Dynamische Systeme

Vorlesung im Wintersemester 2013/2014

Universität Siegen

Juniorprof. Dr. Thorsten Raasch

Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Institut für Mathematik

Kapitel 0

Was ist ein dynamisches System?

Unter einem dynamischen System versteht man das mathematische Modell eines *zeitabhängigen* Prozesses.

Typische Beispiele dynamischer Systeme findet man überall...

- Wirtschaft (Märkte)
- Physik (Pendel, Himmelsmechanik, Schaltkreise)
- Chemie (Reaktionskinetik)
- Meteorologie (Klimamodelle)
- Biologie (Populations-, Epidemiemodelle)

Diskrete und kontinuierliche Zeit

Wir unterscheiden zwei Modelle:

Dynamische Systeme mit diskreter Zeit

Ein diskretes dynamisches System ist eine Folge von Zuständen $x(k)$, die durch eine einstufige Rekursion festgelegt sind,

$$x(k+1) = f\big(x(k)\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dynamische Systeme mit kontinuierlicher Zeit

Ein kontinuierliches dynamisches System ist ein zeitkontinuierlicher Zustand $x(t)$, der durch ein Anfangswertproblem festgelegt ist,

$$x(0) = x_0, \quad x'(t) = f\big(x(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten in der VL nur dynamische Systeme mit endlich-dimensionalem Zustandsraum, d.h. $x(k), x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Typische Fragen

Typische Fragestellungen in beiden Fällen sind:

- Existenz/Eindeutigkeit/geschlossene Darstellung von Lösungen $x(k)$ bzw. $x(t)$
- Beschränktheit von Lösungen
- Existenz und Stabilität von Gleichgewichtspunkten, d.h. $x(k) = f\big(x(k)\big)$ bzw. $f\big(x(t)\big) = 0$
- Langzeitverhalten von $x(k)$ bzw. $x(t)$, d.h. $k, t \to \infty$
- Existenz zeitlich periodischer Lösungen, d.h. $x(k + T) = x(k)$ bzw. $x(t + T) = x(t)$
- Änderung des qualitativen Lösungsverhaltens bei Variation von Parametern in f (Verzweigung/Bifurkation, Chaos)
- Erhaltungseigenschaften

Diese Fragen sollen beantwortet werden, möglichst ohne eine Lösung exakt oder numerisch berechnen zu müssen!
($\to$ VL *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*)

Typische Antworten/Ziele der Vorlesung

Ein paar Highlights/Buzzwords:

- diskrete und kontinuierliche dynamische Systeme:
  Lösungstheorie, Fix-/Gleichgewichtspunkte, periodische Orbits/periodische Lösungen, Stabilität, Attraktoren, stabile/instabile Mannigfaltigkeiten, Bifurkation, Chaos, seltsame Attraktoren
- kontinuierliche dynamische Systeme:
  Stabilitätstheorie, Lyapunov-Funktionen, Linearisierung, Zentrumsmannigfaltigkeiten, Differentialungleichungen, Hamiltonsche Differentialgleichungen

Mathematische Hilfsmittel

Zum Studium dynamischer Systeme mit Zustandsraum $\mathbb{R}^n$ benötigen wir folgende Hilfsmittel:

- Lineare Algebra
  - Eigenwerte/Eigenvektoren von Matrizen
  - Jordan-Normalform, Diagonalisierbarkeit
  - Vektorräume mit Innenprodukt
- Analysis
  - Normierte Vektorräume
  - Differentiation
  - (Riemann-)Integration
  - Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (VL-Bestandteil)

Literatur

Verwendete Literatur:

- L. Grüne/O. Junge, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Vieweg+Teubner, 2009
- L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, 3rd ed., Springer, 2001
- J. Prüss/M. Wilke, Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme,
  Springer, 2010
- G. Teschl, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, AMS, 2012
- S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, 2nd ed., Springer, 2003

- Es gibt ein Vorlesungsskript, siehe LSF.