem $(t_1, x_1) \in D$ offene Umgebungen der Form

$$(t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon) \times \overset{\circ}{K}_r(x_1),$$

so dass f darin Lipschitz-stetig bezüglich x mit Lipschitz-Konstanten $L = L(t_1, x_1) \geq 0$. Da $K \subset D$ kompakt ist, kann man K mit endlich vielen dieser offenen Umgebungen überdecken, so dass $f|_K$ global Lipschitz-stetig in x ist mit Lipschitz-Konstanten $L := \max_{(t_1, x_1) \in K} L(t_1, x_1) \geq 0$. □

Satz 3.3 (Eindeutigkeit). Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich x (nicht notwendigerweise stetig in t). Dann hat (3.1) höchstens eine Lösung.

Beweis: Seien $u, v \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ zwei Lösungen von (3.1) mit $(t, u(t)), (t, v(t)) \in D$ für alle $t \in [t_0, T]$, wobei $t_0, T \in \mathbb{R}$. Betrachte zunächst den Fall $t_0 \leq T$. Die Menge

$$K := \{(t, u(t)), (t, v(t)) \in D : t \in [t_0, T]\}$$

ist kompakt, denn sie ist eine Vereinigung zweier kompakter Mengen. Wir erhalten mit Lemma 3.2, dass $f|_K : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ global Lipschitz-stetig bezüglich x mit einer Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$. Integration von (3.1) liefert

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds, \quad v(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) \, ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Aus der globalen Lipschitz-Stetigkeit von $f|_K$ folgt für alle $t \in [t_0, T]$

$$\|u(t) - v(t)\|_2 \leq \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_2 \, ds \leq L \int_{t_0}^t \|u(s) - v(s)\|_2 \, ds.$$

Für $L = 0$ wären wir bereits fertig. Falls $L > 0$, rechnen wir für alle $\alpha > 0$ und $t \in [t_0, T]$

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_2 &\leq L \int_{t_0}^t e^{-\alpha s} \|u(s) - v(s)\|_2 e^{\alpha s} \, ds \\ &\leq L \sup_{s \in [t_0, T]} e^{-\alpha s} \|u(s) - v(s)\|_2 \int_{t_0}^t e^{\alpha s} \, ds \\ &= \frac{L}{\alpha} e^{\alpha t} \sup_{s \in [t_0, T]} e^{-\alpha s} \|u(s) - v(s)\|_2, \end{aligned}$$

also mit $\alpha := 2L > 0$ nach Division durch $e^{\alpha t}$ für alle $t \in [t_0, T]$

$$0 \leq \sup_{t \in [t_0, T]} e^{-\alpha t} \|u(t) - v(t)\|_2 \leq \frac{1}{2} \sup_{s \in [t_0, T]} e^{-\alpha s} \|u(s) - v(s)\|_2,$$

was nur für

$$\sup_{t \in [t_0, T]} e^{-\alpha t} \|u(t) - v(t)\|_2 = 0,$$

also für $u - v \equiv 0$ möglich ist.

Falls $T \leq t_0$, betrachten wir das gespiegelte Anfangswertproblem

$$y'(t) = g(t, y(t)) := -f(-t, y(t)), \quad y(-t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [-t_0, -T],$$

mit Lösungen $y(t) = u(-t)$, $z(t) = v(-t)$. Da g ebenfalls lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments ist, folgt wie oben $y(t) = z(t)$ für alle $t \in [-t_0, -T]$, also $u \equiv v$. \square

Beispiel 3.4. Die lokale Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite ist notwendig für eine eindeutige Lösung von (3.1). So hat das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 3x(t)^{2/3}, \quad x(0) = 0, \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

die beiden Lösungen $x(t) \equiv 0$ und $x(t) = t^3$. Die rechte Seite $f(t, x) = 3x^{2/3}$ ist zwar stetig in x , aber in keiner Nullumgebung $[0, \epsilon]$ Lipschitz-stetig.

Bemerkung 3.5. Hinreichend für lokale Lipschitz-Stetigkeit von f bezüglich x ist stetige Differenzierbarkeit nach x . Denn für $(t, x), (t, y) \in D$ rechnet man

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\|_2 &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} f(t, sx + (1-s)y) ds \right\|_2 \\ &= \left\| \int_0^1 f_x(t, sx + (1-s)y)(x-y) ds \right\|_2 \\ &\leq \max_{s \in [0,1]} \left\| f_x(t, sx + (1-s)y) \right\|_2 \|x-y\|_2, \end{aligned}$$

wobei der Vorfaktor für alle $(t, x), (t, y)$ aus einem Kompaktum $K \subset D$ wegen der stetigen Differenzierbarkeit von f nach x eine obere Schranke $L = L(K) \geq 0$ besitzt.

3.2 Existenz von Lösungen

Die Existenz von Lösungen eines Anfangswertproblems (3.1) zeigt man meist über Fixpunktargumente, wie im folgenden Satz von Picard und Lindelöf.

Satz 3.6 (Existenzsatz von Picard/Lindelöf). Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig sowie lokal Lipschitz-stetig in x . Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $x \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ mit $(t, x(t)) \in D$ für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, und x löst (3.1) in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Beweis: Wir zeigen zunächst Existenz einer Lösung x in $[t_0, t_0 + \delta]$ für ein $\delta > 0$. Wegen der Stetigkeit von f ist (3.1) auf $[t_0, t_0 + \delta]$ äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + \delta]. \quad (3.4)$$

Wir wählen $\delta_0, r > 0$ so, dass noch $[t_0, t_0 + \delta_0] \times K_r(x_0) \subset D$ gilt. Für jedes $0 < \delta \leq \delta_0$ betrachte die Menge

$$M := \{x \in C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n) : x(t_0) = x_0, x(t) \in K_r(x_0) \text{ für } t \in [t_0, t_0 + \delta]\},$$

ferner definiere den Operator

$$T : M \rightarrow C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n), \quad Tx(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

Für jedes $x \in M$ gilt $Tx(t_0) = x_0$ und für $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ die Abschätzung

$$\|Tx(t) - x_0\|_2 = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \right\|_2 \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\|_2 \, ds \leq \mu\delta,$$

wobei $\mu := \max \{\|f(s, y)\|_2 : (s, y) \in [t_0, t_0 + \delta] \times K_r(x_0)\}$ nicht von δ abhängt. Wir können also δ so klein wählen, dass noch $\|Tx(t) - x_0\|_2 \leq r$ für alle $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, z.B. $\delta \leq \delta_1 := \min\{r/\mu, \delta_0\}$. O.B.d.A. gilt hier $\mu > 0$, denn sonst wählen wir einfach $\delta_1 := \delta_0$. Folglich ist $T : M \rightarrow M$ eine Selbstabbildung von M . Für jedes $\alpha > 0$ und $0 < \delta \leq \delta_1$ definieren wir auf $C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n) \supset M$ die Norm

$$\|x\| := \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} e^{-\alpha t} \|x(t)\|_2.$$

$C([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ ist bzgl. $\|\cdot\|$ ein Banachraum, denn $\|\cdot\|$ ist wegen $e^{-\alpha(t_0+\delta)} \leq e^{-\alpha t} \leq e^{-\alpha t_0}$ (Details zur Übung). Für $x, y \in M$ und $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ mit $0 < \delta \leq \delta_1$ rechnen wir

$$\begin{aligned} \|Tx(t) - Ty(t)\|_2 &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) \, ds \right\|_2 \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|_2 \, ds. \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.2 folgt, dass f auf der kompakten Menge $[t_0, t_0 + \delta_1] \times K_r(x_0) \subset D$ Lipschitz-stetig ist mit einer Lipschitz-Konstanten $L > 0$. Wir erhalten für jedes $\alpha > 0$ ähnlich wie im Beweis von Satz 3.3 für alle $t \in [t_0, t_0 + \delta]$

$$\begin{aligned} \|Tx(t) - Ty(t)\|_2 &\leq L \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\|_2 \, ds \\ &= L \int_{t_0}^t e^{-\alpha s} \|x(s) - y(s)\|_2 e^{\alpha s} \, ds \\ &\leq L \|x - y\| \int_{t_0}^t e^{\alpha s} \, ds \\ &\leq \frac{L}{\alpha} \|x - y\| e^{\alpha t}, \end{aligned}$$

also $\|Tx - Ty\| \leq \frac{L}{\alpha} \|x - y\|$ für alle $x, y \in M$. Wählt man $\alpha := 2L > 0$, so folgt die Kontraktivität von $T : M \rightarrow M$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$. Da M abgeschlossen ist bzgl. $\|\cdot\|$ (zur Übung), liefert der Fixpunktsatz von Banach die Existenz eines eindeutigen Fixpunkts $\hat{x} \in M$ von T , d.h. $\hat{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \hat{x}(s)) \, ds$ für alle $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, und \hat{x} löst (3.1) auf $[t_0, t_0 + \delta]$.

Die Existenz einer eindeutigen Lösung x auf $[t_0 - \delta, t_0]$ zeigt man wie im Satz 3.3 durch Spiegelung der Zeitrichtung, ggf. mit einem verkleinerten $\delta > 0$. \square

Bemerkung 3.7. Das Existenzintervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ in Satz 3.6 kann im Allgemeinen wesentlich kleiner ausfallen als die Menge aller Zeitpunkte t , an denen f Lipschitz-stetig bzgl. des zweiten Arguments ist. Typisches Beispiel ist der blow up, mit nach endlicher Zeit explodierenden Lösungen: Betrachte für $c > 0$ das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x(t)^2, \quad x(0) = c.$$

Die rechte Seite $f(t, x) = x^2$ ist sogar auf ganz $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Allerdings lässt sich die in einer Nullumgebung $[-\delta, \delta] \ni t$ eindeutige Lösung

$$x(t) = \frac{c}{1 - ct}$$

wegen $x(t) \rightarrow +\infty$ für $t \rightarrow \frac{1}{c}$ nur zu einer C^1 -Funktion auf $(-\infty, \frac{1}{c})$ fortsetzen.

Bei linearen Anfangswertproblemen kann dieser Effekt nicht auftreten:

Satz 3.8 (Existenzsatz für lineare Anfangswertprobleme). Seien $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und betrachte Funktionen $c \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, $A \in C([a, b], \mathbb{R}^{n \times n})$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$x'(t) = A(t)x(t) + c(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.5)$$

eine eindeutige Lösung $x \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $I := [a, b] = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ mit $\delta > 0$, ansonsten kleben wir $[a, b]$ aus endlich vielen solcher Teilintervalle zusammen. Betrachte den Streifen

$$S := I \times \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t, x) := A(t)x + c(t)$ für alle $(t, x) \in S$, stetig und Lipschitz-stetig bzgl. x mit der Lipschitz-Konstanten

$$L := \sup_{t \in I} \|A(t)\|_2,$$

ferner gilt die Abschätzung

$$\|f(t, x)\|_2 \leq L\|x\|_2 + \gamma, \quad \gamma := \sup_{t \in I} \|c(t)\|_2, \quad \text{für alle } (t, x) \in S.$$

Definiere die (vektorwertige) Funktionenfolge

$$x^{(0)}(t) := x_0, \quad x^{(k+1)}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^{(k)}(s)) \, ds, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{für alle } t \in I.$$

Offensichtlich gilt für die Komponenten $x_j^{(k)} \in C(I)$ für alle $1 \leq j \leq n$ und $k \geq 0$. Wir behaupten, dass jede Komponentenfolge $\{x_j^{(k)}\}_{k \geq 0}$ für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig konvergiert, $1 \leq j \leq n$. Hierzu zeigen wir mit Induktion über k , dass

$$\|x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)\|_2 \leq (L\|x_0\|_2 + \gamma) \frac{L^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \text{für alle } k \geq 0, t \in I. \quad (3.6)$$

Sei zunächst $k = 0$. Es gilt wegen $x^{(0)} \equiv x_0$ für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} \|x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)\|_2 &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x^{(0)}(s)) \, ds \right\|_2 \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)x_0 + c(s)\|_2 \, ds \right| \\ &\leq (L\|x_0\|_2 + \gamma)|t - t_0|, \end{aligned}$$

also (3.6) für $k = 0$. Angenommen, (3.6) gelte für k . Man rechnet mit der Lipschitz-Stetigkeit von f und (3.6)

$$\begin{aligned} \|x^{(k+2)}(t) - x^{(k+1)}(t)\|_2 &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x^{(k+1)}(s)) - f(s, x^{(k)}(s))] \, ds \right\|_2 \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(x^{(k+1)}(s) - x^{(k)}(s))\|_2 \, ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|x^{(k+1)}(s) - x^{(k)}(s)\|_2 \, ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t (L\|x_0\|_2 + \gamma) \frac{L^k |s - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \, ds \right| \\ &= (L\|x_0\|_2 + \gamma) \frac{L^{k+1}}{(k+1)!} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^{k+1} \, ds \right| \\ &= (L\|x_0\|_2 + \gamma) \frac{L^{k+1} |t - t_0|^{k+2}}{(k+2)!}, \end{aligned}$$

also (3.6) für $k + 1$.

Aus (3.6) erhalten wir, dass für jedes $t \in I$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)\|_2 &\leq (L\|x_0\|_2 + \gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{L\|x_0\|_2 + \gamma}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1). \end{aligned}$$

Also konvergiert auch

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)) \right\|_2 &\leq \sup_{t \in I} \sum_{k=0}^{\infty} \|x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)\|_2 \\ &\leq \frac{L\|x_0\|_2 + \gamma}{L} \sup_{t \in I} (e^{L|t-t_0|} - 1) \\ &= \frac{L\|x_0\|_2 + \gamma}{L} (e^{L\delta} - 1), \end{aligned}$$

d.h. $\{x_j^{(k)}\}_{k \geq 0}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $x_j \in C(I)$, $1 \leq j \leq n$. Hieraus ergibt sich aus Stetigkeitsgründen, dass die Grenzfunktion $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds, \quad \text{für alle } t \in I$$

löst, d.h. (3.1) auf I . Die Eindeutigkeit von x folgt mit Bemerkung 3.5 und Satz 3.3 aus der stetigen Differenzierbarkeit von f nach x . \square

Zum Schluss dieses Abschnitts diskutieren wir noch die Frage, wie weit man die lokale Lösung x eines Anfangswertproblems (3.1) innerhalb des Definitionsbereichs $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von f maximal fortsetzen kann.

Definition 3.9 (Maximales Existenzintervall). *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $(t_0, x_0) \in D$. Wir setzen*

$$t_+ := \sup \{t \geq t_0 : \exists x \in C^1([t_0, t], \mathbb{R}^n) \text{ mit (3.1) und } (t, x(t)) \in D \text{ für } t \in [t_0, t]\}, \quad (3.7a)$$

$$t_- := \inf \{t \leq t_0 : \exists x \in C^1([t, t_0], \mathbb{R}^n) \text{ mit (3.1) und } (t, x(t)) \in D \text{ für } t \in [t, t_0]\}. \quad (3.7b)$$

Das Intervall (t_-, t_+) heißt maximales Existenzintervall der Lösung.

Nach dem Existenzsatz 3.6 von Picard und Lindelöf gilt $t_- < t_0 < t_+$, sofern f stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments. Welche Fälle für t_+ und die Lösung $x(t)$ für $t \rightarrow t_+$ auftreten können, charakterisiert der folgende Satz.

Satz 3.10 (Fortsetzungssatz). *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. x . Dann existiert eine eindeutige Lösung $x \in C^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^n)$ zu (3.1) mit $(t, x(t)) \in D$ für alle $t \in (t_-, t_+)$, und am rechten Endpunkt t_+ des maximalen Existenzintervalls können nur folgende Fälle auftreten:*

- (i) $t_+ = \infty$, d.h. die Lösung x existiert für alle $t \geq t_0$;
- (ii) $t_0 < t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x(t)), \partial D) = 0$, d.h. der Graph von x kommt dem Rand von D beliebig nahe („Kollaps“);
- (iii) $t_0 < t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x(t)), \partial D) > 0$, $\lim_{t \rightarrow t_+} \|x(t)\|_2 = \infty$, d.h. der Graph von x hat beim endlichen Zeitpunkt $t = t_+$ eine Singularität („blow up“).

Am linken Randpunkt t_- können entsprechend nur die Fälle $t_- = -\infty$, $-\infty < t_- < t_0$ mit Kollaps und $-\infty < t_- < t_0$ mit blow up vorkommen.

Beweis: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $x \in C^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^n)$ wurden schon in Satz 3.6 gezeigt. Falls $t_+ = \infty$, so existiert die Lösung für alle Zeiten $t \geq t_0$ nach Definition von t_+ . Angenommen, es gelte $t_0 < t_+ < \infty$ und weder (i) noch (ii), d.h. es

gelte $\liminf_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((t, x(t)), \partial D) > 0$ und nicht $\lim_{t \rightarrow t_+} \|x(t)\|_2 = \infty$. Dann existiert eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und ein $M > 0$ mit $t_k \nearrow t_+$ für $k \rightarrow \infty$ und

$$\|x(t_k)\|_2 \leq M, \quad \text{dist}((t_k, x(t_k)), \partial D) \geq \frac{1}{M}, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(x(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge, $x(t_{k_j}) \rightarrow x_* \in \mathbb{R}^n$, $j \rightarrow \infty$. Die Teilfolge $(t_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert wie die Gesamtfolge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen t_+ . Wegen

$$\begin{aligned} \text{dist}((t_+, x_*), \partial D) &= \inf_{z \in \partial D} \|(t_+, x_*) - z\|_2 \\ &= \inf_{z \in \partial D} \lim_{j \rightarrow \infty} \|(t_{k_j}, x(t_{k_j})) - z\|_2 \\ &\geq \inf_{z \in \partial D} \lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}((t_{k_j}, x(t_{k_j})), \partial D) \\ &\geq \inf_{z \in \partial D} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \\ &= \frac{1}{M} \end{aligned}$$

liegt (t_+, x_*) im Inneren von D . Wie durch eine geringfügige Modifikation aus dem Beweis von Satz 3.6 ersichtlich (ersetze dort t_0 durch t_{j_k}), existiert ein $\delta > 0$ und ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass (3.1) für alle $j \geq j_0$ die eindeutige Lösung x auf $[t_0, t_{k_j} + \delta]$ besitzt. Wegen $t_{k_j} \rightarrow t_+$ für $j \rightarrow \infty$ gilt $t_{k_j} + \delta > t_+$ für $j \geq j_1 \geq j_0$, im Widerspruch zur Maximalität von t_+ . \square

Beispiel 3.11. (i) Betrachte das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{1}{x(t)^2}, \quad x(0) = 1.$$

Mit Trennung der Variablen (siehe Übung) erhält man das äquivalente Problem

$$\int_0^t 1 \, ds = t = \int_0^t x'(s)x(s)^2 \, ds = \int_1^{x(t)} u^2 \, du = \frac{1}{3}(x(t)^3 - 1),$$

also $x(t) = (3t + 1)^{1/3}$. Diese Funktion ist für alle $t \geq 0$ definiert, also $t_+ = \infty$. Für den linken Randpunkt des maximalen Existenzintervalls erhält man $t_- = -\frac{1}{3}$ mit Kollaps wegen $x(t) \searrow 0$ und $D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

(ii) Den Fall des blow ups haben wir schon in Bemerkung 3.7 gesehen, betrachte

$$x'(t) = x(t)^2, \quad x(0) = c > 0.$$

Die Lösung $x(t) = \frac{c}{1-ct}$ existiert für alle $t \in (-\infty, \frac{1}{c}) =: (t_-, t_+)$, mit $\|x(t)\|_2 \rightarrow \infty$ für $t \nearrow t_+ = \frac{1}{c}$. Für $t \rightarrow -\infty$ bleibt die Lösung dagegen beschränkt.

3.3 Differential- und Integralgleichungen

Im Beweis von Satz 3.3 zur Eindeutigkeit von Lösungen eines Anfangswertproblems (3.1) haben wir eine Integralgleichung der Form $0 \leq \varphi(t) \leq C \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$ für stetiges φ gesehen, speziell für $\varphi(t) = \|u(t) - v(t)\|_2$ mit Lösungen u und v von (3.1), und haben daraus $\varphi \equiv 0$ gefolgert. Wir werden im Folgenden weitere Integralgleichungen kennenlernen, die es erlauben, zum Beispiel die globale Existenz von Lösungen eines Anfangswertproblems zu zeigen sowie deren Vorzeichen für alle Zeiten zu kontrollieren.

Lemma 3.12 (Gronwall). *Seien $\alpha, \beta, \varphi \in C[a, b]$ mit $\beta(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$ sowie*

$$0 \leq \varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\varphi(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [a, b]. \quad (3.8)$$

Dann gilt

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \alpha(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [a, b]. \quad (3.9)$$

Speziell gilt für $\alpha(t) \equiv M$

$$\varphi(t) \leq Me^{\int_a^t \beta(\tau) d\tau}, \quad \text{für alle } t \in [a, b]. \quad (3.10)$$

Beweis: Setze $\psi(t) := \int_a^t \beta(s)\varphi(s) ds$ für alle $t \in [a, b]$. Da β, φ stetig, ist ψ differenzierbar auf $[a, b]$ mit $\psi'(t) = \beta(t)\varphi(t)$. Aus der oberen Abschätzung von $\varphi(t)$ in (3.8) ergibt sich mit $\beta(t) \geq 0$ die Differentialungleichung

$$\psi'(t) = \beta(t)\varphi(t) \leq \beta(t)(\alpha(t) + \psi(t)), \quad \text{für alle } t \in [a, b],$$

also mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \psi(t) \right) &= e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \psi'(t) - \beta(t) e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \psi(t) \\ &= e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} (\psi'(t) - \beta(t)\psi(t)) \\ &\leq \beta(t) e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \alpha(t), \quad \text{für alle } t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Integration von a bis t liefert wegen $\psi(a) = 0$

$$e^{-\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \psi(t) \leq \int_a^t \beta(s) e^{-\int_a^s \beta(\tau) d\tau} \alpha(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [a, b],$$

also

$$\begin{aligned} \psi(t) &\leq e^{\int_a^t \beta(\tau) d\tau} \int_a^t \beta(s) e^{-\int_a^s \beta(\tau) d\tau} \alpha(s) ds \\ &= \int_a^t \beta(s) e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \alpha(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [a, b], \end{aligned}$$

woraus direkt (3.9) wegen $\varphi(t) \leq \alpha(t) + \psi(t)$ folgt.

Im Fall $\alpha(t) \equiv M$ folgt aus (3.9) direkt (3.10), denn

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq M \left(1 + \int_a^t \beta(s) e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} ds \right) \\ &= M \left(1 - \left[e^{\int_s^t \beta(\tau) d\tau} \Big|_{s=a}^t \right] \right) \\ &= M e^{\int_a^t \beta(\tau) d\tau}, \quad \text{für alle } t \in [a, b].\end{aligned}$$

□

Gilt also für $\varphi \in C[t_0, T]$ die Ungleichung $0 \leq \varphi(t) \leq C \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$ wie in Satz 3.3, folgt mit $\alpha(t) \equiv 0$ und $\beta(t) \equiv 1$ mit dem Gronwall-Lemma aus (3.10) sofort $\varphi(t) \leq 0$ und damit $\varphi(t) \equiv 0$ für alle $t \in [a, b]$.

Ein weiteres nützliches Hilfsmittel ist das folgende Lemma zu Unter- bzw. Oberlösungen eines Anfangswertproblems (3.1)

Lemma 3.13 (Unter-/Oberlösungen). *Seien $t_0 < T$, $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y \in C^1[t_0, T]$ erfülle $y(t_0) < x_0$ bzw. $y(t_0) > x_0$ sowie die strikte Differentialungleichung*

$$y'(t) < f(t, y(t)) \quad \text{bzw.} \quad y'(t) > f(t, y(t)), \quad \text{für alle } t \in (t_0, T]. \quad (3.11)$$

Dann gilt für jede Lösung $x \in C^1[t_0, T]$ des Anfangswertproblems (3.1)

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T],$$

die Abschätzung

$$y(t) < x(t) \quad \text{bzw.} \quad y(t) > x(t), \quad \text{für alle } t \in (t_0, T]. \quad (3.12)$$

y heißt Unter- bzw. Oberlösung von x .

Beweis: Wir betrachten nur den Fall „<“. Angenommen, es gelte (3.11) und es existiere ein $t_* \in (t_0, T]$ mit $y(t) < x(t)$ für alle $t \in [t_0, t_*)$ und $y(t_*) = x(t_*)$. Für alle genügend kleine $h > 0$ folgt

$$\frac{y(t_*) - y(t_* - h)}{h} > \frac{x(t_*) - x(t_* - h)}{h},$$

so dass für $h \rightarrow 0$ und mit der Differenzierbarkeit von x und y ein Widerspruch zur Annahme (3.11) folgt:

$$y'(t_*) \geq x'(t_*) = f(t_*, x(t_*)) = f(t_*, y(t_*)).$$

□

Bemerkung 3.14. Durch Zeitumkehr erhält man entsprechende Abschätzungen nach links, allerdings drehen sich die Relationszeichen in der Differentialgleichung um: Angenommen, es gelte $T < t_0$ und sei $y \in C^1[T, t_0]$ mit $y(t_0) < x_0$ bzw. $y(t_0) > x_0$ und der strikten Differentialungleichung

$$y'(t) > f(t, y(t)) \text{ bzw. } y'(t) < f(t, y(t)), \quad \text{für alle } t \in [T, t_0),$$

wobei $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt mit $g(t, x) := -f(-t, x)$ und $v(t) := y(-t)$ für alle $(t, x) \in J \times \mathbb{R}$ die Ungleichung $v(-t_0) < x_0$ bzw. $v(-t_0) > x_0$ sowie die strikte Differentialungleichung

$$v'(t) = -y'(-t) < -f(t, y(-t)) = g(t, v(t)), \quad \text{für alle } t \in (-t_0, -T].$$

Lemma 3.13, angewendet auf das gespiegelte Anfangswertproblem

$$u'(t) = g(t, u(t)), \quad u(-t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [-t_0, -T],$$

liefert für jede Lösung $u \in C^1[-t_0, -T]$ die Abschätzung $v(t) < u(t)$ bzw. $v(t) > u(t)$ für alle $t \in (-t_0, -T]$, also mit Zeitumkehr

$$y(t) < x(t) \text{ bzw. } y(t) > x(t), \quad \text{für alle } t \in [T, t_0).$$

Beispiel 3.15. (i) Betrachte für einen Wachstumsparameter $a \geq 0$ die kontinuierliche logistische Gleichung

$$x'(t) = ax(t)(1 - x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (3.13)$$

Sei zunächst $x_0 \in [0, 1]$. Bereits ohne eine (die) explizite Lösung x von (3.13) zu kennen, kann man mit Lemma 3.13 das qualitative Lösungsverhalten analysieren:

- Wir beobachten zunächst, dass für $x_0 = 0$ oder $a = 0$ die globale Lösung $x(t) \equiv 0$ existiert, die wegen der lokalen Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite $f(t, x) = ax(1 - x)$ dann auch global eindeutig ist. Für $a > 0$ und $x_0 = 1$ existiert entsprechend die globale Lösung $x(t) \equiv 1$.
- Für $a > 0$, $x_0 \in (0, 1)$ gibt es eine untere Lösungsschranke: Betrachte die konstante Funktion $y(t) := \varepsilon \in (0, x_0)$ mit den Eigenschaften

$$y(0) = \varepsilon < x_0, \quad y'(t) = 0 < a\varepsilon(1 - \varepsilon) = f(t, y(t)), \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Nach Lemma 3.13 gilt für jede Lösung $x \in C^1[0, T]$ von (3.13) $x(t) > y(t) = \varepsilon$ für alle $t \in [0, T]$, also mit $\varepsilon \nearrow x_0$ auch $x(t) \geq x_0$ für alle $t \in [0, T]$.

- Eine einfache obere Lösungsschranke erhält man für $a > 0$, $x_0 \in (0, 1)$ durch die konstante Funktion $z(t) \equiv 1$: Angenommen, eine Lösung $x \in C^1[t_0, T]$ von (3.13) würde für einen endlichen Zeitpunkt $t_* > t_0$ $x(t_*) = 1$ annehmen. Dann ließe sie sich stetig differenzierbar mit $x(t) \equiv 1$ für $t \geq t_*$ fortsetzen. Das gespiegelte Anfangswertproblem

$$u'(t) = au(t)(1 - u(t)), \quad u(-t_*) = 1, \quad \text{für alle } t \in [-t_*, 0]$$

hätte dann die verschiedenen Lösungen $u(t) \equiv 1$ und $u(t) = x(-t)$ mit $u(0) = x_0 < 1$, im Widerspruch zu Satz 3.3. Also gilt $x(t) < 1$ für jede Lösung von 3.13.

Insgesamt erhalten wir, dass jede Lösung $x \in C^1[0, T]$ von 3.13 entweder konstant gleich 0 oder 1 ist oder die Ungleichungen $0 < x(t) < 1$ erfüllt. Also existiert insbesondere immer eine globale Lösung. Eine entsprechende Argumentation kann man auch für den Fall $x_0 \in (1, \infty)$ durchführen, mit Schranken $1 < x(t) < x_0$ für die Lösung von (3.13).

Die globale Lösung von (3.13) hat die konkrete Gestalt

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 + e^{-at}(1 - x_0)}, \quad \text{für alle } t \geq 0, \quad (3.14)$$

und konvergiert für $t \rightarrow \infty$ streng monoton gegen den Sättigungswert 1, siehe auch Abbildung 3.1.

(ii) Das Anfangswertproblem

$$x'(t) = t^2 + x(t)^2, \quad x(0) = 0, \quad \text{für alle } t \in [0, T], \quad (3.15)$$

hat keine analytisch bekannte Lösung. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite $f(t, x) = t^2 + x^2$ bezüglich x ist die Lösung auf $[0, T]$ eindeutig, sofern sie existiert. Wegen $f(t, x) > 0$ ist die Lösung $x \in C^1[0, T]$ streng monoton wachsend. Satz 3.10 liefert, dass entweder eine Lösung x für alle Zeiten existiert, oder es liegt ein blow up vor. Das maximale Existenzintervall der Lösung lässt sich mit Hilfe von Lemma 3.13 analysieren:

- Für alle $t \in [0, 1)$ gilt $t^2 + x(t)^2 < 1 + x(t)^2$. Daher liegt es nahe, auf $[0, 1]$ für jedes $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} - 2$ das Vergleichsproblem

$$y'(t) = 1 + y(t)^2, \quad y(0) = \varepsilon, \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

zu betrachten, mit exakter Lösung $y(t) = \tan(t + \arctan \varepsilon)$ sogar für $t \in [0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon) \supset [0, 1)$. Nach Lemma 3.13 gilt $x(t) < y(t)$ für alle $t \in [0, 1)$. Der Graph von x liegt auf $[0, 1)$ und aus Stetigkeitsgründen auch auf $[0, 1]$ unterhalb des Graphen von y , was einen blow up auf $[0, 1]$ ausschließt. Für den rechten Randpunkt des maximalen Existenzintervalls folgt $t_+ > 1$.

- Für alle $t \in (0, 1]$ gilt $x'(t) > t^2$ wegen $x(s) > 0$ für alle $s > 0$. Es folgt

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s) ds > \int_0^t s^2 ds = \frac{1}{3}t^3, \quad \text{für alle } t \in (0, 1]$$

und insbesondere $x(1) > \frac{1}{3}$. Wegen $t^2 + x(t)^2 > 1 + x(t)^2$ für alle $t > 1$ liegt es nahe, für $t \geq 1$ folgendes Vergleichsproblem

$$z'(t) = 1 + z(t)^2, \quad z(1) = \frac{1}{3}, \quad \text{für alle } t \in [1, T],$$

mit exakter Lösung $z(t) = \tan(t + \arctan \frac{1}{3} - 1)$ für alle $t \in [1, \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{3} + 1)$. Nach Lemma 3.13 gilt $x(t) > z(t)$ für alle $t \in [1, \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{3} + 1)$. Insbesondere hat x spätestens bei $t_+ \leq \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{3} + 1 \approx 2.249$ einen blow up.

Abbildung 3.2 zeigt die (numerisch berechnete) Lösung x mit den Vergleichskurven y und z .

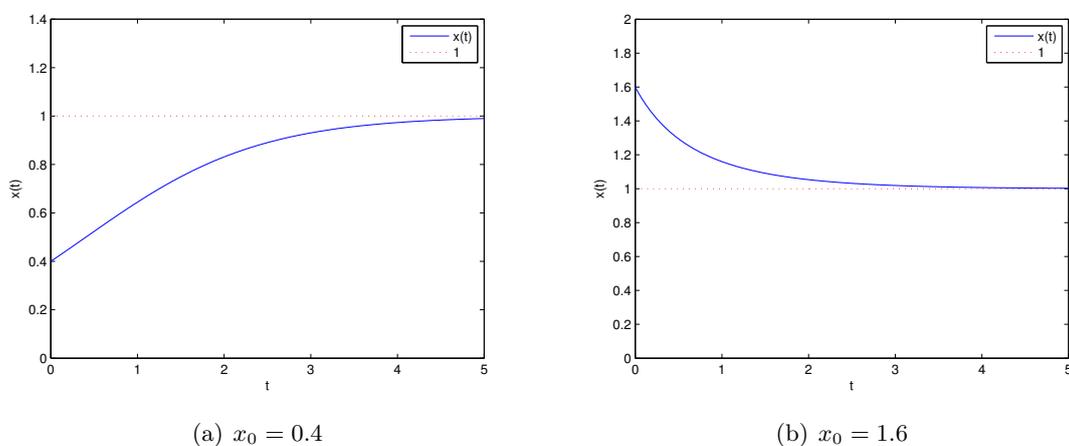


Abbildung 3.1: Exakte Lösung der kontinuierlichen logistischen Gleichung (3.13) für verschiedene Startparameter x_0

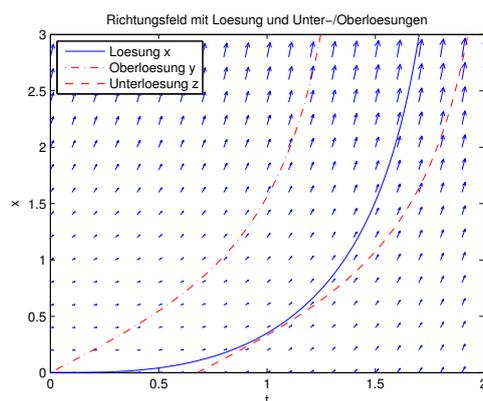


Abbildung 3.2: Exakte Lösung x des Anfangswertproblems (3.15) mit Richtungsfeld sowie Vergleichsfunktionen $y(t) = \tan(t+\varepsilon)$ und $z(t) = \tan(t+\arctan\frac{1}{3}-1)$

3.4 Globale Existenz von Lösungen

Wir interessieren uns jetzt für hinreichende Kriterien, um die Lösbarkeit eines Anfangswertproblems (3.1) auf $[t_0, \infty)$ oder sogar auf ganz \mathbb{R} zu sichern.

Das erste Kriterium über eine Wachstumsbedingung der rechten Seite f haben wir implizit schon in Satz 3.8 kennengelernt:

Satz 3.16. Seien $D = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ und $(t_0, x_0) \in D$. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig, lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments x und erfülle mit nichtnegativen Funktionen $\alpha, \gamma \in C[a, b]$ die Wachstumsbedingung

$$\|f(t, y)\|_2 \leq \alpha(t) + \gamma(t)\|y\|_2, \quad \text{für alle } (t, y) \in D. \quad (3.16)$$

Dann hat (3.1) eine Lösung $x \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei $x \in C^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^n)$ die maximal fortgesetzte Lösung von (3.1). Aus der Darstellung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds, \quad \text{für alle } t \in (t_-, t_+)$$

folgt mit (3.16)

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_2 &\leq \|x_0\|_2 + \int_{t_0}^t (\alpha(s) + \gamma(s)\|x(s)\|_2) \, ds \\ &= \|x_0\|_2 + \int_{t_0}^t \alpha(s) \, ds + \int_{t_0}^t \gamma(s)\|x(s)\|_2 \, ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+). \end{aligned}$$

Das Gronwall-Lemma 3.12 liefert für alle $t \in [t_0, t_+)$

$$\|x(t)\|_2 \leq \|x_0\|_2 + \int_{t_0}^t \alpha(s) \, ds + \int_{t_0}^t \gamma(s) e^{\int_s^t \gamma(\tau) \, d\tau} \left(\|x_0\|_2 + \int_{t_0}^s \alpha(\tau) \, d\tau \right) \, ds,$$

was für $t \rightarrow t_+$ wegen $\alpha, \gamma \in C[a, b]$ beschränkt bleibt. Somit ist ein blow up ausgeschlossen, und Satz 3.10 liefert $t_+ = b$. Da die Beschränktheit von x einen Kollaps bei t_+ ausschließt, gilt $x \in C^1[t_0, b]$. Zeitumkehr liefert die Existenz der Lösung auf ganz $[a, b]$. \square

Bemerkung 3.17. Anwendung von Satz 3.16 auf lineare Differentialgleichungen (3.5), mit $\alpha(t) = \|A(t)\|_2$ und $\gamma(t) = \|c(t)\|_2$ liefert einen Alternativbeweis von Satz 3.8.

Beispiel 3.18. Betrachte das gedämpfte Pendel aus Beispiel 1.3 mit Dämpfungsparameter $\beta \geq 0$ und einer äußeren Kraft $F \in C(\mathbb{R})$

$$x''(t) + \beta x'(t) + \sin x(t) = F(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (3.17)$$

Umformung von (3.17) in ein (autonomes) System erster Ordnung liefert für $y := \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ F(t) - \sin y_1(t) - \beta y_2(t) \end{pmatrix} =: f(t, y(t)), \quad y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Dabei ist $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2$ stetig und nach dem zweiten Argument stetig differenzierbar, also existiert nach Bemerkung 3.5 und Satz 3.6 eine lokal eindeutige Lösung $y \in$

$C^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^2)$. Wegen

$$\begin{aligned} \|f(t, y)\|_2^2 &= y_2^2 + (F(t) - \sin y_1 - \beta y_2)^2 \\ &\leq y_2^2 + (|F(t)| + |\sin y_1| + \beta|y_2|)^2 \\ &\leq y_2^2 + (|F(t)| + |y_1| + \beta|y_2|)^2 \\ &\leq y_2^2 + 3(F(t)^2 + y_1^2 + \beta^2 y_2^2) \\ &\leq 3(1 + \beta^2)\|y\|_2^2 + 3F(t)^2 \end{aligned}$$

und $\|z\|_2 \leq \|z\|_1$ folgt

$$\|f(t, y)\|_2 \leq \sqrt{3(1 + \beta^2)}\|y\|_2 + \sqrt{3}|F(t)|,$$

und Satz 3.16 liefert die Existenz einer Lösung $x \in C^1[0, T]$ von (3.17) für alle $T \geq 0$.

Satz 3.16 ist nur dann hilfreich, wenn die rechte Seite $f(t, x)$ keine polynomialen Ausdrücke mit Grad ≥ 2 enthält. Folgendes Kriterium kann dann helfen:

Satz 3.19. Seien $D = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ und $(t_0, x_0) \in D$. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig, lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments x , und es existiere ein $C > 0$ mit

$$\langle f(t, x), x \rangle \leq C\|x\|_2^2, \quad \text{für alle } (t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n. \quad (3.18)$$

Dann existieren alle Lösungen von (3.1) bis zum rechten Intervallrand $t_+ = b$.

Beweis: Betrachte eine Lösung $x \in C^1([t_0, t_+), \mathbb{R}^n)$ von (3.1) und setze $\varphi(t) := \|x(t)\|_2^2$ für alle $t \in [t_0, t_+)$. Aus (3.18) folgt

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n x_k(t)^2 = 2 \sum_{k=1}^n x_k(t)x_k'(t) \\ &= 2\langle x(t), f(t, x(t)) \rangle \\ &\leq 2C\|x(t)\|_2^2 \\ &= 2C\varphi(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+), \end{aligned}$$

also durch Integration

$$0 \leq \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds \leq \|x_0\|_2^2 + 2C \int_{t_0}^t \varphi(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+)$$

und mit dem Gronwall-Lemma 3.12

$$\varphi(t) \leq \|x_0\|_2^2 e^{2C(t-t_0)}, \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+).$$

Somit ist die Lösung auf jedem Kompaktum $[t_0, T] \subset [t_0, t_+)$ beschränkt und sowohl blow up als auch Kollaps bei t_+ sind ausgeschlossen. Wie in Satz 3.16 folgt die Existenz von x auf ganz $[a, b]$. \square

Beispiel 3.20. (i) Als Beispiel für die Anwendung der Technik aus Satz 3.19 betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 1 + 2x(t) - x(t)^3, \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Die rechte Seite $f(t, x) = 1 + 2x - x^3$ erfüllt weder die lineare Wachstumsbedingung (3.16) noch (3.18). Aber es gilt zumindest für alle $t, x \in \mathbb{R}$

$$xf(t, x) = x + 2x^2 - x^4 \leq \begin{cases} 1 + 2x^2 & , |x| \leq 1 \\ 3x^2 & , |x| > 1 \end{cases} \leq 1 + 3x^2,$$

also für $\varphi(t) := x(t)^2$

$$\varphi'(t) = 2x(t)x'(t) \leq 2 + 6x(t)^2 = 2 + 6\varphi(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]$$

und damit

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi'(s) \, ds \leq |x_0| + 2(t - t_0) + 6 \int_{t_0}^t \varphi(s) \, ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Aus dem Gronwall-Lemma 3.12 ergibt sich

$$x(t)^2 = \varphi(t) \leq |x_0| + 2(t - t_0) + 6 \int_{t_0}^t e^{6(t-s)} (|x_0| + 2(s - t_0)) \, ds, \quad t \in [t_0, T],$$

so dass $x(t)$ auf $[t_0, T]$ beschränkt ist für jedes $T \geq t_0$, d.h. es existiert eine (eindeutige) Lösung $x \in C^1[t_0, \infty)$ für alle zukünftigen Zeiten.

(ii) Das Kermack-McKendrick-System

$$\begin{cases} u'(t) = -\alpha u(t)v(t) \\ v'(t) = \alpha u(t)v(t) - \beta v(t), & u(t_0) = u_0 \geq 0, \quad v(t_0) = v_0 \geq 0, \quad w(t_0) = w_0 \geq 0 \\ w'(t) = \beta v(t) \end{cases} \quad (3.19)$$

für Parameter $\alpha, \beta > 0$ beschreibt die Ausbreitung einer Epidemie. Dabei steht $u(t)$ für die Anzahl der gesunden (d.h. infizierbaren), $v(t)$ für die Anzahl der infizierten und $w(t)$ für die Anzahl der immunisierten Individuen einer Population. Die erste Gleichung in (3.19) modelliert die zeitliche Abnahme der Gesunden durch Erkrankung, die zweite Gleichung die zeitliche Zunahme der Infizierten durch Erkrankung und deren gleichzeitige Abnahme durch Immunisierung, und die dritte Gleichung die zeitliche Zunahme der Immunisierten. Wegen $u'(t) + v'(t) + w'(t) \equiv 0$ gilt $u(t) + v(t) + w(t) \equiv u_0 + v_0 + w_0 =: c > 0$, also könnte man auch eine der Unbekannten (z.B. $w(t)$) aus dem Anfangswertproblem (3.19) entfernen.

Satz 3.19 ist nicht unmittelbar anwendbar. Angenommen, es gelte $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ und $w_0 \geq 0$. Aus der ersten Gleichung $u' = -\alpha uv$ liest man (z.B. mit der Technik integrierender Faktoren, vgl. Übung) die Teillösung

$$u(t) = u_0 e^{-\alpha \int_{t_0}^t v(s) \, ds}, \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+)$$

ab, analog wegen $v' = \alpha uv - \beta v$ die Teillösung

$$v(t) = v_0 e^{\int_{t_0}^t (\alpha u(s) - \beta) ds}, \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+)$$

sowie mit $w' = \beta v$

$$w(t) = w_0 + \int_{t_0}^t w'(s) ds = w_0 + \beta \int_{t_0}^t v(s) ds$$

Es folgt $u(t) > 0$, $v(t) > 0$ und $w(t) \geq 0$ für alle $t \in [t_0, t_+)$. Aus $u'(t) + v'(t) + w'(t) = 0$ und $u(t), v(t), w(t) \geq 0$ ergibt sich die Beschränktheit von $u(t)$, $v(t)$ und $w(t)$ für alle $t \in [t_0, t_+)$, also globale Existenz $t_+ = \infty$ mit Satz 3.10.

Wegen $w'(t) = \beta v(t) \geq 0$ ist w monoton wachsend und wegen $w(t) \in [0, u_0 + v_0 + w_0] = [0, c]$ konvergent gegen ein $\hat{w} \in [0, c]$ für $t \rightarrow \infty$. Analog konvergiert $u(t)$ monoton fallend gegen ein $\hat{u} \in [0, c]$ für $t \rightarrow \infty$ wegen $u'(t) = -\alpha u(t)v(t) \leq 0$, also auch $v(t) = c - u(t) - w(t) \rightarrow \hat{v} := c - \hat{u} - \hat{w}$, $t \rightarrow \infty$. Der stationäre Zustand $\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix}$ löst aus Stetigkeitsgründen das nichtlineare Gleichungssystem

$$f\left(t, \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\alpha \hat{u} \hat{v} \\ (\alpha \hat{u} - \beta) \hat{v} \\ \beta \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Immunisierungsrate β positiv ist, folgt $\hat{v} = 0$, d.h. für $t \rightarrow \infty$ ebbt die Welle der Infektionen ab, mit $\hat{u} + \hat{w} = c$.

In einer Übungsaufgabe zeigen wir, dass im Fall $u_0 > 0$ der Grenzzustand \hat{u} positiv ist und das nichtlineare Gleichungssystem $\ln \frac{\hat{u}}{u_0} = \frac{\alpha}{\beta} (\hat{u} - u_0 - v_0)$ erfüllt.

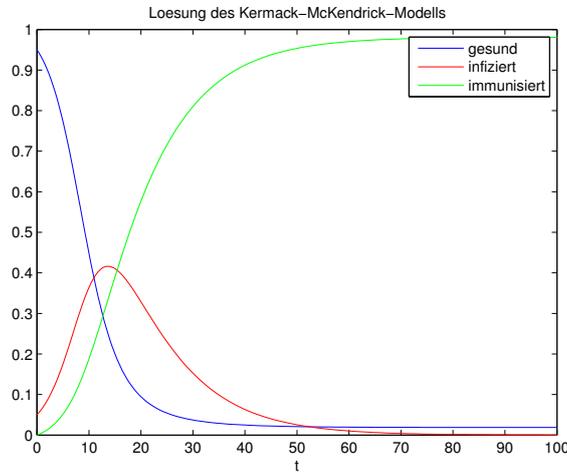


Abbildung 3.3: Lösung des Kermack-McKendrick-Epidemiemodells für $0 \leq t \leq 100$ und Modellparameter $u_0 = 0.95$, $v_0 = 0.05$, $w_0 = 0$, $\alpha = 0.4$ und $\beta = 0.1$.

4 Lineare Differentialgleichungen

Wir diskutieren in diesem Kapitel die Lösungsstruktur *linearer Differentialgleichungen*, speziell die eines linearen Anfangswertproblem 1. Ordnung

$$x'(t) = A(t)x(t) + c(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T], \quad (4.1)$$

mit Koeffizientenfunktionen $A \in C([t_0, T], \mathbb{R}^{n \times n})$, $c \in C([t_0, T], \mathbb{R}^n)$, sowie $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir wissen bereits aus Satz 3.8, dass (4.1) unter diesen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung $x \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ besitzt, allerdings ist diese Aussage noch wenig konstruktiv.

4.1 Homogene Systeme

Sei $c \equiv 0$ und betrachte die *homogene lineare Differentialgleichung* 1. Ordnung

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \quad (4.2)$$

Sind $u, v \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ zwei Lösungen von (4.2), dann offenbar aus Linearitätsgründen auch $\alpha u + \beta v$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, denn

$$\frac{d}{dt}(\alpha u(t) + \beta v(t)) = \alpha u'(t) + \beta v'(t) = \alpha A(t)u(t) + \beta A(t)v(t) = A(t)(\alpha u(t) + \beta v(t)).$$

Die Lösungsmenge \mathcal{L} von (4.2) ist somit ein Untervektorraum $\mathcal{L} \subset C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$. Zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert eine eindeutige Lösung $x = x(\cdot; x_0) \in \mathcal{L}$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \quad (4.3)$$

Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^n \ni x_0 \mapsto x(\cdot; x_0) \in \mathcal{L}$$

ist linear, da die Lösung $x(\cdot; \alpha x_0 + \beta y_0)$ zum Anfangswert $\alpha x_0 + \beta y_0$ aus Linearitätsgründen gerade $\alpha x(\cdot; x_0) + \beta x(\cdot; y_0)$ ist. Somit ist ψ ein linearer Isomorphismus von \mathbb{R}^n auf \mathcal{L} , und \mathcal{L} ist n -dimensional. Daher existiert eine Basis $\{x^1, \dots, x^n\} \subset \mathcal{L}$ von \mathcal{L} aus linear unabhängigen Lösungen von (4.2).

Definition 4.1. Eine Basis $\{x^1, \dots, x^n\}$ von \mathcal{L} heißt auch Fundamentalsystem von (4.2). n Lösungen $x^1, \dots, x^n \in \mathcal{L}$ fasst man spaltenweise zu einer Lösungsmatrix

$$X : t \mapsto X(t) := (x^1(t) \cdots x^n(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]$$

zusammen. Ist $\{x^1, \dots, x^n\}$ ein Fundamentalsystem, so heißt X Fundamentalmatrix von (4.2). Gilt $X(t_0) = I$, so heißt X Hauptfundamentalmatrix (in t_0), die Menge der Spalten $\{x^1, \dots, x^n\}$ heißt Hauptfundamentalsystem (in t_0).

Bemerkung 4.2. (i) Für jede Lösungsmatrix X gilt $X'(t) = A(t)X(t)$, $t \in [t_0, T]$.

(ii) Ist X eine Fundamentalmatrix, so existiert zu jeder Lösung x von (4.1) ein eindeutiger Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x(t) = X(t)c, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \quad (4.4)$$

(iii) Für jede Lösungsmatrix X und jede konstante Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist auch durch $Y(t) := X(t)C$ eine Lösungsmatrix festgelegt, denn

$$Y'(t) = X'(t)C = A(t)X(t)C = A(t)Y(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \quad (4.5)$$

Definition 4.3. Sei X eine Lösungsmatrix von (4.2). Dann heißt die stetig differenzierbare Funktion $\varphi := t \mapsto \det X(t)$ Wronski-Determinante von X .

Das folgende Lemma zeigt, dass die Wronski-Determinante φ entweder auf ganz $[t_0, T]$ von Null verschieden ist oder konstant gleich Null.

Lemma 4.4. Sei X eine Lösungsmatrix von (4.2). Dann hat die Wronski-Determinante φ die Darstellung

$$\varphi(t) = \varphi(\tau)e^{\int_{\tau}^t \operatorname{tr} A(s) ds}, \quad \text{für alle } t, \tau \in [t_0, T], \quad (4.6)$$

mit der Spur $\operatorname{tr} B := \sum_{k=1}^n b_{k,k}$ für $B = (b_{j,k})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Insbesondere verschwindet die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix X in keinem $t \in [t_0, T]$, d.h. $X(t)$ ist für alle $t \in [t_0, T]$ invertierbar.

Beweis: Sei $\tau \in [t_0, T]$ beliebig und wähle eine Fundamentalmatrix Y von (4.2) mit $Y(\tau) = I$, d.h. die k -te Spalte von Y sei gleich der Lösung $x = x(\cdot; x_0)$ von (4.3) mit $x_0 = e_k$. Dann ist mit $\tilde{X}(t) := Y(t)X(\tau)$ wegen Bemerkung 4.2(iii) ebenfalls eine Lösungsmatrix \tilde{X} festgelegt, $t \in [t_0, T]$. Aus dem Anfangswert $\tilde{X}(\tau) = X(\tau)$ und der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems (4.3) ergibt sich $\tilde{X}(t) = X(t)$ für alle $t \in [t_0, T]$ und damit

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d}{dt} (\det X(t)) \\ &= \frac{d}{dt} (\det \tilde{X}(t)) \\ &= \frac{d}{dt} (\det Y(t) \det X(\tau)) \\ &= \frac{d}{dt} (\det Y(t)) \varphi(\tau), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

$\det Y(t)$ ist linear in den Spalten $y^k(t)$ von $Y(t)$, $1 \leq k \leq n$, also gilt für $t, t+h \in [t_0, T]$

mit einem Teleskopsummenargument

$$\begin{aligned}
& \det Y(t+h) - \det Y(t) \\
&= \det (y^1(t+h) \cdots y^n(t+h)) - \det (y^1(t) \cdots y^n(t)) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\det (y^1(t) \cdots y^{k-1}(t) y^k(t+h) \cdots y^n(t+h)) \right. \\
&\quad \left. - \det (y^1(t) \cdots y^k(t) y^{k+1}(t+h) \cdots y^n(t+h)) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \det (y^1(t) \cdots y^{k-1}(t) y^k(t+h) - y^k(t) y^{k+1}(t+h) \cdots y^n(t+h)),
\end{aligned}$$

so dass nach Division durch $h \neq 0$ und $h \rightarrow 0$ folgt

$$\frac{d}{dt} (\det Y(t)) = \sum_{k=1}^n \det (y^1(t) \cdots \frac{d}{dt} y^k(t) \cdots y^n(t)), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Wegen $y^k(\tau) = e_k$ und $\frac{d}{dt} y^k(\tau) = A(\tau)e_k$, $1 \leq k \leq n$, erhalten wir bei $t = \tau$

$$\left. \frac{d}{dt} (\det Y(t)) \right|_{t=\tau} = \sum_{k=1}^n \det (e_1 \cdots A(\tau)e_k \cdots e_n) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}(\tau) = \operatorname{tr} A(\tau),$$

also $\varphi'(\tau) = (\operatorname{tr} A(\tau))\varphi(\tau)$. Da $\tau \in [t_0, T]$ beliebig war, erhalten wir $\varphi'(t) = (\operatorname{tr} A(t))\varphi(t)$ für alle $t \in [t_0, T]$, und (4.6) folgt durch Integration über $[\tau, t]$.

Sei X nun eine Fundamentalmatrix von (4.2) mit Spalten x^k , $1 \leq k \leq n$. Wir zeigen noch, dass $\varphi(t) = \det X(t) \neq 0$ für alle $t \in [t_0, T]$. Seien dazu $\tau \in [t_0, T]$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Angenommen, es gelte $X(\tau)z = 0$. Dann hat die Funktion

$$y(t) := X(t)z = \sum_{k=1}^n z_k x^k(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]$$

bei $t = \tau$ eine Nullstelle, $y(\tau) = 0$. Da aber das Anfangswertproblem (4.3) mit $t_0 = \tau$ und Anfangswert $x_0 = 0$ die eindeutige Lösung $x \equiv 0$ besitzt, muss y konstant Null sein, also $X(t)z = 0$ für alle $t \in [t_0, T]$. Da die Spalten von X linear unabhängige Funktionen sind, folgt $z = 0$, d.h. $X(\tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist injektiv und folglich invertierbar, mit $\varphi(\tau) \neq 0$. \square

Bemerkung 4.5. (i) Ist X eine Fundamentalmatrix von (4.2), so kann man durch $Y(t) := X(t)X(t_0)^{-1}$ eine Hauptfundamentalmatrix von (4.2) erhalten, $Y(t_0) = I$.

(ii) Ist X eine Fundamentalmatrix von (4.2), so ist $x(t) := X(t)X(t_0)^{-1}x_0$ die Lösung von (4.3), d.h. in (4.4) gilt $c = X(t_0)^{-1}x_0$.

Beispiel 4.6. Betrachte das homogene System

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} x(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Es folgt $x_2'(t) = 2tx_2(t)$, also $x_2(t) = ce^{t^2}$ für ein frei wählbares $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Einsetzen in die erste Komponente liefert die Differentialgleichung $x_1'(t) = x_1(t) + 3ce^{t^2}$, welche durch Multiplikation mit e^{-t} exakt wird:

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-t}x_1'(t) - e^{-t}(x_1(t) + 3ce^{t^2}) \\ &= \frac{d}{dt} \left(e^{-t}x_1(t) - 3c \int_{t_0}^t e^{s^2-s} ds \right), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

und damit

$$e^{-t}x_1(t) - 3c \int_{t_0}^t e^{s^2-s} ds \equiv e^{-t_0}x_1(t_0), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T],$$

also

$$x_1(t) = e^t \left(e^{-t_0}x_1(t_0) + 3c \int_{t_0}^t e^{s^2-s} ds \right), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Wählt man zum einen $c = 0$ und $x_1(t_0) = 1$ sowie zum anderen $c = 1$ und $x_1(t_0) = 0$, erhält man die Fundamentalmatrix

$$X(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) & x^2(t) \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 3e^t \int_{t_0}^t e^{s^2-s} ds \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix}$$

mit der Wronski-Determinante $\varphi(t) = \det X(t) = e^{t-t_0+t^2} \neq 0$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$.

4.2 Inhomogene Systeme

Kennt man eine Lösung $z \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ des inhomogenen Systems

$$x'(t) = A(t)x(t) + c(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T] \tag{4.7}$$

und eine Fundamentalmatrix X des dazugehörigen homogenen Systems (4.2), so erhält man über $x(t) := X(t)y + z(t)$ für beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ alle Lösungen des inhomogenen Systems (4.7). Denn zwei Lösungen u, v von (4.7) unterscheiden sich um eine Lösung von (4.2),

$$(u - v)'(t) = A(t)u(t) + c(t) - (A(t)v(t) + c(t)) = A(t)(u(t) - v(t)), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Es kommt also letztlich darauf an, eine *spezielle* Lösung $z \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ der inhomogenen Differentialgleichung (4.2) zu bestimmen, z.B. mit *Variation der Konstanten*: hierzu wählt man den Ansatz

$$z(t) := X(t)y(t)$$

mit einer noch zu bestimmenden Koeffizientenfunktion $y \in C([t_0, T], \mathbb{R}^n)$. Ist z eine Lösung von (4.7), folgt mit der Produktregel und (4.5) für alle $t \in [t_0, T]$

$$c(t) = z'(t) - A(t)z(t) = X'(t)y(t) + X(t)y'(t) - A(t)X(t)y(t) = X(t)y'(t),$$

d.h. $y'(t) = X(t)^{-1}c(t)$ wegen der Invertierbarkeit einer Fundamentalmatrix. Integration von t_0 bis t liefert

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t X(s)^{-1}c(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Es reicht, eine spezielle Lösung zu bestimmen, so dass wir mit $y(t_0) := 0$ die Darstellung

$$z(t) = X(t)y(t) = X(t) \int_{t_0}^t X(s)^{-1}c(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]$$

erhalten. Damit hat die allgemeine Lösung von (4.7) die Form

$$x(t) = X(t)y + X(t) \int_{t_0}^t X(s)^{-1}c(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T], \quad (4.8)$$

wobei $y \in \mathbb{R}^n$ noch beliebig ist. Für einen gegebenen Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist

$$x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x_0 + X(t) \int_{t_0}^t X(s)^{-1}c(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T], \quad (4.9)$$

also die Lösung von (4.1).

Beispiel 4.7. Betrachte das lineare Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Die homogene lineare Differentialgleichung

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1'(t) = z_1(t) + tz_2(t) \\ z_2'(t) = z_2(t) \end{cases}$$

hat die Teillösung $z_2(t) = ce^t$, $c \in \mathbb{R}$, und wegen

$$0 = e^{-t}z_1'(t) - e^{-t}z_1(t) - e^{-t}tz_2(t) = \frac{d}{dt}(e^{-t}z_1(t) - \frac{c}{2}t^2), \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

die Teillösung $z_1(t) = e^t z_1(0) + \frac{c}{2}t^2 e^t$, so dass eine Fundamentalmatrix gegeben ist durch

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

wobei wir $z_1(0) = 1, c = 0$ bzw. $z_1(0) = 0, c = 1$ gewählt haben. Wegen

$$X(t)^{-1} = e^{-2t} \begin{pmatrix} e^t & -\frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -\frac{t^2}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

folgt aus (4.9), dass sich die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems berechnet durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} & -\frac{s^2}{2}e^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ s-1 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} (2 - \frac{s^2}{2}(s-1))e^{-s} \\ (s-1)e^{-s} \end{pmatrix} ds, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hierbei könnte man das Integral z.B. noch mit mehrfacher partieller Integration explizit ausrechnen.

4.3 Systematische Bestimmung von Fundamentalsystemen

Die Bestimmung eines Fundamentalsystems von (4.2) ist in der Regel nichttrivial. Die folgenden beiden Strategien erlauben häufig eine systematische Berechnung.

4.3.1 Die d'Alembert-Reduktion

Angenommen, eine Lösung $x^1 \neq 0$ von (4.2) sei bereits bekannt. Dann kann man diese mit der *d'Alembert-Reduktion* zu einem Fundamentalsystem $\{x^1, \dots, x^n\}$ von (4.2) ergänzen. Es gilt $x^1(t) \neq 0$ für alle $t \in [t_0, T]$, da sonst x^1 konstant Null wäre (s.o.) im Widerspruch zur Annahme. Durch eventuelle Verkleinerung des Zeitintervalls $[t_0, T]$ können wir davon ausgehen, dass ein $k \in \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass die k -te Komponente von x^1 nullstellenfrei ist, d.h. $x_k^1(t) \neq 0$ für alle $t \in [t_0, T]$. Für die Lösungen x^2, \dots, x^n benutzen wir den Ansatz

$$x(t) = \psi(t)x^1(t) + \eta(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T], \quad (4.10)$$

mit $\eta \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$, $\eta_k \equiv 0$ und einer skalaren Koeffizientenfunktion $\psi \in C^1[t_0, T]$. Aus (4.10) und (4.2) für x^1 folgt zunächst

$$x'(t) = (\psi'(t) + \psi(t)A(t))x^1(t) + \eta'(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T],$$

d.h. mit (4.2) für die Lösung x

$$\eta'(t) = A(t)x(t) - (\psi'(t) + \psi(t)A(t))x^1(t) = A(t)\eta(t) - \psi'(t)x^1(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

In der k -ten Komponente ergibt dies wegen $x_k^1(t) \neq 0$ und $\eta_k \equiv 0$

$$\psi'(t) = \frac{1}{x_k^1(t)} (A(t)\eta(t) - \eta'(t))_k = \frac{1}{x_k^1(t)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{k,j}(t)\eta_j(t), \quad (4.11)$$

also rückeringesetzt

$$\eta'_j(t) = (A(t)\eta(t) - \psi'(t)x^1(t))_j = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \left(a_{j,l}(t) - \frac{x_j^1(t)}{x_k^1(t)} a_{k,l}(t) \right) \eta_l(t), \quad j \neq k. \quad (4.12)$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung für den noch zu bestimmenden Teilvektor $(\eta_j)_{j \neq k}$ von η der Länge $n - 1$. Sobald hierfür $n - 1$ linear unabhängige Lösungen $\eta^1, \dots, \eta^{n-1}$ bestimmt wurden, kann man durch Einsetzen in (4.11) und (4.10) $n - 1$ dazu gehörende, linear unabhängige Lösungen x^2, \dots, x^n von (4.2) berechnen.

Beispiel 4.8. Eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} x(t), \quad \text{für alle } t > 0,$$

ist

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } t > 0.$$

Die erste Komponentenfunktion von x^1 hat keine Nullstelle auf $(0, \infty)$, $k = 1$. Für die Koeffizientenfunktion η im Ansatz

$$x^2(t) = \psi(t)x^1(t) + \eta(t), \quad \eta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } t > 0$$

erhalten wir wegen (4.12) die Differentialgleichung

$$\eta'_2(t) = \left(a_{2,2}(t) - \frac{x_2^1(t)}{x_1^1(t)} a_{1,2}(t) \right) \eta_2(t) = \left(\frac{2}{t} - \frac{-t}{t^2}(-1) \right) \eta_2(t) = \frac{1}{t} \eta_2(t)$$

mit Lösung $\eta_2(t) = ct$, $c \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Wir wählen $c = 1$, also $\eta_2(t) = t$, $t > 0$. Aus (4.11) erhält man

$$\psi'(t) = \frac{1}{x_1^1(t)} (A(t)\eta(t) - \eta'(t))_1 = \frac{1}{t^2} (-1) \eta_2(t) = -\frac{1}{t}, \quad \text{für alle } t > 0,$$

und somit z.B. $\psi(t) = -\ln t$, $t > 0$. Eingesetzt in den Ansatz ergibt sich

$$x^2(t) = \psi(t)x^1(t) + \eta(t) = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t \ln t + t \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } t > 0$$

eine weitere, zu x^1 linear unabhängige Lösung ergibt. Ein Fundamentalsystem ist daher

$$X(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t \ln t + t \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } t > 0,$$

mit Wronski-Determinante $\varphi(t) = \det X(t) = t^3 \neq 0$, $t > 0$.

4.3.2 Konstante Koeffizienten

Falls die Koeffizientenfunktion A gar nicht von t abhängt, d.h. $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für alle $t \in [t_0, T]$, kann man ein Fundamentalsystem von (4.2) mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion angeben.

Definition 4.9. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann heißt

$$e^{zA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k A^k, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad (4.13)$$

Matrix-Exponentialfunktion zur Matrix A .

Satz 4.10. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die Abbildung $u : z \mapsto e^{zA}$ ist auf ganz \mathbb{C} wohldefiniert, differenzierbar und erfüllt dort die Differentialgleichung $u'(z) = Au(z)$ mit $u(0) = I$. Die Matrix-Exponentialfunktion kommutiert mit Potenzen von A ,

$$e^{zA} A^k = A^k e^{zA}, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}_0, \quad (4.14)$$

und erfüllt die Funktionalgleichung

$$e^{(y+z)A} = e^{yA} e^{zA} = e^{zA} e^{yA}, \quad \text{für alle } y, z \in \mathbb{C}. \quad (4.15)$$

Beweis: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k A^k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Cauchyfolge, denn mit $\|zA\|_2 \leq j \leq k$ gilt

$$\begin{aligned} \|S_k - S_j\|_2 &= \left\| \sum_{l=j+1}^k \frac{1}{l!} z^l A^l \right\|_2 \leq \sum_{l=j+1}^k \frac{1}{l!} |z|^l \|A^l\|_2 \\ &\leq \sum_{l=j+1}^k \frac{1}{l!} |z|^l \|A\|_2^l \\ &= \frac{1}{(j+1)!} |z|^{j+1} \|A\|_2^{j+1} \sum_{\nu=0}^{k-j-1} \frac{|z|^\nu \|A\|_2^\nu}{(j+2) \cdots (j+1+\nu)} \\ &\leq \frac{1}{(j+1)!} |z|^{j+1} \|A\|_2^{j+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{|z| \|A\|_2}{j+1} \right)^\nu \\ &= \frac{1}{(j+1)!} \frac{|z|^{j+1} \|A\|_2^{j+1}}{1 - \frac{|z| \|A\|_2}{j+1}} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{C}^{n \times n}$ mit der Spektralnorm $\|\cdot\|_2$ vollständig ist, ist e^{zA} für alle $z \in \mathbb{C}$ wohldefiniert. Aus obiger Rechnung folgt auch, dass e^{zA} auf jeder kompakten Teilmenge $z \in K \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert. Die komplexe Differenzierbarkeit von $u : z \mapsto e^{zA}$ auf ganz \mathbb{C} mit $u'(z) = Ae^{zA} = Au(z)$ folgt daher aus gliedweiser Differentiation

$$\frac{d}{dz} e^{zA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dz} z^k A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k z^{k-1} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k A^k = A e^{zA}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Des weiteren gilt offenbar $u(0) = e^{0A} = I$ und (4.14) wegen

$$e^{zA} A^k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j A^j A^k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j A^{j+k} = A^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j A^j = A^k e^{zA}, \quad z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Für die Funktionalgleichung (4.15) überlegt man sich, dass für festes $y \in \mathbb{C}$ die matrixwertige Funktion

$$v(z) := e^{(y+z)A} - e^{yA} e^{zA} = u(y+z) - e^{yA} u(z), \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

komplex differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} v'(z) &= u'(y+z) - e^{yA} u'(z) \\ &= Au(y+z) - e^{yA} Au(z) \\ &= A(u(y+z) - e^{yA} u(z)) \\ &= Av(z), \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

wobei wir (4.14) benutzt haben. Aus $v(0) = 0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und einer Variation von Satz 3.3 für komplexe Zeiten folgt $v(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also (4.15). \square

Korollar 4.11. Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t_0, T \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $c \in C([t_0, T], \mathbb{R}^n)$. Dann ist die Lösung $x \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ von

$$x'(t) = Ax(t) + c(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T] \quad (4.16)$$

gegeben durch

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} c(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \quad (4.17)$$

Beweis: Die Funktion x aus (4.17) erfüllt offenbar $x(t_0) = x_0$ und es gilt

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{d}{dt} (e^{(t-t_0)A} x_0) + \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t e^{(t-s)A} c(s) ds \right) \\ &= \frac{d}{dt} (e^{tA}) e^{-t_0A} x_0 + \frac{d}{dt} (e^{tA}) \int_{t_0}^t e^{-sA} c(s) ds + e^{tA} \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t e^{-sA} c(s) ds \right) \\ &= A e^{tA} e^{-t_0A} x_0 + A e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} c(s) ds + e^{tA} e^{-tA} c(t) \\ &= Ax(t) + c(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

\square

Bemerkung 4.12. Für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt im Allgemeinen nicht $e^{A+B} = e^A e^B$! Für ein Gegenbeispiel betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. A und B kommutieren nicht. Es gilt $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und folglich

$$e^{zA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} z^k & 0 \\ 0 & (-z)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^z & 0 \\ 0 & e^{-z} \end{pmatrix}.$$

Aus $B^{2k} = I$ und $B^{2k+1} = B$, $k \in \mathbb{N}_0$, folgt

$$e^{zB} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} I}_{=\frac{1}{2}(e^z + e^{-z})} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} B}_{=\frac{1}{2}(e^z - e^{-z})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) & \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \\ \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) & \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \end{pmatrix},$$

also

$$e^{zA} e^{zB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^z (e^z + e^{-z}) & \frac{1}{2} e^z (e^z - e^{-z}) \\ \frac{1}{2} e^{-z} (e^z - e^{-z}) & \frac{1}{2} e^{-z} (e^z + e^{-z}) \end{pmatrix}.$$

Andererseits hat $C := A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ die Eigenschaft $C^2 = 2I$, also $C^{2k} = 2^k I$ und $C^{2k+1} = 2^k C$, $k \in \mathbb{N}_0$, woraus folgt

$$\begin{aligned} e^{zC} = e^{z(A+B)} &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} 2^k z^{2k} I}_{=\frac{1}{2}(e^{\sqrt{2}z} + e^{-\sqrt{2}z})} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} 2^k z^{2k+1} C}_{=\frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}z} - e^{-\sqrt{2}z})} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})e^{\sqrt{2}z} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})e^{-\sqrt{2}z} & \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}z} - e^{-\sqrt{2}z}) \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{\sqrt{2}z} - e^{-\sqrt{2}z}) & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})e^{\sqrt{2}z} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})e^{-\sqrt{2}z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit $e^{z(A+B)} \neq e^{zA} e^{zB}$ für fast alle $z \in \mathbb{C}$.

Lemma 4.13. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zwei kommutierende Matrizen, d.h. $AB = BA$. Dann gilt $e^{z(A+B)} = e^{zA} e^{zB} = e^{zB} e^{zA}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 4.10 folgt aus $AB = BA$, dass $Be^{zA} = e^{zA}B$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Für die Funktion $v(z) := e^{z(A+B)} - e^{zA} e^{zB}$, $z \in \mathbb{C}$ ergibt sich $v(0) = 0$ und mit der Ketten- und Produktregel

$$\begin{aligned} v'(z) &= (A+B)e^{z(A+B)} - Ae^{zA} e^{zB} - e^{zA} B e^{zB} \\ &= (A+B)e^{z(A+B)} - Ae^{zA} e^{zB} - Be^{zA} e^{zB} \\ &= (A+B)v(z), \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Da die Nullfunktion dieses Anfangswertproblem $v' = (A+B)v$, $v(0) = 0$ ebenfalls löst, gilt $v \equiv 0$. \square

Die konkrete Berechnung der Matrixfunktion e^{zA} kann abhängig von den Spektraleigenschaften von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ einfach oder kompliziert sein. Die folgenden Hilfsresultate stellen sich dabei als nützlich heraus.

Lemma 4.14. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

(i) Falls A diagonal ist, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$, gilt

$$e^{zA} = \begin{pmatrix} e^{a_{1,1}z} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_{n,n}z} \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \quad (4.18)$$

(ii) Sei $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar. Dann gilt

$$e^{zX^{-1}AX} = X^{-1}e^{zA}X, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \quad (4.19)$$

d.h. e^{zA} ist diagonalisierbar, wenn A es ist.

(iii) Für die spezielle nilpotente Matrix $A = N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$e^{zA} = \begin{pmatrix} 1 & z & \cdots & \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & z \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \quad (4.20)$$

Für einen Jordanblock $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ergibt sich

$$e^{zA} = e^{\lambda z} e^{zN} = e^{\lambda z} \begin{pmatrix} 1 & z & \cdots & \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & z \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \quad (4.21)$$

(iv) Für einen reell nicht diagonalisierbaren Block $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, gilt

$$e^{zA} = e^{\alpha z} \begin{pmatrix} \cos(\beta z) & \sin(\beta z) \\ -\sin(\beta z) & \cos(\beta z) \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \quad (4.22)$$

Beweis:

(i) Für eine Diagonalmatrix A gilt $A^k = \begin{pmatrix} a_{1,1}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n}^k \end{pmatrix}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, also für $z \in \mathbb{C}$

$$e^{zA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k a_{1,1}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k a_{n,n}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{za_{1,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{za_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

(ii) Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und eine invertierbare Matrix $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ rechnet man mit $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{zX^{-1}AX} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k (X^{-1}AX)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k X^{-1}AX X^{-1}AX \cdots X^{-1}AX \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k X^{-1}A^k X \\ &= X^{-1}e^{zA}X. \end{aligned}$$

(iii) A ist nilpotent mit $A^n = 0$, denn mit jeder Potenz von A rutscht die Einser-Nebendiagonale eine Diagonale nach oben. Es folgt für $z \in \mathbb{C}$

$$e^{zA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} z^k A^k = \begin{pmatrix} 1 & z & \cdots & \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & z \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen λI und N kommutieren offenbar. Also folgt mit Lemma 4.13 und (i)

$$e^{z(\lambda I + N)} = e^{z\lambda I} e^{zN} = e^{\lambda z} e^{zN}.$$

(iv) Einen reell nicht diagonalisierbaren Block $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ zerlegt man am besten in $A = B + C$, mit $B = \alpha I = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $B = \alpha I$ kommutieren

B und C , so dass mit Lemma 4.13 sowie $C^2 = -\beta^2 I$ für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
 e^{zA} &= e^{zB} e^{zC} = e^{\alpha z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \underbrace{C^{2k}}_{=(-1)^k \beta^{2k} I} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \underbrace{C^{2k+1}}_{=(-1)^k \beta^{2k} C} \right) \\
 &= e^{\alpha z} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\beta z)^{2k} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\beta z)^{2k+1} \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\beta z)^{2k+1} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\beta z)^{2k} \end{pmatrix} \\
 &= e^{\alpha z} \begin{pmatrix} \cos(\beta z) & \sin(\beta z) \\ -\sin(\beta z) & \cos(\beta z) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.15. Lemma 4.14 zeigt, welche Lösungsstrukturen der homogenen Differentialgleichung $x' = Ax$ sich bei verschiedenen Jordan-Normalformen von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ergeben können. Statt die Fundamentalmatrix e^{tA} explizit über Reihen oder mit Hilfe von Eigenfunktionen von A auszurechnen, hilft insbesondere bei der Lösung eines Anfangswertproblems (4.16) oft ein passender Ansatz:

- (i) Ist A reell diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so ist jede Komponentenfunktion von e^{tA} eine Linearkombination aus $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$.
- (ii) Tauchen für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ in der Jordan-Normalform $k \times k$ -Jordan-Blöcke

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \lambda \end{pmatrix}$$

auf, so sind die Komponenten von e^{tA} Linearkombinationen unter anderem der Funktionen $t^j e^{\lambda t}$, $0 \leq j \leq k-1$.

- (iii) Bei einer reell nicht diagonalisierbaren Matrix treten in der Jordan-Normalform zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ $2k \times 2k$ -Blöcke der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & & \\ -\beta & \alpha & 1 & & & \\ & & \alpha & \beta & & \\ & & -\beta & \alpha & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \alpha & \beta \\ & & & & & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k \times 2k}$$

auf. Hier sind die Komponenten von e^{tA} Linearkombinationen unter anderem der Funktionen $t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, $0 \leq j \leq k-1$.

- (iv) Wie man aus der Darstellung (4.17) abliest, hilft bei der Lösung eines inhomogenen Problems $x' = Ax + c$ häufig ein spezieller Ansatz, der die Gestalt von c , z.B. die eines Polynoms von Grad s , berücksichtigt.

Beispiel 4.16. Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung

$$x'(t) = Ax(t), \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Mit Satz 4.10 ist ein Fundamentalsystem gegeben durch $X(t) = e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, denn $X'(t) = AX(t)$ und wegen $X(0) = I$ und Lemma 4.4 ist $X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar. Um $X(t)$ explizit zu berechnen, bestimmen wir die Spektraleigenschaften von A , d.h. die Jordan-Normalform. Aus dem charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$$

liest man zunächst den algebraisch doppelten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und den algebraisch einfachen Eigenwert $\lambda_3 = 3$ ab. Die Bestimmung der Eigenvektoren zu $\lambda_{1/2} = 1$ führt auf

$$(I - A)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2v_3 = 0 \\ -v_1 - v_3 = 0 \\ -2v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also z.B. $v^1 := (0, 1, 0)^\top$. Da es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor zu $\lambda_{1/2} = 1$ gibt, ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda_{1/2}$ gleich 1, also kleiner als die algebraische Vielfachheit 2, d.h. in der Jordan-Normalform von A gibt es einen Jordanblock $\begin{pmatrix} \lambda_{1/2} & 1 \\ 0 & \lambda_{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und einen Hauptvektor zu v^1 , d.h. einen Vektor w mit $(\lambda I - A)w = v$.

Zu diesem Zeitpunkt wissen wir bereits, dass die Komponenten von e^{tA} Linearkombinationen von e^t , te^t und e^{3t} sind, und wir könnten mit einem passenden Ansatz weiterrechnen, was sich allerdings erst bei Anfangswertproblemen lohnt.

Wir fahren fort mit der Berechnung eines Hauptvektors w zum Eigenwert $\lambda_{1/2} = 1$. Er bestimmt sich durch

$$(\lambda I - A)w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} w = v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2w_3 = 0 \\ -w_1 - w_3 = 1 \\ -2w_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w = \begin{pmatrix} -1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also z.B. $w^1 = (-1, 0, 0)^\top$. Einen Eigenvektor zu $\lambda_3 = 3$ erhalten wir aus

$$(3I - A)v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 - 2v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_1 \end{pmatrix},$$

also z.B. $v^2 = (1, 1, 1)^\top$. Mit

$$X := (v^1 \ v^2 \ v^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt die Ähnlichkeit

$$A = X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X^{-1},$$

also mit Lemma 4.14

$$e^{zA} = X e^{z \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} X^{-1} = X \begin{pmatrix} e^z & 0 & 0 \\ e^z & e^z & 0 \\ 0 & 0 & e^{3z} \end{pmatrix} X^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Eine Fundamentalmatrix X mit $X(0) = I$ ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} X(t) = e^{tA} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^t & e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{3t} - e^t \\ te^t & e^t & e^{3t} - e^t - te^t \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5 Stetige und differenzierbare Abhängigkeit

Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in D$ und $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$. Wir untersuchen jetzt, inwiefern die (maximal fortgesetzte) Lösung $x \in C^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in (t_-, t_+) \quad (5.1)$$

stetig bzw. differenzierbar vom Datenvektor $(t_0, x_0, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times C(D)$ abhängt.

5.1 Stetige Abhängigkeit

Wir beginnen mit der ε - δ -Definition der Stetigkeit von x bezüglich (t_0, x_0, f) .

Definition 5.1. Die Lösung $x \in C^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^n)$ von (5.1) heißt stetig abhängig von $(t_0, x_0, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times C(D)$, wenn es zu jedem kompakten Intervall $I = [a, b] \subset (t_-, t_+)$ mit $t_0 \in (a, b)$ eine kompakte Umgebung $K \subset D$ des Graphen $G_I := \{(t, x(t)) : t \in I\}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für $(\tau_0, y_0) \in K$ und $g \in C(D, \mathbb{R}^n)$ die Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ von $y'(t) = g(t, y(t))$, $y(\tau_0) = y_0$ die Abschätzung

$$\sup_{t \in I} \|x(t) - y(t)\|_2 \leq \varepsilon$$

erfüllt, sofern

$$|t_0 - \tau_0| \leq \delta, \quad \|x_0 - y_0\| \leq \delta, \quad \sup_{(s,z) \in K} \|f(s, z) - g(s, z)\|_2 \leq \delta$$

erfüllt ist.

Satz 5.2. Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in D$ und $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments. Dann hängt die Lösung $x = x(t_0, x_0, f)$ von (5.1) stetig von den Daten (t_0, x_0, f) ab.

Beweis: Seien $I = [a, b] \subset (t_-, t_+)$ und $t_0 \in (a, b)$, und sei $y \in C^1((\tau_-, \tau_+), \mathbb{R}^n)$ die maximal fortgesetzte Lösung von $y'(t) = g(t, y(t))$, $y(\tau_0) = y_0$ mit o.B.d.A. $t_0 \in (\tau_-, \tau_+)$

(verschiebe dazu τ_0 nahe an t_0). Es folgt für alle $t \in (t_-, t_+) \cap (\tau_-, \tau_+)$ durch Integration

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds - \left(y_0 + \int_{\tau_0}^t g(s, y(s)) \, ds \right) \\ &= x_0 - y_0 - \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s)) \, ds + \int_{\tau_0}^t \left[f(s, x(s)) - g(s, y(s)) \right] \, ds \\ &= x_0 - y_0 - \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s)) \, ds + \int_{\tau_0}^t \left[f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \right] \, ds \\ &\quad + \int_{\tau_0}^t \left[f(s, y(s)) - g(s, y(s)) \right] \, ds. \end{aligned}$$

Wähle jetzt $\alpha, \eta > 0$ so, dass die kompakte Menge

$$K := \{(t, y) : t \in [a - \eta, b + \eta], \|x(t) - y\|_2 \leq \alpha\}$$

noch in D liegt sowie $[a - \eta, b + \eta] \subset (t_-, t_+)$ gilt. Wir beobachten, dass K den Graph von x auf $[a - \eta, b + \eta]$ enthält. Da K kompakt, ist $f|_K$ nach Lemma 3.2 Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$. Wegen der Stetigkeit von f existiert das Supremum

$$M := \sup_{(s,z) \in K} \|f(s, z)\|_2 \geq 0.$$

Wir wählen jetzt $\tau_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|t_0 - \tau_0|, \|x_0 - y_0\|_2 \leq \delta < \min\{\frac{\alpha}{1+M}, \eta\}$. Es folgt $(\tau_0, y_0) \in K$, denn einerseits gilt

$$a - \eta < t_0 - \eta < t_0 - \delta \leq \tau_0 \leq t_0 + \delta < t_0 + \eta < b + \eta,$$

sowie andererseits

$$\begin{aligned} \|x(\tau_0) - y_0\|_2 &\leq \|x(\tau_0) - x(t_0)\|_2 + \|x(t_0) - y_0\|_2 \\ &= \left\| \int_{\tau_0}^{t_0} f(s, x(s)) \, ds \right\|_2 + \|x_0 - y_0\|_2 \\ &\leq (M + 1)\delta \\ &< \alpha. \end{aligned}$$

Unter der Annahme

$$\sup_{(s,z) \in K} \|f(s, z) - g(s, z)\|_2 \leq \delta$$

folgt für $\tau_0 \leq t < \min\{b, \tau_+\}$ mit $(s, y(s)) \in K$ für alle $\tau_0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\|_2 &\leq \|x_0 - y_0\|_2 + M|t_0 - \tau_0| + L \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\|_2 \, ds + \delta|t - \tau_0| \\ &\leq (1 + M + b - a + 2\eta)\delta + L \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\|_2 \, ds. \end{aligned}$$

Das Gronwall-Lemma 3.12 liefert mit $C := 1 + M + b - a + 2\eta$ die Abschätzung

$$\|x(t) - y(t)\|_2 \leq C\delta e^{L(t-\tau_0)}, \quad \text{sofern } (t, y(t)) \in K.$$

Wir können $\delta > 0$ so klein wählen, dass die rechte Seite dieser Abschätzung immer echt kleiner als α bleibt. Angenommen, es existiere ein erstes $t_* \in [\tau_0, \min\{b, \tau_+\})$ mit $\|x(t_*) - y(t_*)\|_2 = \alpha$, d.h. der Graph von y verlasse K bei t_* . Wegen $(t_*, y(t_*)) \in K$ folgt aber aus obiger Abschätzung der Widerspruch $\|x(t_*) - y(t_*)\|_2 < \alpha$, d.h. der Graph von y kann K nicht verlassen und y existiert somit auf ganz $[\tau_0, b]$. Analog begründet man die Existenz von y auf ganz $[a, \tau_0]$, also gilt $(t, y(t)) \in K$ für alle $t \in I$ und folglich

$$\|x(t) - y(t)\| \leq C\delta e^{L|t-\tau_0|}, \quad \text{für alle } t \in I.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle $\delta > 0$ noch so klein, dass die rechte Seite dieser Ungleichung für alle $t \in I$ kleiner als $\varepsilon > 0$ bleibt, woraus schließlich die Stetigkeit von x bezüglich (t_0, x_0, f) folgt. \square

Alternativ kann man die Stetigkeit bezüglich (t_0, x_0, f) auch durch Folgen ausdrücken.

Korollar 5.3. *Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in D$, $f, f_k \in C(D, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitzstetig bezüglich des zweiten Arguments, und sei $x \in C^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^n)$ die maximal fortgesetzte Lösung von (5.1). Es gelte*

$$t_{k,0} \rightarrow t_0, \quad x_{k,0} \rightarrow x_0, \quad f_k \rightarrow f \text{ glm. auf Kompakta } K \subset D, \quad k \rightarrow \infty.$$

Ist dann $I = [a, b] \subset (t_-, t_+)$, so besitzt das Anfangswertproblem

$$x'_k(t) = f_k(t, x_k(t)), \quad x_k(t_{k,0}) = x_{k,0}, \quad \text{für alle } t \in I$$

für hinreichend großes k genau eine Lösung $x_k \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, und x_k konvergiert auf I gleichmäßig gegen x für $k \rightarrow \infty$.

Beispiel 5.4. *Im Räuber-Beute-Modell von Lotka/Volterra*

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{cases}, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (5.2)$$

vgl. Übung, hängt die Lösung $(x, y) \in C^1(\mathbb{R})^2$ stetig von den Parametern $t_0, x_0, y_0, \alpha, \beta, \gamma$ und δ ab.

5.2 Anwendungen der stetigen Abhängigkeit

Wir diskutieren im Folgenden verschiedene wichtige Anwendungen der stetigen Abhängigkeit.

5.2.1 Nicht strikte Differentialungleichungen

Das Ergebnis von Lemma 3.13 zu Unter- und Oberlösungen kann auf den Fall einer nicht strikten Differentialungleichung verallgemeinert werden.

Lemma 5.5. *Seien $t_0 < T$, $f \in C[t_0, T]$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y \in C^1[t_0, T]$ erfülle $y(t_0) \leq x_0$ bzw. $y(t_0) \geq x_0$ sowie die Differentialungleichung*

$$y'(t) \leq f(t, y(t)) \text{ bzw. } y'(t) \geq f(t, y(t)), \quad \text{für alle } t \in (t_0, T]. \quad (5.3)$$

Dann gilt für die Lösung $x \in C^1[t_0, T]$ des Anfangswertproblems (5.1) die Abschätzung

$$y(t) \leq x(t) \text{ bzw. } y(t) \geq x(t), \quad \text{für alle } t \in (t_0, T]. \quad (5.4)$$

Beweis: Wir zeigen o.B.d.A. nur den Fall „ \leq “. Setze $f_k(t, x) := f(t, x) + \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und sei $x_k \in C^1[t_0, T]$ die Lösung von $x'_k(t) = f_k(t, x_k(t))$, $x_k(t_0) = x_0 + \frac{1}{k}$. Es folgt $y(t_0) \leq x_0 < x_0 + \frac{1}{k}$ und $y'(t) \leq f(t, y(t)) < f(t, y(t)) + \frac{1}{k} = f_k(t, y(t))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \in (t_0, T]$, d.h. mit Lemma 3.13

$$y(t) < x_k(t), \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, t \in (t_0, T].$$

Nach Korollar 5.3 konvergiert x_k gleichmäßig gegen x , $k \rightarrow \infty$, so dass $y(t) \leq x(t)$ für alle $t \in (t_0, T]$. \square

5.2.2 Nichtnegativität von Lösungen

Zu einer Funktion $f \in C(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ und einem Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(x_0)_j \geq 0$ für $1 \leq j \leq n$ diskutieren wir jetzt, unter welchen Bedingungen an f eine Lösung $x \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ von (5.1) für $t_0 \leq t \leq T$ komponentenweise nichtnegativ bleibt.

Wir leiten zunächst ein notwendiges Kriterium her. Angenommen, für alle $t \in [t_0, t_+)$ und alle $1 \leq j \leq n$ gelte $(x(t))_j \geq 0$, und für ein gewisses $t \in [t_0, t_+)$ und ein gewisses $1 \leq j \leq n$ gelte $(x(t))_j = 0$. Dann muss

$$(f(t, x(t)))_j = (x'(t))_j \geq 0$$

gelten, da sonst aus $(x(t))_j = 0$ und $(x'(t))_j < 0$ wegen der stetigen Differenzierbarkeit von x auf $[t_0, t_+)$ schon $(x(s))_j < 0$ auf einem kleinen Intervall $(t, t + \delta) \subset [t_0, t_+)$ folgen würde. Dies motiviert die Bedingung (NN):

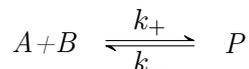
Zu $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y_j \geq 0$ für alle $1 \leq j \leq n$ und $t \in [t_0, T]$ gelte $(f(t, y))_j \geq 0$, falls $y_j = 0$. (NN)

Beispiel 5.6. (i) *Im Lotka-Volterra-Modell (5.2) ist*

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \\ -\gamma x_2 + \delta x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(\alpha - \beta x_2) \\ x_2(\delta x_1 - \gamma) \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,$$

also $(f(t, x))_j = 0$, falls $x_j = 0$, und (NN) ist erfüllt.

(ii) Eine chemische Gleichgewichtsreaktion zwischen Stoffen A , B und P



(z.B. Kristallisation und Lösen von Salzen) kann man modellieren als

$$\begin{cases} x'_A(t) = -k_+x_A(t)x_B(t) + k_-x_P(t) \\ x'_B(t) = -k_+x_A(t)x_B(t) + k_-x_P(t), \quad x_Z(t_0) = x_{Z,0}, \quad Z \in \{A, B, P\}, \\ x'_P(t) = k_+x_A(t)x_B(t) - k_-x_P(t) \end{cases} \quad (5.5)$$

mit Reaktionskonstanten $k_+, k_- > 0$. Dabei steht $x_Z(t)$ mit $Z \in \{A, B, P\}$ für die Konzentration der Substanz Z zum Zeitpunkt t . Die rechte Seite hat die Form

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} -k_+x_Ax_B + k_-x_P \\ -k_+x_Ax_B + k_-x_P \\ k_+x_Ax_B - k_-x_P \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_P \end{pmatrix}$$

und erfüllt die Bedingung (NN). Denn ist z.B. $x_A = 0$, $x_B \geq 0$, $x_P \geq 0$, folgt $(f(t, x))_A = -k_+x_Ax_B + k_-x_P = k_-x_P \geq 0$. Analog prüft man auch (NN) in den restlichen Koordinaten B , P .

Satz 5.7. $f \in C(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ sei lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments und erfülle die Bedingung NN. Ist x die Lösung von (5.1) mit $(x_0)_j \geq 0$ für alle $1 \leq j \leq n$, so folgt $(x(t))_j \geq 0$ für alle $1 \leq j \leq n$ und alle t aus dem maximalen Existenzintervall nach rechts $[t_0, t_+)$.

Beweis: Sei $[t_0, t_+)$ das maximale Existenzintervall nach rechts von (5.1). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und mit dem Vektor $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)^\top$ sei x_k die Lösung von

$$x'_k(t) = f(t, x_k(t)) + \frac{1}{k}\mathbf{1} =: f_k(t, x_k(t)), \quad x_k(t_0) = x_0 + \frac{1}{k}\mathbf{1} =: x_{k,0}, \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_+),$$

mit $(x_{k,0})_j \geq \frac{1}{k} > 0$ für alle $1 \leq j \leq n$. Da f nach Voraussetzung stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments ist, konvergiert $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen $K \subset D$, sowie $x_{k,0} \rightarrow x_0$ für $k \rightarrow \infty$. Nach Korollar 5.3 besitzt das Anfangswertproblem für x_k daher eine eindeutige Lösung, und x_k konvergiert auf kompakten Teilmengen von $[t_0, t_+)$ gleichmäßig gegen x , $k \rightarrow \infty$.

Sei $t_0 < t_1 < t_+$ der erste Zeitpunkt, bei dem eine Komponente von $x_k(t)$ verschwindet, also z.B. $(x_k(t_1))_j = 0$, mit $(x'_k(t_1))_j \leq 0$ aus Monotoniegründen. Aus (NN) erhalten wir aber wegen $(x_k(t_1))_j = 0$ und $(x_k(t_1))_\nu \geq 0$ für $\nu \neq j$

$$(x'_k(t_1))_j = (f(t_1, x_k(t_1)))_j + \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k} > 0,$$

also einen Widerspruch. Es folgt $(x_k(t))_j > 0$ für alle $t \in [t_0, t_+)$ und alle $1 \leq j \leq n$. Mit $k \rightarrow \infty$ folgt $(x(t))_j \geq 0$ für alle $t \in [t_0, t_+)$ und alle $1 \leq j \leq n$. \square

5.3 Differenzierbarkeit nach den Daten

Wir untersuchen jetzt die Lösungsabbildung $(t_0, x_0, f) \mapsto x = x(\cdot; t_0, x_0, f)$ von (5.1) auf stetige Differenzierbarkeit nach allen Parametern.

5.3.1 Autonome Probleme

Sei zunächst die rechte Seite von (5.1) autonom, mit Anfangswert $x_0 =: y \in \mathbb{R}^n$, d.h. betrachte

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = y, \quad \text{für alle } t \in (t_-, t_+), \quad (5.6)$$

wobei $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $y \in D$. Wegen der Regularität von f , Lemma 3.5 und Satz 3.6 existiert eine eindeutige Lösung $x = x(\cdot; y) \in C^1([t_0, t_+(y)])$ von (5.6). Zur Differenzierbarkeit von x nach y notieren wir folgendes Ergebnis.

Satz 5.8. *Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und sei $x = x(\cdot; y) \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ die Lösung von (5.6) auf einem Intervall $[t_0, T] \subset [t_0, t_+(y))$. Dann ist die Abbildung $(t, y) \mapsto x(t, y)$ stetig differenzierbar, und die partielle Ableitung $X(t; y) := \frac{\partial x}{\partial y}(t, y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ löst für jedes $y \in D$ das homogene lineare Anfangswertproblem*

$$X'(t) = f'(x(t; y))X(t), \quad X(t_0) = I, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \quad (5.7)$$

Beweis: Sei $y \in D$ fest und $\delta > 0$ so klein, dass die offene Kugel $B_\delta(y) := \{z \in \mathbb{R}^n : \|y - z\|_2 < \delta\}$ noch in D enthalten ist. Sei $X = X(\cdot; y)$ die Lösung von (5.7). Nach Satz 5.2 kann man o.B.d.A. δ so klein wählen, dass für jedes $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\|_2 < \delta$ die Lösung $x(\cdot; y + h)$ von (5.6) auf ganz $[t_0, T]$ existiert. Wir können daher definieren

$$u_h(t) := x(t; y + h) - x(t; y) - X(t)h, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Zu zeigen ist, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\eta(\epsilon) > 0$ existiert, so dass $\|u_h(t)\|_2 \leq \epsilon \|h\|_2$ für $\|h\|_2 \leq \eta(\epsilon)$. Hierzu leiten wir eine Differentialgleichung für u_h her:

$$\begin{aligned} u_h'(t) &= x'(t; y + h) - x'(t; y) - X'(t)h \\ &= f(x(t; y + h)) - f(x(t; y)) - f'(x(t; y))X(t)h \\ &= f'(x(t; y))u_h(t) + \underbrace{f(x(t; y + h)) - f(x(t; y)) - f'(x(t; y))(x(t; y + h) - x(t; y))}_{=: r_h(t)}, \end{aligned}$$

d.h. u_h löst das lineare inhomogene Anfangswertproblem

$$u_h'(t) = f'(x(t; y))u_h(t) + r_h(t), \quad u_h(t_0) = 0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T],$$

und muss daher wegen Korollar 4.11 die Darstellung

$$u_h(t) = X(t) \int_{t_0}^t X(s)^{-1} r_h(s) ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]$$

besitzen. $X(t)$ ist für alle $t \in [t_0, T]$ invertierbar (Lemma 4.4), und die Abbildung $t \mapsto X(t)^{-1}$ ist dort stetig (Lemma 4.4, Cramersche Regel). Also existieren die Suprema

$$M_1 := \sup_{t \in [t_0, T]} \|X(t)\|_2, \quad M_2 := \sup_{t \in [t_0, T]} \|X(t)^{-1}\|_2,$$

so dass

$$\|u_h(t)\|_2 \leq M_1 M_2 \int_{t_0}^t \|r_h(s)\|_2 \, ds, \quad \text{für alle } t \in [t_0, T].$$

Da f stetig und lokal Lipschitz-stetig (in x) ist, folgt mit Satz 5.2 die gleichmäßige Konvergenz von $x(\cdot; y+h)$ auf $[t_0, T]$ gegen $x(\cdot; y)$ für $h \rightarrow 0$. Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von f auf D gilt für jedes $t \in [t_0, T]$ und alle $y \in D$ die Integraldarstellung (Taylorentwicklung)

$$f(x(t; y+h)) - f(x(t; y)) = \int_0^1 f'(x(t; y) + s(x(t; y+h) - x(t; y))) \, ds (x(t; y+h) - x(t; y)),$$

also wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f' auf kompakten Teilmengen von D

$$\begin{aligned} & \|r_h(t)\|_2 \\ &= \left\| \int_0^1 \left(f'(x(t; y) + s(x(t; y+h) - x(t; y))) - f'(x(t; y)) \right) \, ds (x(t; y+h) - x(t; y)) \right\|_2 \\ &\leq \left\| \int_0^1 \left(f'(x(t; y) + s(x(t; y+h) - x(t; y))) - f'(x(t; y)) \right) \, ds \right\|_2 \|x(t; y+h) - x(t; y)\|_2 \\ &\leq \epsilon \|x(t; y+h) - x(t; y)\|_2, \quad \text{sobald } \|h\|_2 \leq \eta(\epsilon), \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

Mit der Definition von u_h folgt

$$\begin{aligned} \|r_h(t)\|_2 &\leq \epsilon \|u_h(t)\|_2 + \epsilon \|X(t)h\|_2 \\ &\leq \epsilon \|u_h(t)\|_2 + \epsilon M_1 \|h\|_2, \quad \text{sobald } \|h\|_2 \leq \eta(\epsilon), \quad t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

und wir erhalten durch Rückeinsetzen eine Integralungleichung für u_h :

$$\begin{aligned} \|u_h(t)\|_2 &\leq \epsilon M_1 M_2 \int_{t_0}^t (\|u_h(s)\|_2 + M_1 \|h\|_2) \, ds \\ &\leq \epsilon (T - t_0) M_1^2 M_2 \|h\|_2 + \epsilon M_1 M_2 \int_{t_0}^t \|u_h(s)\|_2 \, ds, \end{aligned}$$

sobald $\|h\|_2 \leq \eta(\epsilon)$ und $t \in [t_0, T]$. Mit der Gronwall-Ungleichung (3.9) folgt

$$\|u_h(t)\|_2 \leq \epsilon (T - t_0) M_1^2 M_2 \|h\|_2 e^{\epsilon M_1 M_2 (t - t_0)} \leq C \epsilon \|h\|_2, \quad \text{sobald } \|h\|_2 \leq \eta(\epsilon), \quad t \in [t_0, T],$$

mit $C := (T - t_0) M_1^2 M_2 e^{\epsilon M_1 M_2 (T - t_0)}$. Wegen $\|u_h(t)\|_2 = o(\|h\|_2)$ für $h \rightarrow 0$ folgt die Differenzierbarkeit von x nach y , und $\frac{\partial x}{\partial y}(\cdot; y) = X(\cdot; y)$ ist als Lösung des linearen Anfangswertproblems (5.7) mit von y stetig abhängigen Koeffizienten nach Satz 5.2 stetig von y abhängig. \square

Die Differenzierbarkeit von x bezüglich t_0 und f klären wir im nächsten Abschnitt.

Beispiel 5.9. Betrachte das lineare Anfangswertproblem (3.5) mit $t_0 = \tau$, $x_0 = y$ und stetig differenzierbaren Koeffizienten $A : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $c : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$x'(t) = A(t)x(t) + c(t) =: f(t, x(t)), \quad x(\tau) = y, \quad \text{für alle } t \in [\tau, T].$$

Dieses nicht autonome Anfangswertproblem kann mit Hilfe von $z(t) := \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$ äquivalent in das autonome Anfangswertproblem

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(z(t)) \end{pmatrix} =: F(z(t)), \quad z(\tau) = \begin{pmatrix} \tau \\ y \end{pmatrix} =: \eta, \quad \text{für alle } t \in [\tau, T]$$

für z umgeformt werden. Wegen Satz 5.8 und der speziellen Form von F löst $Z := \frac{\partial z}{\partial \eta}$ das lineare Anfangswertproblem

$$Z'(t) = F'(z(t))Z(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0^\top \\ f_t(z(t)) & f_x(z(t)) \end{pmatrix} Z(t), \quad Z(t_0) = I, \quad \text{für alle } t \in [\tau, T].$$

Da die erste Zeile von $F'(z)$ verschwindet, ist die erste Zeile von $Z'(t)$ konstant gleich dem Nullvektor, so dass $Z_{1,1}(t) = Z_{1,1}(\tau) = 1$ und $Z_{1,2}(t) = 0$ bzw. $Z_{1,2}(\tau) = 0^\top$ für alle $t \in [\tau, T]$. Rückeinsetzen liefert für die restlichen Komponentenfunktionen von Z

$$\begin{aligned} Z'_{2,1}(t) &= f_t(z(t)) + f_x(z(t))Z_{2,1}(t), & Z_{2,1}(\tau) &= 0, \\ Z'_{2,2}(t) &= f_x(z(t))Z_{2,2}(t), & Z_{2,2}(\tau) &= I, \end{aligned}$$

also löst die Ableitung $X = \frac{\partial x}{\partial y} = Z_{2,2}$ von $x = x(\cdot; y)$ nach y das homogene Anfangswertproblem

$$X'(t) = f_x(t, z(t))X(t) = A(t)X(t), \quad X(\tau) = I,$$

d.h. X ist eine Hauptfundamentalmatrix in τ . Ist die Koeffizientenfunktion A konstant, z.B. $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so erhalten wir $X(t) = e^{(t-\tau)A}$ für alle $t \in [\tau, T]$.

5.3.2 Nichtautonome Probleme

Wir diskutieren jetzt die stetige Differenzierbarkeit der Lösung $x = x(\cdot; \tau, y, p)$ von (5.1) bezüglich des Anfangswerts $x_0 := y$, des Anfangszeitpunkts $t_0 := \tau$ und bezüglich eines in der rechten Seite $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ variierenden Parameters $p \in \mathbb{R}^k$, d.h.

$$x'(t) = f(t, x(t), p), \quad x(\tau) = y, \quad \text{für alle } t \in (t_-, t_+). \quad (5.8)$$

Satz 5.10. Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $(\tau, y, p) \in D$. Dann ist die Lösung $x = x(\cdot; \tau, y, p)$ von (5.8) bezüglich aller Parameter stetig differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $u := \frac{\partial x}{\partial \tau}$, $V := \frac{\partial x}{\partial y}$ und $W := \frac{\partial x}{\partial p}$ erfüllen das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), p)u(t), & u(\tau) = -f(\tau, y, p), \\ V'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), p)V(t), & V(\tau) = I, \\ W'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), p)W(t) + \frac{\partial f}{\partial p}(t, x(t), p), & W(\tau) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Beweis: Wir transformieren (5.8) in ein äquivalentes autonomes Anfangswertproblem, um Satz 5.8 anwenden zu können. Hierzu definieren wir den Parametervektor

$$\eta := \begin{pmatrix} \tau \\ y \\ p \end{pmatrix} \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$$

sowie die $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ -wertige Hilfsfunktion

$$z(s) := z(s; \eta) := \begin{pmatrix} \tau + s \\ x(\tau + s; \tau, y, p) \\ p \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } s \in (t_- - \tau, t_+ - \tau) =: (s_-, s_+).$$

Wir lassen im Folgenden die explizite Angabe der Parameter τ, y, p weg. Die gesuchten Größen $u = \frac{\partial x}{\partial \tau}$, $V = \frac{\partial x}{\partial y}$, $W = \frac{\partial x}{\partial p}$ lassen sich dann mit der Kettenregel wegen

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ x'(\tau + s) + u(\tau + s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ v(\tau + s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial z}{\partial p}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ w(\tau + s) \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus der Ableitung $Z := \frac{\partial z}{\partial \eta}$ von $z = z(\cdot; \eta)$ nach dem Anfangswert η berechnen:

$$u(\tau + s) = Z_{2,1}(s) - x'(\tau + s), \quad V(\tau + s) = Z_{2,2}(s), \quad W(\tau + s) = Z_{2,3}(s). \quad (5.10)$$

Nach Definition von z gilt $z(0) = \eta$ sowie

$$\begin{aligned} z'(s) &= \begin{pmatrix} 1 \\ x'(\tau + s; \tau, y, p) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ f(\tau + s, x(\tau + s; \tau, y, p), p) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ f(z_1(s), z_2(s), z_3(s)) \\ 0 \end{pmatrix} =: F(z(s)), \end{aligned}$$

also löst $z = z(\cdot; \eta)$ das autonome Anfangswertproblem

$$z'(s) = F(z(s)), \quad z(0) = \eta, \quad \text{für alle } s \in (s_-, s_+).$$

Da F stetig differenzierbare Komponentenfunktionen besitzt, liefert Satz 5.8 die stetige Differenzierbarkeit von $z = z(\cdot; \eta)$ nach dem Anfangswert η . Die Ableitung $Z = \frac{\partial z}{\partial \eta}$ löst auf (s_-, s_+) das lineare Anfangswertproblem

$$Z'(s) = F'(z(s; \eta))Z(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(z(s)) & \frac{\partial f}{\partial x}(z(s)) & \frac{\partial f}{\partial p}(z(s)) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z(s), \quad Z(0) = I.$$

Folglich sind die erste und die letzte Zeile von Z konstant gleich $(1 \ 0 \ 0)$ bzw. $(0 \ 0 \ 1)$, was wir ja schon weiter oben gesehen haben. Rückeinsetzen liefert für die restlichen Komponenten von Z die Bedingungen

$$\begin{aligned} Z'_{2,1}(s) &= \frac{\partial f}{\partial t}(z(s)) + \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))Z_{2,1}(s), & Z_{2,1}(0) &= 0, \\ Z'_{2,2}(s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))Z_{2,2}(s), & Z_{2,2}(0) &= 1, \\ Z'_{2,3}(s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))Z_{2,3}(s) + \frac{\partial f}{\partial p}(z(s)), & Z_{2,3}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit (5.10) durch Differenzieren nach s

$$\begin{aligned} u'(\tau + s) &= Z'_{2,1}(s) - x''(\tau + s) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(z(s)) + \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))Z_{2,1}(s) - \frac{\partial}{\partial s} \left(f(z(s)) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(z(s)) + \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))Z_{2,1}(s) - \left(\frac{\partial f}{\partial t}(z(s)) + \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))x'(\tau + s) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))u(\tau + s), \end{aligned}$$

und

$$u(\tau) = Z_{2,1}(0) - x'(\tau) = 0 - f(\tau, x(\tau), p) = -f(\tau, y, p),$$

ferner

$$\begin{aligned} V'(\tau + s) &= Z'_{2,2}(s) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))Z_{2,2}(s) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))V(\tau + s), \end{aligned}$$

und

$$V(\tau) = Z_{2,2}(0) = 1,$$

sowie

$$\begin{aligned} W'(\tau + s) &= Z'_{2,3}(s) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))Z_{2,3}(s) + \frac{\partial f}{\partial p}(z(s)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z(s))W(\tau + s) + \frac{\partial f}{\partial p}(z(s)), \end{aligned}$$

und

$$W(\tau) = Z_{2,3}(0) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir also (5.9), wobei $t = \tau + s$. □

Beispiel 5.11. Wir betrachten das skalierte Räuber-Beute-Modell (vgl. Übungsaufgabe),

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) = -\gamma y(t) + x(t)y(t) \end{cases}, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

und bestimmen ein Anfangswertproblem für die Ableitung des Lösungsvektors $z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nach γ . Bezeichne

$$f(t, z, \gamma) := \begin{pmatrix} z_1 - z_1 z_2 \\ -\gamma z_2 + z_1 z_2 \end{pmatrix}$$

sowie $W := \frac{\partial z}{\partial \gamma}$, so dass $\frac{\partial x}{\partial \gamma} = W_{1,1}$. Nach Satz 5.8 gilt $W(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie für $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{\partial f}{\partial z}(t, z(t), \gamma)W(t) + \frac{\partial f}{\partial \gamma}(t, z(t), \gamma) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - z_2(t) & -z_1(t) \\ z_2(t) & -\gamma + z_1(t) \end{pmatrix} W(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -z_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

was durch das Auftauchen von $z = z(\cdot; \gamma)$ in der Koeffizientenmatrix nicht ohne weiteres direkt nach $W = W(\cdot; \gamma)$ auflösbar ist.

6 Stabilitätstheorie

Wir klären in diesem Kapitel die Frage, wie sich das Langzeitverhalten von Lösungen des Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, \infty) \quad (6.1)$$

bei Störungen des Anfangsvektors x_0 verändert: z.B. werden kleine Störungen in x_0 für $t \rightarrow \infty$ gedämpft, bleiben sie quantitativ gleich oder driften exakte Lösung und Lösung zu gestörtem Anfangswert beliebig weit auseinander. Betrachtet man zu Anfangswerten $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ die Differenzfunktion $y := x(\cdot; \tilde{x}_0) - x(\cdot; x_0)$, so löst die Störung y das Anfangswertproblem (*Störungsgleichung*)

$$\begin{aligned} y'(t) &= x'(t; \tilde{x}_0) - x'(t; x_0) \\ &= f(t, x(t; \tilde{x}_0)) - f(t, x(t; x_0)) \\ &= f(t, y(t) + x(t; x_0)) - f(t, x(t; x_0)) \\ &=: g(t, y(t)), \quad y(t_0) = \tilde{x}_0 - x_0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

mit $g(t, 0) = 0$. Es genügt also, o.B.d.A. nur den Fall $f(t, 0) = 0$ zu betrachten und kleine Störungen des Anfangswerts $x_0 = 0$, der wegen $f(t, 0) = 0$ eine konstante *Gleichgewichtslösung* $y(t; 0) = 0$ für alle $t \geq t_0$ induziert.

6.1 Stabilität von Gleichgewichtslösungen

Wir beginnen mit der Definition einer Gleichgewichtslösung und verschiedener Stabilitätsbegriffe.

Definition 6.1. $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt Gleichgewicht oder Gleichgewichtslösung von (6.1), wenn die konstante Funktion $x(t) := \hat{x}$, für alle $t \geq t_0$, das Anfangswertproblem (6.1) mit $x_0 = \hat{x}$ löst.

Definition 6.2. Ein Gleichgewicht $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von (6.1) heißt

(i) stabil, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x_0 \in K_\delta(\hat{x})$ eine eindeutige Lösung $x = x(\cdot; x_0)$ von (6.1) auf $[t_0, \infty)$ existiert mit

$$\|x(t; x_0) - \hat{x}\|_2 \leq \epsilon, \quad \text{für alle } t \geq t_0 \text{ und alle } x_0 \in K_\delta(\hat{x}); \quad (6.3)$$

(ii) instabil, wenn \hat{x} nicht stabil ist;

(iii) attraktiv, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x_0 \in K_\delta(\hat{x})$ eine eindeutige Lösung $x = x(\cdot; x_0)$ von (6.3) auf $[t_0, \infty)$ existiert mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = \hat{x}, \quad \text{für alle } x_0 \in K_\delta(\hat{x}); \quad (6.4)$$

(iv) asymptotisch stabil, wenn \hat{x} stabil und attraktiv ist.

Bemerkung 6.3. (i) Die Stabilität eines Gleichgewichts $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ist äquivalent zur stetigen Abhängigkeit der Lösung $x = x(\cdot; x_0)$ vom Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ auf $[t_0, \infty)$ in einer Umgebung von \hat{x} , da (6.3) äquivalent ist zu

$$\lim_{x_0 \rightarrow \hat{x}} \|x(t, x_0) - \hat{x}\|_2 = 0 \quad \text{gleichmäßig bezüglich } t \geq t_0.$$

(ii) Zwischen Stabilität und Attraktivität eines Gleichgewichts $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt es keine Beziehungen. Zum einen gibt es Anfangswertprobleme mit stabilen Gleichgewichten, die nicht attraktiv sind, z.B. im Fall periodischer Lösungen in der Nähe des Gleichgewichts/Ruhelage:

- mathematisches Pendel ohne Dämpfung, siehe Beispiel 1.3
- Räuber-Beute-System, siehe Beispiel 5.4

Zum anderen gibt es Beispiele für Anfangswertprobleme mit attraktiven Gleichgewichten, in deren Nähe Lösungskurven beliebig weit weglaufer können (d.h. jeden ϵ -Schlauch verlassen würden), aber dann trotzdem für $t \rightarrow \infty$ gegen das Gleichgewicht konvergieren. Ein zweidimensionales Beispiel wurde von Vinograd 1957 angegeben, siehe Abbildung 6.1 für das entsprechende Phasenportrait und auch Übungsaufgabe 24.

Beispiel 6.4. (i) Das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \alpha x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{für alle } t \geq t_0,$$

besitzt das Gleichgewicht $\hat{x} = 0$, es ist einziges Gleichgewicht für $\alpha \neq 0$. Die exakte Lösung lautet $x(t; x_0) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ für alle $t \geq t_0$ und ist

- stabil für $\alpha \leq 0$, da dann

$$|x(t; x_0) - \hat{x}| = |x(t; x_0)| = |x_0| |e^{\alpha(t-t_0)}| \leq |x_0| = |x_0 - \hat{x}| \leq \delta := \epsilon, \quad t \geq t_0;$$

- instabil für $\alpha > 0$, da dann

$$|x(t; x_0) - \hat{x}| = |x(t; x_0)| = \underbrace{|x_0|}_{>0} \underbrace{|e^{\alpha(t-t_0)}|}_{\rightarrow \infty, t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad x_0 \neq 0 = \hat{x};$$

- attraktiv für $\alpha < 0$, da dann

$$|x(t; x_0) - \hat{x}| = |x(t; x_0)| = |x_0| \underbrace{|e^{\alpha(t-t_0)}|}_{\rightarrow 0, t \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

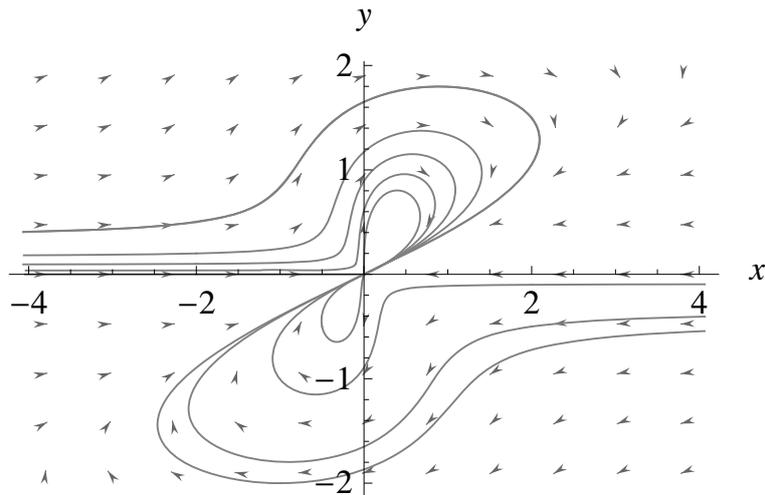


Abbildung 6.1: Phasenportrait des Beispiels von Vinograd für ein attraktives und nicht stabiles Gleichgewicht $(\hat{x}, \hat{y})^\top = (0, 0)^\top$.

- *Das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = -x(t)^3, \quad x(0) = x_0, \quad \text{für alle } t \geq t_0 := 0,$$

besitzt die exakte Lösung

$$x(t; x_0) = \frac{\operatorname{sgn} x_0}{\sqrt{2t + \frac{1}{x_0^2}}}, \quad t > -\frac{1}{2x_0^2},$$

wie man z.B. mit Trennung der Variablen berechnet. Die Gleichgewichtsbedingung $0 = f(t, \hat{x}) = -\hat{x}^3$ liefert $\hat{x} = 0$ als einziges Gleichgewicht. Für $|x_0 - \hat{x}| = |x_0| \leq \delta$ und $t \geq 0$ rechnet man

$$|x(t; x_0) - \hat{x}| = |x(t; x_0)| = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x_0^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1x_0^2}} = |x_0| \leq \delta := \epsilon,$$

d.h. $\hat{x} = 0$ ist stabil. Wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; x_0)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x_0^2}}} = 0$$

ist $\hat{x} = 0$ auch asymptotisch stabil.

- Beim mathematischen Pendel ohne Dämpfung mit $\omega^2 = \frac{g}{L}$, vgl. Beispiel 1.3,

$$x''(t) + \omega^2 \sin x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0, \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

ergeben sich zeitlich periodische Lösungen, da die Pendelenergie

$$H(x, x') := \frac{1}{2}(x')^2 - \omega^2 \cos x$$

entlang einer (geschlossenen) Lösungskurve konstant bleibt:

$$\frac{d}{dt} \left(H(x(t), x'(t)) \right) = \omega^2 x'(t) \cos x(t) + x'(t)x''(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

und die Höhenlinien von $H(x, x')$ in der Nähe des Nullpunkts $x = x' = 0$ sind geschlossen, da die Hessematrix $\nabla^2 H(x, x') = \begin{pmatrix} \omega^2 \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $|x| < \pi$ positiv definit ist und H somit in diesem Bereich konvex ist. Gleichgewichte kann man berechnen, indem man zum äquivalenten System erster Ordnung für $y = (x, x')^\top$ übergeht,

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\omega^2 \sin y_1(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Für ein Gleichgewicht \hat{y} folgen die Bedingungen $\hat{y}_2 = 0$ und $-\omega^2 \sin \hat{y}_1 = 0$, also $\hat{y}_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Auf Grund der 2π -Periodizität (y_1 ist Winkel) erhalten wir die beiden Gleichgewichte $\hat{y} = (0, 0)^\top \leftrightarrow \hat{x} = 0$ (untere Ruhelage) und $\hat{y} = (\pi, 0)^\top \leftrightarrow \hat{x} = \pi$ (obere Ruhelage). Die untere Ruhelage $\hat{y} = (0, 0)^\top$ ist nicht attraktiv wegen der Periodizität von $y(\cdot; y_0)$. Die Stabilität der unteren Ruhelage $\hat{y} = (0, 0)^\top$ ist intuitiv klar und benutzt entweder die Konvexität von H in einer Nullumgebung (Höhenlinien/Niveaumengen von H sind geschichtet) oder H als Ljapunov-Funktion (s.u.). Die Instabilität der oberen Ruhelage $\hat{y} = (\pi, 0)^\top$ folgt daraus, dass H dort einen Sattelpunkt besitzt (Hesse-Matrix ist indefinit), mit Hilfe der Deutung von H als Ljapunov-Funktion (s.u.).

Bei der linearisierten Pendelgleichung für kleine Auslenkungen ($\sin z \approx z$)

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0, \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

kann man sofort die $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodische Lösung $x(t) = x(t; x_0) = x_0 \cos \omega t$ ablesen. Es existiert nur das Gleichgewicht $\hat{x} = 0$, und dieses ist auch stabil wegen $|x(t; x_0)| \leq |x_0|$ für alle $t \geq 0$. Wegen der Periodizität ist $\hat{x} = 0$ nicht stabil.

6.2 Homogene lineare Differentialgleichungen

Wir untersuchen jetzt die Stabilität des Gleichgewichts $\hat{x} = 0$ eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \in [t_0, \infty), \quad (6.5)$$

wobei $A \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, speziell auch im Fall konstanter Koeffizienten $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für alle $t \geq t_0$. Wir zeigen zunächst u.a., dass bei linearen Systemen die Begriffe *attraktiv* und *asymptotisch stabil* zusammen fallen, denn aus $X(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ folgt die Beschränktheit von $\|X(t)\|_2$ für alle $t \geq t_0$.

Satz 6.5. Sei $X \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ eine Fundamentalmatrix für (6.5). Dann gilt:

(i) $\hat{x} = 0$ ist genau dann stabil, wenn $\sup_{t \geq t_0} \|X(t)\|_2 < \infty$.

(ii) $\hat{x} = 0$ ist genau dann attraktiv, wenn $\|X(t)\|_2 \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Beweis:

(i) Sei $\hat{x} = 0$ stabil. Dann gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $\delta = \delta(1) > 0$, so dass

$$\|x(t; x_0)\|_2 = \|X(t)X(t_0)^{-1}x_0\|_2 \leq 1, \quad \text{für alle } \|x_0\|_2 \leq \delta, t \geq t_0.$$

Für beliebiges $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ folgt mit $x_0 := \frac{\delta X(t_0)v}{\|X(t_0)v\|_2}$, d.h. $v = \frac{1}{\delta} \|X(t_0)v\|_2 X(t_0)^{-1}x_0$

$$\|X(t)v\|_2 = \frac{1}{\delta} \|X(t_0)v\|_2 \|X(t)X(t_0)^{-1}x_0\|_2 \leq \frac{1}{\delta} \|X(t_0)v\|_2 \leq \frac{1}{\delta} \|X(t_0)\|_2 \|v\|_2,$$

d.h. $\|X(t)\|_2 \leq \frac{1}{\delta} \|X(t_0)\|_2$ für alle $t \geq t_0$.

Es gelte umgekehrt $\|X(t)\|_2 \leq M$ für alle $t \geq t_0$, $\epsilon > 0$ sei vorgegeben und setze $\delta := \frac{\epsilon}{M\|X(t_0)^{-1}\|_2}$. Dann gilt für alle $\|x_0\|_2 \leq \delta$ und $t \geq t_0$

$$\|x(t; x_0)\|_2 \leq \|X(t)\|_2 \|X(t_0)^{-1}\|_2 \|x_0\|_2 \leq M \|X(t_0)^{-1}\|_2 \delta = \epsilon.$$

(ii) Sei $\hat{x} = 0$ attraktiv. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|x(t; x_0)\|_2 = \|X(t)X(t_0)^{-1}x_0\|_2 \rightarrow 0, \quad \text{für alle } \|x_0\|_2 \leq \delta, t \rightarrow \infty.$$

Wie im Teil (i) folgt für alle $v \in \mathbb{R}^n$, dass $X(t)v \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, also auch nach Anwenden auf $v \in \{e_1, \dots, e_n\}$ die Konvergenz in Matrixnorm, $\|X(t)\|_2 \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Es gelte umgekehrt $\|X(t)\|_2 \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Dann folgt für alle $\|x_0\|_2 \leq \delta$ mit beliebigem $\delta > 0$

$$\|x(t; x_0)\|_2 \leq \|X(t)\|_2 \|X(t_0)^{-1}\|_2 \|x_0\|_2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

□

Für den Fall konstanter Koeffizienten $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \geq t_0$, überlegen wir uns zunächst, dass die Stabilitätsbegriffe unter Koordinatentransformationen invariant bleiben.

Lemma 6.6. Sei $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für alle $t \geq t_0$, und sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Dann ist das Gleichgewicht $\hat{x} = 0$ von

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \geq t_0, \quad (6.6)$$

genau dann stabil bzw. attraktiv, wenn das Gleichgewicht $\hat{y} = 0$ von

$$y'(t) = B^{-1}ABy(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad \text{für alle } t \geq t_0, \quad (6.7)$$

stabil bzw. attraktiv ist.

Beweis: Die Lösungen von (6.6) bzw. (6.7) lauten

$$x(t; x_0) = e^{(t-t_0)A}x_0, \quad \text{für alle } t \geq t_0,$$

bzw.

$$y(t; x_0) = e^{(t-t_0)B^{-1}AB}y_0 = B^{-1}e^{(t-t_0)A}By_0 = B^{-1}x(t; By_0), \quad \text{für alle } t \geq t_0,$$

wobei wir (4.19) benutzt haben. Die Behauptung folgt daher aus den Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|y(t; y_0)\|_2 &\leq \|B^{-1}\|_2 \|x(t; By_0)\|_2, \\ \|x(t; y_0)\|_2 &\leq \|B\|_2 \|y(t; B^{-1}x_0)\|_2, \quad \text{für alle } t \geq t_0. \end{aligned}$$

□

Die Stabilitätseigenschaften des Gleichgewichts $\hat{x} = 0$ von (6.6) kann man daher mit Hilfe der Jordan-Normalform von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ klären, vgl. Lemma 4.14 und Bemerkung 4.15.

Korollar 6.7. Sei $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für alle $t \geq t_0$. Dann gilt:

- (i) $\hat{x} = 0$ ist genau dann stabil, wenn $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ für alle Eigenwerte λ_j von A , und im Fall $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ ist λ_j halbeinfach (d.h. geometrische Vielfachheit entspricht der algebraischen Vielfachheit/es gibt nur 1×1 -Jordankästchen).
- (ii) $\hat{x} = 0$ ist genau dann attraktiv, wenn $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für alle Eigenwerte λ_j von A .

Beweis:

- (i) Die Stabilität von $\hat{x} = 0$ ist mit Satz 6.5 äquivalent zu $\sup_{t \geq t_0} \|e^{tA}\|_2 < \infty$ bzw. zu $\sup_{t \geq t_0} \|e^{tJ}\|_2 < \infty$ für jeden Jordanblock J von A . Wir betrachten die Fälle aus Lemma 4.14 bzw. Bemerkung 4.15.
 - Ist A reell diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, so ist e^{tA} ähnlich zu $\operatorname{diag}(e^{t\lambda_j})_{1 \leq j \leq n}$, und $\sup_{t \geq t_0} |e^{t\lambda_j}| < \infty$ ist äquivalent zu $\lambda_j \leq 0$.
 - Tauchen zum Eigenwert $\lambda_j \in \mathbb{R}$ in der Jordan-Normalform von A $k \times k$ -Jordanblöcke auf, so sind die Komponenten von e^{tA} Linearkombinationen unter anderem der Funktionen $t^\nu e^{\lambda_j t}$, $0 \leq \nu \leq k-1$. Notwendig und hinreichend für deren Beschränktheit ist $\lambda_j \leq 0$, im Fall $k \geq 2$ sogar $\lambda_j < 0$ (da dann ein wachsender Polynomanteil übrigbleibt).
 - Bei komplexen Eigenwerten $\lambda_j = \operatorname{Re} \lambda_j + i \operatorname{Im} \lambda_j \in \mathbb{C}$ und $2k \times 2k$ -Blöcken in der reellen Jordan-Normalform sind die Komponenten von e^{tA} Linearkombinationen unter anderem von $t^\nu e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} \cos(t \operatorname{Im} \lambda_j)$ bzw. $t^\nu e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} \sin(t \operatorname{Im} \lambda_j)$, $0 \leq \nu \leq k-1$. Deren Beschränktheit ist äquivalent zu $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ wegen des Polynomanteils.
- (ii) Die Attraktivität von $\hat{x} = 0$ ist mit Satz 6.5 äquivalent zu $e^{tA} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, bzw. zu $e^{tJ} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ für jeden Jordanblock J von A . Wir betrachten wieder die drei möglichen Fälle:

- Ist A reell diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, so ist e^{tA} ähnlich zu $\text{diag}(e^{t\lambda_j})_{1 \leq j \leq n}$, und $e^{t\lambda_j} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ ist äquivalent zu $\lambda_j < 0$.
- Bei reellen $k \times k$ -Jordanblöcken sind die Komponenten von e^{tA} Linearkombinationen unter anderem der Funktionen $t^\nu e^{\lambda_k t}$, $0 \leq \nu \leq k-1$. Notwendig und hinreichend für deren Konvergenz gegen 0 für $t \rightarrow \infty$ ist $\lambda_j < 0$, wegen des Polynomanteils.
- Bei komplexen Eigenwerten $\lambda_j = \text{Re } \lambda_j + i \text{Im } \lambda_j \in \mathbb{C}$ und $2k \times 2k$ -Blöcken in der reellen Jordan-Normalform sind die Komponenten von e^{tA} Linearkombinationen unter anderem von $t^\nu e^{t \text{Re } \lambda_j} \cos(t \text{Im } \lambda_j)$ bzw. $t^\nu e^{t \text{Re } \lambda_j} \sin(t \text{Im } \lambda_j)$, $0 \leq \nu \leq k-1$. Deren Konvergenz gegen 0 für $t \rightarrow \infty$ ist äquivalent zu $\text{Re } \lambda_j < 0$, wegen des Polynomanteils.

□

Beispiel 6.8. Ähnlich wie in Beispiel 2.13 zu diskreten linearen dynamischen Systemen $x(k+1) = Ax(k)$ klassifizieren wir jetzt die Dynamik eines kontinuierlichen linearen dynamischen Systems (6.5) für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(i) Falls beide Eigenwerte λ_1, λ_2 reell sind, d.h. A reell diagonalisierbar mit

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} V^{-1},$$

wobei $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ in seinen Spalten die beiden Eigenvektoren v_1, v_2 enthält, folgt zunächst mit (4.19) und (4.18) für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $t \geq t_0$

$$x(t; x_0) = e^{(t-t_0)A} x_0 = V e^{(t-t_0) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} V^{-1} x_0 = V \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{(t-t_0)\lambda_2} \end{pmatrix} V^{-1} x_0.$$

Hieraus kann man, abhängig von der Lage von λ_1 und λ_2 , die Stabilitätseigenschaften des Gleichgewichts $\hat{x} = (0, 0)^\top$ ablesen, siehe Abbildung 6.2 für typische Lösungskurven.

- (a) Falls $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, so folgt $e^{(t-t_0)\lambda_j} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, also $x(t) \rightarrow (0, 0)^\top$ für $t \rightarrow \infty$ und asymptotische Stabilität mit Hilfe von Satz 6.5. Das Gleichgewicht $\hat{x} = (0, 0)^\top$ heißt stabiler Knoten bzw. Senke. Falls $\lambda_1 \ll \lambda_2$, nähert sich $x(t)$ zunächst schnell der Geraden $\{s v_2 : s \in \mathbb{R}\}$, die vom Eigenvektor v_2 aufgespannt wird, und konvergiert dann längs dieser Geraden gegen $\hat{x} = (0, 0)^\top$.
- (b) Falls $\lambda_1 = 0 > \lambda_2$, folgt $e^{(t-t_0)\lambda_1} = 1$ für alle $t \geq t_0$, d.h. $x(t)$ bewegt sich in v_1 -Richtung nicht. Der Anteil von $x(t)$ in v_2 -Richtung konvergiert gegen Null für $t \rightarrow \infty$, d.h. $x(t)$ bewegt sich auf einer Geraden orthogonal auf $\{s v_1 : s \in \mathbb{R}\}$ zu. Da $\|x(t)\|_2$ monoton fällt, ist $\hat{x} = (0, 0)^\top$ stabil.
- (c) Falls $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$, divergiert $x(t)$ analog auf einer Geraden in v_2 -Richtung, d.h. $\hat{x} = (0, 0)^\top$ ist instabil.

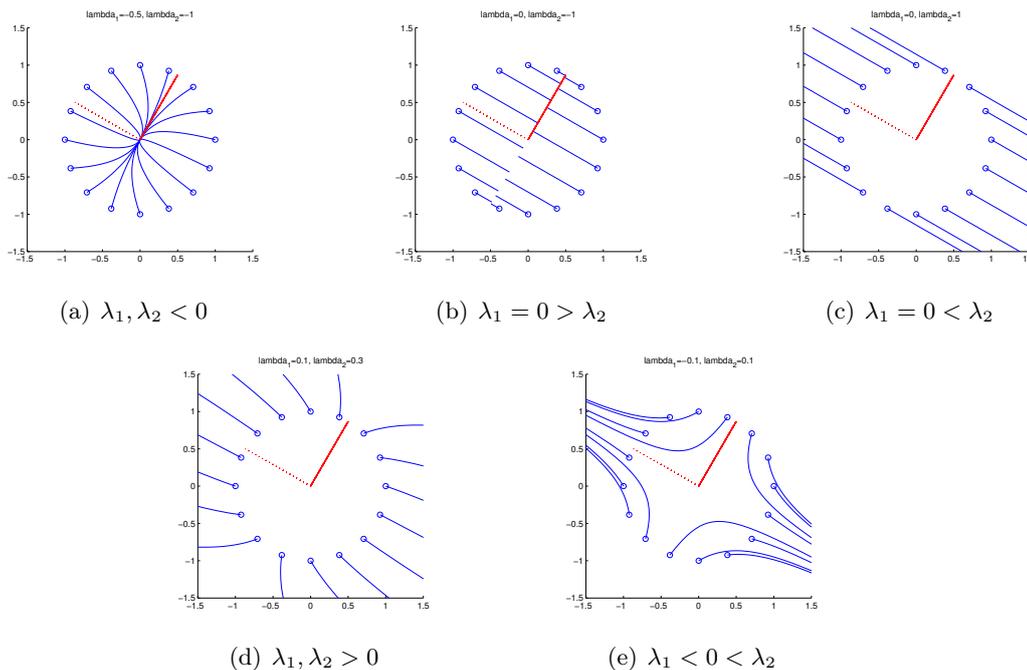


Abbildung 6.2: Typische Lösungskurven beim kontinuierlichen dynamischen System $x'(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: reell-diagonalisierbarer Fall (i), Eigenvektoren sind als rote Linien gekennzeichnet (v_1 : durchgezogen, v_2 : gepunktet)

- (d) Falls $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, divergieren $e^{(t-t_0)\lambda_j} \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, d.h. $\hat{x} = (0, 0)^\top$ ist instabil und heißt instabiler Knoten bzw. Quelle.
- (e) Falls $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, konvergiert der Anteil von $x(t)$ in v_1 -Richtung gegen Null, der Anteil in v_2 -Richtung wächst über alle Grenzen. Nur von Startpunkten auf $x_0 \in \{sv_1 : s \in \mathbb{R}\}$ aus konvergiert $x(t)$ gegen $\hat{x} = (0, 0)^\top$. Das Gleichgewicht $\hat{x} = (0, 0)^\top$ heißt Sattelpunkt und ist instabil.
- (ii) Falls A nicht reell diagonalisierbar mit einem doppelten (notwendigerweise reellen) Eigenwert $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, so ist A ähnlich zu einem Jordanblock:

$$A = V \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} V^{-1},$$

wobei $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ in seiner ersten Spalte den Eigenvektor v_1 zu λ enthält, und in seiner zweiten Spalte den Hauptvektor v_2 mit $(A - \lambda I)v_2 = v_1$. Mit (4.21) erhält man für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $t \geq t_0$

$$x(t; x_0) = e^{(t-t_0)A}x_0 = Ve^{(t-t_0)\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}V^{-1}x_0 = e^{(t-t_0)\lambda}V \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V^{-1}x_0.$$

Ist $x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$, so folgt $x(t; x_0) = e^{(t-t_0)\lambda}((\alpha + (t-t_0)\beta)v_1 + \beta v_2)$. Für $t \gg t_0$ nähert sich $x(t)$ also immer mehr der Geraden $\{sv_1 : s \in \mathbb{R}\}$, da das Gewicht von

v_1 in der Linearkombination $x(t)$ relativ zum Gewicht von v_2 für $t \rightarrow \infty$ dominiert, vgl. Abbildung 6.3. Die Unterfälle sind im Einzelnen:

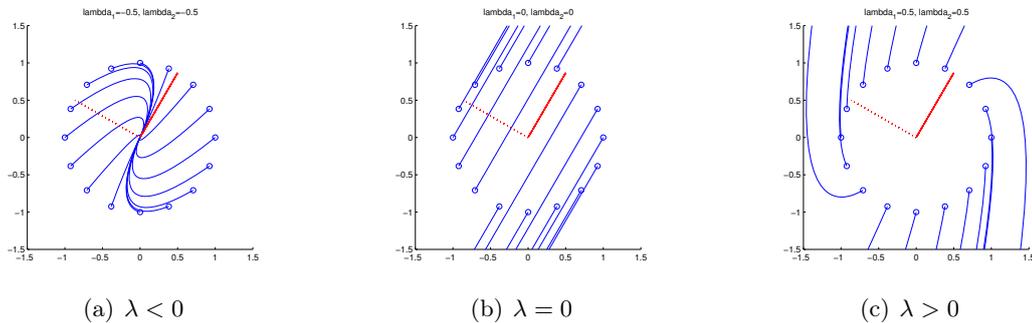


Abbildung 6.3: Typische Lösungskurven beim kontinuierlichen dynamischen System $x'(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: reell-nichtdiagonalisierbarer Fall (ii) mit doppeltem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, Eigenvektor v_1 und Hauptvektor v_2 sind als rote Linien gekennzeichnet (v_1 : durchgezogen, v_2 : gepunktet)

- (a) $\lambda < 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow (0, 0)^\top$ auf einer parabelförmigen Bahn für $t \rightarrow \infty$, $\hat{x} = (0, 0)^\top$ ist asymptotisch stabil;
- (b) $\lambda = 0 \Rightarrow \|x(t)\|_2 \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ durch den Polynomanteil, $x(t)$ bewegt sich auf einer Geraden in v_1 -Richtung, $\hat{x} = (0, 0)^\top$ ist instabil;
- (c) $\lambda > 0 \Rightarrow \|x(t)\|_2 \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, $x(t)$ bewegt sich auf einer parabelförmigen Bahn, $\hat{x} = (0, 0)^\top$ ist instabil.

(iii) Bei zwei konjugiert komplexen Eigenwerten $\lambda_1 = a + ib = \overline{\lambda_2}$ ist A ähnlich zu einer Matrix aus Real- und Imaginärteil von λ_1 ,

$$A = V \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} V^{-1},$$

und $V \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ (komplex!) enthält als Spalten die beiden Eigenvektoren v_1 bzw. v_2 . Mit (4.22) folgt für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} x(t; x_0) &= e^{(t-t_0)A} x_0 = V e^{(t-t_0) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} V^{-1} x_0 \\ &= e^{(t-t_0)a} V \begin{pmatrix} \cos(t-t_0)b & \sin(t-t_0)b \\ -\sin(t-t_0)b & \cos(t-t_0)b \end{pmatrix} V^{-1} x_0. \end{aligned}$$

Ähnlich zu (ii) erhält man die folgenden Unterfälle, siehe auch Abbildung 6.4 für typische Lösungsverläufe.

- a) $\operatorname{Re} \lambda = a < 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow (0, 0)^\top$ für $t \rightarrow \infty$, $\hat{x} = (0, 0)^\top$ ist asymptotisch stabil und heißt stabiler Strudel;
- b) $\operatorname{Re} \lambda = a = 0 \Rightarrow x(t)$ ist $2\pi/b$ -periodisch, $\hat{x} = (0, 0)^\top$ ist stabil und heißt Wirbelzentrum;

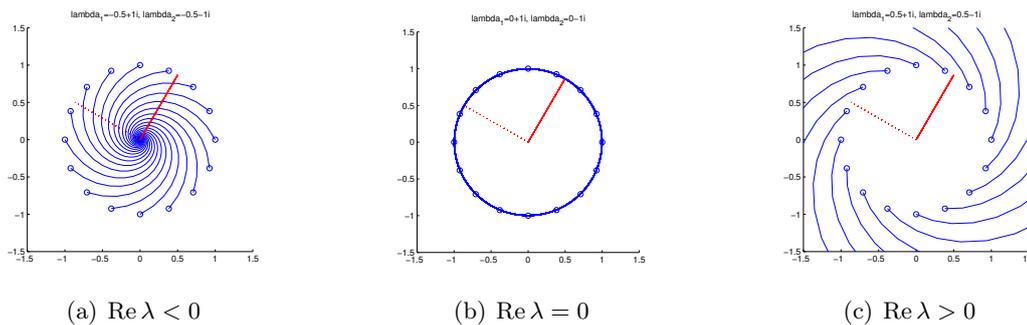


Abbildung 6.4: Typische Lösungskurven beim kontinuierlichen dynamischen System $x'(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: Fall (iii) mit komplex-konjugierten Eigenwerten $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$, Eigenvektoren sind als rote Linien gekennzeichnet (v_1 : durchgezogen, v_2 : gepunktet)

c) $\text{Re } \lambda = a > 0 \Rightarrow \|x(t)\|_2 \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, $\hat{x} = (0, 0)^\top$ ist instabil und heißt instabiler Strudel.

Bemerkung 6.9. Zur Klassifikation der Stabilität von $\hat{x} = (0, 0)^\top$ im Fall eines linearen dynamischen Systems (6.5) mit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ muss man die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ nicht explizit kennen. Denn die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{=\text{tr } A=:p} \lambda + \underbrace{\lambda_1 \lambda_2}_{=\det A=:q}$$

bestehen aus der an der Matrix A direkt ablesbaren Spur $p = \text{tr } A = a_{1,1} + a_{2,2}$ und ihrer Determinante $q = \det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$. Und für die Eigenwerte gilt

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Die Fälle (i), (ii) aus Beispiel 6.8 mit reellen Eigenwerten korrespondieren zu $p^2/4 \geq q$, der Fall (iii) mit zwei komplex konjugierten Eigenwerten entspricht $p^2/4 < q$. Zeichnet man in der p - q -Ebene die Parabel $q = p^2/4$ ein, kann man die durch die Parabel, die p - und die q -Achse begrenzten Sektoren den einzelnen Fällen aus Beispiel 6.8 zuordnen.

6.3 Linearisierte Stabilität

Bei nichtlinearen Anfangswertproblemen (6.3) ist die Diskussion der Stabilität bzw. Attraktivität von Gleichgewichten $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ im Allgemeinen schwierig. Ein mögliches Konzept ist die *Linearisierung* und letztlich Rückführung der Stabilitätsfrage auf ein homogenes lineares Anfangswertproblem (6.5). Wir stellen die Vorgehensweise o.B.d.A. für autonome Anfangswertprobleme

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \tag{6.8}$$

vor, für $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei dazu $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewicht von (6.8), d.h. $f(\hat{x}) = 0$, und sei $x = x(\cdot; x_0)$ die Lösung von (6.8) auf $[t_0, \infty)$. Dann gilt für $y(t) := x(t) - \hat{x}$ die Differentialgleichung

$$y'(t) = x'(t) = f(x(t)) = f(\hat{x} + y(t)) - f(\hat{x}) = f'(\hat{x})y(t) + r(y(t)), \quad (6.9)$$

mit dem Taylor-Rest

$$r(z) := f(\hat{x} + z) - f(\hat{x}) - f'(\hat{x})z = o(\|z\|_2), \quad \mathbb{R}^n \ni z \rightarrow 0. \quad (6.10)$$

Die Stabilität bzw. Attraktivität von \hat{x} für (6.8) ist äquivalent mit der Stabilität bzw. Attraktivität von $\hat{y} = 0$ für das semilineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + r(y(t)), \quad y(t_0) = y_0 (= x_0 - \hat{x}), \quad t \geq t_0, \quad (6.11)$$

mit $A := f'(\hat{x})$. Wegen (6.10) genügt es, das lineare System

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \geq t_0 \quad (6.12)$$

zu untersuchen. Dies halten wir in folgendem Satz fest, für einen Beweis verweisen wir auf das Buch von Prüss und Wilke.

Satz 6.10. *Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewicht von (6.8) und $A := f'(\hat{x})$. Dann gilt:*

- (i) *Falls $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ für alle Eigenwerte $\lambda_j \in \mathbb{C}$ von A , so ist \hat{x} asymptotisch stabil.*
- (ii) *Falls $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ für einen Eigenwert $\lambda_j \in \mathbb{C}$ von A , so ist \hat{x} instabil.*

Bemerkung 6.11. *Weder für den Fall $\max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j = 0$ noch für die jeweiligen Rückrichtungen wird in Satz 6.10 eine Aussage getroffen. Betrachte zum Beispiel für $\beta \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = \beta x(t)^3, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0,$$

mit Gleichgewicht $\hat{x} = 0$. Die Jacobimatrix von $f(x) = \beta x^3$ ist $f'(x) = 3\beta x^2$, so dass $f'(\hat{x}) = 0$ unabhängig von β . Die exakte Lösung des Anfangswertproblems im Fall $x_0 \neq 0$ lautet

$$x(t; x_0) = \frac{\operatorname{sgn} x_0}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2} - 2\beta t}}, \quad t \in (t_-, t_+).$$

Falls $\beta = 0$, bleibt $x(t; x_0) = x_0$ für alle $t \geq 0$, d.h. \hat{x} ist stabil, aber nicht attraktiv. Falls $\beta < 0$, folgt

$$|x(t; x_0)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2} - 2\beta t}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2} + 2|\beta|t}} \leq \begin{cases} |x_0| & , t \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2|\beta|t}} \rightarrow 0 & , t \rightarrow \infty \end{cases},$$

also ist $\hat{x} = 0$ stabil und attraktiv und damit asymptotisch stabil. Falls $\beta > 0$, existiert x nur auf $[0, 1/(2x_0^2\beta))$, mit Blowup $|x(t; x_0)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow 1/(2x_0^2\beta)$, d.h. $\hat{x} = 0$ ist instabil.

6.4 Ljapunov-Funktionen

Ein wichtiges Hilfsmittel, die Stabilität bzw. Attraktivität von Gleichgewichten nichtlinearer Anfangswertprobleme zu bestimmen, ohne deren exakte Lösung überhaupt kennen zu müssen, sind sogenannte *Ljapunov-Funktionen*. Wir betrachten hierzu in der Folge das autonome Anfangswertproblem (6.8) mit einer lokal Lipschitz-stetigen rechten Seite $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ auf einem offenen Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 6.12. (i) $V \in C(D)$ heißt Ljapunov-Funktion für (6.8), wenn V entlang von Lösungskurven $x = x(\cdot; x_0)$ von (6.8) monoton fällt, d.h. $t \mapsto V(x(t; x_0))$ ist monoton fallend für alle $x_0 \in D$ und $t \in [t_0, t_+)$.

(ii) $V \in C(D)$ heißt strikte Ljapunov-Funktion für (6.8), wenn V entlang von nicht-konstanten Lösungskurven $x = x(\cdot; x_0)$ von (6.8) streng monoton fällt, d.h. $t \mapsto V(x(t; x_0))$ ist streng monoton fallend für alle $x_0 \in D$ und $t \in [t_0, t_+)$, sofern x_0 kein Gleichgewicht von (6.8) ist.

Mit der Kettenregel erhalten wir:

Bemerkung 6.13. (i) $V \in C^1(D)$ ist genau dann eine Ljapunov-Funktion für (6.8), wenn

$$\langle \nabla V(z), f(z) \rangle \leq 0, \quad \text{für alle } z \in D. \quad (6.13)$$

(ii) $V \in C^1(D)$ ist eine strikte Ljapunov-Funktion für (6.8), wenn

$$\langle \nabla V(z), f(z) \rangle < 0, \quad \text{für alle } z \in D \setminus \mathcal{E}, \quad (6.14)$$

mit der Menge $\mathcal{E} := \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) = 0\} = f^{-1}\{0\}$ aller Gleichgewichte von (6.8).

(iii) Ein eindimensionales Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0$$

besitzt immer eine Ljapunov-Funktion V , z.B. die Stammfunktion von f

$$V(z) := \int_{x_0}^z f(y) dy, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}.$$

Denn es folgt $V'(z)f(z) = -f(z)^2 \leq 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$ und damit (6.13). V ist sogar strikte Ljapunov-Funktion, da $f(z) \neq 0$ für alle $z \notin \mathcal{E}$ und damit $V'(z)f(z) = -f(z)^2 < 0$ für alle $z \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$, d.h. es gilt (6.14).

Satz 6.14. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \in C(D)$ eine Ljapunov-Funktion für (6.8) und $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Gleichgewicht von (6.8). Dann gilt:

(i) Ist \hat{x} ein striktes lokales Minimum von V , so ist \hat{x} stabil.

(ii) Ist \hat{x} isoliert in $\mathcal{E} = f^{-1}\{0\}$ und ein striktes lokales Minimum von V , und ist V eine strikte Ljapunov-Funktion, so ist \hat{x} asymptotisch stabil.

Beweis:

- (i) Da $\hat{x} \in D$ ein striktes lokales Minimum ist und D offen, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass noch $K_\epsilon(\hat{x}) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|\hat{x} - z\|_2 \leq \epsilon\} \subset D$ und $V(z) > V(\hat{x})$ für alle $z \in K_\epsilon(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}$. Setze

$$\eta := \min_{z \in \partial K_\epsilon(\hat{x})} V(z).$$

Dann wird η als Minimum einer stetigen Funktion auf der kompakten Menge $\partial K_\epsilon(\hat{x})$ angenommen, und es gilt noch $\eta > V(\hat{x})$ wegen der Wahl von ϵ . Da V stetig ist, existiert ein $\delta \in (0, \epsilon)$, so dass $V(z) < \eta$ für alle $z \in K_\delta(\hat{x})$. Aus der Monotonie von V entlang von Lösungskurven von (6.8) folgt für alle $x_0 \in K_\delta(\hat{x})$

$$V(x(t; x_0)) \leq V(x_0) < \eta, \quad \text{solange } t \in [t_0, t_+(x_0)).$$

Wir zeigen, dass $x(t; x_0)$ auf dem gesamten Existenzintervall in $K_\epsilon(\hat{x})$ liegt. Angenommen nicht. Sei $t_* \in (t_0, t_+(x_0))$ der erste Zeitpunkt mit $\|x(t_*; x_0) - \hat{x}\|_2 = \epsilon$, also $x(t_*; x_0) \in \partial K_\epsilon(\hat{x})$. Nach obiger Überlegung folgt aber der Widerspruch $V(x(t_*; x_0)) = \eta > V(x(t_*; x_0))$. Also kann die Lösung höchstens für $t \nearrow t_+(x_0)$ den Rand von $K_\epsilon(\hat{x})$ erreichen, was einen Blowup ausschließt. Ein Kollaps ist auch ausgeschlossen, da $K_\epsilon(\hat{x})$ als kompakte Teilmenge von D einen positiven Abstand zu ∂D besitzt. Also existiert $x(t; x_0)$ nach Satz 3.10 für alle $t \geq t_0$ und erfüllt $\|x(t; x_0) - \hat{x}\|_2 \leq \epsilon$, solange wie $x_0 \in K_\delta(\hat{x})$, d.h. \hat{x} ist ein stabiles Gleichgewicht.

- (ii) Da $\hat{x} \in D$ in $\mathcal{E} \in f^{-1}\{0\}$ isoliert liegt, existiert ähnlich wie in (i) ein $\epsilon > 0$, so dass $K_\epsilon(\hat{x}) \subset D$, $V(z) > V(\hat{x})$ für alle $z \in K_\epsilon(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}$ und zusätzlich $K_\epsilon(\hat{x}) \cap \mathcal{E} = \{\hat{x}\}$. Wie in (i) setzen wir $\eta := \min_{z \in \partial K_\epsilon(\hat{x})} V(z)$ und $\delta \in (0, \epsilon)$ mit $V(z) < \eta$ für alle $z \in K_\delta(\hat{x})$. Angenommen, $x(t; x_0)$ konvergiere für ein $x_0 \in K_\delta(\hat{x})$ nicht gegen \hat{x} . Dann existieren ein $\rho > 0$ und $t_k \nearrow \infty$ mit $\|x(t_k; x_0) - \hat{x}\|_2 > \rho$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus der Argumentation in (i) folgt die Existenz von $x(t; x_0)$ für alle $t \geq 0$ und

$$\|x(t; x_0)\|_2 \leq \|x(t; x_0) - \hat{x}\|_2 + \|\hat{x}\|_2 \leq \epsilon + \|\hat{x}\|_2, \quad \text{für alle } t \geq t_0.$$

Also ist die Folge $(x(t_k; x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt und hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß und (i) eine konvergente Teilfolge mit $x(t_{k_j}; x_0) \rightarrow x_\infty \in K_\epsilon(\hat{x})$ für $j \rightarrow \infty$. Da V entlang von Lösungskurven zumindest monoton fällt und nach unten durch $V(\hat{x})$ beschränkt ist, existiert der Limes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t; x_0)) = V(x_\infty).$$

Für jeden Zeitpunkt t aus dem maximalen Existenzintervall (s_-, s_+) von $x(\cdot; x_\infty)$ rechnen wir mit Hilfe von Korollar 5.3 und Satz 3.3

$$\begin{aligned} x(t; x_\infty) &= x\left(t; \lim_{j \rightarrow \infty} x(t_{k_j}; x_0)\right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} x(t; x(t_{k_j}; x_0)) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} x(t + t_{k_j} - t_0; x_0). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von V liefert also $V(x(t; x_\infty)) = V(x_\infty)$ für alle $t \in (s_-, s_+)$. Da V eine strikte Ljapunov-Funktion ist, kann dies nur der Fall sein, wenn $x(t; x_\infty) = x_\infty$ für alle $t \in (s_-, s_+)$, d.h. x_∞ ist ein Gleichgewicht. Dies ist ein Widerspruch, denn $x_\infty \in K_\epsilon(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}$ wegen $\|x_\infty - \hat{y}\|_2 \geq \rho$, und \hat{x} war einziges Gleichgewicht in $K_\epsilon(\hat{x})$. Also gilt doch $x(t; x_0) \rightarrow \hat{x}$ für alle $x_0 \in K_\delta(\hat{x})$.

□

Beispiel 6.15. (i) Sei $n = 1$, und betrachte für $f \in C(\mathbb{R})$ das eindimensionale Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \geq t_0.$$

Für die Stammfunktion $V(z) := -\int_{x_0}^z f(u) du$ von $-f$, $z \in \mathbb{R}$, gilt

$$\langle \nabla V(z), f(z) \rangle = V'(z)f(z) = -f(z)^2 \leq 0, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R},$$

d.h. (6.13) ist erfüllt und V ist eine Ljapunov-Funktion. V ist sogar eine strikte Ljapunov-Funktion, denn

$$\langle \nabla V(z), f(z) \rangle = V'(z)f(z) = -f(z)^2 < 0, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E} = \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) = 0\},$$

so dass (6.14) erfüllt ist. Um Satz 6.14 anwenden zu können, müssen wir überprüfen, ob ein gegebenes $\hat{x} \in \mathcal{E}$ ein striktes lokales Minimum von V ist. Wegen $\hat{x} \in \mathcal{E}$ gilt $f(\hat{x}) = 0$ und $V'(\hat{x}) = -f(\hat{x}) = 0$, also ist das notwendige Kriterium für ein lokales Minimum von $V \in C^1(\mathbb{R})$ erfüllt. Hinreichend für ein striktes lokales Minimum wäre ein Vorzeichenwechsel von $V'(z)$ von $-$ nach $+$, d.h. von $f(z)$ von $+$ nach $-$. Falls f bei \hat{x} differenzierbar, reicht hierfür $f'(\hat{x}) < 0$.

(ii) Für $n \geq 1$ und $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ betrachte das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{für alle } t \geq t_0.$$

Falls das Vektorfeld $-f$ eine Stammfunktion $V \in C^1(\mathbb{R})$ besitzt im Sinne von $\nabla V(z) = -f(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$, so ist V eine strikte Ljapunov-Funktion. Denn nach Konstruktion gilt ähnlich wie in (i)

$$\langle \nabla V(z), f(z) \rangle = -\|f(z)\|_2^2 \begin{cases} = 0 & , z \in \mathcal{E} = f^{-1}\{0\} \\ < 0 & , z \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E} \end{cases},$$

d.h. die Bedingung (6.14) ist erfüllt. Ferner gilt für jedes $\hat{x} \in \mathcal{E}$, dass $\nabla V(\hat{x}) = -f(\hat{x}) = 0$, d.h. das notwendige Kriterium für ein lokales Minimum von V bei \hat{x} ist erfüllt. Hinreichend für ein striktes lokales Minimum von V wäre z.B. eine positiv definite Hessematrix $\nabla^2 V(\hat{x})$, d.h. wegen $\nabla V(\hat{x}) = -f(\hat{x})$ müsste die Jacobimatrix $f'(\hat{x})$ negativ definit sein, vgl. (i).

(iii) Betrachte das Pendel mit Dämpfung aus Beispiel 1.3, zu Dämpfungsparameter $\beta \geq 0$ und Grundfrequenz $\omega^2 > 0$,

$$x''(t) + \beta x'(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0, \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Die äquivalente Umformulierung als Anfangswertproblem 1. Ordnung lautet mit $y := (x, x')^\top$

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\beta y_2(t) - \omega^2 \sin y_1(t) \end{pmatrix} =: f(y(t)), \quad y(0) = y_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq t_0.$$

Die Funktion $V(z) := \frac{1}{2}z_1^2 - \omega^2 \cos z_1$ erfüllt $\nabla V(z) = (\omega^2 \sin z_1, z_2)^\top$ und damit

$$\langle \nabla V(z), f(z) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \omega^2 \sin z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 \\ -\beta z_2 - \omega^2 \sin z_1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\beta z_2^2 \leq 0, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^2,$$

sogar mit Gleichheit für $\beta = 0$, d.h. V ist eine Ljapunov-Funktion. Im gedämpften Fall $\beta > 0$ gilt abseits der Gleichgewichtsmenge

$$\mathcal{E} := \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : f(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sogar $\langle \nabla V(z), f(z) \rangle < 0$. Denn angenommen, es gäbe eine Lösungskurve $y(\cdot; y_0)$, so dass $V(y(\cdot; y_0))$ auf (a, b) nicht streng fallend, also konstant ist. Wegen $y_2(t; y_0) = x'(t; x_0)$ und $\beta > 0$ folgt

$$x'(t; x_0)^2 = y_2(t; y_0)^2 = -\frac{1}{\beta} \frac{d}{dt} (V(y(t; y_0))) = 0, \quad \text{für alle } t \in (a, b),$$

also ist $x(\cdot; x_0)$ konstant auf (a, b) . Aus der Differentialgleichung folgt $\omega^2 \sin x(t) = 0$ für alle $t \in (a, b)$ und aus Stetigkeitsgründen $x(t; x_0) = 0$ oder $x(t; x_0) = \pi$ für alle $t \in (a, b)$. Also muss $y_0 \in \mathcal{E}$ gelten, und V ist eine strikte Ljapunov-Funktion.

Ein Gleichgewicht \hat{x} korrespondiert mit einem Gleichgewicht $\hat{y} \in \mathcal{E}$, also $f(\begin{pmatrix} \hat{x} \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$, und damit $\hat{y}_2 = 0$ und $-\beta \hat{y}_2 - \omega^2 \sin \hat{y}_1 = 0$, d.h. $\hat{y}_2 = 0$ und $\omega^2 \sin \hat{y}_1 = 0$, was gleichbedeutend mit $\nabla V(\hat{y}) = 0$ ist, die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum. Die Hessematrix

$$\nabla^2 V(z) = \begin{pmatrix} \omega^2 \cos z_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit bei $z_1 = 0$ und indefinit bei $z_1 = \pi$. Somit ist die untere Ruhelage $\hat{y} = (0, 0)^\top$ ein striktes lokales Minimum von V und gemäß Satz 6.14 stabil. Wegen $\mathcal{E} = \{(0, 0)^\top, (\pi, 0)^\top\}$ ist $(0, 0)^\top$ in \mathcal{E} isoliert und für $\beta > 0$ gemäß Satz 6.14 asymptotisch stabil.

(iv) Die Bewegung eines Teilchens im Potentialfeld kann mit einem Potential $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, der Teilchenposition $x \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und der Teilchenmasse m modelliert werden. Nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz gilt die Differentialgleichung

$$mx''(t) = -\nabla \phi(x(t)), \quad t \geq t_0,$$

was wir mit $q := x$ und dem Impuls $p := mx'$ in die Hamiltonsche Formulierung bringen, ein Anfangswertproblem in (q, p) :

$$\begin{cases} q'(t) = x'(t) = \frac{p(t)}{m} \\ p'(t) = mx''(t) = -\nabla\phi(x(t)) = -\nabla\phi(q(t)) \end{cases}, \quad t \geq t_0.$$

Wir setzen als Energiefunktional (Summe aus kinetischer und potentieller Energie)

$$V(q, p) := \frac{\|p\|_2^2}{2m} + \phi(q),$$

so dass wir mit der Kettenregel entlang einer Lösungskurve erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(V(q(t), p(t)) \right) &= \left\langle \nabla V(q(t), p(t)), \begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \nabla\phi(q(t)) \\ \frac{p(t)}{m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{p(t)}{m} \\ -\nabla\phi(q(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h. V ist eine Ljapunov-Funktion.

Ein Gleichgewicht $(\hat{q}, \hat{p})^\top$ liegt genau dann vor, wenn $\hat{p}/m = 0$ und $-\nabla\phi(\hat{q}) = 0$, also wenn $\hat{p} = 0$ und $\nabla\phi(\hat{q}) = 0$, was genau der notwendigen Bedingung $\nabla V(\hat{q}, \hat{p})$ für ein Extremum von V entspricht. Jedes Minimum von V hat also die Form $(\hat{q}, 0)^\top$ und entspricht wegen der additiven Struktur von V einem Minimum der Potentialfunktion ϕ . Nach Satz 6.14 sind strikte lokale Minima des Potentials ϕ damit auch stabile Gleichgewichte des Teilchens im Kraftfeld. Durch die Energieerhaltung $V(q(t), p(t)) \equiv \text{const}$ kann ein Gleichgewicht (\hat{q}, \hat{p}) nicht asymptotisch stabil sein.

Falls \hat{q} ein Sattelpunkt oder lokales Extremum von ϕ ist, besitzt die (symmetrische!) Hessematrix $\nabla^2\phi(\hat{q})$ mindestens einen Eigenwert $\mu < 0$. Die Linearisierung des Anfangswertproblems um die Ruhelage $(\hat{q}, \hat{p})^\top$ lautet

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}'(t) \\ \tilde{p}'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m}I \\ -\nabla^2\phi(\hat{q}) & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \tilde{q}(t) \\ \tilde{p}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix A hat zumindest die beiden reellen Eigenwerte $\pm\sqrt{\frac{|\mu|}{m}}$. Denn ist v ein Eigenvektor von $\nabla^2\phi(\hat{q})$ zum Eigenwert μ , dann gilt

$$A \begin{pmatrix} v \\ \pm\sqrt{|\mu|m}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{|\mu|}{m}}v \\ \mp\mu v \end{pmatrix} = \pm\sqrt{\frac{|\mu|}{m}} \begin{pmatrix} v \\ \pm\sqrt{|\mu|m}v \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 6.10 ist $(\hat{q}, 0)^\top$ ein instabiles Gleichgewicht.

Bemerkung 6.16. *Ljapunov-Funktionen eignen sich auch zum Nachweis der globalen Existenz von Lösungen. Zum Beispiel kann man auf einem unbeschränkten Gebiet D zeigen, dass aus der Koerzivität $\lim_{\|z\|_2 \rightarrow \infty} V(z) = \infty$ die globale Existenz von $x(t; x_0)$ sowie die Beschränktheit $\sup_{t \geq t_0} \|x(t; x_0)\|_2 < \infty$ folgt. Auf einem beschränkten Gebiet D folgt aus $\lim_{z \rightarrow \partial D} V(z) = \infty$ die Beschränktheit von $\|x(t; x_0)\|_2$ für $t \rightarrow \infty$ sowie $\inf_{t \geq t_0} \text{dist}(x(t; x_0), \partial D) > 0$.*