Bernd Dreseler

Integration im $\mathbb{R}^d$

aus der Vorlesung Analysis III

Wintersemester 1990 / 91

Vorlesungsmitschrift von J.Breitenbach

Siegen 2001

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Dieser Artikel sind im Wesentlichen die Mitschriften der Vorlesung Analysis III, die Prof. Dr. Bernd Dreseler im Wintersemester 1990/1991 an der Universität–Gesamthochschule Siegen gehalten hat. Es sind nicht sämtliche Inhalte der Vorlesung in diesen Script übernommen worden, sondern nur der Teil, der sich auf die Integration im $\mathbb{R}^d$ bezieht (der erste Monat des Semesters gehörte noch der Differentiation in mehreren Veränderlichen).

Die Einführung des Lebesgue–Integrals im ersten Kapitel folgt weitgehend dem Lehrbuch *Measure and Integral* von A. Zygmund und R. L. Wheeden ([WhZyg]), was dem klassischen Zugang entspricht. Der Nachteil ist der Arbeitsaufwand, bis das L-Integral definiert werden kann, denn dazu muss über das äußere Maß das Lebesgue–Maß für Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ definiert werden, anschließend wird der Begriff der messbaren Funktionen eingeführt und dann erst das Lebesgue–Integral einer messbaren nichtnegativen Funktion f über einer messbaren Menge E als das Maß der Ordinatenmenge $\{(x, f(x)); x \in E\}$ — dies beansprucht 35 Seiten.

Der Vorteil ist, dass dieser Zugang elementar ist, d. h. für die Einführung des L-Integrals als solchem sind keine Vorkenntnisse erforderlich außer Konvergenzbetrachtungen, die im Kanon einer Vorlesung „Analysis I“ zu finden sind. — In der Tat wurde einige Jahre vorher in der Analysis–Grundvorlesung das Riemann–Integral weitgehend ausgelassen und allenfalls als Spezialfall des Lebesgue–Integrals vorgestellt.
Ferner sind die meisten Schritte, die zur Einführung des Integrals unternommen werden, naheliegend.

Das zweite und dritte Kapitel behandeln Sätze, die Bestandteil jeder Vorlesung über Integration in mehreren Veränderlichen sind: Der Satz von Fubini (zweites Kapitel), der der Frage nachgeht, inwieweit bei dem Integral $\iint f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ sukzessive nach x und y integriert werden kann; die Transformationsformel, die in Kapitel 3 untersucht wird, ist das mehrdimensionale Analogon zur Substitutionsregel.

Kapitel 4 stellt die L^p–Räume vor, die mit dem LEBESGUEschen Integral untrennbar verbunden sind. Die Räume sind definiert als

$$L^p(E) := \Big\{ f : E \to \mathbb{R};\ \int_E |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty \Big\}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Mit der L^p–Norm

$$\|f\|_p := \Big(\int_E |f|^p \Big)^{1/p}$$

sind diese Räume vollständige normierte Räume.
Diese Erkenntnis war de facto die Geburtsstunde der Funktionalanalysis. Das L-Integral ist aus dieser Disziplin nicht mehr wegzudenken, weshalb das vierte Kapitel auch als „Appetitanreger“ für die Funktionalanalysis gelten mag.

Den Abschluss bildet der Differentiationssatz von LEBESGUE, in gewisser Hinsicht eine Verallgemeinerung der Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung von stetigen auf (lokal) LEBESGUE–integrierbare Funktionen. Dabei wird nur die eine Aussage des Fundamentalsatzes, nämlich die Differenzierbarkeit des unbestimmten Integrals, behandelt. Die zweite Aussage des Fundamentalsatzes, die konkrete Berechnung des Integrals, indem die Stammfunktion über den Rand des Integrationsbereiches ausgewertet wird, wird von uns nicht untersucht.

Jens Breitenbach

Kapitel 1

Das Lebesgue–Integral im $\mathbb{R}^d$

Das Grund, warum wir das LEBESGUE–Integral untersuchen, ist, eine Verallgemeinerung des RIEMANNschen Integralbegriffs zu schaffen und diese simultan für einvariablige und mehrvariablige Funktionen zu betrachten.
Das RIEMANN–Integral, so überlegen es bei seiner Einführung den damals gängigen Integralbegriffen auch war, hat im Laufe des 19. Jahrhunderts doch an verschiedenen Stellen Schwachpunkte offenbart:

1. Die Integration mit dem RIEMANN–Integral ist von vornherein nur problemlos für beschränkte Funktionen und beschränkte Integrationsbereiche.

2. Die Integrierbarkeit einer Funktion kann durch Abänderung auf einer abzählbaren Menge zunichte gemacht werden, etwa indem statt der Nullfunktion über $[0,1]$ die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ betrachtet wird.

3. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, d. h. die Eigenschaft

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und deren Ableitung $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ (eventuell bis auf eine Nullmenge), gilt nur unter verhältnismäßig strengen Voraussetzungen. Vito VOLTERRA, ein Schüler von DINI, hat beispielsweise 1881 die Existenz einer Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gezeigt, deren Ableitung f' überall existiert und beschränkt ist, aber nicht RIEMANN–integrierbar, weil sie auf einer Menge, deren Maß größer als Null ist, unstetig ist.

4. Für die Vertauschung von Grenzwerten sind ebenfalls starke Voraussetzungen notwendig, beispielsweise für eine Funktionenfolge gleichmäßige Konvergenz gegen eine Riemann–integrierbare Funktion.

5. Oder bei der Vertauschung der Integrationsreihenfolge einer zweivariabligen Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Wann gilt:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y?$$

Der wesentliche Unterschied des Lebesgue–Integrals zum Riemann–Integral ist seine Philosophie, die am besten mit den beiden folgenden Bildern verdeutlicht wird.

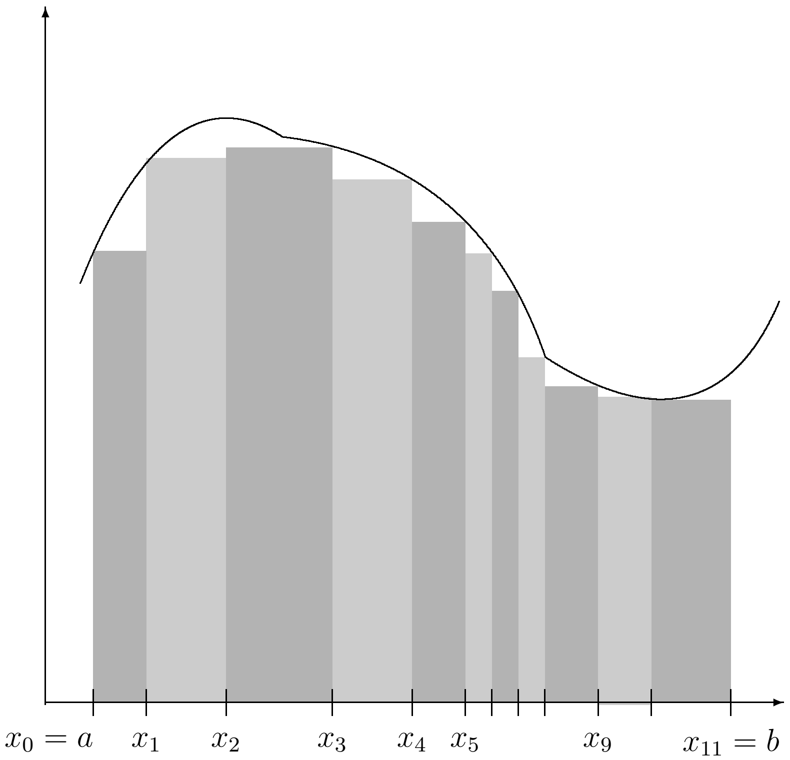


Abbildung 1.1: Das Riemann-Integral einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Das Integral ist der Grenzwert der Summe $\sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in [x_{k_1}, x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1})$.

Die Berechnung des Integrals von f, indem man die x–Achse in Intervalle mit Eckpunkten $x_1, \ldots x_n$ zerlegt und die Rechtecke über diesen Intervallen summiert, geht bis in die Anfänge der Infinitesimalrechnung zurück.

Demgegenüber verfolgt das LEBESGUE–Integral[1] einen entgegengesetzten Ansatz: Man zerlegt die y–Achse in Teilintervalle $y_0, \ldots y_n$ mit

$$y_0 \leq \inf f < y_1 < \cdots < y_{n-1} \leq \sup f < y_n$$

und misst die Teilmengen $\{x \in [a,b]; y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ der x–Achse.

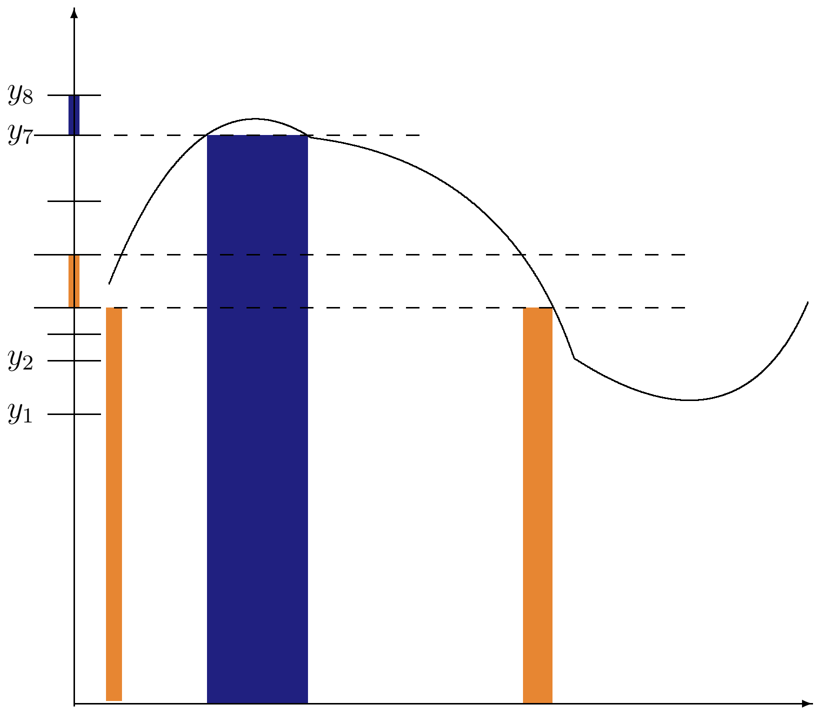


Abbildung 1.2: Das LEBESGUE-Integral einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Das Integral ist der Grenzwert der Summe $\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \mu(\{x; y_{k-1} \leq f(x) < y_k\})$.

Die Haupt-Schwierigkeit bei der Berechnung der resultierenden LEBESGUEschen Summe besteht darin, das Maß einer Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ zu bestimmen.
Ein großer Vorteil ist allerdings, dass Funktionen wie $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ jetzt ohne weiteres integrierbar sind, denn es ist

$$\int_a^b \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \cdot \underbrace{\mu([a,b] \setminus \mathbb{Q})}_{=b-a} + 1 \cdot \underbrace{\mu([a,b] \cap \mathbb{Q})}_{=0} = 0.$$

Grob gesprochen, sieht unser Weg bis zur Definition des LEBESGUE–Integrals folgendermaßen aus:

[1] oder vielleicht politisch korrekter: *das Maßintegral*, weil wesentliche Vorarbeiten von Emile BOREL getan wurden

Um die LEBESGUE-Summe $\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \mu(\{x; y_{k-1} \leq f(x) < y_k\})$ sinnvoll anwenden zu können, werden wir weiter unten (Definition 1.30) den Begriff der *messbaren Funktion* einführen. Für genau solche Funktionen ist das Maß der Menge $\{x; y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ wohldefiniert.
Zunächst einmal muss allerdings von einer Teilmenge des IR^d das Maß definiert werden — soweit die Menge messbar ist.
Um das Maß einer beschränkten Menge $E \subset \mathrm{IR}^d$ zu bestimmen, gibt es zwei intuitiv naheliegende Weisen: zum einen überdeckt man E mit abzählbar vielen, paarweise nicht überlappenden abgeschlossenen Intervallen und summiert deren Inhalte; das Infimum solcher Summen nennt man das äußere Maß. Die andere Art, E zu messen, ist, E mit abzählbar vielen, paarweise nicht überlappenden abgeschlossenen Intervallen auszuschöpfen und deren Inhalte aufzusummieren. Das Supremum davon nennt man das innere Maß. Es liegt dann nahe, E als messbar zu bezeichnen, wenn inneres und äußeres Maß übereinstimmen.

Wir werden uns bei unserem Zugang auf das äußere Maß konzentrieren; eine Menge E werden wir messbar nennen, wenn es zu $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $G \supset E$ gibt, so dass das äußere Maß $|G \setminus E|_e < \varepsilon$.
Der Vorteil dieser Definition ist, dass E nicht mehr beschränkt sein muss. Wie sich herausstellt, ist E genau dann messbar, wenn es zu $\varepsilon > 0$ auch eine abgeschlossene Menge $F \subset E$ gibt mit $|E \setminus F|_e < \varepsilon$, womit wir das Analogon zu dem intuitiven Messbarkeitsbegriff auch für unbeschränkte Mengen haben.

1.1 Maße und ihre Eigenschaften

An ein Maß $\mu : \mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\mathrm{IR}^d) \to \mathrm{IR}_+ \cup \{\infty\}$ stellen wir folgende naheliegenden Bedingungen:

1. μ ordnet elementargeometrischen Mengen das übliche Volumen zu, insbesondere einem achsenparrallelen Quader

$$I = \{x \in \mathrm{IR}^d; a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \ldots, d\}$$

   das Maß

$$\mu(I) =: |I| = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j).$$

2. μ ist translationsinvariant, d. h. $\mu(a + M) = \mu(M)$ für $M \in \mathfrak{M}, a \in \mathrm{IR}^d$.

3. Für „nicht überlappende“ Mengen M_1, M_2 ist $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$.

4. Für paarweise disjunkte Mengen $M_1, M_2, \dots \in \mathfrak{M}$ ist

$$\mu(M_1 \cup M_2 \cup \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j).$$

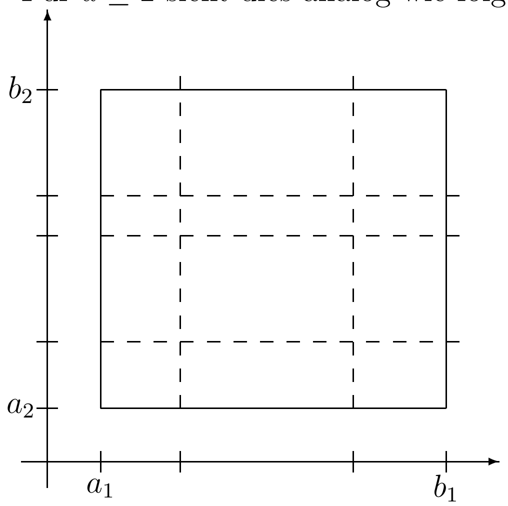
   Diese Eigenschaft nennen wir σ–*Additivität*.

Zerlegungen und Inhalte von Intervallen

Sei $I := I^1 \times I^2 \times \dots \times I^d$ mit $I^j = [a_j, b_j]$. Der elementargeometrische *Inhalt* von I sei dann

$$|I| := (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Zerlegungen werden wie folgt definiert:
Für $d = 1$ ist eine Zerlegung von $[a, b]$ naheliegend definiert als die Menge der Teilintervalle von I, die durch benachbarte Punkte des Gitters Z gebildet werden, wobei $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$ mit $a = t_0 < \dots < t_n = b$.
Für $d \geq 2$ sieht dies analog wie folgt aus:



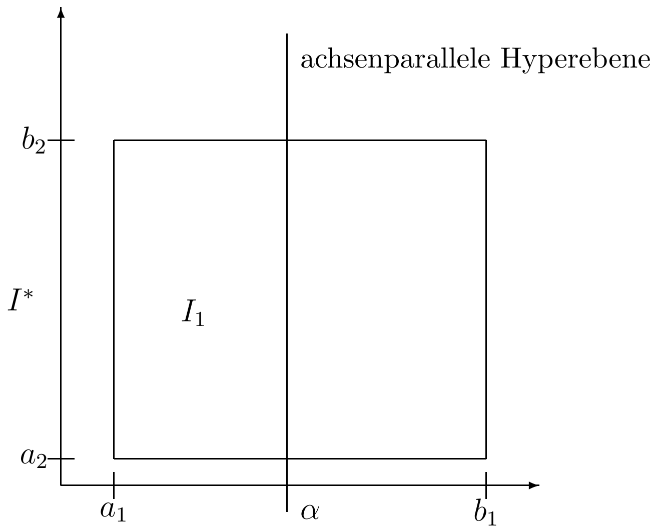
Seien Z_j Zerlegungen der Intervalle I^j $(j = 1, \dots, d)$. Wir definieren eine Zerlegung von I als die Menge der Teilintervalle (sprich: Quader), die durch „benachbarte“ Punkte im Gitter $Z := Z_1 \times \dots \times Z_d$ gebildet werden. Sind $I_1, \dots, I_m$ die durch Z erzeugten Teilintervalle, gilt $I = \bigcup_{i=1}^m I_i$.
Wir nennen Z' eine *Verfeinerung* von Z, wenn jeder Gitterpunkt von Z auch Gitterpunkt von Z' ist.

Die durch Zerlegungen erzeugten Intervalle haben folgende Eigenschaften:

1. Sind $I_1, \ldots, I_m$ die durch die Zerlegung Z erzeugten Intervalle, so gilt

   $$|I| = |I_1| + \cdots + |I_m|.$$

   Beweis: Entweder durch Ausrechnen oder mit folgender geometrischer Argumentation:

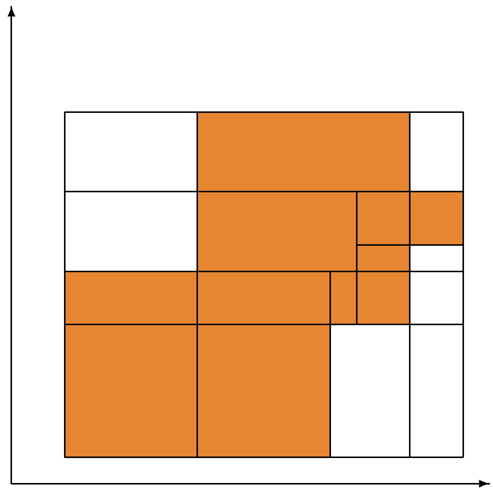
   

   Seien $I_1 = [a_1, \alpha] \times I^*$, $I_2 = [\alpha, b_1] \times I^*$ mit $I^* = [a_2, b_2] \times \cdot \times [a_d, b_d]$. Dann ist einerseits $|I| = (b_1 - a_1)|I^*|$, andererseits sind $|I_1| = (\alpha - a_1)|I^*|$, $|I_2| = (b_1 - \alpha)|I^*|$, also $|I| = |I_1| + |I_2|$.

   Alles geht genauso, wenn wir I durch die Hyperebene $\{x_k = \alpha\}$ zerlegen. Das allgemeine Ergebnis folgt durch mehrfache Anwendungs dieses Schrittes. $\square$

   Bezeichnung: Intervalle I_1, I_2 heißen *nicht überlappend* oder *fremd*, wenn sie keinen gemeinsamen inneren Punkt haben. Eine Intervallsumme $I = I_1 \cup \cdots \cup I_m$ heißt *nicht überlappend*, wenn je zwei I_i und I_j nicht überlappend sind.

2. Sei $S = \bigcup I_j$ eine Intervallsumme (eventuell mit Überlappungen). Dann existiert eine nicht überlappende Darstellung von S.



3. Ist $S = I_1 \cup \cdots \cup I_m$ eine nicht überlappende Darstellung von S, so ist

$$|S| := |I_1| + \cdots + |I_m|$$

unabhängig von der nicht überlappenden Darstellung.

Beweis: Sei $S = \bigcup I_i = \bigcup J_j$ (beide Darstellungen nicht überlappend). Dann ist offensichtlich $S = (\bigcup I_i) \cup (\bigcup J_j)$.

Wenden wir 2 hierauf an, gibt es eine nicht überlappende Darstellung $S = \bigcup I'_k$. Jedes dieser I'_k ist in je genau einem der I_i und J_j enthalten, da sämtliche Darstellungen nicht überlappend sind; $\bigcup I'_k$ ist allenfalls eine verfeinerte Darstellung von S.

Sei nun $I_1 = I'_1 \cup \cdots \cup I'_n$ (paarweise nicht überlappend). Dann ist nach 1

$$|I_1| = |I'_1| + \cdots + |I'_n|$$

(und so weiter mit $I_2, \dots$), also

$$\sum_i |I_i| = \sum_j |I'_j|.$$

Analog erhält man, dass $\sum |J_j| = \sum |I'_i|$ und hieraus die Behauptung.

$\square$

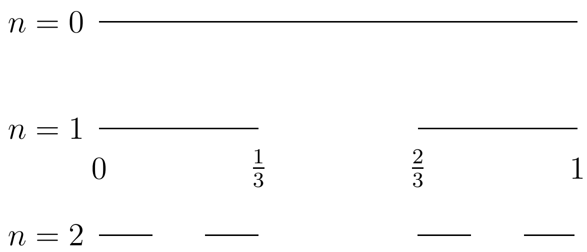
4. $S = \bigcup I_i$ sei eine beliebige Darstellung von S. Dann gilt: $|S| \leq \sum_i |I_i|$.

Beweis: Nach 2 existiert eine nicht überlappende Darstellung $S = \bigcup I'_j$ mit der Eigenschaft: Jedes Intervall I_i wird durch Intervalle I'_j dargestellt. Bei Überlappung werden einige I'_j mehrfach „benutzt“. $\square$

Die folgenden einfachen Eigenschaften seien dem Leser zur Übung überlassen: Seien S und T Intervallsummen. Dann gilt:

1. $S \subset T \Longrightarrow |S| \leq |T|$,
2. $|S \cup T| \leq |S| + |T|$. Gleichheit gilt, falls S und T fremd sind.

Wie mit Intervallsummen gerechnet werden kann, soll das Beispiel der CANTORmenge verdeutlichen:
Die CANTORmenge definieren wir als „Grenzwert“ der wie folgt induktiv definierten Menge:
$C_0 := [0,1]$.
C_{n+1} entstehe aus C_n, indem von jedem Teilintervall von C_n das offene mittlere Drittel entfernt wird.
Wir setzen $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$



Das Maß der „ausgeräumten“ Menge ist

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i + 1\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = 1$$

Übrig bleibt die Menge aller Zahlen mit der triadischen Entwicklung $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, $a_i \in \{0,2\}$, $i = 1,2,3,\ldots$. Diese Menge ist bijektiv abbildbar auf die Menge aller dyaischen Entwicklungen der Zahlen in $[0,1]$, also auf $[0,1]$, und damit überabzählbar.

1.2 Das äußere Maß

Es sei $E \subset \mathbb{R}^d$, S sei eine abzählbare Menge von Intervallen I_k. Wir setzen

$$\sigma(S) := \sum_{I_k \in S} |I_k| \tag{1.1}$$

Definition 1.1 *Das äußere Maß von $E \subset \mathbb{R}^d$ wird mit $|E|_e$ bezeichnet und ist definiert durch*

$$|E|_e := \inf \sigma(S),$$

wobei das Infimum über alle möglichen abzählbaren Intervall–Überdeckungen S von E genommen wird.

Offensichtlich ist $0 \leq |E|_e \leq +\infty$

Satz 1.2 *Es sei I ein Intervall. Dann gilt $|I|_e = |I|$*

Beweis:
„$\leq$“: I überdeckt sich selbst, also ist nach Definition $|I|_e \leq |I|$.
„$\geq$“: Sei $S = \{I_k\}$ eine beliebige Überdeckung von I, und sei $\varepsilon > 0$. I_k^* sei ein Intervall, das I_k in seinem Inneren enthalte und für das $|I_k^*| \leq (1+\varepsilon)|I_k|$ erfüllt sei.
Dann ist $\bigcup_k \overset{\circ}{I_k^*} \supset I$ eine offene Überdeckung von I. Wegen der Kompaktheit von I existiert eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir $I \subset \bigcup_{k=1}^N I_k^*$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Es folgt, dass

$$|I| \leq \sum_{k=1}^N |I_k^*| \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^N |I_k|,$$

also $|I| \leq (1+\varepsilon)\sigma(S)$. Da wir ε beliebig gewählt haben, ist $|I| \leq \sigma(S)$, und, wenn wir das Infimum über alle S bilden, $|I| \leq |I|_e$. □

Bemerkung:

1. I sei endliche Vereinigung von nicht überlappenden Intervallen I_k, $k = 1, \ldots, n$. Dann folgt mit völlig analogem Beweis: $|I|_e = |I| = \sum_{k=1}^n |I_k| = \sum_{k=1}^n |I_k|_e$.

2. $|\partial I|_e = 0$

Wir erhalten sofort einige elementare Eigenschaften:

(1.2) $\quad E_1 \subset E_2 \Longrightarrow |E_1|_e \leq |E_2|_e.$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

(1.3) $\quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \Longrightarrow |E|_e \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e$

Beweis: Sei $|E_k| < \infty$ für alle k, ansonsten ist die Aussage trivial.
Seien $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir wählen Intervalle $I_j^{(k)}$ mit $E_k \subset \bigcup_j I_j^{(k)}$ und

$$\sum_j |I_j^{(k)}| \leq |E_k|_e + \varepsilon \cdot 2^{-k}.$$

Mit $E \subset \bigcup_{j,k} I_j^{(k)}$ folgt

$$\begin{aligned} |E|_e &\leq \sum_{j,k} |I_j^{(k)}| = \sum_k \sum_j |I_j^{(k)}| \\ &\leq \sum_k \left(|E_k|_e + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \left(\sum_k |E_k|_e \right) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Lassen wir ε gegen Null gehen, folgt die Behauptung. □

(1.4) $\quad E \subset \mathbb{R}^d$ mit $|E|_e = 0$ und $F \subset E \Longrightarrow |F|_e = 0.$

Als Folge haben wir die Aussage: *Ist F abzählbar, dann folgt* $|F|_e = 0$. Die Umkehrung gilt nicht, wie wir am Beispiel der CANTORmenge gesehen haben.

Beispiel 1.3 Betrachten wir die CANTORmengen noch einmal: die Mengen C_n, die wir oben induktiv definiert haben, sind alle abgeschlossen. C selbst, als Schnitt abgeschlossener Mengen, ist es ebenfalls.
C_n enthält 2^n Intervalle der Länge 3^{-n}. C enthält alle Eckpunkte dieser Intervalle.
Ist $x \in C$, so ist $x \in C_n$ für alle n. Es folgt, dass x ein Häufungspunkt von Eckpunkten ist.
C ist also „perfekt“, d. h. C besteht nur aus Häufungspunkten und ist abgeschlossen.
Das äußere Maß von C errechnet sich wie folgt:

$$C \subset C_n \text{ für alle } n \Rightarrow |C|_e \leq |C_n|_e = 2^n 3^{-n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

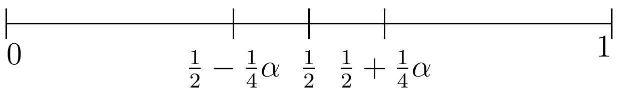
also $|C|_e = 0$.

Hilfssatz 1.4 *$B \subset \mathbb{R}^d$ sei perfekt. Dann ist B nicht abzählbar.*

Beweis: Nehmen wir an, B sei abzählbar, sagen wir $B = \{b_k; k \in \mathbb{N}\}$. Dann setzen wir für $k \geq 1$: $B_k := B \setminus \{b_k\}$.
Sei $x_1 \in B_1$. Q_1 sei ein abgeschlossener Würfel mit Zentrum x_1, so dass $b_1 \notin Q_1$. Dann ist $Q_1 \cap B \neq \emptyset$ und kompakt, denn Q_1 ist beschränkt und sowohl Q_1 als auch B sind abgeschlossen.
Wir approximieren x_1 nun mit Punkten in B, die auch in B_2 liegen. Es folgt, dass auch $B_2 \cap \overset{\circ}{Q}_1 \neq \emptyset$.
Wähle ein $x_2 \in B_2 \cap \overset{\circ}{Q}_1$ und wähle einen abgeschlossenen Würfel Q_2 mit Zentrum x_2, $Q_2 \subset Q_1$ und $b_2 \notin Q_2$. Dann ist $Q_2 \cap B$ nichtleer und eine abgeschlossene Teilmenge von $Q_1 \cap B$.
Induktiv definieren wir auf diese Weise eine absteigende Kette von kompakten Mengen $Q_k \cap B$ mit $b_k \notin Q_k$.
Es folgt, dass $\emptyset \neq (\bigcap_k Q_k \cap B) \subset B$, aber andererseits enthält $\bigcap_k Q_k \cap B$ keinen Punkt b_k, was ein Widerspruch ist. □

Cantormengen mit positivem Maß, Volterras Funktion und die Cantor–Lebesgue–Funktion

Sei $0 < \alpha < 1$. Wir betrachten statt der üblichen Konstruktion einer Cantormenge einmal folgende:



Aus dem Intervall $[0, 1]$ entfernen wir das offene Intervall $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha)$.
Aus den verbleibenden Intrevallen $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha, 1]$ der Länge $\frac{1}{2}(1 - \frac{\alpha}{2})$ nehmen wir die jeweils mittleren offenen Intervalle der Länge $\frac{\alpha}{8}$ heraus. Die verbleibenden Intervalle haben die Länge $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha)$.
Nach n Schritten ist die Länge der Vereinigung der herausgenommenen Intervalle

$$\alpha \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + 2^{-n}\right)}_{\longrightarrow 1 \quad (n \to \infty)}.$$

Die verbleibende Menge hat äußeres Maß $1 - \alpha$.

Mit Hilfe einer solchen Cantormenge von positivem Maß können wir nun Volterras Beispiel einer Funktion untersuchen, deren Ableitung überall existiert,

aber auf einer wesentlichen Menge unstetig (und damit nicht RIEMANN–integrierbar) ist.
Als Ausgangsfunktion betrachten wir

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \ , \ x \neq 0, \\ 0 \ , \ x = 0 \end{cases}$$

f ist auf $[0,1]$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \ , \ x \neq 0, \\ 0 \ , \ x = 0 \end{cases}$$

Es folgt, dass f' in 0 unstetig ist.

$C \subset [0,1]$ sei eine CANTORmenge mit positivem äußeren Maß. Sei $(a,b) \subset [0,1]$ ein zu C komplementäres Intervall (also eines der „herausgenommenen“). Wir definieren die Funktion $\varphi(x,a)$ durch

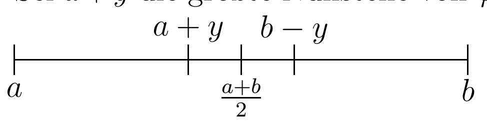
$$\varphi(x,a) := (x-a)^2 \sin \frac{1}{x-a}, \quad x \in [a,b].$$

Dann ist $\varphi(a,a) = 0$, und für $x \in (a,b)$ ist

$$\varphi'(x,a) = 2(x-a) \sin \frac{1}{x-a} - \cos \frac{1}{x-a}.$$

Betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$, $k > \pi/(b-a)$ einmal das Verhalten von $\varphi(x,a)$ an $x = a + \frac{1}{k\pi}$: x liegt im Intervall (a,b), und $\varphi'(x,a) = -\cos(k\pi) = (-1)^k$.
Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass φ' auf (a,b) den Wert 0 unendlich oft annimmt.

Sei $a+y$ die größte Nullstelle von φ', die kleiner oder gleich $\frac{a+b}{2}$ ist (siehe unten).



Wir definieren f nun wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \in C, \\ \varphi(x,a) & , \quad a \leq x < a+y \\ \varphi(x,b) & , \quad b-y \leq x \leq b \\ \varphi(a+y,a) & , \quad a+y \leq x < b-y \end{cases}$$

Dann hat f' die folgenden Eigenschaften:

1. f' existiert auf $(0,1)$ und ist gleich Null auf C,

2. f' ist auf C unstetig.

Beweis: $\underline{\alpha)}$ f' existiert in $x_0 \in C$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in C, \\ \dfrac{\varphi(x,\tilde{a})}{x-x_0} & \text{mit passendem } \tilde{a}, \text{ falls } x \notin C. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\frac{\varphi(x,\tilde{a})}{x-x_0} = \frac{(x-\tilde{a})^2 \sin \frac{1}{x-\tilde{a}}}{x-x_0},$$

und dies konvergiert gegen 0 für $x \to x_0$, denn x nähert sich zuerst $\tilde{a}$.

$\underline{\beta)}$ f' existiert für $a < x_0 < a+y$, weil $\varphi'(\cdot,a)$ existiert.
$\underline{\gamma)}$ Sei $x_0 = a+y$. Dann ist

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} 0 & , x > a+y \text{ (aber } \leq b-y) \\ \underbrace{\dfrac{\varphi(x,a)-\varphi(a+y,a)}{x-(a+y)}}_{\longrightarrow \varphi'(a+y,a)=0} & , x < a+y \end{cases}$$

$\underline{\delta)}$ Sei $x_0 = b-y$. Dann ist

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \dfrac{\varphi(a+y,a)+\varphi(b-y,b)}{x-(b-y)} = 0 & , x < b-y \\ \underbrace{\dfrac{-\varphi(x,b)+\varphi(b-y,b)}{x-(b-y)}}_{\longrightarrow -\varphi'(b-y,b)=0 \text{ für } x \uparrow b-y} & , x \geq b-y \end{cases}$$

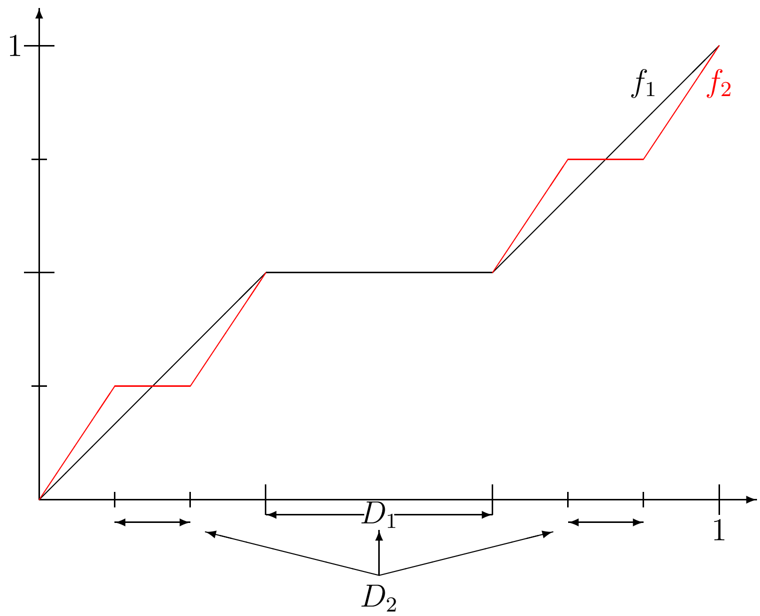
NR: $\varphi(a+y,a) = y^2 \sin \frac{1}{y}$, $\varphi(b-y,b) = -y^2 \sin \frac{1}{y}$, $\varphi'(a+y,a) = \varphi'(b-y,b) = 0$.

□

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Cantor–Lebesgue–Funktion. Wir werden zeigen, dass für diese Funktion der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung nicht gilt. Dazu definieren wir die Mengen D_k durch

$$D_k := [0,1] \setminus C_k;$$

das entspricht der Vereinigung aller im k-ten Konstruktionsschritt der Cantormenge entfernten Intervalle.



D_k besteht aus 2^{k-1} Intervallen, die wir, von links nach rechts angeordnet, mit I_j^k bezeichnen $(j = 1, \ldots, k-1)$.
Die Funktionen $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{cases} f_k(0) = 0 & \\ f_k(1) = 1 & \\ f_k(x) = j \cdot 2^{-k} & x \in I_j^k \\ \text{linear} & \text{auf jedem der Intervalle in } C_k \end{cases}$$

Die Funktionen f_k sind monoton wachsend, und $f_{k+1} = f_k$ auf I_j^k $(j = 1, \ldots, 2^{k-1})$.
Ferner ist

$$|f_k - f_{k+1}| < 2^{-k}$$

Nach dem WEIERSTRASSschen Majorantenkriterium ist $\sum(f_k - f_{k-1})$ auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent; da diese Summe allerdings eine Teleskopreihe ist, konvergiert die Folge $\{f_k\}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f.
f ist stetig und monoton wachsend; ferner ist f auf jedem Intervall, das bei der Konstruktion von C herausgenommen wird, konstant; $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
Zusammengefasst: f ist nicht konstant, aber bis auf Punkte x in einer Nullmenge gilt $f'(x) = 0$.

Für diese Funktion gilt also **nicht** $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$.

1.3 Messbare Mengen

Satz 1.5 *Sei $E \subset \mathbb{R}^d$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine* offene *Menge $G \subset \mathbb{R}^d$ mit $E \subset G$ und $|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon$. Mit anderen Worten:*

$$|E|_e = \inf_{\substack{G \text{ offen} \\ E \subset G}} |G|_e$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle Intervalle I_k mit $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq |E|_e + \frac{\varepsilon}{2}$
Sei I_k^* ein Intervall mit $(I_k^*)^\circ \supset I_k$ und

$$|I_k^*| \leq |I_k| + \varepsilon 2^{-k-1}.$$

Setze $G := \bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k^*)^\circ$. Dann ist

$$|G|_e \leq \sum_k |I_k^*| \leq \sum_k |I_k| + \varepsilon \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1}}_{=\frac{1}{2}} \leq |E|_e + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = |E|_e + \varepsilon.$$

□

Bezeichnung:

1. $H \subset \mathbb{R}^d$ ist *vom Typ G_δ* („H ist eine G_δ–Menge“), wenn $H = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k$, mit offenen Mengen G_k.

2. $H \subset \mathbb{R}^d$ ist *vom Typ F_σ* („H ist eine F_σ–Menge“), wenn $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$, mit abgeschlossenen Mengen F_k.

Bemerkung: Ist H abgeschlossen, so ist H vom Typ G_δ. Ist H offen, so ist H vom Typ F_σ.
Der Beweis als Übungsaufgabe gestellt.
Hinweis zur ersten Aussage: Betrachte die Mengen

$$B_{\frac{1}{k}}(H) := \{x; \operatorname{dist}(x, H) < \frac{1}{k}\}.$$

Satz 1.6 *Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ Dann existiert eine Menge H vom Typ G_δ mit $E \subset H$ und $|E|_e = |H|_e$.*

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Aus Satz 1.5 folgt die Existenz einer offenen Menge G_k mit $G_k \supset E$ und $|G_k|_e \leq |E|_e + \frac{1}{k}$.
$H := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ ist eine G_δ–Menge, $E \subset H$ und $|E|_e \leq |H|_e \leq |G_k|_e \leq |E|_e + \frac{1}{k}$ für alle k. □

1.3.1 Lebesgue–messbare Mengen

Auf der Potenzmenge $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ existiert keine Abbildung $m : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$, die die Eigenschaften 1. bis 3. aus Abschnitt 1.1 hat. Wir beweisen dies später. Deshalb definieren wir:

Definition 1.7 *$E \subset \mathbb{R}^d$ wird* (Lebesgue)–messbar *genannt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge G gibt mit $E \subset G$ und $|G \setminus E|_e < \varepsilon$. Falls E messbar ist, wird das äußere Maß von E das* Lebesgue–Maß von *E genannt: $|E| := |E|_e$*

Bemerkung: Vergleichen wir diese Definition mit der schwächeren Eigenschaft, die wir in Satz 1.5 bewiesen haben: Ist $E \subset G$, gilt:

$$G = E \cup (G \setminus E) \;\Rightarrow\; |G|_e \le |E|_e + |G \setminus E|_e.$$

Aber aus $|G|_e \le |E|_e + \varepsilon$ folgt **nicht** $|G \setminus E|_e < \varepsilon$.

Beispiel 1.8

1. Jede offene Menge ist messbar.
2. Jede Menge vom äußeren Maß 0 ist messbar.

   Beweis: Seien $|E|_e = 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine offene Menge G mit $E \subset G$ und

   $$|G \setminus E|_e \le |G|_e \le \underbrace{|E|_e}_{=0} + \varepsilon = \varepsilon.$$

   □

Satz 1.9 *$E_k, k = 1, 2, \ldots$ seien messbar. Dann ist $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ messbar mit*

$$|E| \le \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Für $k = 1, 2, \ldots$ wähle offene Mengen G_k mit $E_k \subset G_k$ und $|G_k \setminus E_k|_e < \varepsilon \cdot 2^{-k}$.
$G := \bigcup_k G_k$ ist dann ebenfalls offen. Ferner ist

$$|G \setminus E|_e = |\bigcup_k (G_k \setminus E_k)|_e \overset{(1.3)}{\le} \sum_k |G_k \setminus E_k|_e < \varepsilon.$$

Es folgt, dass E messbar ist und hieraus mit (1.3) die Behauptung. □

Folgerung: Ist $I \subset \mathbb{R}^d$ ein (nicht notwendig abgeschlossenes) Intervall, dann ist I messbar. Ferner ist das LEBESGUEmaß von I gleich dem elementargeometrischen Volumen von I.
Die Messbarkeit von I folgert man aus

$$I = \underbrace{\mathring{I}}_{\text{offen}} \cup \underbrace{\partial I}_{\text{Nullmenge}} .$$

Satz 1.10 *Jede abgeschlossene Menge in* $\mathbb{R}^d$ *ist messbar.*

zum Beweis brauchen wir einige Hilfsmittel:

Hilfssatz 1.11 *Jede offene Menge in* $\mathbb{R}^d$ *ist eine abzählbare Vereinigung nicht überlappender Intervalle.*

Beweis des Hilfssatzes: $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ erzeugt ein Gitter mit Würfeln K_0 der Breite 1, die bei Unterteilung in 2^d Teilwürfel K_1 zerfallen. Verfeinerung der Unterteilung „in der Mitte“ führt auf Würfel K_j der Kantenlänge 2^{-j}, und K_j wird durch 2^d nicht überlappende Würfel in K_{j+1} überdeckt.
Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ offen. S_0 sei die Menge aller Würfel K_0, die ganz in G liegen, S_1 solche aus K_1, die ganz in G liegen, aber nicht in einem von S_0 enthalten sind.
Induktiv definieren wir auf diese Weise S_j $(j = 0, 1, \dots)$. Dann ist $G = \bigcup_j S_j$ ⋄

Bezeichnung: $\{Q; Q \in K_j, j = 0, 1, 2, \dots\}$ wird „Familie dyadischer Würfel“ genannt.

Hilfssatz 1.12 *Sei* $\{I_k\}$ *eine Menge endlich vieler nicht überlappender abgeschlossener Intervalle. Dann ist* $\bigcup I_k$ *messbar und*

$$|\bigcup I_k| = \sum |I_k|.$$

Beweis des Hilfssatzes: $\underline{\alpha)}$ Die Messbarkeit folgt aus Satz 1.9.
$\underline{\beta)}$ $|\bigcup I_k|_e = \sum |I_k|_e$. ⋄

Hilfssatz 1.13 *Falls* $\operatorname{dist}(E_1, E_2) > 0$*, so gilt* $|E_1 \cup E_2|_e = |E_1|_e + |E_2|_e$*, wobei der „Abstand“ zwischen* E_1 *und* E_2 *definiert sei durch*

$$\operatorname{dist}(E_1, E_2) := \inf\{|x - y|; x \in E_1, y \in E_2\}.$$

Dies ist z. B. der Fall, wenn E_1 und E_2 kompakt und disjunkt sind.

Beweis des Hilfssatzes: $\underline{\alpha)}$ „$\leq$“ ist trivial; $|\cdot|_e$ ist subadditiv. $\underline{\beta)}$ „$\geq$“: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle Intervalle I_k mit $(E_1 \cup E_2) \subset \bigcup I_k$ und $\sum |I_k| \leq |E_1 \cup E_2| + \varepsilon$. Ferner sei der Durchmesser der I_k keiner als $\operatorname{dist}(E_1, E_2)$, ansonsten unterteile man die Intervalle.

$\{I_k\}$ zerfällt in $\underbrace{\{I'_k\}}_{\text{Üb. von } E_1} \cup \underbrace{\{I''_k\}}_{\text{Üb. von } E_2}$.

Nun folgt:

$$|E_1|_e + |E_2|_e \leq \sum |I'_k| + \sum |I''_k| = \sum |I_k| \leq |E_1 \cup E_2|_e + \varepsilon$$

und für $\varepsilon \longrightarrow 0$ die Behauptung. $\diamond$

Beweis von Satz 1.10: $\underline{\alpha)}$ Sei F kompakt und $\varepsilon > 0$. Wähle eine offene Menge $G \supset F$ mit $|G| < |F|_e + \varepsilon$.

Dann ist $G \setminus F$ offen. Es existieren nach Hilfssatz 1.11 abzählbar viele Intervalle I_k mit $G \setminus F = \bigcup_k I_k$. Folglich ist $|G \setminus F| \leq \sum_k |I_k|$.

Es bleibt zu zeigen: $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq \varepsilon$.

Dazu schreiben wir

$$G = F \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) \supset F \cup \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k \right) \quad \text{für alle } N.$$

Folglich ist

$$|G| \geq \Big| \underbrace{F}_{\text{kompakt}} \cup \underbrace{\bigcup_{k=1}^{N} I_k}_{\text{kompakt}} \Big|_e \overset{1.13}{=} |F|_e + \Big| \bigcup_{k=1}^{N} I_k \Big|$$

Hieraus folgt

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right| \leq |G| - |F|_e \leq \varepsilon.$$

$\underline{\beta)}$ Für den Fall, dass F nicht kompakt ist, schreibe man $F = \bigcup_k F_k$ mit kompakten Mengen $F_k := F \cap \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \leq k\}, k = 1, 2, \ldots$. Dann ist F als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen wiederum messbar. $\square$

Satz 1.14 *Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.*

Beweis: Sei E messbar, und sei $k = 1, 2, \ldots$. Dann existieren offene Mengen G_k mit $E \subset G_k$ (gleichbedeutend mit $G_k^{\complement} \subset E^{\complement}$) und

$$(1.5) \qquad |G_k \setminus E| < \frac{1}{k}.$$

Die Mengen $G_k^{\complement}$ sind abgeschlossen, also messbar. Folglich ist die F_σ–Menge $H := \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k^{\complement}$ auch messbar.
Es ist $H \subset E^{\complement}$, also $E^{\complement} = H \cup Z \iff Z = E^{\complement} \setminus H$.
Es folgt:

$$Z \subset \underbrace{E^{\complement} \setminus G_k^{\complement}}_{=G_k \setminus E}, k = 1, 2, \ldots$$

Wegen 1.5 gilt $|Z|_e < \frac{1}{k}$ für alle k, also $|Z|_e = 0$. Es folgt, dass Z und damit $E^{\complement}$ messbar sind. □

Satz 1.15 *Seien $\{E_k\}$ abzählbar viele messbare Mengen. Dann ist auch $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ messbar.*

Beweis:

$$E^{\complement} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{\complement}.$$

Da die $E_k^{\complement}$ messbar sind, ist $E^{\complement}$ und damit $E = (E^{\complement})^{\complement}$ messbar. □

Satz 1.16 *E_1, E_2 seien messbar. Dann ist auch $E_1 \setminus E_2$ messbar.*

Beweis: $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^{\complement}$. □

Bemerkung: $\mathfrak{M}$ sei die Menge aller messbaren Mengen in $\mathbb{R}^d$.
$\mathfrak{M}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung, abzählbarer Vereinigung und abzählbarer Durchschnittsbildung. Solche Systeme $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ nennt man *σ-Algebren.*
Sei $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$, und sei $\mathcal{F}$ die Familie der σ-Algebren, die $\mathfrak{C}$ enthalten. Dann ist $\mathscr{E} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{F}} \Sigma$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathfrak{C}$ enthält. Man sagt auch, diese σ-Algebra ist die *von $\mathfrak{C}$ erzeugte.*

Bezeichnung: $\mathfrak{C}$ sei die Menge aller offenen Mengen in $\mathbb{R}^d$. Man nennt die hierdurch erzeugte σ-Algebra $\mathscr{E}$ die Borel–Mengen des $\mathbb{R}^d$.
Beispiele für Borel–Mengen sind die F_σ- und G_δ–Mengen.

Es folgt unmittelbar:

Satz 1.17 *Jede* Borel*–Menge ist messbar.*

Lemma 1.18 $E \subset \mathbb{R}^d$ *ist genau dann messbar, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine abgeschlossene Menge* $F \subset E$ *gibt mit* $|E \setminus F|_e < \varepsilon$.

Beweis: E messbar $\iff$ $E^{\complement}$ messbar $\iff$ Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge G mit $E^{\complement} \subset G$ und $|G \setminus E|_e < \varepsilon$ $\iff$ Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine abgeschlossene Menge F mit $F \subset E$ und $|E \setminus F|_e < \varepsilon$, nämlich $F = G^{\complement}$; beachte: $G \setminus E^{\complement} = E \setminus F$. □

Bemerkung: Die in Lemma 1.18 angesprochene Charakterisierung der Messbarkeit entspricht dem *inneren* Maß von E; analog zum äußeren Maß als dem Inhalt einer minimalen offenen Überdeckung von E mit Intervallen kann das innere Maß $|E|_i$ definiert werden als der Inhalt einer maximalen (abgeschlossenen) Ausschöpfung von E. In den frühen Arbeiten von Borel oder Lebesgue (etwa Lebesgues Dissertation [Leb1902]) wird die Menge E messbar genannt, falls $|E|_e = |E|_i$.
Allerdings macht diese Bedingung nur Sinn, wenn $|E|_e < \infty$

Satz 1.19 (σ-Additivität des L-Maßes) *Sei* $\{E_k\}$ *eine Folge disjunkter* Lebesgue*–messbarer Mengen. Dann gilt:*

$$\left|\bigcup_k E_k\right| = \sum_k |E_k|.$$

Beweis: Die Ungleichung „$\leq$“ brauchen wir nicht zu zeigen, denn dies folgt aus Satz 1.9.
$\underline{\alpha)}$ Seien $E_k, k = 1, 2, \ldots$ beschränkt, und sei $\varepsilon > 0$.
Aus Lemma 1.18 folgt für jedes k die Existenz einer abgeschlossenen Menge $F_k \subset E_k$ mit $|E_k \setminus F_k| < \varepsilon 2^{-k}$.
Es gilt:

$$|E_k| = \Big| \underbrace{F_k}_{\text{messb.}} \cup \underbrace{(E_k \setminus F_k)}_{\text{messb.}} \Big| = |F_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{1.6}$$

Gleichzeitig ist

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{m} \underbrace{F_k}_{\text{komp.}}\Big| = \sum_{k=1}^{m} |F_k| \quad \text{für alle } m,$$

und

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad \text{folglich} \quad \left|\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right| \le \left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right|.$$

Also:

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right| \ge \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| \overset{(1.6)}{\ge} \sum_{k=1}^{\infty}(|E_k| - \varepsilon 2^{-k}) = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k| - \varepsilon.$$

$\underline{\beta)}$ $\{I_j; j = 1, 2, \dots\}$ sei eine aufsteigende Kette von Intervallen mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j = \mathbb{R}^d$.
Setze $S_1 := I_1$ und $S_j := I_j \setminus I_{j-1}$ für $j > 1$.
Sei $E_{kj} := E_k \cap S_j$ $(k = 1, 2, \dots)$, also $E_k = \bigcup_j E_{kj}$. Es folgt

$$\bigcup_k E_k = \bigcup_{k,j} E_k j E_{kj} \overset{(\alpha)}{\Longrightarrow} \left|\bigcup_k E_k\right| = \left|\bigcup_{k,j} E_{kj}\right| \overset{(\alpha)}{=} \sum_k \sum_j |E_{kj}| \overset{(\alpha)}{=} \sum_k |E_k|.$$

□

Korollar 1.20 *Sei $\{I_k\}$eine Folge von Intervallen, die sich nicht überlappen. Dann gilt*

$$\left|\bigcup_k I_k\right| = \sum_k |I_k|.$$

Beweis: „$\underline{\le}$“: klar.
„$\underline{\ge}$“: $|\bigcup_k I_k| \ge |\bigcup_k \overset{\circ}{I}_k| = \sum_k |\overset{\circ}{I}_k| = \sum_k |I_k|$. □

Korollar 1.21 *Seien E_1, E_2 messbar, $E_2 \subset E_1$, $|E_2| < \infty$.*
Dann gilt: $|E_1 \setminus E_2| = |E_1| - |E_2|$.

Beweis: $E_1 = E_2 \uplus (E_1 \setminus E_2) \Longrightarrow |E_1| = |E_2| + |E_1 \setminus E_2|$. Mit $|E_2| < \infty$ folgt die Behauptung. □

Wir gehen noch auf die Frage ein, inwieweit das LEBESGUE–Maß „stetig“ ist, d. h. wenn wir eine messbare Menge E mit messbaren Mengen $\{E_k; k = 1, 2, \dots\}$ approximieren, wie sich das Maß verhält.
Die Antwort gibt folgender

Satz 1.22 *Sei $\{E_k\}$ eine Folge messbarer Mengen. Dann gilt:*

1. *Gilt* $E_k \uparrow E$, *so ist* $\lim_{k\to\infty} |E_k| = |E|$.

2. *Gilt* $E_k \downarrow E$ *und ist* $|E_k| < \infty$ *für ein* k, *so ist* $\lim_{k\to\infty} |E_k| = |E|$.

Beweis:
1. Sei $|E_k| < \infty$ für alle k, ansonsten ist $\lim_{k\to\infty} |E_k| = |E| = \infty$ bereits erfüllt. Dann gilt

$$E = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup \cdots \cup (E_k \setminus E_{k-1}) \cup \ldots,$$

und folglich

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1| + |E_2 \setminus E_1| + \cdots + |E_k \setminus E_{k-1}| + \ldots \\ &= |E_1| + (|E_2| - |E_1|) + \cdots + (|E_k| - |E_{k-1}|) + \ldots \\ &= |E_k| + \cdots = \lim_{\to\infty} |E_k|; \end{aligned}$$

letztere Identität folgt aus der Überlegung

$$|E| = |E_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |E_n \setminus E_{n-1}| = \lim_{k\to\infty} \Big(|E_1| + \sum_{n=2}^{k} (|E_n| - |E_{n-1}|) \Big) = \lim_{k\to\infty} |E_k|.$$

2. Sei o. B. d. A. $|E_1| < \infty$.
Dann ist

$$E_1 = E \cup (E_1 \setminus E_2) \cup \cdots \cup (E_k \setminus E_{k-1}) \cup \ldots,$$

also

$$\begin{aligned} |E_1| &= |E| + (|E_1| - |E_2|) + \cdots + (|E_k| - |E_{k-1}|) + \ldots \\ &= |E| + |E_1| - \lim_{k\to\infty} |E_k| \Longrightarrow |E| = \lim_{k\to\infty} |E_k|. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Die Voraussetzung $|E_k| < \infty$ für ein k in 2. ist erforderlich.
Als Gegenbeispiel, wenn diese Voraussetzung nicht gegeben ist, betrachte man die Mengen $E_k := \{x \in \mathbb{R}^d; |x| \geq k\}$. Dann ist $\bigcap_k E_k = \emptyset$, $|E_k| = \infty$ für alle k und dementsprechend $\lim_k |E_k| = \infty$, aber $|\emptyset| = 0$.

1.3.2 Charakterisierung von Messbarkeit

Lemma 1.23 *1. $E \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann messbar, wenn $E = H \setminus Z$ mit H vom Typ G_δ und $|Z| = 0$.*

2. $E \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann messbar, wenn $E = H \cup Z$ mit H vom Typ F_σ und $|Z| = 0$.

Beweis: 1. „$\Leftarrow$" Falls $E = H \setminus Z$, folgt die Messbarkeit von E unmittelbar, denn sowohl H als auch Z sind messbar.
„$\Rightarrow$" Sei E_k messbar. Dann existieren offene Mengen G_k für $k = 1, 2, \ldots$ mit $E \subset G_k$ und $|G_k \setminus E| < \frac{1}{k}$. Setze $H := \bigcap_k G_k$. Dann ist H vom Typ G_δ und $E \subset H$. Ferner ist $H \setminus E \subset G_k \setminus E$. Es folgt $|H \setminus E| < \frac{1}{k}$ für $k = 1, 2, \ldots$. Hieraus folgt, dass $Z = H \setminus E$ eine Nullmenge ist, und $E = H \setminus \underbrace{(H \setminus E)}_{Z}$.

2. E messbar $\Rightarrow$ $E^\complement$ messbar $\Rightarrow$ Es existieren offene Mengen G_k mit $E^\complement = \bigcap_k G_k \setminus Z$ und $|Z| = 0$.
Es folgt: $E = \bigcup_k \underbrace{G_k^\complement}_{\text{abg.}} \cup Z$. □

Satz 1.24 (Carathéodory) *$E \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann messbar, wenn für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt: $|A|_e = |A \cap E|_e + |A \setminus E|_e$.*

Beweis: Siehe [WhZyg]. □

Definition 1.25 *$T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ wird* Lipschitz–Transformation *auf* $\mathbb{R}^d$ *genannt. falls es ein $c > 0$ gibt mit*

$$\|Tx - Tx'\| \leq c\|x - x'\| \quad \text{für } x, x' \in \mathbb{R}^d.$$

Beispiele für Lipschitz–Transformationen sind lineare Abbildungen oder Abbildungen der Gestalt $Tx = y$, $y = (f_1(x), \ldots, f_d(x))^\top$ mit stetig differenzierbaren $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{grad} f_i$ beschränkt auf $\mathbb{R}^d$.

Wir vereinbaren folgende Kurzschreibweise: Ist $E \subset \mathbb{R}^d$ und $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ eine (beliebige, womöglich vektorwertige) Abbildung, so schreiben wir kurz $TE := \{Tx \in \mathbb{R}^m; x \in E\}$.

Satz 1.26 *Sei T eine* Lipschitz*–Transformation auf $\mathbb{R}^d$. Dann bildet T messbare Mengen in messbare Mengen ab.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ E sei eine F_σ-Menge. Wir zeigen, dass TE ebenfalls eine F_σ-Menge ist.
$\underline{\alpha_1)}$ E sei kompakt. Da T als LIPSCHITZ-Abbildung stetig ist, ist TE ebenfalls kompakt.
$\underline{\alpha_2)}$ Ist E abgeschlossen, so existieren kompakte Mengen F_k, $k = 1, 2, \ldots$ mit $E = \bigcup_k F_k$ (z. B. $F_k = E \cap \{x; \|x\| \leq k\}$). Es folgt, dass TE als abzählbare Vereinigung kompakter (und damit abgeschlossener) Mengen vom Typ F_σ ist.
$\underline{\beta)}$ Sei $Z \subset \mathbb{R}^d$ mit $|Z| = 0$. Wir zeigen: TZ ist eine Nullmenge.
Aus der LIPSCHITZ–Eigenschaft $\|Tx - Tx'\| \leq c\|x - x'\|$ folgt, dass T Mengen mit Durchmesser δ in Mengen mit Duchmesser $c\delta$ überführt.
I sei ein Intervall, und $\{W_n\}$ seien nicht überlappende Würfel mit $I = \bigcup_n W_n$. Dann ist

$$|TI| = \left|\bigcup_n TW_n\right| \leq \sum_n |TW_n| \leq c' \sum_n |W_n| = c'|I|$$

mit geeigneter, nur von T abhängiger Konstante c'.
Also: für $\varepsilon > 0$ wähle man Intervalle I_k mit $Z \subset \bigcup_k I_k$ und $\sum_k |I_k| < \varepsilon$. Dann gilt $TZ \subset \bigcup_k TI_k$ und

$$|TZ|_e \leq \sum_k |TI_k| \leq c' \sum_k |I_k| \leq c'\varepsilon,$$

also ist auch TZ eine Nullmenge.
$\underline{\gamma)}$ Sei E messbar. Dann gibt es nach 1.23 eine Menge H vom Typ F_σ und eine Nullmenge Z, so dass $E = H \cup Z$. Es folgt, dass

$$TE = \underbrace{TH}_{F_\sigma} \cup \underbrace{TZ}_{\text{Nullmenge}} .$$

messbar ist. □

Satz 1.27 *1. Sei $E \subset \mathbb{R}^d$, und sei T eine* LIPSCHITZ–*Transformation mit* LIPSCHITZ*konstante $c > 0$. Dann gilt*

$$|TE|_e \leq \alpha|E|_e, \quad \alpha = (c\sqrt{d})^d.$$

2. Sei $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear. Dann gilt für $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$|TE|_e = |\det T| \cdot |E|_e.$$

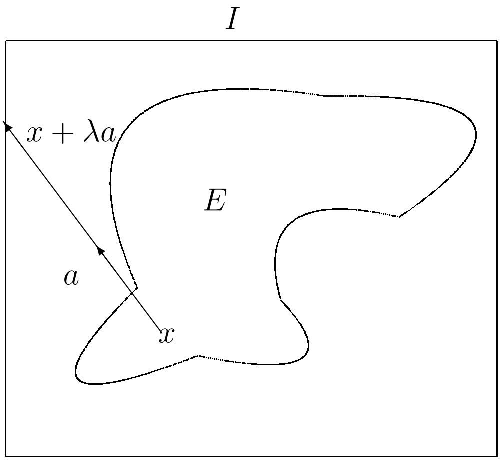
Beweis: a) Die Punkte 1. und 2. müssen nur für offene Mengen gezeigt werden, denn wenn E messbar ist, existiert eine offene Menge $G \supset E$ mit $|G| < |E|_e + \varepsilon$, und es gilt

$$|TE|_e \leq |TG| \leq \left\{ \begin{array}{ll} \alpha|G| & \text{Fall 1.} \\ |\det T||G| & \text{Fall 2.} \end{array} \right\} \leq \left\{ \begin{array}{l} \alpha(|E|_e + \varepsilon) \\ |\det T|(|E|_e + \varepsilon) \end{array} \right.$$

Hieraus folgt bereits die erste Aussage des Satzes.
Für Punkt 2. im Satz müssen wir unterscheiden, ob $\det T = 0$.
$\det T = 0$: Dann ist

$$\underbrace{|T^{-1}(TG)|}_{=|G|} = \underbrace{|\det T^{-1}|}_{=\frac{1}{|\det T|}} |TG|.$$

$\det T \neq 0$: Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass E beschränkt ist. Sei $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $Ta = 0$. Es existiert ein (beschränktes) Rechteck I mit $E \subset I$, und zu $x \in E$ existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x + \lambda a \in \partial I$.[2] (Siehe Skizze.)



Dann ist $Tx = T(x + \lambda a) \in T(\partial I)$. Nun ist ∂I eine Nullmenge, d. h. $TE \subset \underbrace{T(\partial I)}_{\text{Nullmenge}}$.

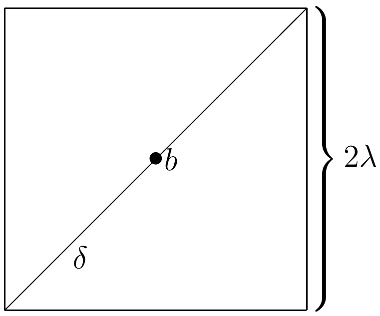
b) Sei E offen. Dann wird E von nicht überlappenden Würfeln überdeckt, sagen wir

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k, \quad |E| = \sum_{k=1}^{\infty} |W_k|.$$

[2]Dies folgt aus dem Zwischenwertsatz, denn $\lambda \mapsto x+\lambda a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ ist eine stetige Abbildung, und für hinreichend großes λ ist $x + \lambda a$ außerhalb von I.

Dann ist $TE = \bigcup_k TW_k$, $|TE|_e = \sum_k |TW_k|_e$. Da T obendrein Nullmengen in Nullmengen überführt, reicht es, die Aussagen des Satzes für Würfel zu zeigen.

<u>Ad 1.</u> Sei W ein Würfel mit Kantenlänge 2λ und Mittelpunkt b. δ sei die Diagonale.



Im zweidimensionalen Fall ist nach dem Satz von PYTHAGORAS $2 \cdot (2\lambda)^2 = \delta^2$, und allgemein gilt für $d \geq 1$:

$$d(2\lambda)^2 = \delta^2 \Longrightarrow \delta = \sqrt{d} \cdot 2\lambda \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \sqrt{d} \cdot \lambda.$$

Somit gilt für $x \in W$:

$$\|Tx - Tb\| \leq c\|x - b\| \leq \lambda c\sqrt{d}.$$

Demnach ist der Würfel $W^* = TW$ in einem achsenparallelen Würfel mit Zentrum $T(b)$ und Kantenlänge $2\lambda c\sqrt{d}$ enthalten. Es folgt

$$|TW| = |W^*| \leq \alpha \underbrace{|W|}_{(2\lambda)^d}.$$

<u>Ad 2.</u> Jede invertierbare $d \times d$–Matrix T lässt sich schreiben als $T = S_1 D S_2$ mit $S_1, S_2 \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^d)$ und $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, d)$. Dann ist $\det T = \det D = \lambda_1 \cdots \lambda_d$.
Wir zeigen: Ist W_1 der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^d$ und $\alpha_T := |TW_1|$, dann ist $\alpha_T = |\det T|$.

Es gilt offenbar:

$$|DW_1| = \underbrace{|\lambda_1 \cdots \lambda_d|}_{|\det D|} |W_1|.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\alpha_S = 1$ für orthogonale Transformationen S. Dazu machen wir zunächst folgende Überlegungen:

Für einen Würfel $W = a + rW_1$ ($a \in \mathbb{R}^d, r \in \mathbb{R}_+$) gilt für jede Transformation $T \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$:

$$|W| = r^d, \quad |TW| = |T(a + rW_1)| = |T(rW_1)| = r^d|TW_1| = \alpha_T|W|.$$

Es folgt: ist $G \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $G = \bigcup_{k=1}^\infty I_k$, so gilt:

$$(1.7) \qquad |TG| = \sum_{k=1}^\infty |TI_k| = \alpha_T|G|$$

Ist K die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$ und $S \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^d)$, so ist $SK = K$ und

$$|K| = |SK| \overset{1.7}{=} \alpha_S \underbrace{|K|}_{>0} \Longrightarrow \alpha_S = 1.$$

Insgesamt folgt also für $T = S_1DS_2$: $\alpha_T = 1 \cdot |\lambda_1 \cdots \lambda_d| \cdot 1 = |\det T|$. □

1.4 Nicht messbare Mengen

Während sich zu jeder Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ein äußeres Maß angeben lässt, gilt dies nicht für das Lebesgue–Maß. Genauer: wir werden zeigen, dass jede Menge $E \subset \mathbb{R}^d$ mit $|E|_e > 0$ eine nicht-messbare Teilmenge enthält. Der Einfachheit halber formulieren wir den Satz und Beweis für $\mathbb{R}$.

Hilfssatz 1.28 *$E \subset \mathbb{R}^d$ sei messbar mit $|E| > 0$. Dann enthält die Differenzmenge $D = \{\delta = x - y; x, y \in E\}$ ein nicht-ausgeartetes Intervall mit Null als Mittelpunkt.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Weil E messbar ist, existiert eine offene Menge $G \supset E$ mit

$$(1.8) \qquad |G| < (1 + \varepsilon)|E|.$$

Aus Hilfssatz 1.11 folgt, dass es Intervalle $\{I_k\}$ gibt, die höchstens einen Punkt gemeinsam haben, so dass $G = \bigcup_k I_k$.
Sei $E_k := E \cap I_k$. Dann ist $E = \bigcup_k E_k$. Ferner gelten

$$|G| = \sum_k |I_k| \quad \text{und} \quad |E| = \sum_k |E_k|.$$

Aus 1.8 folgt: Es gibt ein k_0 mit $|I_{k_0}| < (1 + \varepsilon)|E_{k_0}|$.

Wir setzen nun $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\mathcal{E} := E_{k_0}$, $\mathcal{I} := I_{k_0}$.

Dann ist $1+\varepsilon = \frac{4}{3}$ und $|\mathcal{E}| > \frac{4}{3}|\mathcal{I}|$.
$\mathcal{E}_\delta := \mathcal{E} + \delta$ mit $|\delta| < \frac{1}{2}|\mathcal{I}|$ hat mit $\mathcal{E}$ Punkte gemeinsam.
Ansonsten wäre $\mathcal{E}_\delta \uplus \mathcal{E}$ in einem Intervall der Länge $|\mathcal{I}| + |\delta|$ enthalten. Die Folge wäre

$$\underbrace{|\mathcal{E}| + |\mathcal{E}_\delta|}_{2|\mathcal{E}| > \frac{3}{2}|\mathcal{I}|} \leq |\mathcal{I}| + |\delta| < \frac{3}{2}|\mathcal{I}|,$$

ein Widerspruch.
Es folgt, dass $x + \delta = y \in \mathcal{E}_\delta$ und somit $(-\frac{1}{2}|\mathcal{I}|, \frac{1}{2}|\mathcal{I}|) \subset D$. □

Satz 1.29 *In* $\mathbb{R}$ *existeren nicht-messbare Teilmengen.*

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir setzen $x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Q}$.
$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, wie man sich leicht klar macht. Es folgt, dass $\mathbb{R}$ in Äquivalenzklassen zerfällt. Die Äquivalenzklassen $E_x := \{x + r; r \in \mathbb{Q}\}$ sind paarweise disjunkt oder identisch. $E_0 = \mathbb{Q}$, die anderen Klassen bestehen aus irrationalen Zahlen.
Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, die einzelnen Klassen wie $\mathbb{Q}$ aber abzählbar sind, müssen überabzählbar viele Klassen existieren.
Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Menge E, die mit jeder solchen Klasse genau einen Punkt gemeinsam hat. Die Differenzmenge $D = \{\delta = x - y; x, y \in E\}$ kann kein Intervall enthalten, sonst wäre mindestens ein $\delta = x - y \in \mathbb{Q}$ und somit $x \sim y$ für $x, y \in E$.
Aus 1.28 folgt nun, dass E nicht messbar ist oder $|E| = 0$ gilt.
Nehmen wir an, E sei eine Nullmenge. Dann folgt:

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r + E) = \mathbb{R} \Rightarrow |\mathbb{R}| \leq \sum_{r \in \mathbb{Q}} |r + E| = 0 \Rightarrow |\mathbb{R}| = 0,$$

ein Widerspruch.
Also ist E nicht messbar. □

Folgerung: Jede Menge in $\mathbb{R}$ von positivem äußeren Maß enthält eine nicht-messbare Teilmenge.

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}$ mit $|A|_e > 0$. E sei die nicht-messbare Menge aus dem vorigen Beweis.

Für $r \in \mathbb{Q}$ setzen wir $E_r := E + r$. Die Mengen E_r sind paarweise disjunkt, und

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} E_r = \mathbb{R}, \quad A = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (A \cap E_r).$$

Dann ist $|A|_e \leq \sum_r |A \cap E_r|_e$. Falls $A \cap E_r$ messbar ist, muss nach 1.28 $|A \cap E_r|_e = 0$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ gelten. Aber da $|A|_e > 0$ ist, folgt, dass für mindestens ein r die Menge $A \cap E_r$ nicht messbar ist. □

Bemerkung: Mittels einer nicht-messbaren Menge kann auch die entscheidende Schwäche des äußeren Maßes gegenüber dem Lebesgue–Maß deutlich gemacht werden: Das Lebesgue–Maß ist σ-additiv (Satz 1.19), das äußere Maß ist dagegen nur sub-additiv, d. h. im Allgemeinen gilt nur $|\bigcup_n E_n| \leq \sum_n |E_n|$ für paarweise disjunkte Mengen E_n $(n = 1, 2, \dots)$. Wir führen dies in der Aufgabe 14 näher aus.

1.5 Messbare Funktionen

Rufen wir uns noch einmal der Begriff der Lebesgueschen Summe in Erinnerung:

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot |\{x; y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}|$$

Damit diese Summanden wohldefiniert sind, müssen wir fordern, dass die Mengen $\{x; y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ für beliebige Stützstellen y_{k-1} und y_k messbar sind.
Wir definieren daher:

Definition 1.30 $f : E \subset \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ *wird* Lebesgue–messbar *(auf E) genannt, falls für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$ *die Menge* $\{x \in E; f(x) > \alpha\}$ *eine messbare Teilmenge des* $\mathbb{R}^d$ *ist. Wir schreiben für diese Menge kurz* $\{f > \alpha\}$.

Bemerkung: Da $E = \{f = -\infty\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > -n\}\right)$, folgt: Falls f messbar ist, so ist E messbar, genau dann wenn $\{f = -\infty\}$ messbar ist.

Wir werden von nun an nur messbare Funktionen über messbaren Mengen E betrachten.
Ein Beispiel für messbare Funktionen ist eine stetige Funktion $f : E = \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, denn es ist $\{f > \alpha\} = \overset{-1}{f}((\alpha, \infty))$, die messbar ist, weil sie offen ist. Also ist auch f messbar.

Satz 1.31 *$E \subset \mathbb{R}^d$ sei messbar. $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn eine der folgenden Eigenschaften für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. *$\{f \geq a\}$ ist messbar.*
2. *$\{f < a\}$ ist messbar.*
3. *$\{f \leq a\}$ ist messbar.*

Beweis:

1. $\{f \geq a\} = \bigcap_{n=0}^{\infty}\{f > a - \frac{1}{n}\}$. Also gilt die Aussage des Satzes, falls f messbar ist. Umgekeht ist die Menge $\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{f \geq a + \frac{1}{n}\}$ messbar, wenn die Aussage des Satzes erfüllt ist.
2. $\{f < a\} = \{f \geq a\}^{\complement}$.
3. $\{f \leq a\} = \{f > a\}^{\complement}$.

□

Es folgt, dass unter den Bedingungen des Satzes die folgenden Mengen messbar sind:

$$\{f > -\infty\},\ \{f < \infty\},\ \{f = +\infty\},\ \{f = -\infty\},\ \{a \leq f \leq b\},\ \{f = a\}.$$

Ferner gilt für den reellwertigen Fall, dass f genau dann messbar ist, wenn $\{a < f < +\infty\}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ messbar ist.
Der Beweis bleibt zur Übung überlassen.

Satz 1.32 *$f : E \to \mathbb{R}$ ist genau dann messbar, wenn für jede offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}$ die Menge $\overset{-1}{f}(G)$ in $\mathbb{R}^d$ messbar ist.*

Beweis: „$\Leftarrow$“ $G = (a, \infty)$ ist offen, $\overset{-1}{f}(G) = \{a < f < \infty\}$ ist messbar für alle $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ ist messbar.
„$\Rightarrow$“ Sei f messbar, $G \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann läßt G sich schreiben als abzählbare disjunkte Vereinigung offener Intervalle (siehe Aufgabe 12), also $G = \biguplus_k (a_k, b_k)$. Es ist $\overset{-1}{f}((a_k, b_k)) = \{a_k < f < b_k\}$ messbar. Es folgt, dass auch

$$\overset{-1}{f}(G) = \bigcup_k \overset{-1}{f}((a_k, b_k))$$

messbar ist. □

Satz 1.33 *$A \subset \mathbb{R}$ sei dicht. Dann ist f genau dann messbar, wenn $\{f > a\}$ messbar ist für alle $a \in A$.*

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Wähle eine Folge $\{a_n\}$ in A mit $a_n \geq a$ und $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Dann ist $\{f > a\} = \bigcup_n \{f > a_n\}$. □

Bezeichnung: Man sagt, dass eine Eigenschaft *fast überall* (f. ü.) in $E \subset \mathbb{R}^d$ gilt, wenn sie bis auf eine Nullmenge in E gilt, z. B. $f = 0$ f. ü. in E bedeutet $f(x) = 0\, \forall x \in E \setminus Z$ mit $Z \subset E$ und $|Z| = 0$.

Satz 1.34 *$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sei messbar und für $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ gelte $f = g$ fast überall. Dann ist g messbar und $|\{g > a\}| = |\{f > a\}|$ für alle $a \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Sei $Z := \{f \neq g\}$. Dann ist $\{g > a\} \cup Z = \{f > a\} \cup Z$. Da $\{f > a\}$ messbar ist, ist g messbar, und es ist

$$|\{g > a\}| = |\{g > a\} \cup Z| = |\{f > a\} \cup Z| = |\{f > a\}|.$$

□

Sei $E_1 \subset E$, $E_1 \cup Z = E$, $|Z| = 0$.

Bezeichnung: $f : E_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ ist f. ü. auf E definiert und wird auf E messbar genannt, falls f auf E_1 messbar.

Satz 1.35 *$\Phi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ sei stetig, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sei f. ü. endlich, so dass $\Phi \circ f$ f. ü. auf E definiert ist. Dann ist $\Phi \circ f$ messbar, falls f messbar ist.*

Beweis: Es reicht anzunehmen, dass f auf ganz E endliche Werte annimmt. Sei $G \subset \mathbb{R}$ offen. Dann ist

$$(\Phi \circ f)^{-1}(G) = \overset{-1}{f}\,(\underbrace{\overset{-1}{\Phi}(G)}_{\substack{\text{offen} \\ \Phi \text{ stetig}}}).$$

Diese Menge ist offen und somit nach Satz 1.32 messbar. □

Typische Beispiele sind: $\Phi(t) = |t|$, $\Phi(t) = |t|^p$ mit $p > 0$ oder $\Phi(t) = e^{ct}$.
Es folgt, dass, wenn f messbar ist, auch die Funktionen $|f|^p$ $(p > 0)$ und e^{cf} messbar sind.
Ferner sind auch die Funktionen $f^+ := \max\{f, 0\}$ und $f^- := -\min\{f, 0\}$ messbar, falls f messbar ist.

Satz 1.36 *Seien f und g messbar. Dann ist die Menge $\{f > g\}$ messbar.*

Beweis: $\{r_k\}$ seien rationale Zahlen. Dann ist die Menge $\{f > r_k > g\} = \{f > r_k\} \cap \{g < r_k\}$ messbar und also $\{f > g\} = \bigcup_k \{f > r_k > g\}$. □

Satz 1.37 *Sei f messbar, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + \lambda$ und λf messbar.*

Die Behauptungen sind evident; man betrachte die Mengen $\{f > \alpha - \lambda\}$ und $\{f > \alpha/\lambda\}$ (für $\lambda \neq 0$).

Satz 1.38 *f und g seien messbar. Dann ist $f + g$ messbar (hierzu sei $f + g$ fast überall definiert, d. h. der Fall $+\infty + (-\infty)$ trete nicht auf).*

Beweis: g ist messbar. Mit 1.37 folgt, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $\alpha - g$ messbar ist. $\overset{1.36}{\Longrightarrow} \{f + g > \alpha\} = \{f > \alpha - g\}$ ist messbar. □

Wir haben also gezeigt:

$$V(E) := \{f : E \to \overline{\mathbb{R}}; f \text{ f. ü. endlich auf } E \text{ und messbar}\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Satz 1.39 *Seien f und g messbar und fast überall endlich. Dann ist $f \cdot g$ messbar, und falls $g \neq 0$ fast überall, ist auch $\frac{f}{g}$ messbar (Konvention: $0 \cdot \pm\infty := \pm\infty \cdot 0 := 0$).*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ $\{g > \alpha\} = \{-\frac{1}{g} > -\frac{1}{\alpha}\}$ für $\alpha \neq 0$.
$\{g > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{g > \frac{1}{k}\} = \bigcup_k \{-\frac{1}{g} > -k\}$.
Diese Mengen sind messbar, wenn g messbar ist. Folglich ist $1/g$ messbar.
$\underline{\beta)}$ $f^2 = |f|^2$ ist messbar, wenn f messbar ist (siehe Beispiel oben).
$\underline{\gamma)}$ $f \cdot g = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$ ist messbar, wenn f und g messbar sind. □

Satz 1.40 *$\{f_k\}$ sei eine Folge messbarer Funktionen. Dann sind $\sup_k f_k$ und $\inf_k f_k$ messbar.*

Beweis: $\{\sup_k f_k > \alpha\} = \bigcup_k \{f_k > \alpha\}$ ist messbar. Daher ist auch $\inf_k f_k = -\sup_k(-f_k)$ messbar. □

Als Spezialfall: sind $f_1, \ldots, f_n$ messbar, so auch $\max_{k=1}^{n} f_k$ und $\min_{k=1}^{n} f_k$.

Satz 1.41 *$\{f_k\}$ sei eine Folge messbarer Funktionen. Dann sind* $\limsup_{k\to\infty} f_k$ *und* $\liminf_{k\to\infty} f_k$ *messbar.*
Speziell: existiert $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ fast überall, und sind die f_k messbar, dann ist auch f messbar.

Beweis: Verwenden wir

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_j(\sup_{k\geq j} f_k), \quad \liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_j(\inf_{k\geq j} f_k),$$

folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 1.40.
Falls im Spezialfall $\lim_{k\to\infty} f_k$ existiert, so ist dies gleich dem $\limsup_{k\to\infty} f_k$, also fast überall gleich einer messbaren Funktion. □

Bezeichnung: $f : E \to \mathbb{R}$ wird *einfache* Funktion genannt, falls f nur endlich viele Werte annimmt; eine andere gebräuchliche Bezeichnung ist *Treppenfunktion*. Genauer lässt sich diese Eigenschaft formulieren durch

$$\exists \underbrace{E_1, \ldots, E_n}_{\text{disjunkt}} \text{ mit } \bigcup_{k=1}^n E_k = E, \exists \underbrace{a_1, \ldots, a_n}_{\text{paarw. versch.}} : f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{E_k}.$$

In diesem Fall lässt sich das Integral von f naheliegenderweise definieren durch

$$\int_E f \,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^n a_k |E_k|,$$

vorausgesetzt, dass $E_1, \ldots, E_n$ messbar sind. Die Aussage

f sei einfach. Dann ist f messbar $\Longleftrightarrow$ $E_1, \ldots, E_n$ messbar.

sei als Übung zu beweisen.

Satz 1.42 1. *Jede Funktion f ist (punktweiser) Grenzwert einer Folge einfacher Funktionen $\{f_k\}$.*

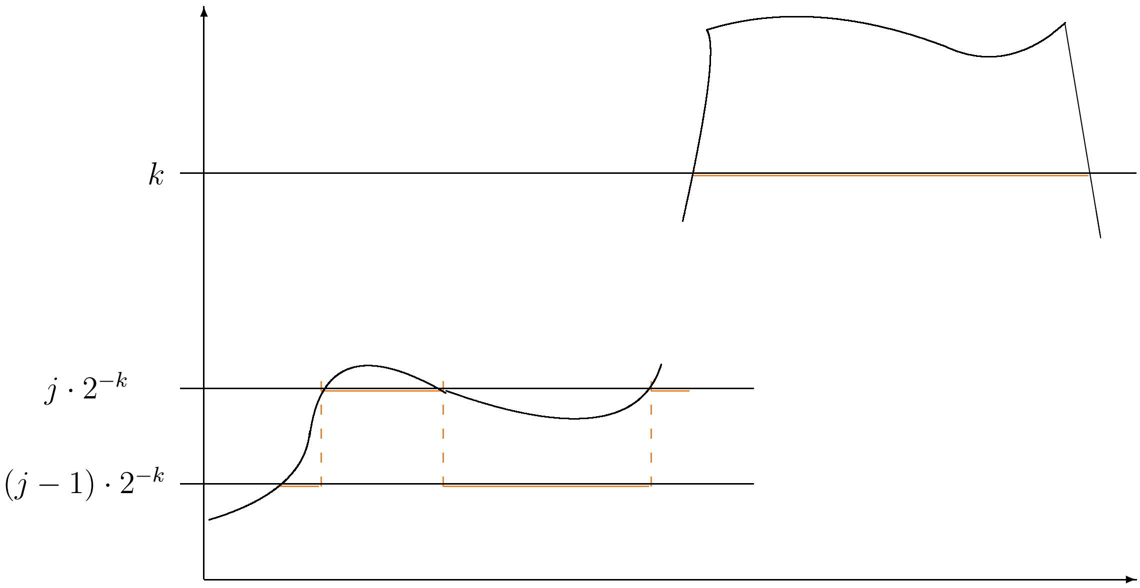
2. *Falls $f > 0$, so können die Funktionen f_k so gewählt werden, dass $f_k \leq f_{k+1}$ für alle k.*

3. *Falls f in 1 oder 2 messbar ist, so kann man die f_k ebenfalls messbar wählen.*

Beweis:
Wir definieren die Funktionen f_k durch

$$f_k(x) := \begin{cases} \dfrac{j-1}{2^k} & , \dfrac{j-1}{2^k} \le f(x) < \dfrac{j}{2^k} \\ k & , f(x) \ge k \end{cases} .$$

Offensichtlich sind die Funktionen f_k einfach, und es ist (punktweise) $f_k \le f_{k+1}$.



Für den Schritt von $k \to k+1$ werden die Intervalle $[(j-1)2^{-k}, j2^{-k}]$ halbiert.
Wir erhalten die Abschätzung

$$0 \le f(x) - f_k(x) \le 2^{-k},$$

für hinreichend große k, falls $f(x)$ endlich (und damit $f(x) < k$) ist.
Ist $f(x) = +\infty$, so ist $f_k(x) = k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Es folgt, dass $f_k \to f$ punktweise.
Hieraus erhalten wir Aussage 2.

Aussage 1 folgt aus der Überlegung, f zu schreiben als $f = f^+ - f^-$. Gemäß 2 gibt es Folgen $\{f'_k\}$, $\{f''_k\}$ mit $f'_k \to f^+$, $f''_k \to f^-$ $(k \to \infty)$, also $f'_k - f''_k \longrightarrow f^+ - f^- = f$.

Aussage 3 folgt aus der Definition von f_k: Sei f messbar, und ohne Einschränkung gelte $f > 0$ (ansonsten betrachten wir f^+ und f^- separat).

$$f_k = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \underbrace{\mathbf{1}_{\{(j-1)2^{-k} \le f < j2^{-k}\}}}_{\text{messbar}} + k \underbrace{\mathbf{1}_{\{f \ge k\}}}_{\text{messbar}} .$$

$\square$

1.6 Das Lebesgue–Integral für nichtnegative Funktionen

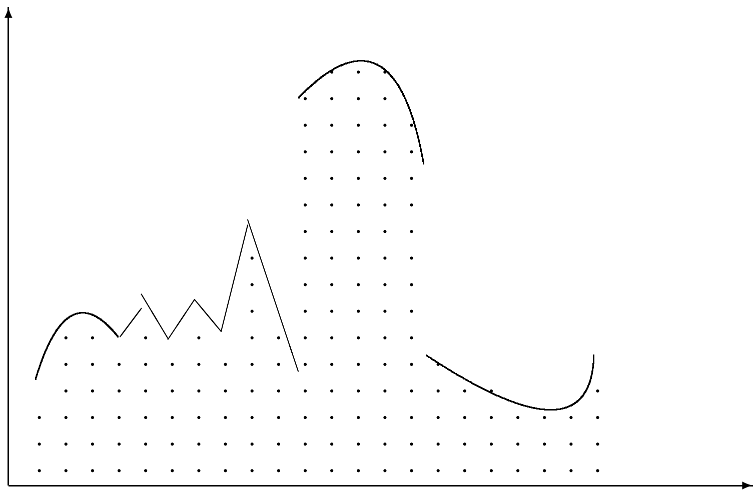
Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ messbar, und sei $f : E \to [0, +\infty]$.
Wir definieren den Graphen von f über E durch

$$G(f, E) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{d+1}; x \in E, f(x) < \infty\}$$

Ferner setzen wir:

$$R(f, E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1}; x \in E, 0 \leq y \leq f(x) < \infty\}$$

(Das entspricht der schraffierten Fläche in der folgenden Skizze)



Definition 1.43 *Falls $R(f, E)$ in $\mathbb{R}^{d+1}$ messbar ist, so wird das Maß $|R(f, E)|_{(d+1)}$ bezüglich $\mathbb{R}^{d+1}$ das* Lebesgue–Integral von f über (auf) E *genannt.*

Bezeichnung: Für das Lebesgue–Integral von f werden wir eine Reihe von (Kurz-)Schreibweisen verwenden:

$$\begin{aligned} |R(f, E)|_{(d+1)} &=: \int_E f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_E f\,\mathrm{d}x =: \int_E f =: \int f \\ &=: \underset{E}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_d)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d \end{aligned}$$

Bemerkung: Zunächst ist das Integral nur für $f \geq 0$ definiert. $\int_E f = +\infty$ ist sehr wohl möglich.

Satz 1.44 *Sei E messbar und $f : E \to [0, \infty]$. Dann existiert $\int_E f$ (d. h. $R(E, f)$ ist messbar), wenn f messbar ist.*

Bemerkung: Die Umkehrung gilt auch; den Beweis dafür holen wir später nach. (Satz 2.11)

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zwei Hilfsaussagen.

Hilfssatz 1.45 *Seien $E \subset \mathbb{R}^d$, $0 \le a \le +\infty$. Wir definieren $E^a := \{(x, y);\, x \in E, 0 \le y \le a\}$, falls $a < \infty$ und $E^\infty := \{(x, y);\, x \in E, 0 \le y < \infty\}$. Es sei E in $\mathbb{R}^d$ messbar.*
Dann ist E^a in $\mathbb{R}^{d+1}$ messbar und

$$|E^a|_{(d+1)} = a|E|_{(d)},$$

wobei wir vereinbaren, dass $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Beweis des Hilfssatzes: $\underline{\alpha)}$ Für den Fall, dass $a < \infty$ und E ein Intervall oder eine Nullmenge ist, ist die Aussage klar.
$\underline{\beta)}$ Sei $a < \infty$. E sei offen; wir schreiben $E = \bigcup_n I_n$ mit nicht überlappenden Intervallen I_n. Dann ist $E^a = \bigcup_n I_n^a$ messbar, und es ist

$$|E^a| = \sum |I_n^a| = a \sum |I_n| = a|E|.$$

$\underline{\gamma)}$ Sei E vom Typ G_δ mit $E = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ und $|G_1| < \infty$.
Man wähle eine Folge offener Mengen $G_k \searrow E$, und zwar

$$E = G_1 \cap \underbrace{(G_1 \cap G_2)}_{\text{offen}} \cap \underbrace{(G_1 \cap G_2 \cap G_3)}_{\text{offen}} \cap \ldots.$$

Dann ist $|G_k| \searrow |E|$.
Für die offenen Mengen G_k ist G_k^a messbar mit $|G_k^a| = a|G_k|$.
Es folgt aus dem Stetigkeitssatz 1.22, dass $G_k^a \searrow E^a$ mit einer messbaren Menge E^a und

$$|E^a| = \lim_{k\to\infty} |G_k^a| = a \lim_{k\to\infty} |G_k| = a|E|.$$

$\underline{\delta)}$ Sei $E = H \setminus Z$ mit einer G_δ-Menge H und einer Nullmenge Z; gelte ferner $H = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ mit $|G_1| < \infty$.
Dann ist $E^a = H^a \setminus Z^a$, wobei Z^a wiederum eine Nullmenge ist. Es gilt:

$$|E^a| = |H^a| = a|H| = a|E|.$$

$\underline{\varepsilon)}$ Lassen wir zuletzt noch die Beschränktheit von $|E|$ und a weg:
Im Fall $|E| = +\infty$ schreibe E als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen mit endlichem Maß.
Im Fall $a = +\infty$ wähle eine Folge $\{a_n\}$ mit $a_n \uparrow +\infty$. Dann gilt

$$E^{a_n} \uparrow E^{\infty},$$

und aus dem Stetigkeitssatz 1.22 folgt die Behauptung. $\diamond$

Hilfssatz 1.46 *Seien $E \subset \mathbb{R}^d$ und $f : E \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt: $|G(f, E)|_{(d+1)} = 0$.*

Beweis des Hilfssatzes: Seien $\varepsilon > 0$ und $n = 1, 2, \ldots$.
Setze $E_n := \{n\varepsilon \le f < (n+1)\varepsilon\}$. Diese Mengen sind disjunkt und wegen der Messbarkeit von f messbar. Es ist

$$G(f, E) = \bigcup_n G(f, E_n) \quad \text{und} \quad |G(f, E_n)| \le \varepsilon |E_n|.$$

Es folgt

$$|G(f, E)|_e \le \sum_n |G(f, E_n)|_e \le \varepsilon \sum_n |E_n| \le \varepsilon |E|.$$

Also: Falls $|E| < \infty$, ist der Hilfssatz beweisen; anderenfalls schreibt man E als abzählbare Vereinigung messbarer Mengen mit endlichem Maß und zeigt so, dass $G(f, E)$ abzählbare Vereinigung von Nullmengen (und damit selbst eine Nullmenge) ist. $\diamond$

Beweis von Satz 1.44: $f : E \to [0, \infty]$ sei messbar.
Dann existieren nach 1.41 einfache Funktionen f_n mit $f_n \uparrow f$, und es gilt

$$R(f_n, E) \cup G(f, E) \uparrow R(f, E).$$

$\lceil$ **Nebenrechnung:** Sei $(x, y) \in R(f, E)$. Dann ist entweder

$$y = f(x) \Rightarrow (x, y) \in G(f, E)$$

oder es ist

$$y < f(x) \Rightarrow \exists N \text{ mit } y < f_N(x) \Rightarrow (x, y) \in R(f_N, E).$$

$\rfloor$

Wegen des Stetigkeitssatzes bleibt zu zeigen: $R(f_n, E)$ ist messbar für $n = 1, 2, \ldots$. Seien dazu $a_1^n, \ldots, a_k^n$ die verschiedenen Funktionswerte von f_n auf den disjunkten Mengen $E_1^n, \ldots, E_k^n$. Dann ist

$$R(f_n, E) = \bigcup_{j=1}^{k} (E_j^n)^{a_j}$$

messbar nach Hilfssatz 1.45. □

Korollar 1.47 *f sei auf E nicht-negativ und messbar mit den Werten $a_1, \ldots, a_N$ auf den paarweise disjunkten Mengen $E_1, \ldots, E_N$. Falls $E = \bigcup_{j=1}^N E_j$, so gilt $\int_E f = \sum_{j=1}^N a_j |E_j|$*

Beweis: Die Mengen $(E_j)^{a_j}$ sind messbar, weil f messbar ist. Es ist $R(f, E) = \bigcup_{j=1}^N (E_j)^{a_j}$, wobei $|(E_j)^{a_j}| = a_j |E_j|$. □

1.7 Eigenschaften des Integrals und Konvergenzsätze

Wir zeigen zunächst, dass das L-Integral monoton ist, und zwar gelten die Eigenschaften

1. f und g seien messbar, und gelte $0 \le g \le f$ auf E. Dann ist

   $$\int_E g \le \int_E f \quad \text{und speziell} \quad \int_E \inf f \le \int_E f.$$

   Beweis: $R(g, E) \subset R(f, E)$ □

2. E_1, E_2 seien messbar mit $E_1 \subset E_2$, und f sei nicht negativ und messbar auf E_2. Dann gilt:

   $$\int_{E_1} f \le \int_{E_2} f.$$

   Beweis: $R(f, E_1) \subset R(f, E_2)$. □

Als Folgerung erhält man hieraus noch die Aussage:

> f sei nicht negativ und messbar auf E. Dann folgt aus $\int_E f < \infty$, dass $f < +\infty$ fast überall auf E.

Ansonsten wäre für den Fall, dass E keine Nullmenge ist, $f = +\infty$ auf einer Menge E_1 mit $|E_1| > 0$; also $f \geq a$ auf E_1 für ein beliebiges $a \in \mathrm{I\!R}_+$.

$$\Rightarrow \int_E f \geq \int_{E_1} f \geq \int_{E_1} a = a|E_1| \Rightarrow \int_E f = +\infty.$$

Satz 1.48 (Monotone Konvergenz für nichtnegative Funktionen) $\{f_n\}$ *sei eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen mit* $f_n \uparrow f$ *auf* E*. Dann gilt:*

$$\int_E f_n \uparrow \int_E f \quad (\textit{m. a. W.:} \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \ ).$$

Beweis: Aus $f_n \uparrow f$ und der Messbarkeit der f_n folgt die Messbarkeit von f. Ferner folgt

$$\underbrace{R(f_n, E)}_{\text{messbar}} \cup \underbrace{G(f, E)}_{\text{Nullmenge}} \uparrow R(f, E)$$

wie bei einfachen Funktionen mit dem Stetigkeitssatz. □

Satz 1.49 *Gelte* $f \geq 0$ *auf* $E = \bigcup_j E_j$ *mit paarweise disjunkten Mengen* E_j*. Dann gilt*

$$\int_E f = \sum_j \int_{E_j} f$$

Beweis: Die Mengen $R(f, E_j)$ sind paarweise disjunkt und messbar. Ferner ist $R(f, E) = \bigcup_j R(f, E_j)$. □

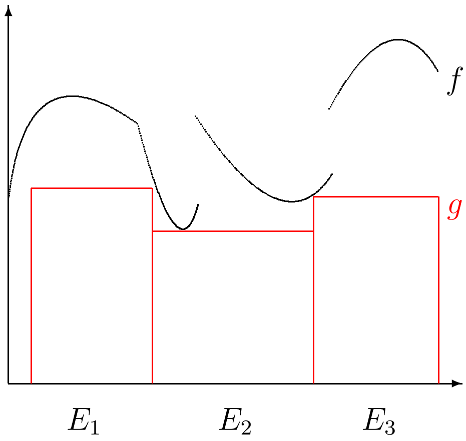
Satz 1.50 *Sei* $f \geq 0$ *und messbar auf* $E \subset \mathrm{I\!R}^d$*. Dann gilt*

$$\int_E f = \sup \sum_j \big[\inf_{x\in E_j} f(x)\big]|E_j|, \tag{1.9}$$

wobei das Supremum über alle endlichen *Zerlegungen* $E = \biguplus E_j$ *mit messbaren Mengen* E_j *zu nehmen ist.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Sei $E = \bigcup_{j=1}^N E_j$. Definiere

$$g(x) := a_j(x) := \inf_{x\in E_j} f(x), \quad j = 1, \ldots, N.$$



Offenbar ist $g \leq f$, folglich ist

$$\sum_j a_j|E_j| = \int_E g \leq \int_E f.$$

Es folgt die Ungleichung „$\geq$“ in (1.9).

β) Wir verfahren hier ähnlich dem Beweis von Satz 1.42: Betrachte die Folge von Mengen $\{E_j^n\}$, $j = 0, \ldots, n2^n$, mit $E_j^n := \big\{(j-1)2^{-n} \leq f < j2^{-n}\big\}$ für $j = 1, \ldots, n2^n$ und $E_0^n := \{f \geq n\}$.
Definiere

$$f_n := \sum_j \big[\inf_{x \in E_j^n} f(x)\big] \mathbf{1}_{E_j^n}.$$

Dann ist offenbar $0 \leq f_n \uparrow f$, und es folgt

$$0 \leq \sum_j \big[\inf_{x \in E_j^n} f(x)|E_j^n|\big] = \int_E f_n \uparrow \int_E f,$$

woraus die Gleichheit in (1.9) folgt. □

Satz 1.51 *Sei $f \geq 0$ auf E mit $|E| = 0$. Dann gilt $\int_E f = 0$*

Beweis: 1. Variante: mittels Satz 1.50
2. Variante:

$$0 \leq \int_E f \leq \int_E \sup_{x \in E} f(x) = \sup_{x \in E} f(x)|E| = 0.$$

□

Satz 1.52 *Seien $f, g \geq 0$ und messbar auf E, und gelte $g \leq f$ fast überall auf E. Dann ist $\int_E g \leq \int_E f$.*
Insbesondere: ist $g = f$ fast überall auf E, dann ist $\int_E g = \int_E f$.

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Seien $Z := \{g > f\}$, $A := E \setminus Z$. Dann ist

$$\int_E f = \int_A f + \underbrace{\int_Z f}_{=0} \geq \int_A g = \int_A g + \int_Z g = \int_E g.$$

$\underline{\beta)}$ Für die zweite Aussage beachte man, dass $f = g$ f. ü. $\iff$ $f \leq g$ f. ü. und $g \leq f$ f. ü. und wende α) zweimal an. $\square$

Satz 1.53 *Sei $f \geq 0$ und messbar auf E. Dann gilt $\int_E f = 0 \iff f = 0$ fast überall auf E.*

Beweis: $\underline{„\Leftarrow“}$ folgt unmittelbar aus Satz 1.52
$\underline{„\Rightarrow“}$ Sei $\alpha > 0$. Dann ist

$$\alpha \big| \{x \in E; f(x) > \alpha\} \big| \leq \int_{\{f > a\}} f \leq \int_E f = 0,$$

also ist $\{f > 0\} = \bigcup_n \{f > 1/n\}$ als abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge. $\square$

Folgerung 1.54 (Tschebyschewsche Ungleichung) *Sei $f \geq 0$ und messbar auf E. Dann gilt für $\alpha > 0$*

$$\Big| \{x \in E; f(x) > \alpha\} \Big| \leq \frac{1}{\alpha} \int_E f$$

Satz 1.55 *Das Integral ist linear, d. h.*

1. *Gelte $f \geq 0$ und messbar, und sei $\mathbb{R} \ni c > 0$. Dann ist*

$$\int_E c \cdot f = c \cdot \int_E f$$

.

2. *Seien $f, g \geq 0$ und messbar. Dann ist*

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

3. Seien f, Φ messbar mit $0 \le f \le \Phi$, ferner sei $\int_E f$ endlich. Dann gilt

$$\int_E (\Phi - f) = \int_E \Phi - \int_E f.$$

Beweis: Die ersten beiden Aussagen zeigt man, indem man $c \cdot f$ bzw. $f + g$ von unten durch Treppenfunktionen approximiert. Der Beweis sei als Übungsaufgabe gestellt.
Die dritte Aussage folgt aus der zweiten, denn $\Phi = f + (\Phi - f)$, wobei nach Voraussetzung f und $\Phi - f$ nicht-negativ sind. $\square$

Satz 1.56 *Seien $f_n \ge 0$ und messbar auf E, $n = 1, 2, \ldots$. Dann gilt*

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

Beweis: $\{F_N\}$ mit $F_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ ist eine monoton wachsende Folge. Daher gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \longleftarrow \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n = \int_E F_N \uparrow \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)$$

$\square$

Anwendung: Sei $f \ge 0$ und stetig auf $[0, \infty)$. $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert genau dann als uneigentliches Riemann–Integral, wenn f auf $[0, \infty)$ Lebesgue–integrierbar ist, und es ist

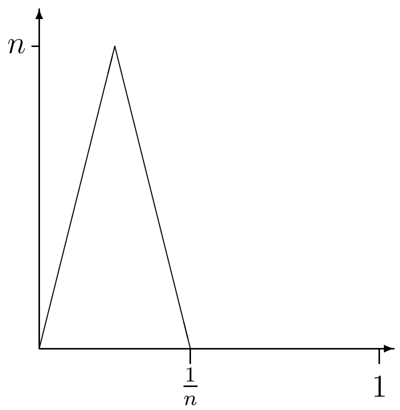
$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} f.$$

Beweis: Definiere $f_n(x) := \mathbf{1}_{[0,n]}(x) f(x)$. Dann gilt $f_n \uparrow f$, und mit der montonen Konvergenz folgt

$$\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}_+} f$$

$\square$

Dass Monotonie eine wichtige Rolle bei den vorangegangenen Sätzen spielt, soll folgendes Gegenbeispiel zeigen:
Setze $E := [0,1]$ und definiere f_n durch



$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2x & , 0 \le x < \frac{1}{2n} \\ -2n^2x + 2n & , \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Dann konvergiert $f_n \to 0$ punktweise auf $[0,1]$. Andererseits ist $\int_{[0,1]} f_n = \frac{1}{2}n\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ für alle n. Daher ist

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

Satz 1.57 (Fatou) $\{f_n\}$ *sei eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen auf* E*. Dann gilt*

$$\int_E \big(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Beweis: Definiere die Funktionen g_k $(k = 1, 2, \dots)$ durch $g_k(x) = \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots\}$. Offenbar ist g_k messbar und $g_k(x) \uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Mit $g_k \ge 0$ folgt aus dem Satz über die monotone Konvergenz

$$\begin{aligned} & \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x \to \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\quad & \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \le \lim_{k\to\infty} \int_E g_k \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \end{aligned}$$

□

Folgerung 1.58 *Seien* f_n, $n = 1, 2, \dots$, *nicht negative messbare Funktionen auf* E *mit punktweiser Konvergenz* $f_n \to f$ *fast überall auf* E*. Ferner sei* $\int_E f_n \le M$ *für alle* n*. Dann gilt* $\int_E f \le M$*.*

Beweis: Aus dem Satz von Fatou folgt unmittelbar

$$\int_E \underbrace{\underbrace{\liminf_{n\to\infty} f_n(x)}_{=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)}}_{=f(x)} \,\mathrm{d}x \leq M.$$

□

Beispiel 1.59 Die Gammafunktion ist definiert als das Integral

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad (x > 0).$$

Dieses Integral ist sinnvoll, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \underbrace{\mathrm{e}^{-t} t^{x-1}}_{f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \underbrace{\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},n]} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

mit $f_n(t) \to f(t)$ für alle $t > 0$ $(n \to \infty)$.

Satz 1.60 (Lebesgue) $\{f_n\}$ *sei eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen auf* E. $f_n \to f$ *punktweise fast überall auf* E. *Ferner existiere eine messbare Funktion* Φ *mit* $f_n \leq \Phi$ *fast überall und für alle* n; $\int_E \Phi$ *sei endich.*
Dann konvergiert $\int_E f_n \to \int_E f$.

Beweis:

$$\int_E f = \int_E \liminf f_n \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int_E f_n;$$

damit bleibt zu zeigen, dass $\int_E f \geq \limsup \int_E f_n$.
Es ist nach Voraussetzung $\Phi - f_n \geq 0$ fast überall. Aus dem Satz von Fatou folgt damit

$$\begin{aligned}\int_E \Phi - \int_E f_n &= \int_E \underbrace{\liminf(\Phi - f_n)}_{=\Phi - f} \leq \liminf \Big(\int_E \Phi - \int_E f_n \Big) \\ &= \int_E \Phi - \limsup \int_E f_n.\end{aligned}$$

□

1.8 Das Integral für messbare Funktionen und der Raum $L(E)$

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sei messbar. Wir schreiben $f = f^+ - f^-$; die Funktionen f^+ und f^- sind beide messbar, daher sind $\int_E f^+$ und $\int_E f^-$ wohldefiniert.
Falls eines der beiden Integrale endlich ist, macht auch die Definition

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x := \int_E f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\,\mathrm{d}x$$

Sinn (den Fall $\infty - \infty$ wollen wir vermeiden!). Wir sagen dann, „das Integral $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert“ und schreiben kurz: $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_E f$
Man beachte: diese Bezeichnung impliziert nicht, dass das Integral endlich ist; dafür verwenden wir den folgenden Begriff:

Definition 1.61 *Falls $\int_E f$ existiert und endlich ist, so nennen wir f* (Lebesgue)-integrierbar (auf E).

$$L(E) := \Big\{ f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar; } \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existiert und ist endlich} \Big\}.$$

Falls $\int_E f$ existiert, so gilt:

$$\Big| \int_E f \Big| \le \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E (f^+ + f^-) = \int_E |f|.$$

Satz 1.62 *Sei $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist f genau dann auf E integrierbar, wenn $|f|$ auf E integrierbar.*

Bevor wir den Satz beweisen, noch zwei Anmerkungen:

1. Die Voraussetzung der Messbarkeit von f ist notwendig. Ansonsten gäbe es das folgende Gegenbeispiel:

   $A \subset \mathbb{R}$ sei nicht messbar, und f sei definiert als

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \notin A \end{cases}$$

   Dann ist $|f| \equiv 1$ messbar, aber f nicht (die Menge $\{f > 0\}$ ist nicht messbar).

2. Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $[0, \infty)$ nicht L-integrierbar, denn $\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}| \, dx = \infty$. Dies dürfte zunächst verwundern, denn diese Funktion ist ein Paradebeispiel für uneigentlich RIEMANN–integrierbare Funktionen.

Beweis von Satz 1.62: „$\Longleftarrow$“ Sei $|f| \in L(E)$. Dann ist

$$\Big| \int_E f \Big| \le \int_E |f| < \infty.$$

„$\Longrightarrow$“ Sei $f \in L(E)$. Dann ist mindestens eines der Integrale $\int_E f^+, \int_E f^-$ endlich, und aus der Endlichkeit von $\int_E f^+ - \int_E f^-$ folgt, dass beide Summanden endlich sind, also

$$\Big(\int_E f^+ + \int_E f^- \Big) \text{ endlich} \Rightarrow \int_E |f| < \infty.$$

□

Bemerkung: Aus $f \in L(E)$ folgt, dass f fast überall endlich ist.

Beweis: $|f| \in L(E)$. Nehmen wir an, dass $f = \pm\infty$ auf $E_1 \subset E$. Dann folgt:

$$\int_E |f| \ge \int_{E_1} |f| \ge \int_{E_1} a = a|E_1| \text{ für alle } a \in \mathbb{R} \Rightarrow |E_1| = 0.$$

□

Satz 1.63 *Das Integral für messbare Funktionen hat folgende Eigenschaften:*

1. *(Monotonie:) f, g seien messbar, $\int_E f$ und $\int_E g$ mögen existieren (Endlichkeit ist nicht vorausgesetzt). Ferner gelte $f \le g$ fast überall auf E. Dann gilt*

$$\int_E f \le \int_E g \tag{1.10}$$

2. *Sei $E_1 \subset E$ messbar, und das Integral $\int_E f$ existiere. Dann existiert auch $\int_{E_1} f$.*

3. *$\int_E f$ existiere, und gelte $E = \bigcup_n E_n$ mit messbaren Mengen $E_1, E_2, \dots,$ paarweise disjunkt (oder nicht-überlappend), wobei die Ränder Nullmengen sind). Dann gilt*

$$\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f. \tag{1.11}$$

4. Sei $f = 0$ fast überall auf E oder sei E eine Nullmenge. Dann ist

$$\int_E f = 0. \tag{1.12}$$

5. $\int_E f$ existiere. Dann existiert für $c \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_E (cf)$, und es ist

$$\int_E (c \cdot f) = c \cdot \int_E f. \tag{1.13}$$

6. Seien $f, g \in L(E)$. Dann ist $(f+g) \in L(E)$ und

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g. \tag{1.14}$$

Beweis:

1. Der Beweis der Monotonie sei als Übungsaufgabe gestellt.

2. $\int_E f^+$ oder $\int_E f^-$ ist endlich. Aus $E_1 \subset E$ folgt, dass $\int_{E_1} f^+$ oder $\int_{E_1} f^-$ endlich ist.

3. Aus $E_n \subset E$ folgt, dass $\int_{E_n} f$ existiert. Wir zerlegen f in $f^+ - f^-$ und wenden Satz 1.49 an:

$$\begin{aligned} \int_E f &= \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_n \int_{E_n} f^+ - \sum_n \int_{E_n} f^- \\ &= \sum_n \Big(\int_{E_n} f^+ - \int_{E_n} f^- \Big) = \sum_n \int_{E_n} f. \end{aligned}$$

4. (trivial)

5. $$\int_E (cf) = \int_E [c(f^+ - f^-)] = c\Big(\int_E f^+ - \int_E f^- \Big) = c \int_E f.$$

6. $\underline{\alpha)}$ $|f+g| \leq |f| + |g|$, damit folgt aus der Monotonie, dass $\int_E |f+g| \leq \int_E |f| + \int_E |g| < \infty$

   $\underline{\beta)}$ f und g haben konstantes Vorzeichen auf E. Es gibt folgende Möglichkeiten:

   (a) $f \geq 0, g \geq 0$ (folglich $f+g \geq 0$)

   (b) $f \geq 0, g < 0, f+g \geq 0$

(c) $f \geq 0, g < 0, f + g \leq 0$

(d) $f < 0, g \geq 0, f + g \geq 0$

(e) $f < 0, g \geq 0, f + g \leq 0$

(f) $f < 0, g < 0$ (folglich $f + g < 0$)

Fall 6a wurde schon zuvor gezeigt.

Fall 6b: $f \geq 0, -g > 0, f + g \geq 0$.

Dann ist $f + g + (-g) = f \geq 0$ fast überall. Folglich ist

$$\int_E (f+g) + \int_E (-g) = \int_E f,$$

und hieraus folgt die Behauptung.

Die anderen Fälle werden analog gezeigt.

$\underline{\gamma)}$ Seien $f, g \in L(E)$ beliebig. Dann unterteile man E in die sechs disjunkten messbaren Teilmengen $E_1, \ldots, E_6$, wo jeweils die Fälle 6a ... 6f erfüllt sind.

Es ist dann

$$\int_E (f+g) = \sum_{j=1}^{6} \int_{E_j} = \sum_j \Big(\int_{E_j} f + \int_{E_j} g \Big) = \int_E f + \int_E g.$$

□

Folgerung 1.64 *f, Φ seien messbar auf E, $f \geq \Phi$ gelte fast überall, ferner sei $\Phi \in L(E)$. Dann ist*

$$\int_E (f - \Phi) = \int_E f - \int_E \Phi.$$

Beweis: $\int_E f$ existiert, denn $f^- \leq \Phi^-$, und daher ist $\int_E f^-$ endlich.
Ferner existiert $\int_E (f - \Phi)$, denn $f - \Phi \geq 0$, also $\int_E (f - \Phi)^- = 0$.
Bleibt noch nachzutragen:

$f \in L(E)$ Dann folgt die Behauptung aus (1.14)

$f \notin L(E)$ Dann ist $\int_E f = +\infty$ (weil f^- integrierbar), und mit $\Phi \in L(E)$ folgt $(f - \Phi) \notin L(E)$ und somit $\int_E (f - \Phi) = +\infty$.

□

Wir haben in Satz 1.63 gezeigt, dass $L(E)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Offen blieb bislang, ob $L(E)$ auch abgeschlossen ist unter Multiplikation der Integranden, d. h. ob für $f, g \in L(E)$ auch $f \cdot g \in L(E)$ gilt.
Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, wie folgendes Beispiel verdeutlichen soll: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & , 0 < x \leq 1 \end{cases} .$$

Diese Funktion ist messbar, denn sie ist stetig bis auf den Nullpunkt.
Um zu zeigen, dass das Integral von f existiert und endlich ist, definieren wir die Folge

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & , x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & , \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} .$$

Dann konvergiert $f_n(x) \to f(x)$ punktweise fast überall, und es ist

$$\int_{[0,1]} f_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{n}}^{1} = 2 - 2\frac{1}{\sqrt{n}} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 2.$$

Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt also

$$\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$$

(als L-Integral wie als uneigentliches R-Integral).
Demgegenüber ist allerdings $f(x) \cdot f(x) = \frac{1}{x}$, und

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty.$$

Wir halten also fest: wenn f, g messbar sind und zusätzlich $fg \in L(E)$ gelten soll, muss mindestens eine der beiden Funktionen zusätzliche Bedingugen erfüllen. Welche dies sind, beantwortet der folgende

Satz 1.65 *Sei $f \in L(E)$, g sei messbar auf E, und es gebe eine Konstante $M > 0$, so dass $|g| \leq M$ fast überall auf E.*
Dann gilt $(f \cdot g) \in L(E)$.

Man beachte: hier wird nur vorausgesetzt, dass g messbar und beschränkt ist, Integrierbarkeit von g ist nicht notwendig; offensichtlich ist nämlich $\mathbf{1}_E$ nicht integrierbar, wenn $|E| = \infty$, aber $\int_E f = \int_E f \cdot \mathbf{1}_E$ ist endlich für $f \in L(E)$.

Beweis: Dass fg messbar ist, wenn f und g messbar sind, wurde schon in Satz 1.39 gezeigt.
Ferner gilt

$$\int_E |fg| \leq M \int_E f < \infty \Longrightarrow (fg) \in L(E).$$

□

Folgerung 1.66 *Sei $f \in L(E)$, $f \geq 0$ fast überall, g sei messbar auf E, und es gebe Konstanten α, β mit $\alpha \leq g \leq \beta$. Dann gilt*

$$\alpha \int_E f \leq \int_E fg \leq \beta \int_E f.$$

Beweis: Aus Satz 1.65 folgt $fg \in L(E)$, ferner gilt fast überall $\alpha f \leq fg \leq \beta f$. Aus der Monotonie des Integrals folgt die Behauptung. □

1.9 Konvergenzsätze

Die Konvergenzsätze, die wir oben bereits für *nichtnegative* messbare Funktionen gezeigt haben, formulieren wir im Folgenden für messbare Funktionen.

Satz 1.67 (Monotone Konvergenz) *$\{f_n\}$ sei eine Folge messbarer Funktionen auf E.*

1. *Falls $f_n \uparrow f$ fast überall auf E und falls es ein $\Phi \in L(E)$ gibt, so dass $f_n \geq \Phi$ fast überall auf E für alle n, so gilt*

$$\int_E f_n \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \int_E f.$$

2. *Falls $f_n \downarrow f$ fast überall auf E und es ein $\Phi \in L(E)$ gibt, so dass $f \leq \Phi$ fast überall auf E für alle n, so gilt*

$$\int_E f_n \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \int_E f.$$

Beweis:

1. Der Satz über die monotone Konvergenz nichtnegative Funktionen (Satz 1.48) war nicht formuliert für Konvergenz *fast überall*, sondern auf ganz E. Dies umgehen wir wie folgt:

   Seien $E_0 := \{f_n \not\nearrow f\}$ und $E_n := \{f_n < \Phi\}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Diese Mengen sind nach Voraussetzung Nullmengen, und also die Vereinigung $Z := \bigcup_{n \geq 0} E_n$. Es gilt also $0 \leq f_n - \Phi \uparrow f - \Phi$ auf $E \setminus Z$, und mit (Satz 1.48) folgt

   $$\begin{aligned}\int_E f_n - \int_E \Phi &= \int_E (f_n - \Phi) = \int_{E \setminus Z} (f_n - \Phi) \\ &\longrightarrow \int_{E \setminus Z} (f - \Phi) = \int_E (f - \Phi) = \int_E f - \int_E \Phi,\end{aligned}$$

   wobei wir stillschweigend die Integrale über die Nullmenge Z unberücksichtigt gelassen haben.

2. Hierfür betrachtet man $-f_n$ und verfährt genauso.

□

Satz 1.68 *Seien $f_n \in L(E)$ für $n = 1, 2, \dots$. $\{f_n\}$ konvergiere gleichmäßig auf E gegen f. Ferner gelte $|E| < \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Da $|E|$ beschränkt ist, ist $\mathbf{1}_E$ integrierbar. Es folgt daher für hinreichend große n:

$$|f| \leq |f_n| + \underbrace{|f - f_n|}_{\leq 1} \Rightarrow |f| \in L(E) \Rightarrow f \in L(E).$$

$\underline{\beta)}$

$$\begin{aligned}\left| \int_E f - \int_E f_n \right| &= \left| \int_E (f - f_n) \right| \leq \int_E |f - f_n| \\ &\leq \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| \underbrace{\int_E \mathbf{1}}_{=|E|} \overset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

□

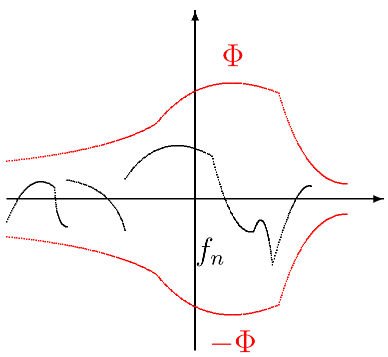
Satz 1.69 (Lemma von Fatou) *$\{f_n\}$ sei eine Folge messbarer Funktionen auf E. Es existiere eine Funktion $\Phi \in L(E)$ mit $f_n \geq \Phi$ fast überall auf E für alle n. Dann gilt*

$$\int_E (\liminf_{n\to\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Beweis: Man wende Satz 1.57 auf $F_n := f_n - \Phi$ an. □

Satz 1.70 (Lebesgue; majorisierte Konvergenz) *f_n sei eine Folge messbarer Funktionen auf E mit $f_n \to f$ fast überall auf E. Ferner existiere ein $\Phi \in L(E)$ mit $|f_n| \leq \Phi$ fast überall auf E und für alle n. Dann gilt*

$$\int_E f_n \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \int_E f.$$



Beweis: Aus $-\Phi \leq f \leq \Phi$ f. ü. folgt $0 \leq f + \Phi \leq 2\Phi$ fast überall auf E. Und da $2\Phi \in L(E)$ folgt die Behauptung aus Satz 1.60. □

1.10 Komplexwertige Funktionen

Zum Abschluss betrachten wir noch komplexwertige Funktionen. Wir werden diese später noch bei der Betrachtung von L^p-Räumen brauchen.

Bezeichnung: $f : E \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ wird messbar genannt, falls für alle offenen Teilmengen $G \subset \mathbb{R}^2$ das Urbild $\overset{-1}{f}(G)$ messbar ist.

Als Schreibweise verwenden wir $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ oder auch $f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x)$.

Bemerkung: f ist genau dann messbar, wenn f_1 und f_2 messbar sind.

Man definiert daher das Integral von f durch

$$\int_E f := \int_E f_1 + \mathrm{i} \int_E f_2.$$

f wird inegrierbar genannt, falls f messbar ist und $\int_E |f| < \infty$.
Das Integral hat dann die Eigenschaften:

1. Es ist komplex linear,

2. $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ ist genau dann integrierbar, wenn f_1 und f_2 integrierbar sind, und es ist

   $$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|. \tag{1.15}$$

Zum Beweis der zweiten Aussage bemerken wir, dass $|f| \leq |f_1| + |f_2| \leq 2|f|$. Die Gleichung (1.15) wird wie beim RIEMANN-Integral gezeigt.

Kapitel 2

Die Sätze von Fubini und Tonelli und Anwendungen

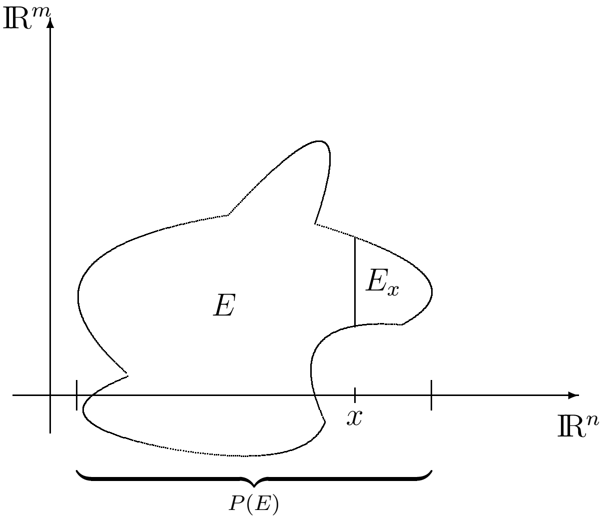
2.1 Der Satz von Fubini

Nachdem wir das Integral einer Funktion $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert haben, wenden wir und der Fragestellung zu, wie es praktisch berechnet werden kann, wenn $d \geq 2$. Die Wunschvorstellung ist, dass

$$\int_E \cdots \int f(x_1, \ldots, x_d)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d$$

sukzessive nach $x_1, \ldots, x_d$ integriert werden kann. Ziel dieses Kapitels ist es, aufzuzeigen, unter welchen Bedingungen an f und E dies möglich ist.

Präzisieren wir dieses Ziel etwas:
Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, und sei $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. $P(E)$ sei die Projektion von E auf $\mathbb{R}^n$, also $P(E) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; (x, y) \in E$ für ein $y \in \mathbb{R}^m\}$, und sei E_x der Schnitt von E mit der affinen (Hyper-)Ebene durch x parallel zu $\mathbb{R}^m$, also $E_x = \{y; (x, y) \in E\}$.



Unser Wunsch lässt sich also formulieren als

$$\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{P(E)} \Big(\int_{E_x} f(x,y)\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x,$$

insbesondere

$$|E| = \int_E \mathbf{1}_E = \int_{P(E)} |E_x|\,\mathrm{d}x,$$

was auch als CAVALIERI*sches Prinzip* bekannt ist.

Bevor wir den Satz von FUBINI formulieren, stellen wir noch einige Bezeichnungen bereit:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \big\{x = (x_1, \ldots, x_n); a_i \le x_i \le b_i, i = 1, \ldots, n\big\} \subset \mathbb{R}^n \\ I_2 &:= \big\{y = (y_1, \ldots, y_n); c_j \le y_j \le d_j, j = 1, \ldots, m\big\} \subset \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Als *Intervalle* in $\mathbb{R}^{n+m}$ bezeichnen wir Mengen der Gestalt

$$I = I_1 \times I_2;$$

Punkte in dieser Menge werden mit dem Paar (x, y) bezeichnet.
Für eine Funktion

$$f : \begin{cases} I & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{cases}$$

schreiben wir kurz:

$$\int_I f := \iint\limits_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Satz 2.1 (Fubini) *Sei $f \in L(I)$, $I = I_1 \times I_2$. Dann gilt:*

1. *Für fast alle $x \in I_1$ ist $y \mapsto f(x,y)$ auf I_2 messbar.*
2. *$x \mapsto \int_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ ist fast überall definiert, messbar und auf I_1 integrierbar, und es gilt*

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{I_1} \Big(\int_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x;$$

dabei ist das Integral auf der linken Seite der Gleichung als $(n+m)$–dimensionales L-Integral aufzufassen.

Für den Beweis nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $I_1 = \mathbb{R}^n$, $I_2 = \mathbb{R}^m$ und $I = \mathbb{R}^{n+m}$; ansonsten kann man die Funktion $\tilde{f} := f \cdot \mathbf{1}_I$ betrachten.
Der Beweis des Satzes vollzieht sich mit der Hilfe von fünf Lemmata; wenn wir die Sprechweise „f hat die Eigenschaft $\mathfrak{F}$“ vereinbaren, falls f den Satz von Fubini erfüllt, liest sich der Beweis dann folgendermaßen:

1. Die Aussage des Satzes gilt für jede endliche Linearkombination von Funktionen mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}$ (Lemma 2.2). Wir können also durch eine Zerlegung $f = f^+ - f^-$ die Betrachtung auf positive messbare Funktionen einschränken.

2. Ist $f \geq 0$ und messbar, dann ist f Grenzwert einer monotonen Folge $\{f_k\}_k$ einfacher Funktionen. Wir zeigen (Lemma 2.3) die allgemeinere Aussage: *Sei $\{f_k\}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_k \uparrow f$ oder $f_k \downarrow f$. Wenn die Funktionen f_k die Eigenschaft $\mathfrak{F}$ haben, dann auch f.*

   Wir können unsere Betrachtungen also auf einfache Funktionen einschränken, ja sogar auf einfache Funktionen, deren Träger endliches Maß haben (da wir eine einfache Funktion f, deren Träger unendliches Maß hat, als monotonen Grenzwert der Folge $\{f \cdot \mathbf{1}_{B_k(0)}\}$ ansehen können).

3. Solche einfachen Funktionen sind endliche Linearkombinationen von Indikatorfunktionen messbarer beschränkter Mengen, d. h. nach Lemma 2.2 können wir uns auf die Indikatorfunktionen messbarer beschränkter Mengen zurückziehen.

4. Schreiben wir eine messbare Menge E als $E = H \setminus Z$ mit einer G_δ–Menge H und einer Nullmenge Z, ist $\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_H - \mathbf{1}_Z$, also reicht es zu zeigen, dass die Indikatorfunktionen von G_δ–Mengen bzw. Nullmengen die Eigenschaft $\mathfrak{F}$ haben (Lemmata 2.4 und 2.5).

Lemma 2.2 *Jede endliche Linearkombination von Funktionen mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}$ hat auch die Eigenschaft $\mathfrak{F}$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Linearität des Integrals und der Eigenschaft, dass mit f und g auch $\alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ messbar ist. □

Lemma 2.3 *$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ habe die Eigenschaft $\mathfrak{F}$. Falls $f_k \uparrow f$ oder $f_k \downarrow f$, dann hat auch f die Eigenschaft $\mathfrak{F}$.*

Beweis: Ohne Einschränkung gelte $f_k \uparrow f$, ansonsten betrachte $-f_k \uparrow -f$.
$Z_k \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Nullmenge, so dass $(y \mapsto f_k(x,y)) \in L(\mathbb{R}^m)$ für alle $x \notin Z_k$.
Dann ist $Z = \bigcup_k Z_k$ ebenfalls eine Nullmenge, und für alle $x \notin Z$ gilt $(y \mapsto f_k(x,y)) \in L(\mathbb{R}^m)$ für alle k.
Gelte nun (die Konvergenzen sind monoton)

$$L(\mathbb{R}^n) \ni h_k := \int_{\mathbb{R}^m} f_k(y)\,\mathrm{d}y \uparrow h = \int_{R^m} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\,\mathrm{d}x \uparrow \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

Aus der Eigenschaft $\mathfrak{F}$ für die Funktionen f_k folgt nun:

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^{(n+m)}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) & & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\
\uparrow & & \uparrow \\
\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^{(n+m)}} f_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x,
\end{array}$$

mit monotoner Konvergenz auf beiden Seiten. Die Konvergenz auf der linken Seite der Gleichung ist die monotone Konvergenz für L-Integrale, die auf der rechten Seite ist die oben gezeigte. □

Lemma 2.4 *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ vom Typ G_δ mit $E = \bigcap_{k=1}^{\infty}$, G_k offen; G_1 habe endliches Maß.*
Dann hat $\mathbf{1}_E$ die Eigenschaft $\mathfrak{F}$.

Beweis: Wir betrachten fünf Fälle

1. E ist ein beschränktes offenes Intervall in $\mathbb{R}^{n+m}$, sagen wir $E = J_1 \times J_2$ mit beschränkten offenen Intervallen $J_1 \subset \mathbb{R}^n$, $J_2 \subset \mathbb{R}^m$.

   Dann ist
$$|E|_{(n+m)} = |J_1|_{(n)} \cdot |J_2|_{(m)}.$$

   $\mathbf{1}_E(x,y)$ ist als Funktion in y messbar, und es ist
$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{1}_E(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} |J_2|\ , x \in J_1 \\ 0\ , \text{sonst} \end{cases}$$

   Es folgt
$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = |J_1||J_2| = |E|,$$

   ebenso
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathbf{1}_E(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = |E|.$$

2. E liege am Rand eines Intervalles in $\mathbb{R}^{n+m}$ für fast alle x. Dann ist die Menge $\{y; (x,y) \in E\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$. Es folgt
$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{1}_E(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \text{ fast überall,}$$

   ebenso
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathbf{1}_E(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = |E| = 0.$$

3. E sei ein teliweise offenes Intervall in $\mathbb{R}^{n+m}$: $E = \overset{\circ}{E} \cup N$ mit $N \subset \partial E$. Mit 1 und 2 folgt, dass $\mathbf{1}_E$ die Eigenschaft $\mathfrak{F}$ hat.

4. Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen, und gelte $|E| < \infty$. Wir schreiben E als disjunkte Vereinigung teilweise offener Intervalle, $E = \bigcup_j I_j$, und setzen $E_k := \bigcup_{j=1}^k I_j$.

   Wegen 3 und Lemma 2.2 hat die Funktion $\mathbf{1}_{E_k} = \sum_{j=1}^k \mathbf{1}_{E_j}$ die Eigenschaft $\mathfrak{F}$.

   Da $\mathbf{1}_{E_k} \uparrow \mathbf{1}_E$ folgt mit Lemma 2.3, dass auch $\mathbf{1}_E$ die Eigenschaft $\mathfrak{F}$ hat.

5. Allgemeiner Fall: Wir können $G_k \searrow E$ annehmen (gegebenenfalls $G_1, G_1 \cap G_2, G_1 \cap G_2 \cap G_3, \dots$).

   Dann gilt $\mathbf{1}_{G_k} \downarrow \mathbf{1}_E$, und aus Lemma 2.3 folgt wieder, dass $\mathbf{1}_E$ die Eigenschaft $\mathfrak{F}$ hat.

$\square$

Lemma 2.5 *$Z \subset \mathbb{R}^{n+m}$ habe Maß 0. Dann hat $\mathbf{1}_Z$ die Eigenschaft $\mathfrak{F}$. Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist also $\{y; (x,y) \in Z\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$.*

Beweis: Nach Satz 1.6 gibt es zu $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine G_δ–Menge $H \subset \mathbb{R}^{n+m}$ mit $E \subset H$ und $|E|_e = |H|_e$.
Wähle ein solches H für $E = Z$ mit $|H|_e = 0$.
Dann ist $H = \bigcap G_k$, $|G_1| < \infty$, G_k offen.
Mit Lemma 2.4 und der Eigenschaft, dass H eine G_δ–Menge ist, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{1}_H(x,y)\,\mathrm{d}y}_{=\left|\{y;(x,y)\in H\}\right|=0 \text{ f. ü.}} \Big)\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathbf{1}_H(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 0.$$

Die Menge $\{y; (x,y) \in Z\}$ hat also $\mathbb{R}^m$–Maß 0 für fast alle x.
Es folgt, dass $\mathbf{1}_Z(x,y)$ in y für fast alle x messbar ist und $\int \mathbf{1}_Z(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$.
Daher ist

$$\int \Big(\int \mathbf{1}_Z(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Gleichzeitig ist auch

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathbf{1}_Z(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = |Z| = 0.$$

$\square$

Lemma 2.6 *$E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ sei messbar mit endlichem Maß. Dann hat $\mathbf{1}_E$ die Eigenschaft $\mathfrak{F}$.*

Beweis: $E = H \setminus Z$ mit einer G_δ–Menge H und einer Nullmenge Z, wobei $H = \bigcap G_k$ und $|G_1| < \infty$.
Es ist dann $\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_H - \mathbf{1}_Z$, und die Behauptung folgt mit den Lemmata 2.4, 2.5 und 2.2. $\square$

Satz 2.7 *$f : \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ sei messbar. Dann ist $f(x,y)$ für fast alle x als Funktion von y messbar auf $\mathbb{R}^m$. Insbesondere: ist $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar, so ist $E_x = \{y; (x,y) \in E\}$ für fast alle x messbar in $\mathbb{R}^m$.*

Beweis: $\underline{\alpha}$: Ist $f = \mathbf{1}_E$ für eine messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, sind beide Aussagen äquivalent.
Dazu schreiben wir $E = H \cup Z$, H vom Typ F_σ, $|Z|_{(n+m)} = 0$. Dann ist $E_x = H_x \cup Z_x$ mit H_x vom Typ F_σ und $|Z|_{(m)} = 0$ für fast alle x, woraus die Messbarkeit von E_x folgt. Bliebt nur nachzutragen, warum H_x eine F_σ–Menge ist:
Gelte $H = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$ mit abgeschlossenen Mengen F_k, dann ist

$$H_x = \bigcup_{k=1}^\infty \underbrace{(F_k)_x}_{\text{abgeschl.}} .$$

$\underline{\beta}$: Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Setzen wir $E^a := \{(x,y); f(x,y) > a\}$, so folgt mit α:

$$(E^a)_x = \{y; (x,y) \in E^a\} \text{ ist messbar für fast alle } x;$$

die Nullmenge, für die dies nicht gelte, sei Z^a. Dann ist auch $Z = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} Z^a$ eine Nullmenge, und für $x \notin Z$ ist $\{y; f(x,y) > a\}$ messbar für alle $a \in \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, folgt mit Satz 1.33, dass $\{y; f(x,y) > a\}$ messbar ist für alle $a \in \mathbb{R}$.
□

Satz 2.8 (Fubini für $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$) *Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar, und sei $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar; ferner sei $E_x := \{y; (x,y) \in E\}$. Dann gilt:*

1. *Für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $f(x,y)$ als Funktion in y auf E_x messbar.*
2. *Falls $f \in L(E)$, so ist $y \mapsto f(x,y)$ für fast alle x auf E_x integrierbar. Ferner ist $x \mapsto \int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ fast überall existent und integrierbar, und es ist*

$$\iint\limits_E f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x.$$

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Die Funktion

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y)\,, (x,y) \in E \\ 0\,, (x,y) \notin E \end{cases}$$

ist messbar auf $\mathbb{R}^{n+m}$. Mit Satz 2.7 folgt, dass $y \mapsto \tilde{f}(x,y)$ für fast alle x messbar ist. Ferner ist E_x messbar für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Daher ist $f(x,y)$ als Funktion in y aus fast allen Mengen E_x messbar, was die erste Aussage des Satzes ist.

$\underline{\beta)}$ Gelte $f \in L(E)$. $\Longrightarrow \tilde{f} \in L(\mathbb{R}^{n+m})$. Es folgt

$$\iint\limits_{E} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{2.1}{\Longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

Da E_x für fast alle x messbar ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{E_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

für fast alle x. □

Beispiel 2.9

1. **Injektive Lineare Abbildungen**

   $I \subset \mathbb{R}^d$ sei ein Intervall, $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sei linear und injektiv. Dann ist $T(I)$ messbar mit $|T(I)| = |\det T||I|$.

   Den Beweis führen wir mit Hilfe einiger Aussagen aus der Linearen Algebra, und zwar schreiben wir $T = B_1 \cdots B_r$, wobei $B_1, \ldots, B_r$ Elementarmatrizen sind.

   $\underline{\alpha)}$ Sei $T = D_i(\alpha)$ die Diagonalmatrix mit dem Wert α an i-ter Stelle und den restlichen Einträgen identisch gleich 1. Ferner sei das Intervall $I = [a,b]$ mit $a = (a_1, \ldots, a_d)^\top, b = (b_1, \ldots, b_d)^\top$.

   Dann ist

   $$TI = [(a_1, \ldots, a_{i-1}, \alpha a_i, a_{i+1}, \ldots, a_d)^\top, (b_1, \ldots, b_{i-1}, \alpha b_i, b_{i+1}, \ldots, b_d)^\top]$$

   (bei $\alpha < 0$ werden die Einträge αa_i und αb_i vertauscht).

   Es folgt

   $$|TI| = |\alpha||I|.$$

   $\underline{\beta)}$ Sei $T = B_{ik}(\alpha) = E + \alpha E_{ik}$ $(i\}neqk)$. Dann gelten $\det T = 1$ und $Tx = x + \alpha x_k e_i$.

   Zur Berechnung von $|TI|$ verwenden wir den Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
|TI| &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{TI}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_I(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i - \alpha x_k, x_{i+1}, \ldots, x_d)\,\mathrm{d}x_i \Big)\,\mathrm{d}x_i' \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_I(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Translationsinvarianz)} \\
&= |I|.
\end{aligned}$$

2. **Volumen der d-dimensionalen Kugel**

Wir bezeichnen mit $B_r^d(0) = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \le r\}$ die d–dimensionale abgeschlossene Kugel mit Radius $r > 0$. Soweit d aus dem Kontext klar ist, schreiben wir auch kurz $B_r(0)$.

Betrachten wir die folgende Abbildung:

$$T_r : B_1(0) \to B_r(0), x \mapsto rx.$$

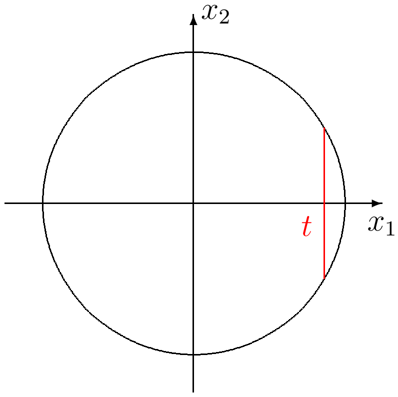
Dann ist $T_r = r \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$ und folglich $|\det T_r| = r^d$, woraus wir mit den soeben gezeigten Ergebnissen schließen, dass

$$|B_r(0)| = r^d |B_1(0)| =: r^d \tau_d.$$

Wir beschränken unsere Betrachungen daher im Folgenden auf Kugeln mit Radius 1.

<u>$d = 1$:</u> $B_r^1(0) = [-1, 1] \subset \mathbb{R} \Rightarrow \tau_1 = 2.$

<u>$d = 2$:</u>



Hier ist $B_1(0)$ gegeben durch

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1$$

oder äquivalent

$$|x_2| \le \sqrt{1 - x_1^2}.$$

Dann ist $(B_1^2(0))_t = \{y \in \mathbb{R}; y_1^2 + t^2 \leq 1\}$ und allgemein

$$\begin{aligned} (B_1^d(0))_t &= \{y \in \mathbb{R}^{d-1}; y_1^2 + \ldots + y_{d-1}^2 + t^2 \leq 1\} \\ &= \begin{cases} B^{d-1}_{\sqrt{1-t^2}}(0) & |t| \leq 1 \\ \emptyset & |t| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \tau_d &= |B_1^d(0)| = \int\limits_{B_1^d(0)} 1 \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{(B_1(0))_t} 1 \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} |B^{d-1}_{\sqrt{1-t^2}}(0)| \,\mathrm{d}t \\ &= \tau_{d-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-1}{2}} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Wir setzen

$$c_d := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-1}{2}} \,\mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^d x \,\mathrm{d}x$$

und erhalten

$$c_{2k} = \pi \prod_{m=1}^{k} \frac{2m-1}{2m}, \qquad c_{2k+1} = 2 \prod_{m=1}^{k} \frac{2m}{2m+1}$$

und

$$c_d c_{d-1} = \frac{2\pi}{d}.$$

Hieraus gewinnen wir für τ_d die folgende Rekursionsformel:

$$\tau_d = \tau_{d-1} c_d = \tau_{d-2} c_{d-1} c_d = \tau_{d-2} \frac{2\pi}{d}, \tag{2.1}$$

was für $d = 3$ das bekannte Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel ergibt: $\frac{4}{3}\pi$.

Aus der Rekursionsformel (2.1) läßt sich auch herleiten, wie τ_d für gerades und ungerades d aussieht:

$$\tau_{2k} = \frac{1}{k!}\pi^k, \qquad \tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}\pi^k.$$

Mittels der Gammafunktion können wir diese beiden Formeln auch zu einer Formel zusammenfassen.

Dazu erinnern wir uns an die Eigenschaften der Gammafunktion:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x), \quad x > 0 \\ \Gamma(k+1) &= k!, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Wir errechnen:

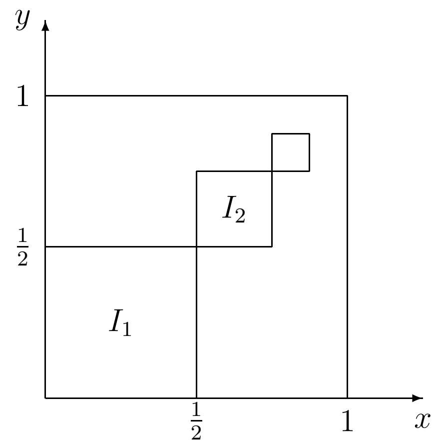
$$\Gamma(k+\frac{3}{2}) = (k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2}) = \Big(\prod_{m=0}^{k} \frac{2m+1}{2}\Big)\Gamma(\frac{1}{2}),$$

woraus folgt, dass

$$\tau_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}. \tag{2.2}$$

3. Sei $n = m = 1$, und $I := [0,1] \times [0,1]$. Die Folge $\{I_k\}_k$ von Intervallen sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} I_1 &:= [0, frac12] \times [0, frac12] \\ I_k &:= [2^{-k+1}, 3 \cdot 2^{-k}] \times [2^{-k+1}, 3 \cdot 2^{-k}] \end{aligned}$$



I_k werde in 4 gleich große Teilquadrate mit Kanten parallel zur x- und y-Achse geteilt, die wir wie folgt benennen:

$I_k^{(4)}$	$I_k^{(3)}$
$I_k^{(1)}$	$I_k^{(2)}$

Wir definieren $f(x,y)$ dann durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{|I_k|}, & (x,y) \in \mathring{I}_k^{(1)} \cup \mathring{I}_k^{(3)} \\ -\frac{1}{|I_k|}, & (x,y) \in \mathring{I}_k^{(2)} \cup \mathring{I}_k^{(4)} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für festes x ist

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

und für festes y ist

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0,$$

also

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Aber:

$$\int_I |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) = \sum_k \int_{I_k} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) = \sum_k 1 = \infty \Rightarrow f \notin L(I).$$

Wir stellen also fest: Aus der Endlichkeit der iterierten Integrale folgt **nicht** dass auch f integrierbar ist.

Satz 2.10 (Tonelli) *$I_1 \subset \mathbb{R}^n, I_2 \subset \mathbb{R}^m$ seien Intervalle, und $f : I = I_1 \times I_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ sei nicht-negativ und messbar. Dann ist $f(x,y)$ für fast alle x eine messbare Funktion von y auf I_2. Darüber hinaus ist*

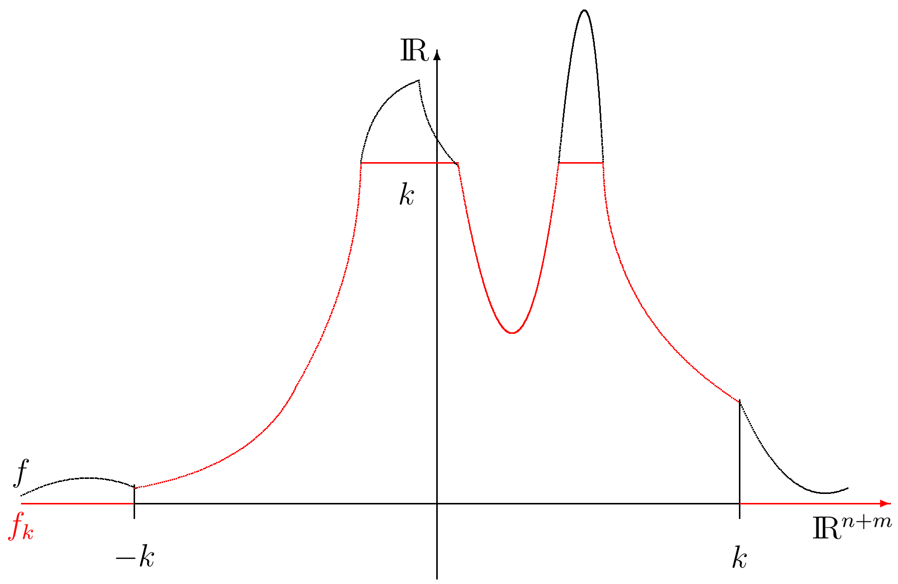
$$x \mapsto \int_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \in \overline{\mathbb{R}}$$

fast überall definiert, und es gilt

$$\iint\limits_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{I_1} \Big(\int\limits_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Seien für $k = 1, 2, \dots$ die Funktionen f_k definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} 0, & \|(x,y)\| > k \\ \min\{k, f(x,y)\}, & \|(x,y) \leq k\| \end{cases}$$



Die Funktionen f_k haben nun die Eigenschaften

- $f_k \geq 0$,
- $f_k \uparrow f$,
- $f_k \in L(I)$ (f_k ist beschränkt und außerhalb einer beschränkten Menge identisch gleich 0).

Nach Satz 2.8 sind die Funktionen f_k und f bezüglich y messbar für fast alle x. Wir haben daher die folgende monotone Konvergenz:

$$\int_{I_2} f_k(x,y)\,\mathrm{d}y \uparrow \int_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Ferner haben wir die monotone Konvergenz:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\iint\limits_I f_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) & \uparrow & \displaystyle\iint\limits_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\ \| & & \\ \displaystyle\int\limits_{I_1}\Big(\int\limits_{I_2} f_k(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x & \uparrow & \displaystyle\int\limits_{I_1}\Big(\int\limits_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

$\square$

Bemerkung: $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ sei messbar, und $\iint\limits_I f$ existiere (eigentlich oder uneigentlich). Dann gilt die Identität

$$\iint\limits_I f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{I_1}\Big(\int_{I_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Wir haben drei Fälle:

$\underline{\alpha}$: $f \in L(I)$. Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Satz von Fubini.

$\underline{\beta}$: $\iint_I f = +\infty$. Dann ist $\iint_I f^+ = +\infty$ und $\iint_I f^- \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\iint\limits_I f^+(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{I_1}\Big(\int_{I_2} f^+(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x,$$

aus dem Satz von Tonelli und desgleichen für f^- aus dem Satz von Fubini.

$\underline{\gamma}$: $\iint_I f = -\infty$. Analog.

Satz 2.11 *$E \subset \mathbb{R}^d$ sei messbar, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sei nicht-negativ.*
Falls das Integral $R(f,E)$ in $\mathbb{R}^{d+1}$ messbar ist, so ist f auf E messbar.

Dies ist die versprochene Umkehrung von Satz 1.44

Beweis: Sei $0 \le y < \infty$. Nach Satz 2.7 ist die Menge

$$\{x \in E; (x,y) \in R(f,E)\}$$

messbar für fast alle $y \in [0,\infty)$. Nun ist aber

$$\{x \in E; (x,y) \in R(f,E)\} = \{x \in E; f(x) \ge y\},$$

daher ist auch diese Menge messbar für fast alle y.
Für $y < 0$ ist $\{x \in E; f(x,y) \ge y\} = E$ (und damit messbar), woraus insgesamt folgt, dass f messbar ist. $\square$

2.2 Faltung von Funktionen

Für messbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Für den Fall, dass dieses Integral existiert, sprechen wir von der *Faltung von f und g*.
Die Faltung ist kommutativ, d. h. $f * g = g * f$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} f(-t)g(-x+t)\,\mathrm{d}t,$$

soweit die Integrale existieren.

Satz 2.12 *Seien $f, g \in L(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert $f * g(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, $f * g \in L(\mathbb{R}^d)$ und*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g|\,\mathrm{d}x \le \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f|\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g|\Big).$$

Für den Beweis verwenden wir das

Lemma 2.13 *$f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ sei messbar. Dann ist $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $F(x,t) := f(x-t)$ messbar.*

Beweis: Sei $F_1 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$, $F_1(x,t) := f(x)$. Dann ist

$$\{(x,t); F_1(x,t) > a\} = \{(x,t); f(x) > a, t \in \mathbb{R}^d\} = \{x; f(x) > a\} \times \mathbb{R}^d$$

messbar. Es folgt, dass F_1 auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ messbar ist.
Sei nun $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2d}$. Setze $x := \xi - \eta$, $t := \xi + \eta$ und definiere $T : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ durch $(\xi, \eta) \mapsto (x, t)$.
Dann ist $F_2 := F_1 \circ T$ messbar mit $F_2(\xi, \eta) = f(\xi - \eta)$ □

Beweis von Satz 2.12: $\underline{\alpha}$: f, g seien nicht-negativ.
Aus Lemma 2.13 folgt:

$$(x,t) \mapsto f(x-t)g(t) \ge 0 \text{ und auf } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \text{ messbar.}$$

Somit haben wir für fast alle x:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}^{2d}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Tonelli}}{=} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x}_{=\int_{\mathbb{R}^d}(f*g)(x)\,\mathrm{d}x} \\
&\overset{\text{Tonelli}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t)\,\mathrm{d}t\Big)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x\Big),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

$\underline{\beta}$: $|f*g| \le |f|*|g|$, und mit (α) folgt die Behauptung. □

Kapitel 3

Die Transformationsformel für L-Integrale im $\mathbb{R}^d$

Aus dem eindimensionalen Fall für R-Integrale ist uns die Regel der *Integration durch Substitution* bekannt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei φ eine stetig differenzierbare Funktion auf $[a, b]$ ist, so dass $\varphi([a, b])$ im Definitionsbereich von f enthalten ist.
Ziel dieses Kapitels ist, eine solche Formel auch für d–dimensionale L-Integrale herzuleiten.
Eine naheliegende Formulierung erhalten wir, wenn wir die Verknüpfung einer messbaren Funktion f mit einer injektiven linearen Abbildung T betrachten (vergleiche Beispiel 2.9):
Ist $f = \mathbf{1}_I$ für ein Intervall I, so ist

$$\begin{aligned} |TI| &= |\det T||I| \Longrightarrow \\ \int_{TI} f(Ty)\,\mathrm{d}y &= |\det T| \int_I f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Wir können eine allgemeine messbare Funktion f nun durch Treppenfunktionen monoton approximieren und erhalten für eine lineare Abbildung T die Identität (3.1) auch für beliebige messbare Funktionen f.

Wenn T allerdings nicht linear ist, muss (3.1) etwas umformuliert werden, denn zumindest für den eindimensionalen Fall und hinreichend stetiges f muss auch die bekannte Substitutionsregel wieder gelten; irgendwo muss zumindest die Ableitung von T einfließen.

Da sowohl lineare Abbildungen als auch der eindimensionale Fall sehr speziell ist, liegt es nahe, beides miteinander zu kombinieren; zum einen ist die JACOBImatrix einer linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ wiederum T, zum anderen ist im eindimensionalen Fall die Determinante der JACOBImatrix von φ gerade φ'.

Bevor wir den Transformationssatz formulieren und beweisen, geben wir noch ein Beispiel für die Transformationsformel bei linearen Abbildungen:

Beispiel 3.1 Sei $f = \mathbf{1}_{B_1^d(0)}$. Dann ist die FOURIERtransformierte $\widehat{f}$ von f gegeben durch

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\|x\| \le 1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \xi, x\rangle} \,\mathrm{d}x.$$

Setzen wir $\rho := \|\xi\|$, gibt es eine orthogonale Abbildung A, so dass $A^{-1}\xi = (0, \dots, 0, \rho)$.
Wir haben also

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\|x\| \le 1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle \xi, Ax\rangle} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\|x\| \le 1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho x_d} \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d \\
&\overset{\text{FUBINI}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{-1}^{1} \left| B^{d-1}_{\sqrt{1-x_d^2}}(0) \right|_{(d-1)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho x_d} \,\mathrm{d}x_d \\
&= \frac{\tau_{d-1}}{(2\pi)^{d/2}} \int_{-1}^{1} (1 - x_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho x_d} \,\mathrm{d}x_d
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $x_d := \cos t$, $\mathrm{d}x_d = -\sin t \,\mathrm{d}t$ schreibt sich dies um zu

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{d-1}}{(2\pi)^{d/2}} \int_{-1}^{1} (1 - x_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho x_d} \,\mathrm{d}x_d &= \frac{\pi^{(d-2)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})(2\pi)^{d/2}} \int_0^{\pi} \sin^d t \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho \cos t} \,\mathrm{d}t \\
&=: \frac{1}{\rho^{d/2}} J_{d/2}(\rho)
\end{aligned}$$

Die Funktion

$$J_p(x) := \frac{1}{\pi} \frac{(x/2)^p}{\Gamma(p + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \sin^{2p} t \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cos t} \,\mathrm{d}t$$

heißt BESSEL*funktion zum Index p*. Diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{p^2}{x^2}) y = 0.$$

Satz 3.2 (Transformationssatz für L-Integrale) *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\Phi : U \to V$ sei ein C^1–Diffeomorphismus (d. h. bijektiv, und Φ, Φ^{-1} sind stetig differenzierbar).*
Dann ist eine Funktion $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann L-integrierbar, wenn $(f \circ \Phi)|\det D\Phi|$ auf U L-integrierbar ist, und es gilt

$$\int_U f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x = \int_V f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3.2}$$

Ein **Beispiel** hierfür ist die Umrechnung zwischen Kartesischen und Polarkoordinaten (etwa in $\mathbb{R}^2$):
Sei

$$\Phi : \begin{cases} (0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2, \\ (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{cases}$$

Dann ist $|\det D\Phi(r, \varphi)| = r$, und die Transformationsformel (3.2) lautet

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_{x^2+y^2 \le r} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$$

Beweis von Satz 3.2: <u>α:</u> Es reicht, in (3.2) die Ungleichung „$\geq$“ zu zeigen, denn:
$\Psi := \Phi^{-1} : V \to U$ hat Eigenschaften wie Φ. Anwendung von (3.2) mit „$\geq$“ auf Ψ ergibt

$$\begin{aligned} \int_U f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x &\leq \int_V f(\Phi(\Psi(y)))\underbrace{|\det D\Phi(\Psi(y))|}_{=1,\text{ da } \Phi\circ\Psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}}|\det D\Psi(y)|\,\mathrm{d}y \\ &= \int_V f(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Hierbei nimmt die linke Seite die Rolle der rechten Seite von (3.2) ein.
Es folgt, dass in (3.2) auch die Ungleichung „$\leq$“ gilt.

<u>β</u>: Analog zum Beweis des Satzes von FUBINI rediziert man alles auf den Fall, dass $f = \mathbf{1}_{\Phi(I)}$ für ein Intervall I.

Wesentliches Hilfsmittel hierfür ist

Hilfssatz 3.3 (Lemma von Sard) $E = W$ *sei ein abgeschlossener Würfel, und* $\Phi : W \to \mathbb{R}^d$ *sei stetig differenzierbar.*
Dann gilt

$$|\Phi(W)| \le \int_W |\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x \quad \Big(\le \max_{x\in W} |\det D\Phi(x)| \cdot |W| \Big)$$

Beweis des Hilfssatzes: Zunächst stellen wir fest, dass Φ auf W Lipschitz–stetig ist, also insbesondere messbar.
Wir nehmen nun an, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $|\Phi(W)| \ge \int_W |\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x + \varepsilon|W|$.
W habe die Kantenlänge a. Durch Halbierung der Kanten zerlegen wir W in die abgeschlossenen Würfel $W_1, \dots, W_{2^d}$ der Kantenlänge $a/2$. Unter diesen ist mindestens einer (wir bezeichnen ihn mit W^1) mit der Eigenschaft

$$|\Phi(W^1)| \ge \int_{W^1} |\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x + \varepsilon|W^1|.$$

Per Induktion ergibt sich eine Folge $W^1, W^2, W^3, \dots$ von ineinandergeschachtelten Würfeln. ξ sei der gemeinsame Punkt aller W^k. Ohne Einschränkung können wir $\xi = 0$ annehmen; ansonsten wenden wir zusätzlich eine Translation an.
Es gilt dann

$$(3.3) \qquad \frac{|\Phi(W^k)|}{|W^k|} \ge \frac{1}{|W^k|}\int_{W^k} |\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x + \varepsilon \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} |\det A| + \varepsilon$$

mit $A := D\Phi(0)$.
Aus der stetigen Differenzierbarkeit von Φ können wir ferner schließen:

$$(3.4) \qquad \Phi(x) = \Phi(0) + Ax + R(x) \quad \text{mit } R(x) \le \|x\|\delta(\|x\|),$$

wobei $\delta(r) \to 0$ für $r \to 0+$.
Sei $b := a\sqrt{d} = \operatorname{diam}(W)$. Es folgt $2^{-k}b = \operatorname{diam}(W^k)$.
Für $x \in W^k$ gilt somit für die Abschätzung des Restglieds in (3.4):

$$|R(x)| \le 2^{-k}b\delta(2^{-k}b) =: \varepsilon_k =: 2^{-k}\delta_k,$$

mit $\delta_k \to 0$ für $k \to \infty$.
Wir setzen $V := A(W)$, $V^k := A(W^k)$ und vereinbaren folgende Bezeichnung:
Ist $M \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, so nennen wir $B_\varepsilon(M) := \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, M) < \varepsilon\}$ die „*ε–Umgebung von M*“.
Mit dieser Bezeichnung können wir also (3.4) uminterpretieren als

$$\Phi(W^k) \subset \Phi(0) + B_{\varepsilon_k}(V^k).$$

⌈ **Nebenrechnung:** Für ε–Umgebungen von Mengen gilt:

$$B_\varepsilon(M+c) = B_\varepsilon(M) + c \qquad \lambda B_\varepsilon(M) = B_{\lambda\varepsilon}(\lambda M)$$

für $c \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Beide Aussagen sind offensichtlich. ⌋

Zu V^k existiert nun ein $c^k \in \mathbb{R}^d$ mit $V^k = c^k + 2^{-k}V$.

⌈ Dies macht man sich wie folgt klar:
$\exists a_1 \in \mathbb{R}^d$, so dass $a_1 + W$ den Nullpunkt als Mittelpunkt hat.
$\exists b_1 \in \mathbb{R}^d$ mit $W^1 = 2^{-1}(a_1 + W) + b_1$.
$V^1 = A(W^1) = 2^{-1}A(W) + \underbrace{2^{-1}A(a_1) + A(b_1)}_{=:c_1}$, und so weiter ⌋

Insgesamt ist also $B_{\varepsilon_k}(V^k) = c^k + 2^{-k}B_{\delta_k}(V)$
Nach Satz 1.27 ist $|V| = |\det A|\,|W|$, also insbesondere $|\lambda M| = \lambda^d|M|$ für $\lambda > 0$ und messbares M.
Wir folgern:

$$\frac{|\Phi(W^k)|}{|W^k|} \leq \frac{2^{-dk}|B_{\delta_k}(V)|}{2^{-dk}|W|} = \underbrace{\frac{|B_{\delta_k}(V)|}{|V|}}_{\to 1 (k\to\infty)} |\det A| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} |\det A|,$$

im Widerspruch zu (3.3) $\diamond$

Die Aussage des Lemmas von Sard erweitern wir auf Intervalle I, indem wir diese mit Wüfeln überdecken.

$\underline{\gamma:}$ Aus Punkt β folgt, dass die Transformationsformel für $f = \mathbf{1}_{\Phi(I)}$ gilt, wobei $I \subset U$ ein Intervall ist. Wir haben dann

$$\int_V \mathbf{1}_{\Phi(I)}(y)\,\mathrm{d}y = |\Phi(I)| \leq \int_I |\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_U \mathbf{1}_I(x)|\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Beispiel 3.4 Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$
Wir schreiben $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi. \tag{3.5}$$

Es folgt: die Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ ist messbar auf $\mathbb{R}^2$.
Ferner folgt mit dem Satz von FUBINI:

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\Big)^2 &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{3.5}{=} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\pi}{2} - \mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi,
\end{aligned}$$

womit wir einen weiteren Beweis für die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

haben.

Wir können ebenfalls folgern:
Sei $f = \mathrm{e}^{-1/2\|x\|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Setzen wir $x^2 := \langle x, x\rangle$, gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{FUBINI}}{=} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_1^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1y_1}\,\mathrm{d}y_1}_{=:\,h(x_1)} \cdot \ldots \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_d^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_dy_d}\,\mathrm{d}y_d.
\end{aligned}$$

Wir brauchen daher nur den Fall $d = 1$ zu betrachten.
Wir stellen zunächst fest, dass der Integrand in $h(x_1)$ durch $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_1^2}$ majorisiert wird, also durch eine integrierbare Funktion. Wir können also, wenn wir h ableiten, nach dem Konvergenzsatz von LEBESGUE Differentiation und Integration vertauschen.
Es folgt:

$$\begin{aligned}
h'(x_1) &= \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{y_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_1^2}}_{u'} \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1y_1}}_{v}\,\mathrm{d}y_1 \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} -\frac{x_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_1^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1y_1}\,\mathrm{d}y_1 \\
&= -x_1 h(x_1).
\end{aligned}$$

Also: h erfüllt die Differentialgleichung

$$h'(x_1) = -x_1 h(x_1).$$

Es folgt: $h(x_1) = C \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x_1^2}$, und aus der Randbedingung

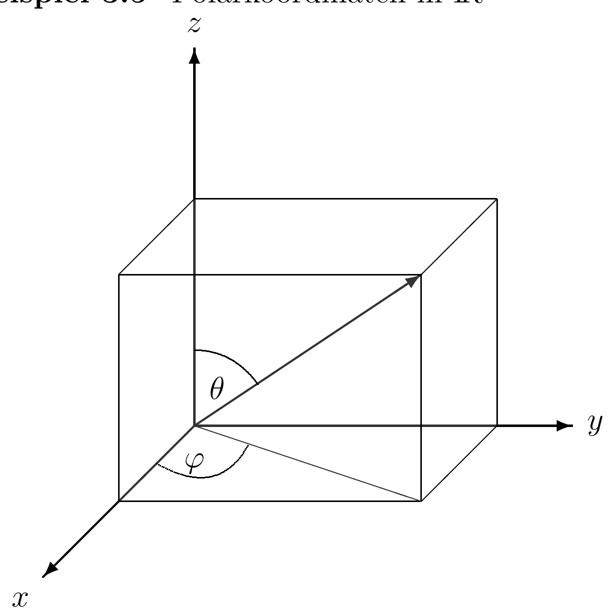
$$h(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y_1^2}\, \mathrm{d}y_1 = 1$$

folgt $C = 1$, also $h(x_1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x_1^2}$.
Was wir damit gezeigt haben, ist

$$\widehat{f} = f$$

Wir haben also eine nichttriviale Funktion gefunden, die unter der FOURIERtransformation invariant ist.

Beispiel 3.5 Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$



Sei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Wir definieren

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) := (r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi).$$

Dann ist $|\det D\Phi| = r^2 \sin\theta$. Nach dem Transformationssatz ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar, wenn

$$(r,\theta,\varphi) \mapsto f(\Phi(r,\theta,\varphi)) \cdot r^2 \sin\theta$$

auf $\mathbb{R}_+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$ integrierbar ist, und es ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(\Phi(r,\theta,\varphi)) r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Als Folgerung erhalten wir für $f = \mathbf{1}_{B_R^3(0)}$:

$$|B_R^3(0)| = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{R} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Beispiel 3.6 Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^d$
Wir setzen

$$\begin{array}{lcr}
x_1 & = & r\cos\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2} \\
x_2 & = & r\sin\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2} \\
x_3 & = & r\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2} \\
x_4 & = & r\cos\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2} \\
\vdots & & \\
x_{d-1} & = & r\cos\theta_{d-3} \sin\theta_{d-2} \\
x_d & = & r\cos\theta_{d-2}
\end{array}$$

und definieren Φ_d vermöge

$$x = (x_1, \ldots, x_d) = \Phi_d(r, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{d-2}).$$

Hierbei nehmen wir stillschweigend an, dass $d > 3$ ist (die Fälle $d = 2$ und $d = 3$ haben wir ja vorhin betrachtet).
Φ_d ist ein Diffeomorphismus von $Q := (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (2,\pi)^{d-2}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus N_d$, wobei $N_d = \{x; x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ eine Nullmenge ist.
Es gelten $\Phi_d(\overline{Q}) = \mathbb{R}^d$ und

$$(3.6) \qquad |\det D\Phi_d| = r^{d-1} \sin\theta_1 \sin^2\theta_2 \cdots \sin^{d-2}\theta_{d-2}$$

Wir beweisen (3.6) per Induktion nach d.

Für $d = 3$ haben wir dies schon in Beispiel 3.5 ausgerechnet. Bleibt noch der Schritt „$d-1 \to d$" zu zeigen.
Dazu halten wir x_d fest und setzen

$$x := \Phi_z(\rho, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{d-3}, x_d) := (\Phi_{d-1}(\rho, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{d-3}), x_d)$$

Wir wenden nun die folgende Transformation an:

$$\Psi : \begin{cases} r\sin\theta_{d-2} \mapsto \rho, \quad 0 \le \theta_{d-2} \le \pi \\ r\cos\theta_{d-2} \mapsto x_n \\ \varphi \mapsto \varphi \\ \theta_i \mapsto \theta_i \quad (i = 1, \ldots, d-3) \end{cases}$$

Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\Phi_d = \Phi_z \circ \Psi$. Ferner gilt nach Induktionsvoraussetzung $|\det D\Phi_z| = \rho^{d-2} \sin\theta_1 \cdots \sin^{d-3}\theta_{d-3}$. Zusätzlich ist $|\det D\Psi| = r$, also ist insgesamt

$$|\det D\Phi_d| = r^{d-2} \sin\theta_1 \cdots \sin^{d-2}\theta_{d-2}.$$

Als Anwendung hiervon errechnen wir das Integral einer radialen Funktion:
$f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ sei radial, d. h. $f(x) = f_0(\|x\|)$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \omega_d \int_0^\infty f_0(r) r^{d-1}\,\mathrm{d}r \tag{3.7}$$

mit

$$\omega_d = 2\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \sin\theta_1 \sin^2\theta_2 \cdots \sin^{d-2}\theta_{d-2}\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2 \cdots \mathrm{d}\theta_{d-2}$$

Den Wert ω_d können wir auf elegante Weise errechnen, indem wir die radiale Funktion $f = \mathbf{1}_{B_1^d(0)}$ integrieren. Mit (3.7) erhalten wir:

$$|B_1^d(0)| = \omega_d \int_0^1 r^{d-1}\,\mathrm{d}r = \frac{\omega_d}{d}.$$

Die linke Seite haben wir bereits in Beispiel 2.9 ausgerechnet, und zwar ist nach (2.2)

$$|B_1^d(0)| = \tau_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \Longrightarrow \omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

Wir können ω_d auch auf andere Weise berechnen, und zwar folgendermaßen:
Sei $f(x) = \mathrm{e}^{-\|x\|^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\pi^{d/2} \quad & \overset{\text{Fubini}}{=} \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x \\
& \overset{\text{Transf.}}{=} \quad \omega_d \int_0^\infty r^{d-1} \mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r \\
& \overset{r^2=s, 2r\mathrm{d}r=\mathrm{d}s}{=} \quad \frac{\omega_d}{2} \int_0^\infty s^{\frac{d-2}{2}} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \\
& = \quad \frac{\omega_d}{2} \Gamma(\frac{d}{2}),
\end{aligned}$$

also

$$\omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

Kapitel 4

L^p–Räume

Dem Raum $L(E)$ der über der messbaren Menge E integrierbaren Funktionen sind wir bereits im ersten Kapitel begegnet. Von seiner eigentlichen Bedeutung, nämlich dass das Integral eine Norm auf $L(E)$ definiert, haben wir dabei aber keinen Gebrauch gemacht.
Der Gedanke, der der Konvergenz in den L^p–Räumen zugrundeliegt, ist schon mehrere Jahrzehnte vor dem Lebesgue–Integral zutagegetreten, und zwar bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens von Fourierreihen. Es hatte sich herausgestellt, dass es selbst stetige 1-periodische Funktionen f gibt, so dass die symmetrischen Partialsummen

$$f_N := \sum_{k=-N}^{N} c_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx}, \quad c_k = \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kx}\,\mathrm{d}x$$

nicht überall punktweise gegen f konvergieren. Es zeigte sich aber, dass f_N „im quadratischen Mittel“ gegen f konvergiert, d. h.

$$\int_0^1 |f_N(x) - f(x)|^2\,\mathrm{d}x \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Etwa zur gleichen Zeit trat bei der Berechnung und Abschätzung von Messfehlern die nach Gauss benannte „Methode der kleinsten Quadrate“ in Erscheinung, die ebenfalls darauf beruht, eine Abweichung im quadratischen Mittel möglichst gering zu halten.

Nachdem etwa ab 1906 mit dem Lebesgue–Integral und mit Frechèts Begriff des topologischen Vektorraums das notwendige Handwerkszeug zur Verfügung stand, rückte die Approximation im quadratischen Mittel — mitsamt ihren Verallgemeinerungen — wieder ins Blickfeld der Forschung.

Die grundlegenden Ergebnisse sind das Thema dieses Kapitels. Eine ausführliche Behandlung der L^p–Räume bleibt jedoch einer Vorlesung über Funktionalanalysis vorbehalten.

4.1 L^p–Räume

$E \subset \mathbb{R}^d$ sei messbar, und sei $0 < p < \infty$. Wir setzen

$$L^p := L^p(E) := \Big\{ f : E \to \mathbb{C};\ \text{messbar und } \underbrace{\Big(\int_E |f|^p \Big)^{1/p}}_{=:\|f\|_{p,E}=:\|f\|_p} < +\infty \Big\}$$

Wir verweisen auf folgende Ergebnisse aus den Vorlesungen *Analysis I* und *Analysis II*:
Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und seien $a, b \geq 0$. Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Wie dort leitet man hieraus die HÖLDERsche Ungleichung her:

Satz 4.1 *Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$\int_E |f \cdot g| \leq \Big(\int_E |f|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_E |g|^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Es folgt wie bei endlichen Summen die MINKOWSKIsche Ungleichung

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dank der MINKOWSKIschen Ungleichung erfüllt $\|\cdot\|_p$ praktisch alle Eigenschaften einer Norm, bis auf die, dass aus $\|f\|_p = 0$ auch $f = 0$ folgt. Wir müssen uns daher mit folgendem Konstrukt behelfen:
Sei die Relation $\sim$ definiert durch $f \sim g :\Longleftrightarrow f = g$ fast überall auf E. Wie man leicht verifiziert, ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Statt einer Funktion f selbst betrachten wir fortan nur noch ihre Äquivalenzklasse $[f]$ bezüglich $\sim$. Es hat sich die etwas unsaubere Schreibweise eingebürgert, wiederum f statt $[f]$ und $L^p(E)$ statt $L^p(E)/\sim$ zu schreiben. Auch wir werden ausgiebig Gebrauch davon machen.

Satz 4.2 (Riesz–Fischer) *$L^p(E)$ ist mit der durch die Norm $\|\cdot\|_p$ induzierten Metrik vollständig (Bezeichnung: „$L^p(E)$ ist ein* BANACH*raum“).*

Beweis: $\{f_k\}$ sei eine CAUCHY-Folge in $L^p(E)$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann besagt die TSCHEBYSCHEWsche Ungleichung, dass

$$\varepsilon^{-p} \int_E |f_k - f_l|^p \, \mathrm{d}x \geq \left|\{x \in E; |f_k(x) - f_l(x)| > \varepsilon\}\right|.$$

Bezeichnung: Wir sagen, die Funktionenfolge $\{f_k\}$ konvergiert *im Maß* gegen f (in Zeichen: $f_k \xrightarrow{m} f$) auf E, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\{x \in E; |f(x) - f_k(x)| > \varepsilon\}\right| = 0.$$

Konvergiert $\{f_k\}$ im Maß gegen f, so gibt es eine Teilfolge k_j mit $f_{k_j} \to f$ fast überall auf E für $k \to \infty$ (siehe Aufgabe **??**).

Die Hauptlast des Beweises verbirgt sich in

Hilfssatz 4.3 *Es gilt*

$$f_k \xrightarrow{m} f \iff \forall \varepsilon > 0 \lim_{k,l\to\infty} \left|\{x \in E; |f_k(x) - f_l(x)| > \varepsilon\}\right| = 0.$$

Beweis des Hilfssatzes: „$\Longrightarrow$“ Es ist

$$\{|f_k - f_l| > \varepsilon\} \subset \left[\{|f_k - f| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_l - f| > \frac{\varepsilon}{2}\}\right],$$

denn sonst gälte für ein x, das in der Menge auf der linken Seite, aber nicht in der Menge auf der rechten Seite liegt, sowohl $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ als auch $|f_l(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$, also nach der Dreiecksungleichung $|f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$, ein Widerspruch.

„$\Longleftarrow$“ Wähle N_j, $j = 1, 2, \ldots$ mit $N_j \uparrow \infty$, so dass für $k, l \geq N_j$ gilt: $|\underbrace{\{|f_k - f_l| > 2^{-j}\}}_{=:E_j}| <$

2^{-j}

Es folgt: $|f_{N_{j+1}} - f_{N_j}| \leq 2^{-j}$ außerhalb der Menge E_j mit $|E_j| < 2^{-j}$.
Sei $H_i := \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j$. Dann gilt:

$$|f_{N_{j+1}}(x) - f_{N_j}(x)| \leq 2^{-j}$$

für $j \geq i$ und $x \notin H_i$. Es folgt: $\sum_j (f_{N_{j+1}} - f_{N_j})$ konvergiert gleichmäßig außerhalb H_i.

Nun ist

$$|H_i| \leq \sum_{j \geq i} 2^{-j} = 2^{-i+1},$$

woraus folgt, dass $\{f_{N-j}\}$ fast überall gleichmäßig auf E konvergiert.
Setzen wir $f := \lim f_{N_j}$, folgt, dass $f_{N_j} \xrightarrow{m} f$.
Daher ist

$$\lim_{j\to\infty} \Big|\big\{x \in E; |f_{N_j}(x) - f(x)| > \varepsilon\big\}\Big| = 0$$

und folglich

$$\{|f_k - f| > \varepsilon\} \subset \big[\{|f_k - f_{N_j}| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_{N_j} - f| > \frac{\varepsilon}{2}\}\big].$$

$\diamond$

Aus dem Hilfssatz folgt also die Existenz einer Teilfolge f_{k_j} von f_k und eines f mit $f_{k_j} \to f$ fast überall auf E.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $K > 0$, so dass

$$\Big(\int_E |f_{k_j} - f_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f_{k_j} - f_k\|_p < \varepsilon \tag{4.1}$$

für $k, j > K$. Die linke Seite von (4.1) konvergiert aber gegen $\|f - f_k\|_p$ für $j \to \infty$, also ist für $k > K$

$$\|f - f_k\|_p < \varepsilon.$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $f \in L^p(E)$:

$$\|f\|_p \leq \underbrace{\|f - f_k\|_p}_{<\infty} + \underbrace{\|f_k\|_p}_{<\infty} \Longrightarrow f \in L^p(E).$$

$\square$

Ein besonderer Fall ist $p = 2$. Setzen wir nämlich für $f, g \in L^2(E)$

$$\langle f, g\rangle := \int_E f\overline{g},$$

folgt mit der CAUCHY–SCHWARZschen Ungleichung (dem Spezialfall der HÖLDERschen Ungleichung für $p = 2$)

$$\langle f, g\rangle \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auch posiv definit und sesquilinear ist (der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen), wird hierdurch auf $L^2(E)$ ein inneres Produkt definiert. Die L^2-Norm wird gerade durch dieses innere Produkt erzeugt ($\int f\overline{f} = \int |f|^2$).
Man nennt solche vollständigen normierten Räume, deren Norm durch ein Skalarprodukt induziert wird, „HILBERTräume“.

Bezeichnung: Falls $\langle f, g\rangle = 0$, so sagen wir, „f und g sind orthogonal“. Für eine beliebige Indexmenge A wird das System $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *orthogonal* genannt, falls die Φ_α paarweise orthogonal sind. Gilt zusätzlich $\|\Phi_\alpha\|_2 = 1$, nennt man dieses System *orthonormal*. (Wir werden den Begriff „Orthonormalsystem“ häufiger durch „ONS“ abkürzen.)

Lemma 4.4 *$L^2(E)$ ist* separabel*, d. h. es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge in $L^2(E)$.*

Das Lemma beweisen wir nicht; es sei auf eine Vorlesung über Funktionalanalysis verwiesen.

Satz 4.5 *Jedes Orthonormalsystem $\{\Phi_\alpha\}$ in $L^2(E)$ ist abzählbar.*

Beweis: Sei $\alpha \neq \beta$.

$$\|\Phi_\alpha - \Phi_\beta\|_2^2 = \langle \Phi_\alpha - \Phi_\beta, \Phi_\alpha - \Phi_\beta\rangle = \langle \Phi_\alpha, \Phi_\alpha\rangle - 2\underbrace{\langle \Phi_\alpha, \Phi_\beta\rangle}_{=0} + \langle \Phi_\beta, \Phi_\beta\rangle = 2,$$

also $\|\Phi_\alpha - \Phi_\beta\|_2 = \sqrt{2}$.
Nun gibt es in $L^2(E)$ eine abzählbare dichte Teilmenge M. Zu jedem Φ_α gibt es also ein $x_\alpha \in M$, so dass für $0 < \varepsilon < \sqrt{1/2}$ gilt: $\|\Phi_\alpha - x_\alpha\|_2 < \varepsilon$. Dann liegt $\Phi_\alpha \in B_\varepsilon(x_\alpha)$; gleichzeitig sind die Kugeln $B_\varepsilon(x_\alpha)$ paarweise disjunkt. Da es nur abzählbar viele solcher Kugeln gibt, muß auch das ONS $\{\Phi_\alpha\}$ abzählbar sein. □

Beispiel 4.6

1. Sei $E = [0, 2\pi]$. Dann ist $\{\Phi_n = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}; n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Diese Funktionen werden *Charaktere* genannt und bei der FOURIER-Analyse verwandt.

2. Sei $E = [-1, 1]$. Dann bilden die LEGENDRE-Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n), n \in \mathbb{N}$$

ein Orthonormalsystem.

3. Sei $E = \mathbb{R}$. Dann bilden die HERMITE-Funktionen

$$v_n(x) = \frac{(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, n \in \mathbb{N}$$

ein Orthonormalsystem.

4.2 Fourier–Reihen

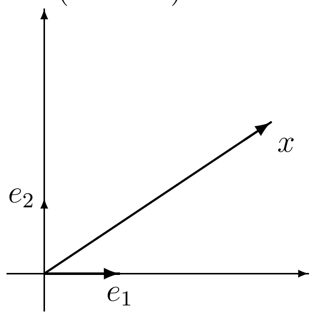
Wir schreiben nun kurz: L^2 statt $L^2(E)$.
Sei $f \in L^2$, $\{\Phi_n\}$ sei ein Orthonormalsystem in L^2. Wir setzen:

$$c_n := \widehat{f}(n) := \langle f, \Phi_n \rangle = \int_E f \overline{\Phi_n}.$$

Wir nennen

$$f \sim \sum_n c_n \Phi_n$$

die (formale) FOURIER–Reihe von f (bezüglich $\{\Phi_n\}$).



In $\mathbb{R}^2$ mit der EUKLIDischen Metrik sind — streng genommen — die Koeffizienten $\langle x, e_1 \rangle$ und $\langle x, e_2 \rangle$ in der Darstellung $x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2$ ebenfalls FOURIERkoeffizienten, werden aber selten als solche bezeichnet.

Da wir es bei einer FOURIERreihe selten mit endlich vielen Summanden zu tun haben, geraten wir an das Problem, wie wir eine FOURIERreihe hinreichend gut durch eine endliche Summe approximieren können.
Dazu setzen wir

$$T_N := \left\{ L = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \Phi_n; \gamma_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Offenbar ist T_N ein N-dimensionaler $\mathbb{C}$–Vektorraum (in Anlehnung an den Fall $E = [0, 2\pi]$ nennt man T_N auch den „Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad N“).

Wir suchen nun zu vorgegebenem $f \in L^2$ ein $L \in T_N$, so dass $\|f - L\|_2$ minimal wird.
Sei $f \sim \sum_n c_n \Phi_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - L\|_2^2 &= \langle f - L, f - L \rangle = \int_E \Big(f - \sum_{n=1}^N \gamma_n \Phi_n \Big) \Big(\overline{f} - \sum_{n=1}^N \overline{\gamma_n} \overline{\Phi_n} \Big) \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N (\overline{\gamma_n} c_n + \gamma_n \overline{c_n}) + \sum_{n=1}^N |\gamma_n|^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$|c_n - \gamma_n|^2 = (c_n - \gamma_n)(\overline{c_n} - \overline{\gamma_n}) = |c_n|^2 + \overline{\gamma_n} c_n + \gamma_n \overline{c_n} + |\gamma_n|^2,$$

woraus folgt, dass

$$\|f - L\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=1}^N |c_n - \gamma_n|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2.$$

Gilt $\gamma_n = c_n$, $n = 1, \ldots, N$, ist

$$\min_{\gamma_1, \cdots, \gamma_N} \|f - L\|_2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2.$$

Wir führen die folgende Bezeichnung für L ein:

$$L = S_N(f) = \sum_{n=1}^N c_n \Phi_n.$$

Aus der Ungleichung

$$0 \leq \|f - S_N(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2$$

gewinnen wir die BESSELsche Ungleichung

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2. \tag{4.2}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $S_N(f) \longrightarrow f$ in L^2 für $N \to \infty$. Dann trägt Gleichung (4.2) den Namen PARSEVAL–Identität.
Wir werden weiter unten sehen, welche Bedingungen gelten müssen, damit die PARSEVAL–Identität erfüllt ist.

Satz 4.7 *$\{\Phi_n\}$ sei ein ONS in L^2, und sei $\{c_n\} \in \ell^2$, d. h. $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Dann gibt es eine Funktion $f \in L^2$ mit $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n$, d. h. $\{c_n\}$ sind die* FOURIER*–Koeffizienten von f.*

Beweis: Sei $t_N := \sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n$, und sei $M < N$. Dann gilt

$$\|t_N - t_M\|_2^2 = \|\sum_{n=M+1}^{N} c_n \Phi_n\|_2^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |c_n|^2 \overset{\{c_n\} \in \ell^2}{\longrightarrow} 0,$$

die Folge $\{t_N\}$ ist also eine CAUCHY–Folge in L^2.
Da L^2 vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen eine Grenzfunktion $f \in L^2$.
Bleibt noch zu zeigen, dass die c_n gerade die FOURIERkoeffizienten von f sind.
Sei $K \leq N$:

$$\int_E f\overline{\Phi_K} = \underbrace{\int_E (f - t_N)\overline{\Phi_K}}_{\|\cdot\| \leq \|f - t_N\| \|\Phi_K\|} + \underbrace{\int_E t_N \Phi_K}_{= c_K}$$

□

Bemerkung:

1. Für obiges f gilt die PARSEVALsche Gleichung

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

2. $f \in L^2$ ist im allgemeinen aber nicht eindeutig durch die FOURIERkoeffizienten bestimmt, des sei denn, das ONS $\{\Phi_n\}$ ist *vollständig*, d. h. gilt $\langle f, \Phi_n \rangle = 0$ für alle n, so folgt $f = 0$.

   Haben bezüglich eines vollständigen ONS f und g die gleichen FOURIERkoeffizienten, folgt $f = g$:

$$\langle f, \Phi_n \rangle = \langle g, \Phi_n \rangle \forall n \Longrightarrow \langle f - g, \Phi_n \rangle = 0 \; \forall n \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g.$$

Satz 4.8 *Ein ONS in L^2 ist genau dann vollständig, wenn für jedes $f \in L^2$ die* PARSEVAL*–Identität erfüllt ist.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Sei $f \in L^2$. Dann ist nach der BESSELschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2 < \infty.$$

Daher ist die Folge $\{\widehat{f}(n)\} \in \ell^2$. Nach Satz 4.7 gibt es eine Funktion $g \in L^2$ mit $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ für $n = 1, 2, \ldots$. Mit der Vollständigkeit von $\{\Phi_n\}$ folgt

$$0 = \langle f, \Phi_n \rangle - \langle g, \Phi_n \rangle = \langle f - g, \Phi_n \rangle \text{ für alle } n \Longrightarrow f - g = 0.$$

„$\Longleftarrow$“: Gelte die PARSEVAL–Identität für alle $f \in L^2$. Dann folgt aus $\langle f, \Phi_n \rangle = 0$ für alle n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|\langle f, \Phi_n \rangle|}_{=0} = \|f\|_2^2 \Rightarrow \|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0.$$

$\square$

Kapitel 5

Der Differentiationssatz von Lebesgue

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung trägt — was die Analysis auf $\mathbb{R}$ angeht — seinen Namen nicht zu unrecht, denn er schafft zwischen den beiden Disziplinen die Verbindung und liefert ein unverzichtbares Hilfsmittel, Integrale konkret auszurechnen.

Seine Formulierung in mehreren Veränderlichen ist jedoch mit grundsätzlichen Problemen verbunden, unter anderem, weil nicht von vornherein klar ist, was bei einer mahrvariabligen Funktion unter der Stammfunktion zu verstehen ist. Formulierungen für mehrere Veränderliche gibt es dennoch; dazu rufen wir uns in Erinnerung, dass man unter dem Fundamentalsatz eigentlich *zwei* Aussagen versteht: eine *quantitative*, nämlich die Berechnung des bestimmten Integrals, indem die Stammfunktion über den Rand des Integrationsbereiches ausgewertet wird, und eine *qualitative*, nämlich, dass das unbestimmte Integral differenzierbar und seine Ableitung gerade wieder der Integrand ist.
Während das bestimmte Integral in den Sätzen von Gauss und Stokes behandelt wird (was nicht Gegenstand dieser Vorlesung ist), findet die Differenzierbarkeit des unbestimmten Integrals sein Analogon im Lebesgueschen Differentiationssatz.

Die Differenzierbarkeit des Integrals mutet anfangs etwas widersinnig an, denn mit der Funktion f ist auch das unbestimmte Integral $\int f$ eine Funktion in d Veränderlichen, ihre Ableitung im klassischen Sinne also vektorwertig und nicht skalar. Um den Begriff der „Ableitung des Integrals“ richtig zu verstehen, greifen wir daher zurück auf den Beweis des Fundamentalsatzes.

Die Differenzierbarkeit des Integrals im Punkt x bedeutet, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{5.1}$$

Während man in (5.1) den Faktor $1/h$ auch problemlos als $1/|[x, x+h]| = 1/|[x-h, x]|$ interpretieren kann, muss noch ein geeigneter Ersatz für den Integrationsbereich $[x, x+h]$ gefunden werden. Man kann dies zwar auf d Dimensionen übertragen, das wäre das Intervall $[x_1, x_1+h_1] \times \cdots \times [x_d, x_d+h_d]$, handelt sich aber Schwierigkeiten ein, weil man streng genommen nicht mehr *einen* Grenzwert $h \to 0$ sondern simultan d Grenzwerte $h_1 \to 0, \ldots, h_d \to 0$ betrachten muss.
Man greift daher zu der folgenden etwas schwächeren Formulierung von (5.1), die darauf verzichtet, dass linke und rechte Ableitung von $\int f$ in x übereinstimmen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{5.2}$$

Ausgehend von dieser Gleichung lässt sich der Integrationsbereich $[x-h, x+h]$ als Kugel oder Würfel mit Zentrum x und Durchmesser bzw. Kantenlänge $2h$ auffassen — was nur noch von einem Parameter abhängt.
In der Literatur finden sich beide Interpretationen; die Beweise sind im wesentlichen gleich. für Würfel Q_x mit Zentrum x formuliert, wäre (5.2) in mehreren Veränderlichen:

$$\lim_{Q_x \searrow x} \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x). \tag{5.3}$$

(Hier bedeutet „$Q_x \searrow x$“, dass sich die Würfel Q_x auf den Punkt x zusammenziehen.)
Während bei stetigem Integranden f der Beweis im Prinzip wörtlich vom eindimensionalen Fall übernommen werden kann, gestaltet sich dies bei unstetigen Funktionen deutlich schwieriger.
Ziel dieses Kapitels ist der Beweis, dass für diese Gleichung die Integrierbarkeit von f hinreichend ist.
Wir konzentrieren uns dabei auf die Formulierung für Würfel Q_x. Beweise für Kugeln finden sich etwa in [Jones] oder [Stein].

5.1 Das unbestimmte Integral als Mengenfunktion

In mehreren Veränderlichen macht die Definition des unbestimmten Integrals einer integrierbaren Funktion f als

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

durchaus noch Sinn, wenn über Rechtecke integriert wird. Wir können dann setzen (z. B. für zwei Veränderliche)

$$F(\vec{x}) = \int\limits_{\vec{a}}^{\vec{x}} f(\vec{t})\,\mathrm{d}\vec{t} := \int\limits_{a_1}^{x_1}\int\limits_{a_2}^{x_2} f(t_1,t_2)\,\mathrm{d}(t_1,t_2).$$

Da der Satz von Fubini uns gestattet, sukzessive nach t_1 und t_2 zu integrieren, ist eine Interpretation als $F(x_1, x_2)$ durchaus noch sinnvoll.
Will man aber den Zwang, über ein Rechteck integrieren zu müssen, fallen lassen, kann man diese Definition nicht mehr verwenden. Man greift daher zu einem anderen Begriff:
$A \subset \mathbb{R}^d$ und $E \subset A$ seien messbar, und sei $f \in L(A)$. Wir setzen dann

$$F(E) := \int_E f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir können sofort über F sagen, dass dies eine reellwertige Funktion ist, die auf der σ–Algebra der messbaren Teilmengen von A definiert ist. Diese deutliche Erweiterung des Definitionsbereiches von F (gegenüber der Teilmenge aller Intervalle in A) erkaufen wir uns damit, dass wir F nicht mehr als Funktion in d Veränderlichen auffassen können.

Allgemein nennen wir eine reellwertige Funktion F, die auf einer σ–Algebra Σ von messbaren Mengen definiert ist, *Mengenfunktion*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $F(E) < \infty$ für alle $E \in \Sigma$
2. F ist abzählbar additiv, d. h. ist $E = \bigcup_n E_n$ mit paarweise disjunkten $E_n \in \Sigma$, gilt $F(E) = \sum_n F(E_n)$.

Definition 5.1 *1.* $\operatorname{diam}(E) := \sup\{|x-y|; x, y \in E\}$.

2. *F heißt* stetig, *falls $F(E) \to 0$ für* $\operatorname{diam}(E) \to 0$.

3. *F heißt* absolut stetig *(mit Respekt zum* LEBESGUE*–Maß), falls $f(E) \to 0$ für $|E| \to 0$.*

Ein Beispiel für eine nicht-stetige Mengenfunktion sei

$$F(E) := \begin{cases} 1, \text{falls } 0 \in E \\ 0, \text{sonst} \end{cases} .$$

Bemerkung: Aus absoluter Stetigkeit folgt Stetigkeit: $|E| \leq \operatorname{diam}(E)^d$; wenn also $F(E) \to 0$ für $|E| \to 0$, dann insbesondere auch, falls $\operatorname{diam}(E) \to 0$.
Die Umkehrung gilt nicht, wie folgendes Beispiel verdeutlichen soll:
Sei $A := [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, $D := [-1,1]$, Σ sei die σ–Algebra der zweidimensionalen messbaren Teilmengen von A, für die $A \cap D$ bezüglich des 1–dimensionalen LEBESGUE–Maßes messbar ist. Definiere

$$F(E) := \int_{-1}^{1} \mathbf{1}_E(t,0)\,\mathrm{d}t = |D \cap E|_1 \leq \operatorname{diam}(E).$$

Dann ist F stetig, aber nicht absolut stetig; wähle etwa die Mengen $E_\varepsilon = [-1,1] \times [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$: $|E_\varepsilon| \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, aber $F(E_\varepsilon) = 2$.

Satz 5.2 *Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar, $f \in L(A)$. Dann ist das unbestimmte Integral von f, $F(E) = \int_E f(t)\,\mathrm{d}t$, absolut stetig.*

Beweis: OBdA sei $f \geq 0$, ansonsten schreiben wir $f = f^+ - f^-$ und betrachten f^+ und f^- separat.
Zu $k \geq 0$ zerlegen wir f in $f = g + h$ mit

$$g(x) := \begin{cases} f(x), f(x) \leq k \\ k, \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein k, so dass

$$0 \leq \int_A h(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $0 \leq g \leq k$, ist $\int_E g \leq k|E|$, und für hinreichend kleines $|E|$ ist $k|E| \leq \varepsilon/2$. Insgesamt ist also für hinreichend kleines $|E|$:

$$0 \leq \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_E g(x)\,\mathrm{d}x + \int_E h(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

□

Bemerkung: Der Satz besitzt auch eine Umkehrung: Falls $F(E)$ eine Mengenfunktion ist, die absolut stetig bezüglich des L-Maßes ist, existiert eine integrierbare Funktion f, so dass

$$F(E) = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Auf einen Beweis verzichten wir; dies ist in der Regel Gegenstand einer Vorlesung über Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Umkehrung von Satz 5.2 ist dort bekannt unter dem Namen „Satz von Radon–Nikodym“, die Funktion f wird dabei *Dichtefunktion* genannt.

5.2 Der Differentiationssatz

Sei im folgenden $f \in L(\mathbb{R}^d)$, F sei (als Mengenfunktion) das unbestimmte Integral von f. Q_x seien Würfel in $\mathbb{R}^d$ mit x als Zentrum.
Wir gehen nun der Frage nach, ob (zumindest fast überall)

$$\frac{F(Q_x)}{|Q_x|} = \frac{1}{|Q_x|}\int\limits_{Q_x} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{\longrightarrow} f(x).$$

Wir nennen das unbestimmte Integral von f *differenzierbar in* x mit Ableitung $f(x)$, falls

$$\lim_{Q_x \searrow x} \frac{F(Q_x)}{|Q_x|} = f(x).$$

Satz 5.3 (Differentiationssatz von Lebesgue) *Sei $f \in L(\mathbb{R}^d)$. Dann ist das unbestimmte Integral von f differenzierbar mit Ableitung $f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, also*

$$\lim_{Q_x \searrow x} \frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \quad \textit{fast überall.}$$

Beweisidee: Sei f stetig. Dann gilt — analog zum Beweis des Fundamentalsatzes in einer Veränderlichen —

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\right| &= \frac{1}{|Q_x|}\left|\int_{Q_x} \big(f(t)-f(x)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} \big|f(t)-f(x)\big|\,\mathrm{d}t \\
&\le \sup_{t\in Q_x} |f(t)-f(x)| \longrightarrow 0, \text{ da } f \text{ stetig.}
\end{aligned}$$

Unsere Strategie besteht darin, f durch stetige Funktionen c_k mit kompaktem Träger zu approximieren und die Mittelung der Differenz $f - c_k$ abzuschätzen. Dazu verwenden wir den folgenden Operator:

$$f^*(x) := \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Die „Größe“ von f^* wird mit $\int |f| \mathrm{d}t$ abgeschätzt. Hierzu benutzt man ein geometrisches Argument.

Lemma 5.4 *Sei $f \in L^1(\mathrm{I\!R}^d)$. Dann existiert eine Folge stetiger Funktionen $\{c_k\}$ mit kompaktem Träger, so dass*

$$\int_{\mathrm{I\!R}^d} |f(t) - c_k(t)| \, \mathrm{d}t \longrightarrow 0 \textit{ für } k \to \infty, \tag{5.4}$$

oder in der Sprechweise der Funktionalanalysis:
Der Raum $C_c^0(\mathrm{I\!R}^d)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger liegt dicht in $L^1(\mathrm{I\!R}^d)$.

Beweis: a. Eine endliche Linearkombination von Funktionen mit Eigenschaft (5.4) hat offensichtlich wieder Eigenschaft (5.4).

b. Falls eine Folge $\{f_k\}$ (5.4) erfüllt und $\int_{\mathrm{I\!R}^d} |f - f_k| \, \mathrm{d}t \longrightarrow 0$, so hat auch f die Eigenschaft (5.4).
Beweis:
α : f ist integrierbar, denn

$$\int |f| \, \mathrm{d}t \leq \underbrace{\int |f - f_k| \, \mathrm{d}t}_{\leq \varepsilon} + \int |f_k| \, \mathrm{d}t < \infty.$$

β: Zu $\varepsilon > 0$ exisitert ein k_0, so dass für $k \geq k_0$ gilt $\int |f - f_k| \, \mathrm{d}t < \varepsilon/2$, und es existiert eine stetige Funktion c mit kompaktem Träger, so dass $\int |f_k - c| \, \mathrm{d}t < \varepsilon/2$. Insgesamt folgt

$$\int |f - c| \leq \int |f - f_k| + \int |f_k - c| < \varepsilon$$

und hieraus die Behauptung in **b**.

c. $f \in L(\mathrm{I\!R}^d)$ ist (bezüglich der L^1–Norm) approximierbar durch einfache Funktionen, also können wir wegen **b** f als einfach annehmen.

Ist $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{1}_{E_k}$, reicht es nach **a**, die Aussage des Lemmas für die Funktion $\mathbf{1}_E$ mit $|E| < \infty$ zu zeigen.
Ist $\varepsilon > 0$, so existiert eine offene Menge $G \supset E$ mit $|G \setminus E| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \int \left|\mathbf{1}_G - \mathbf{1}_E\right| \mathrm{d}t = |G \setminus E| < \varepsilon.$$

Mit **b** reicht es daher, f als $\mathbf{1}_G$ anzunehmen.
Wir schreiben nun $G = \bigcup_k I_k$, wobei I_k nicht-überlappende Intervalle sind.
Wir können $\mathbf{1}_G$ wiederum mit der Funktionenfolge

$$f_N := \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^N I_k}$$

approximieren, und es ist

$$\int |\mathbf{1}_G - f_N| \, \mathrm{d}t = \sum_{k=N+1}^{\infty} |I_k| \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nach **b** reicht es also, die Eigenschaft (5.4) für f_N nachzuweisen.
Sei $f_N = \sum_k \mathbf{1}_{I_k}$. Nach **a** reicht es, f_N als $\mathbf{1}_{I_k}$ anzunehmen.
Betrachten wir nun $\mathbf{1}_I$ für ein Intervall I. $I^* \supsetneq I$ sei ein Intervall mit $|I^* \setminus I| < \varepsilon$.
Dann wählen wir als stetige Funktion mit kompaktem Träger:

$$c(t) := \frac{\operatorname{dist}(t, (I^*)^\complement)}{\operatorname{dist}(t, (I^*)^\complement) + \operatorname{dist}(t, I)}$$

Da $t \mapsto \operatorname{dist}(t, I)$ stetig ist, ist $c(t)$ ebenfalls stetig. Darüber hinaus ist der Nenner überall von Null verschieden. Es gilt:

$$\begin{cases} t \in I \Rightarrow \operatorname{dist}(t, (I^*)^\complement) > 0, \ c(t) = 1 \\ t \in (I^*)^\complement \Rightarrow \operatorname{dist}(t, I) > 0, \ c(t) = 0 \\ t \in I^* \setminus I \Rightarrow \operatorname{dist}(t, I) > 0, \ \operatorname{dist}(t, (I^*)^\complement) > 0, \ 0 < c(t) < 1 \end{cases}$$

Also gilt

$$\int |\mathbf{1}_I - c| \, \mathrm{d}t \leq |I^* \setminus I| < \varepsilon,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 5.5 (Überdeckungssatz von Vitali, einfache Version) *Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ mit $|E|_e < \infty$, und sei K eine Familie von Würfeln, die E überdecken. Dann existieren eine positive Konstante $\beta = \beta(d)$, die nur von der Dimension d abhängt,* *und eine* endliche *Anzahl von paarweise nicht-überlappenden Würfeln* $Q_1, \dots, Q_N \in K$*, so dass*

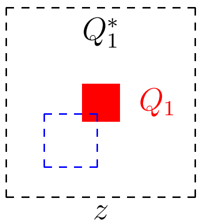
$$\beta|E|_e \leq \sum_{j=1}^{N} |Q_j|.$$

Beweis: Der Beweis gestaltet sich recht einfach, wenn E messbar ist:
Dann gibt es nämlich für $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Teilmenge $F \subset E$ mit $|E \setminus F|_e < \varepsilon$. D. h. wir können oBdA. E als abgeschlossen und beschränkt annehmen. Da E damit kompakt ist, folgt die Aussage aus dem Satz von HEINE–BOREL.

Betrachten wir nun den Fall, dass E nicht notwendigerweise messbar ist.
Sei $Q \in K$, und sei t die Kantenlänge von Q. Wir setzen $K_1 := K$ und $\tilde{t}_1 := \sup\{t; Q = Q(t) \in K_1\}$.
Falls $\tilde{t}_1 = \infty$, existiert eine Folge von Würfeln $Q \in K$ mit $|Q| \to \infty$. Man kann Q dann so wählen, dass für vorgegebenes β gilt: $|Q| > \beta|E|_e$.
Falls $\tilde{t}_1 < \infty$: Hier besteht die wesentliche Idee darin, einen relativ großen Würfel auszuwählen. Wir wählen $Q_1(t_1)$, so dass $t_1 > \tilde{t}_1/2$. Ferner teilen wir K_1 auf in $K_1 = K_2 \cup K_2'$, wobei K_2 aus den Würfeln besteht, die diejunkt mit $Q_1(t_1)$ sind:

$$K_2' := \{Q \in K_1; Q_1(t_1) \cap Q \neq \emptyset\}, \quad K_2 := \{Q \in K_1; Q_1(t_1) \cap Q = \emptyset\}.$$

$Q_1(t_1)^*$ sei der um den Faktor 5 gedehnte Würfel:



Dann ist $|Q_1^*| = 5^d|Q_1|$.
Jedes $Q \in K_2'$ ist in Q_1^* enthalten. Dazu argumentiert man wie folgt: Wir schreiben $Q_1 = z + [-t_1/2, t_1/2]^d$. Der Einfachheit halber können wir $z = 0$ annehmen.
Jeder Würfel Q aus K, der mit Q_1 einen nichtleeren Schnitt hat, hat nach Voraussetzung Kantenlänge $< \tilde{t}_1$. Damit gilt: die Projektion von Q auf die i-te Koordinate liegt im Intervall $[-t_1/2 - \tilde{t}_1, t_1/2 + \tilde{t}_1]$. Nach der Wahl von t_1 ist dieses Intervall enthalten in $[-\frac{5}{2}t_1, \frac{5}{2}t_1]$, was gerade die Projektion des Würfels Q_1^* auf die i-te Koordinate ist.

Nach diesen Vorbereitungen stellen wir uns die gesuchte Menge von Würfeln nach dem folgenden Prinzip zusammen:
Wir starten mit $j = 2$.

$\tilde{t}_j := \sup\{t; Q(t) \in K_j\}$.
Wähle Würfel $Q_j = Q_j(t_j) \in K_j$ mit $t_j > \tilde{t}_j/2$ und zerlege $K_j = K'_{j+1} \cup K_{j+1}$, wobei wie oben

$$K'_{j+1} := \{Q \in K_j; Q_j(t_j) \cap Q \neq \emptyset\}, \quad K_{j+1} := \{Q \in K_j; Q_j(t_j) \cap Q = \emptyset\}.$$

Dann ist jedes $K'_{j+1} \ni Q \subset Q_j^*$.
Falls $K_{j+1} = \emptyset$, endet der Auswahlprozess. Wir haben eine Folge $\tilde{t}_1 \geq \tilde{t}_2 \geq \ldots \geq \tilde{t}_{j+1}$ und paarweise disjunkte Würfel $Q_1, \ldots, Q_{j+1}$. Es gilt

$$E \subset K = K'_2 \cup K_2 = K'_2 \cup K'_3 \cup K_3 = K'_2 \cup \ldots \cup K'_{j+1},$$

und damit

$$E \subset \bigcup_{l=1}^{j} Q_l^*.$$

Ferner ist $|E|_e \leq 5^d \sum_{l=1}^{j} |Q_j|$.
In diesem Fall gilt $\tilde{t}_{j+1} = 0$.

Falls $\tilde{t}_j \neq 0$ — oder äquivalent $K_j \neq \emptyset$ — für alle j, argumentieren wir wie folgt:
$\underline{\alpha)}$ Es ist $\sum_{j=1}^{i} nfty|Q_j| = \infty$. Dann gibt es ein N, so dass $\sum_{j=1}^{N} |Q_j| > \beta|E|_e$ (siehe oben).
$\underline{\beta)}$ $\tilde{t}_j \neq 0$ für alle j, aber $\sum_j |Q_j| < \infty$. Dann ist $\{t_j^d\}_j = \{|Q_j|\}_j$ eine Nullfolge, d. h. $\{t_j\}_j$ selbst ist eine Nullfolge.
Behauptung: Jedes $K \ni Q \subset \bigcup Q_j^*$.
Annahme: Es gibt ein $Q = Q(t) \in K$ mit $Q \cap Q_j = \emptyset$ für alle j. Es folgt: $Q \in K_j$ für alle j. Somit ist $t \leq \tilde{t}_j < 2t_j$ für jedes j, also $t = 0$ und somit $Q = Q(t) = \emptyset$.
Fassen wir zusammen: $\sum_{j=1}^{n} |Q_j|$ ist monoton wachsend in n und beschränkt, d. h. es gibt ein N, so dass

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| < \sum_{j=1}^{N} |Q_j|,$$

also

$$|E|_e \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^*| = 5^d \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq 2 \cdot 5^d \sum_{j=1}^{N} |Q_j|.$$

□

Wenden wir uns nun f^* zu:

$$f^*(x) := \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

ist auch bekannt unter dem Namen HARDY–LITTLEWOODsche Maximalfunktion. Wir können sofort einige Eigenschaften erkennen:

1. $0 \le f^* \le \infty$,
2. $(f+g)^* \le f^* + g^*$, $f, g \in L^1$,
3. $(cf)^* \le |c| f^*$, $c \in \mathbb{R}$.
4. Falls $f^*(x_0) > \alpha > 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^d$, folgt aus der absoluten Stetigkeit des unbestimmten Integrals, dass $f^*(x) > \alpha$ in einer Umgebung um x_0.

Letztere Aussage besagt nichts anderes, als dass f^* von unten halbstetig ist, d. h.

$$\liminf_{x \to x_0} f^*(x) \ge f^*(x_0) \quad \text{für alle } x_0.$$

Aus der Halbstetigkeit folgt die Messbarkeit von f^*.
Bleibt noch die Frage, wie „groß“ f^* ist.
Sei dazu E eine beschränkte messbare Menge. Wir wollen

$$\mathbf{1}_E^*(x) = \sup_Q \{ \frac{|E \cap Q|}{|Q|}; x \text{ Zentrum von } Q \}$$

abschätzen.
Q^x sei der kleinste Würfel mit $E \subset Q^x$ (oder zumindest soll E bis auf eine Nullmenge in Q^x enthalten sein). Dann ist offenbar

$$\frac{|Q^x \cap E|}{|Q^x|} = \frac{|E|}{|Q^x|}.$$

Falls $\|x\|$ sehr groß ist (und damit außerhalb E liegt), können wir abschätzen:

$$c_1 \frac{|E|}{\|x\|^d} \le \mathbf{1}_E^*(x) \le c_2 \frac{|E|}{\|x\|^d}.$$

Dafür bemerken wir zuerst, dass für jeden Würfel $Q \supsetneqq Q^x$ mit Zentrum x gilt: $|Q \cap E| = |E|$, aber $|Q| > |Q^x|$, woraus sofort die Abschätzung von $\mathbf{1}_E^*(x)$ nach unten folgt.
Für die andere Abschätzung bemerken wir, dass

$$\sup_Q \frac{|Q \cap E|}{|Q|} \le \sup\{ \frac{|E|}{|Q|}; |Q \cap E| > 0 \},$$

also können wir $\mathbf{1}_E^*(x)$ nach oben abschätzen durch $\frac{|E|}{|Q_x|}$, wobei Q_x der größte Würfel mit Zentrum x ist, so dass $Q_x \cap E$ eine Nullmenge ist.
Die Volumina der Würfel Q_x und Q^x verhalten sich asymptotisch wie $c_1\|x\|^d$ und $c_2\|x\|^d$.

Lemma 5.6 (Hardy–Littlewood) *Sei $f \in L(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert ein $c > 0$, das nur von der Dimension d abhängt, so dass für alle $\alpha > 0$*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d; f^*(x) > \alpha\right\}\right| \leq \frac{c}{\alpha}\|f\|_1.$$

Hier sei aber zu beachten, dass f^* normalerweise nicht in $L(\mathbb{R}^d)$ liegt. Genauer: $f^* \in L(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f = 0$ f. ü.!

Beweis: $\underline{\alpha)}$ f habe kompakten Träger: $\overline{\{x; f(x) \neq 0\}}$ sei kompakt.
Wir können dann mit den obigen Betrachtungen schließen, dass für große $\|x\|$ gilt: $f^*(x) \leq c_1\|x\|^{-d}$.
Sei nun $E := \{x; f^*(x) > \alpha\}$. Dann gilt

$$|E| \leq |\{x; c_1\|x\|^{-d} > \alpha\}| + c_2 = |\{x; \|x\|^{+d} < \frac{c_1}{\alpha}\}| + c_2 < \infty.$$

Sei $x \in E$. Dann existiert ein Würfel Q_x mit

$$\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} |f| > \alpha \iff |Q_x| < \frac{1}{\alpha}\int_{Q_x} |f|. \tag{5.5}$$

Wir überdecken nun E durch Würfel:

$$E \subset \bigcup_{x \in E} Q_x.$$

Aus dem Überdeckungssatz von Vitali (Lemma 5.5) folgt: Es gibt ein $\beta(d)$ und $x_1, \ldots, x_N \in E$, so dass $Q_{x_1}, \ldots, Q_{x_d}$ disjunkt sind und

$$|E| \leq \beta^{-1}\sum_{j=1}^{N} |Q_{x_j}|.$$

Wenden wir an dieser Stelle (5.5) an, erhalten wir

$$|E| < \frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\alpha}\int_{Q_{x_j}} |f| = \frac{1}{\beta\alpha}\int_{\bigcup_{j=1}^{N} Q_{x_j}} |f| \leq \frac{1}{\beta\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |f|.$$

Hieraus folgt die Behauptung mit $c := \beta^{-1}$.

$\underline{\beta)}$ Sei $f \in L(\mathbb{R}^d)$. O. B. d. A. sei $f \geq 0$ (ansonsten betrachten wir $|f|$).

Wähle eine Folge $\{f_n\}$ mit kompaktem Träger und $f_n \uparrow f$. Dann existiert ein c, unabhängig von f und α, mit

$$|\{x; f_n^*(x) > \alpha\}| \le \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \le \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f,$$

die erste Ungleichung nach Fall α), die zweite nach dem Satz über monotone Konvergenz.
Es gilt nun $f_n^* \uparrow f^*$ und also

$$E_n = \{x; f_n^*(x) > \alpha\} \uparrow E = \{x; f^* > \alpha\},$$

folglich $|E_n| \uparrow |E|$. □

Beweis von Satz 5.3: Wir wollen zeigen:

$$\frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{Q_x \searrow x}{\longrightarrow} f(x).$$

α) f sei in x stetig. Dies haben wir eingangs in der Beweisskizze schon untersucht.

β) Es existiert eine Folge stetiger Funktionen $\{c_n\}$ mit kompaktem Träger, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - c_n|\,\mathrm{d}t \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wir setzen

$$F(Q) := \int_Q f, \qquad F_n(Q) := \int_Q c_n.$$

Dann können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} &\limsup_{Q\searrow x} \Big|\frac{F(Q)}{|Q|} - f(x)\Big| \\ \le\ &\limsup_{Q\searrow x} \Big|\frac{F(Q)}{|Q|} - \frac{F_n(Q)}{|Q|}\Big| + \underbrace{\limsup_{Q\searrow x} \Big|\frac{F_n(Q)}{|Q|} - c_n(x)\Big|}_{=0\ (c_n \text{ stetig})} + |c_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

Für den ersten Term haben wir weiter folgende Abschätzung:

$$\Big|\frac{F(Q)}{|Q|} - \frac{F_n(Q)}{|Q|}\Big| \le \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - c_n| \le \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - c_n| = (f - c_n)^*)(x)$$

Fassen wir dies zusammen, folgt

$$\limsup_{Q\searrow x} \Big|\frac{F(Q)}{|Q|} - f(x)\Big| \le (f - c_n)^*(x) + |f(x) - c_n(x)|. \tag{5.6}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, und sei E_ε die Menge aller Punkte x, für die die linke Seite von (5.6) größer als ε ist.
Es gilt:

$$E_\varepsilon \subset \{x; (f - c_n)^*(x) > \varepsilon/2\} \cup \{x; |f(x) - c_n(x)| > \varepsilon/2\}.$$

Die erste dieser Teilmengen schätzen wir mit dem Lemma von Hardy–Littlewood (Lemma 5.5) ab, die andere mit der Tschebyschewschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \big|\{x; (f - c_n)^*(x) > \alpha\}\big| &\leq \frac{c}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f - c_n| \\ \big|\{x; |f(x) - c_n(x)| > \alpha\}\big| &\leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f - c_n| \end{aligned}$$

Setzen wir in diese Ungleichungen jeweils $\alpha = \varepsilon/2$ ein, folgt

$$|E_\varepsilon| \leq \frac{2c}{\varepsilon} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f - c_n|}_{\to 0} + \frac{2}{\varepsilon} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f - c_n|}_{\to 0} \overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} |E_\varepsilon| = 0.$$

Ist E die Menge aller x, für die die linke Seite in (5.6) positiv ist, gilt für eine Folge $\varepsilon_k \searrow 0$:

$$E = \bigcup_k E_{\varepsilon_k} \Longrightarrow |E| = 0.$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{F(Q)}{|Q|} = f(x) \text{ fast überall.}$$

□

Anmerkung 5.7
Wir haben bei der Formulierung des Differentiationssatzes gefordert, dass $f \in L(\mathbb{R}^d)$ sein muss, aber — abgesehen vom Lemma von Hardy–Littlewood — wurde nur Gebrauch davon gemacht, dass f *lokal* integrierbar ist, d. h. dass für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^d$

$$\int_K |f| \, \mathrm{d}t < \infty$$

gelten muss. Ein Standardbeispiel einer lokal integrierbaren, aber nicht global integrierbaren Funktion auf $\mathbb{R}$ ist etwa $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Anhang A

Aufgaben

Aufgabe 1 *Man zeige, dass das äußere Maß (auf* $\mathbb{R}^d$*) translationsinvariant ist, d. h. für alle* $E \subset \mathbb{R}^d$ *und alle* $h \in \mathbb{R}^d$ *gilt* $|E+h|_e = |E|_e$ *mit* $E+h := \{x+h; x \in E\}$.

Lösung: Sei $E \subset \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}^d$. $E_h := \{x+h; x \in E\}$.
Sei $\{I_n\}_n$ eine Überdeckung von E. Wir setzen $I_n^h := \{x+h; x \in I_n\}$. Es folgt, dass $E_h \subset \bigcup I_n^h$. Es bleibt also zu zeigen, dass $|I_n^h| = |I_n|$.
Sei dazu $x \in I_n$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $x_i \in [a_i, b_i]$. Es folgt, dass $x + h = (x_1 + h_1, \ldots, x_d + h_d)$, $x_i + h_i \in [a_i + h_i, b_i + h_i]$, also $|I_n^h| = (b_1 + h_1 - (a_1 + h_1)) \cdots (b_d + h_d - (a_d + h_d)) = |I_n|$ und damit $\sum_n |I_n| = \sum_n |I_n^h|$.
Ist $\{I_n\}$ eine Überdeckung von E, dann ist $\{I_n^h\}$ eine Überdeckung von E_h.
Es ist $|E_h|_e \leq |E|_e$, aber mit $E = (E_h)_{-h}$ gilt auch $|E|_e \leq |E_h|_e$ □

Aufgabe 2 $A \subset \mathbb{R}^k$ *sei eine Nullmenge, und* $B \subset \mathbb{R}^m$ *sei eine beliebige Menge. Man zeige, dass* $A \times B \subset \mathbb{R}^{k+m}$ *eine Nullmenge ist.*

Lösung: $\underline{\alpha)}$ B sei beschränkt; d. h. es gibt ein Intervall $J \subset \mathbb{R}^m$ mit $B \subset J$.
Werde A überdeckt von $\bigcup_n I_n$. Nach Voraussetzung kann man $\sum_n |I_n| < \varepsilon$ wählen.
$\bigcup_n I_n \times J$ ist eine Überdeckung von $A \times B$. Es folgt

$$\sum_n |I_n \times J| = \sum_n (|I_n| \cdot |J|) = |J| \sum_n |I_n| < |J|\varepsilon;$$

da ε beliebig klein sein kann und $|J| < \infty$ ist, ist $A \times B$ eine Nullmenge.
$\underline{\beta)}$ B sei nicht beschränkt. Dann wähle ein Gitter in $\mathbb{R}^m$ mit Intervallen J_l. Dies sind abzählbar viele Intervalle, und $B \cap J_l$ ist beschränkt für alle l. Mit α) folgt die Behauptung. □

Aufgabe 3 *$f : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ sei stetig, und $N = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}^{d-1}\} \subset \mathbb{R}^d$ sei der Graph von f. Man zeige, dass N eine Nullmenge ist.*

Lösung: Es reicht, dies für beschränkte Mengen in $\mathbb{R}^{d-1}$ zu zeigen, ansonsten überdecke man $\mathbb{R}^{d-1}$ mit abzählbar vielen beschränkten Mengen.
Sei $\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ kompakt. Dann ist f auf ω gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall\|x - y\| < \delta :$$
$$\sum_{i=1}^{d-1} |\omega_i \times \underbrace{[f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2}]}_{\varepsilon}\,| = \varepsilon \sum_i |\omega_i| = \varepsilon|\omega|.$$

□

Aufgabe 4 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und*

$$\begin{aligned} C(f) &:= \big\{x \in \mathbb{R}; f \text{ in } x \text{ stetig}\big\}, \\ D(f) &:= \big\{x \in \mathbb{R}; f \text{ in } x \text{ unstetig}\big\}. \end{aligned}$$

Man zeige: $C(f)$ ist eine G_δ-Menge, $D(f)$ ist eine F_σ-Menge.

Lösung: Seien die Mengen F_n definiert durch

$$F_n := \{x \in \mathbb{R}; \omega(f, x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Behauptung: F_n ist abgeschlossen für alle n.
Beweis: Sei $\{x_k\} \subset F_n$ eine Folge in F_n mit $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$. Nehmen wir an, x_0 liege nicht in F_n, also $\omega(f, x_0) < \frac{1}{n}$. Dann gibt es eine Folge I_j von Intervallen mit $x_0 \in I_j$ für alle j und $\lim_{j\to\infty} \omega(f, I_j) = \omega(f, x_0)$.
Es existiert nun ein ein I_0 mit $x_0 \in \overset{\circ}{I_0}$ und $\omega(f, I_0) < \frac{1}{n}$.
Für hinreichend großes k gilt $x_k \in I_0$ und damit $\omega(f, x_k) < \frac{1}{n}$, im Widerspruch zur Annahme, dass alle $x_n \in F_n$.

Die Menge $D(f)$ schreibt sich nun als Vereinigung

$$\bigcup_n F_n,$$

ist also eine F_σ-Menge. Umgekehrt ist $C(F)$ als ihr Komplement gegeben durch

$$C(F) = \bigcap_n F_n^{\complement},$$

ist also eine G_δ-Menge. □

Aufgabe 5 $\mathbb{Q}$ *ist keine* G_δ*–Menge in* $\mathbb{R}$.
(Hinweis: Falls $\mathbb{R} = \bigcup_k F_k$ *mit abgeschlossenen Mengen* F_k*, so enthält eines der* F_k *ein offenes Intervall.)*

Lösung: Falls $\mathbb{Q}$ eine G_δ–Menge wäre, wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vom Typ F_σ. Schreiben wir $\mathbb{Q} = \{a_k; k \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F'_k$ mit abgeschlossenen Mengen F'_k, gilt mit $F_k := F'_k \cup \{a_k\}$: $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ mit abgeschlossenen Mengen F_k. Zu zeigen bleibt: es existiert ein k_0 mit $\overset{\circ}{F}_{k_0} \neq \emptyset$.
Wir zeigen die folgende allgemeinere Behauptung: *Ist* X *ein vollständiger metrischer Raum, und gilt* $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ *mit abgeschlossenen Mengen* F_k*, dann folgt:* $\exists k_0$ *mit* $\overset{\circ}{F}_{k_0} \neq \emptyset$*.* (Diese Aussage ist auch bekannt als der BAIREsche Kategoriensatz.)
Beweis der Behauptung: Nehmen wir an, keines der F_k enthalte innere Punkte. Dann folgt

$$\forall k \forall x \in F_k \forall \varepsilon > 0 \exists y \in B_\varepsilon(x) : y \notin F_k;$$

hierbei bezeichne $B_\varepsilon(x)$ die *offene* ε–Kugel um x.
Wir führen diese Annahme zum Widerspruch, indem wir eine CAUCHY–Folge konstruieren, die nicht konvergiert, entgegen der Voraussetzung, dass X vollständig ist.

Sei $x_1 \in F_1$, und sei $\varepsilon_1 = \varepsilon > 0$. Dann ist

$$B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap F_1^{\complement} \neq \emptyset.$$

Sei k_2 das kleinste k mit $F_k \cap B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap F_1^{\complement} \neq \emptyset$ (ein solches existiert, da $\bigcup F_k = X$). Wähle ein $x_2 \in F_{k_2}$ und setze $\varepsilon_2 = \min\left\{\operatorname{dist}(x_2, F_1), \operatorname{dist}(x_2, \partial(B_{\varepsilon_1}(x_1)))\right\}$. Es folgt, dass $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1/2$.
Ferner gelten die Eigenschaften

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon_2}(x_2) &\subset B_{\varepsilon_1}(x_1), \\ B_{\varepsilon_2}(x_2) &\subset F_1^{\complement}, \\ B_{\varepsilon_2}(x_2) \cap F_k &= \emptyset \quad \text{für } k < k_2. \end{aligned}$$

Nach Annahme gilt auch $B_{\varepsilon_2}(x_2) \cap F_{k_2}^{\complement} \neq \emptyset$. k_3 sei das kleinste k mit $F_k \cap B_{\varepsilon_2}(x_2) \cap F_{k_2}^{\complement} \neq \emptyset$. Analog zu vorhin wählt man $\varepsilon_3 := \min\left\{\operatorname{dist}(x_3, F_{k_2}), \operatorname{dist}(x_3, \partial(B_{\varepsilon_2}(x_2)))\right\}$ und fährt induktiv fort.
Man erhält eine absteigende Kette von Kugeln $B_{\varepsilon_n}(x_n)$ mit der Eigenschaft, dass $B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap F_{k_n} = \emptyset$ (und damit $B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$).

Die Folge $\{x_n\}_n$ ist eine CAUCHY–Folge, denn ab N liegen alle Folgenglieder innerhalb einer Kugel mit Radius $\varepsilon_N \leq \varepsilon \cdot 2^{-N}$.
Wegen der Vollständigkeit von X konvergiert diese Folge gegen einen Grenzwert, sagen wir x. Da $X = \bigcup_k F_k$, gilt $x \in F_{k_0}$ für ein k_0. Andererseits liegt x in einer ε_j–Kugel um x_j für jedes j, und die hat für $j > k_0$ einen leeren Schnitt mit F_{k_0}, was ein Widerspruch dazu ist, dass $x \in F_{k_0}$. □

Aufgabe 6 *Man zeige, dass es keine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gibt, die in den rationalen Punkten stetig und in den irrationalen Punkten unstetig ist.*
(Hinweis: Aufgaben 4 und 5)

Lösung: Mit den Aufgaben 4 und 5) ist dies eigentlich trivial:
Nach Aufgabe 4 ist die Menge $C(f)$ der Punkte, wo f stetig ist, eine G_δ–Menge, die Menge $D(f)$ der Punkte, in denen f unstetig ist, eine F_σ–Menge. Nach Aufgabe 5 ist $\mathbb{Q}$ keine G_δ–Menge in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ keine F_σ–Menge. □

Aufgabe 7 *Sei* $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ *eine Folge von Mengen in* $\mathbb{R}^d$ *mit* $\sum_{n=1}^\infty |E_n|_e < \infty$. *Man zeige, dass*

$$\begin{aligned} \Big|\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} E_n\Big|_e &= 0 \quad \textit{und} \\ \Big|\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k} E_n\Big|_e &= 0 \end{aligned}$$

Lösung: Aus $\sum_{n=1}^\infty |E_n|_e < \infty$ folgt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein N_ε existiert mit $\sum_{n>N_\varepsilon} |E_n|_e$; insbesondere ist $|E_n|_e < \varepsilon$ für hinreichend große n.

$$\begin{aligned} \bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} E_n &= (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots) \cap (E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup \dots) \cap \dots \\ &\subset \bigcup_{n\geq N} E_n \text{ für jedes } N \\ \Longrightarrow \Big|\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} E_n\Big|_e &\leq \Big|\bigcup_{n\geq N_\varepsilon} E_n\Big|_e \leq \sum_{n\geq N_\varepsilon} |E_n|_e < \varepsilon \text{ für hinreichend großes } N_\varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k} E_n &= (E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \dots) \cup (E_2 \cap E_3 \cap \dots) \cup \dots \\ &\subset E_N \quad \text{für jedes } N \\ \Longrightarrow \Big|\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k} E_n\Big|_e &\leq |E_N|_e \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 8 *Gilt für offene Mengen $G \subset \mathbb{R}$, dass*

$$|G| = |\overline{G}|?$$

Lösung: Nein. Sei z. B. G wie folgt definiert: Wir numerieren $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ durch $(q_1, q_2, \dots)$, legen um jeden Punkt q_n ein Intervall I'_n mit Länge $\frac{1}{3} \cdot 2^{-n}$ und setzen $I_n := I'_n \cap (0,1)$ Wir setzen

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Dann ist offenbar

$$|G| \leq \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{3},$$

aber $\overline{G} = [0,1]$, und $|\overline{G}| = 1$. □

Aufgabe 9 *$Z \subset \mathbb{R}$ sei eine Nullmenge. Man zeige:*

$$|\{x^2; x \in Z\}| = 0.$$

Lösung: Es reicht, den Fall zu betrachten, dass Z beschränkt ist, denn ansonsten schreibe man $Z = \biguplus_n Z_n$ mit beschränkten Mengen Z_n.
Dann ist

$$|\{x^2; x \in Z\}| = |\biguplus_n \{x^2; x \in Z_n\}| \leq \sum_n |\{x^2; x \in Z_n\}|.$$

Sei Z beschränkt. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|x^2 - y^2| \leq M|x - y|$ für $x, y \in Z$. Es folgt: $x \mapsto x^2$ ist auf Z eine Lipschitz–Abbildung, und mit Satz 1.26 folgt, dass die Nullmenge Z auf eine Nullmenge abgebildet wird. □

Aufgabe 10 *Es sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ sei* Riemann*-integrierbar. Man zeige, dass*

$$M := \big\{(x,y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

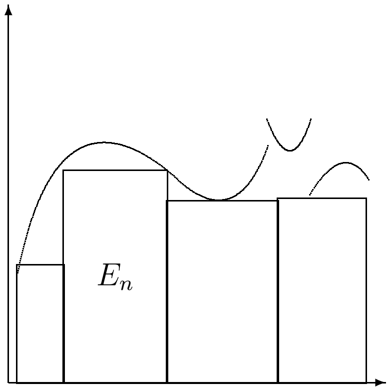
messbar ist und

$$|M| = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt.

Lösung: Sei Z_n eine Folge von (etwa dyadischen) Zerlegungen von $[a, b]$, und sei g_n die Folge von Treppenfunktionen, die zu den DARBOUXschen Untersummen von f zur Zerlegung Z_n gehören. Das Integral der Untersumme g_n bezeichnen wir mit E_n.
Es ist

$$\int_a^b g_n = \sum_\nu \inf_{x \in I_\nu^n} f(x) |I_\nu^n| \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Ist f in x stetig, dann gilt $g_n(x) \uparrow f(x)$.
Da f R-integrierbar ist, besteht duiese Konvergenz fast überall; nennen wir die Menge der Unstetigkeitspunkte von f einmal Z.
Es gilt also $E_n \uparrow M \setminus Z$, demnach

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longleftarrow \int_a^b g_n = |E_n| \uparrow |M|.$$

□

Aufgabe 11 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ *seien messbar. Man zeige, dass* $E_1 \times E_2$ *in* $\mathbb{R}^2$ *messbar ist und*

$$|E_1 \times E_2| = |E_1| \cdot |E_2|.$$

(Konvention für die rechte Seite: $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.*)*
Hinweis: Man benutze ein passendes Kriterium für Messbarkeit.

Lösung: Messbarkeit:
Wir schreiben E_1 und E_2 jeweils als disjunkte Vereinigung von F_σ–Menge und Nullmenge: $E_1 = H_1 \uplus Z_1$, $E_2 = H_2 \uplus Z_2$ (H_i vom Typ F_σ, Z_i Nullmengen, $i = 1, 2$).

Dann ist

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 &= (H_1 \cup Z_1) \times (H_2 \cup Z_2) \\ &= (H_1 \times H_2) \cup \underbrace{[(Z_1 \times H_2) \cup (H_1 \times Z_2) \cup (Z_1 \times Z_2)]}_{\text{Nullmengen}}. \end{aligned}$$

Es bleibt für die Messbarkeit noch zu zeigen, dass $H_1 \times H_2$ vom Typ F_σ ist.
Sei dazu $H_1 = \bigcup_k F_k^1$, $H_2 = \bigcup_n F_n^2$. Dann ist $H_1 \times H_2 = \bigcup_{k,n}(F_k^1 \times F_n^2)$, wobei die Mengen $F_k^1 \times F_n^2$ abgeschlossen sind.

Für die Berechnung des Maßes reicht es, E_1 und E_2 als beschränkt anzunehmen; ansonsten schreiben wir $E_1 = \biguplus_{m\in\mathbb{Z}} E_1^m$, $E_2 = \biguplus_{n\in\mathbb{Z}} E_2^n$ mit $E_1^m = E_1 \cap [m - m+1)$, $E_2^n = E_2 \cap [n, n+1)$. Dann ist

$$\left|\bigcup_m E_1^m \times \bigcup_n E_2^n\right| = \left|\bigcup_{m,n}(E_1^m \times E_2^n)\right| = \sum_{m,n} |E_1^m \times E_2^n|.$$

Seien nun $E_i = H_i \setminus Z_i$ mit G_δ–Mengen H_i und Nullmengen Z_i $(i = 1, 2)$. Es gilt

$$|E_1 \times E_2| = |(H_1 \times H_2) \setminus (Z_1 \times Z_2)| = |H_1 \times H_2| \stackrel{!}{=} |H_1| \cdot |H_2| = |E_1| \cdot |E_2|.$$

Sei $H_1 = \bigcap_{k=1}^\infty G_k^1$. Wir setzen $\widehat{G}_1^1 := G_1$, $\widehat{G}_2^1 := G_1^1 \cap G_2^1$, $\widehat{G}_3^1 := G_1^1 \cap G_2^1 \cap G_3^1$, … , analog für H_2. Wir haben dann $\widehat{G}_k^1 \searrow H_1$, analog $\widehat{G}_k^2 \searrow H_2$, d. h.

$$\widehat{G}_k^1 \times \widehat{G}_k^2 \searrow H_1 \times H_2 \Longrightarrow \left|\widehat{G}_k^1 \times \widehat{G}_k^2\right| \searrow \left|H_1 \times H_2\right| \text{ (Stetigkeitssatz).}$$

Es reicht also, E_1 und E_2 als offen anzunehmen.
Schreiben wir die offenen Mengen aber jeweils als abzählbare disjunkte Vereinigung von Intervallen, folgt die Behauptung unmittelbar. □

Aufgabe 12 *Sei $G \subset \mathbb{R}$ offen. Man zeige, dass G abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter offener Intervalle ist.*

Lösung: Sei $x \in G$. Dann existieren $y > x$ und $z < x$, so dass $(x, y) \subset G$ und $(z, x) \subset G$.
Wir setzen

$$a := \inf\{z \in G; (z, x) \subset G\}, \quad b := \sup\{y \in G; (x, y) \subset G\}$$

und bezeichnen $I_x := (a, b)$. Offenbar sind $a, b \notin G$.
Die Intervalle I_x, $x \in G$ stimmen paarweise überein oder sind disjunkt. Die Menge $\{I_x; x \in G\}$ dieser Intervalle ist allerdings abzählbar, da jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ rationale Zahlen enthält (es gibt also höchstens abzählbar viele).
Da $G = \bigcup_{x\in G} I_x$ ist, ist die Behauptung bewiesen. □

Aufgabe 13 *Gibt es abgeschlossene überabzählbare Teilmengen in* $\mathbb{R}$ *bzw.* $[0,1]$*, die nur aus irrationalen Zahlen bestehen?*

Lösung: Ja.
$Z := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist abzählbar, also eine Nullmenge. Wir überdecken diese Menge Z mit abzählbar vielen offenen Intervallen I_ν, sagen wir $Z \subset \bigcup_\nu I_\nu =: G$ so dass die Längensumme $\sum_\nu |I_\nu| < \frac{1}{10}$ ist. G ist offen, und $|G| < \frac{1}{10}$.
Es folgt: $[0,1] \setminus G \subset [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ und $|[0,1] \setminus G| > \frac{9}{10} \neq 0$. Also kann $[0,1] \setminus G$ nicht abzählbar sein. □

Aufgabe 14 *Man zeige, dass es paarweise disjunkte Mengen* $E_1, E_2, \dots$ *gibt mit*

$$\Big| \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Big|_e < \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|_e.$$

Hinweis: Wähle $E \subset [0,1]$ *nicht messbar,* $E_r := E + r, r \in \mathbb{Q}$.

Lösung: $E \subset [0,1]$ sei nicht messbar. Insbesondere ist dann $|E|_e > 0$. $\{r_n\} := [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Die Mengen $E + r_n$ sind paarweise disjunkt, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E + r_n) \subset [0,2]$, also

$$\Big| \bigcup_{n=1}^{\infty} (E + r_n) \Big|_e \leq 2.$$

Andererseits ist $|E + r_n|_e = |E|_e$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E + r_n|_e = \infty.$$

□

Aufgabe 15 $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ *sei messbar, und* $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *sei linear und invertierbar. Man zeige, dass* $f \circ T$ *auf* $\mathbb{R}^d$ *messbar ist.*

Lösung: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Mengen $E_\alpha = \{x; f(T(x)) > \alpha\}$. Da T injektiv (und als lineare Abbildung eines endlichen Vektorraums in sich damit auch bijektiv) ist, können wir mit der Substitution $x = T^{-1}y$ die Mengen E_α auch schreiben als

$$E_\alpha = \{T^{-1}y; f(y) > \alpha\} = T^{-1}(\{y; f(y) > \alpha\}).$$

Weil T^{-1} als lineare Abbildung insbesondere LIPSCHITZ–stetig ist, und weil f messbar ist, folgt die Behauptung. □

Aufgabe 16 *$E_1, \dots, E_n \subset \mathbb{R}^d$ seien paarweise disjunkt, und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ seien paarweise verschieden und ungleich 0. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sei definiert durch*

$$f(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{E_k}(x).$$

Man zeige: f ist genau dann messbar, wenn $E_1, \dots, E_n$ messbar sind.

Lösung: „$\Rightarrow$“: trivial.

„$\Leftarrow$“:
Sei f wie in der Aufgabenstellung definiert. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
Dann folgern wir:
$E_n = \{f > a_{n-1}\} \Rightarrow E_n$ ist messbar.
$E_{n-1} = \{a_{n-2} < f \leq a_{n-1}\} = \{f > a_{n-2}\} \setminus \{f > a_{n-1}\}$. Da f messbar ist, ist auch E_{n-1} messbar, u. s. w. □

Aufgabe 17 *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si stetig mit kompaktem Träger. Man zeige, dass $f \in L(\mathbb{R}^2)$.*
Ist $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein Intervall mit $\operatorname{supp}(f) \subset I$, so gilt

$$\int_I f = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_2 \Big) \, \mathrm{d}x_1.$$

Die Integrale auf der rechten Seite (Existenz?!) sind RIEMANN*sche.*

Lösung: Sei $Z_1^k := \{x_0 = a, x_1, \dots, x_k = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, $Z_2^k := \{y_0 = c, y_1, \dots, y_k = d\}$ eine Zerlegung von $[c, d]$. $Z_1^k \times Z_2^k =: Z_k$ ist dann eine Zerlegung von I. Wir schreiben

$$I := \bigcup I_\nu \times J_\mu, \quad \nu, \mu = 1, \dots, k.$$

Da f stetig ist und I kompakt, ist f auf I gleichmäßig stetig, d. h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k = k(\varepsilon)$, so dass für $\nu, \mu < k$ gilt:

$$\sup_{(x,y) \in I_\nu \times J_\mu} f(x, y) - \inf_{(x,y) \in I_\nu \times J_\mu} f(x, y) < \varepsilon$$

Weiter folgt aus der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von I, dass f sein absolutes Minimum an einem Punkt $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in I$ annimmt:

$$\exists (\tilde{x_\nu}, \tilde{y_\mu}) : \inf_{(x,y) \in I_\nu \times J_\mu} f(x, y) = f(\tilde{x_\nu}, \tilde{y_\mu}).$$

Wir setzen

$$E_{\nu,\mu} := \big\{(x,y,z); (x,y) \in I_\nu \times J_\mu, 0 \le z \le f(\tilde{x_\nu}, \tilde{y_\mu})\big\}$$

Sei $E_k := \bigcup_{\nu,\mu} E_{\nu,\mu}$. Dann gilt

$$|E_k| \uparrow \int_I f =: |R(f,I)|.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} |E_k| &= \sum_{\nu,\mu=1}^{k} f(\tilde{x_\nu}, \tilde{y_\mu})|I_\nu||J_\mu| \\ &= \sum_{\nu=1}^{k} |I_k| \sum_{\mu=1}^{k} f(\tilde{x_\nu}, \tilde{y_\mu})|J_\mu|. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Schätzen wir die innere Summe in A.1 ab:

$$\begin{aligned} & \Big|\sum_{\mu=1}^{k} f(\tilde{x_\nu}, \tilde{y_\mu})|J_\mu| - \int\limits_c^d f(\tilde{x_\nu}, y)\,\mathrm{d}y\Big| \\ = \ & \Big|\sum_{\mu=1}^{k} \Big(f(\tilde{x_\nu}, \tilde{y_\mu}) - \frac{1}{|J_\mu|}\int\limits_{J_\mu} f(\tilde{x_\nu}, y)\,\mathrm{d}y\Big)|J_\mu|\Big| \\ \le \ & \varepsilon(d-c). \end{aligned}$$

Wir setzen nun das Integral in A.1 ein:

$$\begin{aligned} & \Big|\sum_{\nu=1}^{k} \int\limits_c^d f(\tilde{x_\nu}, y)\,\mathrm{d}y|I_\nu| - \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\Big| \\ = \ & \Big|\sum_{\nu=1}^{k} \underbrace{\Big(\int\limits_c^d f(\tilde{x_\nu}, y)\,\mathrm{d}y|I_\nu| - \int_{I_\nu} \big(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x\Big)}_{=:(\star)}\Big| \end{aligned}$$

und schätzen ab:

$$|(\star)| = \Big|\int\limits_{I_\nu} \big(\int\limits_c^d f(\tilde{x_\nu}, y)\,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{I_\nu} \big(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x\Big| \le |I_\nu|(d-c)\varepsilon.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt hieraus die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[Jones] F. Jones. *Lebesgue Integration on Euclidean Space.* Jones and Bartlett Publishers, Inc. 1993

[Leb1902] H. Lebesgue. *Intégrale, Longueur, Aire.* Thèse, Faculté des Sciences de Paris, 1902. Abgedruckt in Ann. Mat. Pura Appl. **7** (1902), 1 – 129 und in den gesammelten Abhandlungen.

[Stein] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press 1970

[WhZyg] R. L. Wheeden, A. Zygmund. *Measure and Integral.* Marcel Dekker, Inc. 1977