Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Stefan Schuß **Univ. Siegen**

Übungsaufgaben (1)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“
im Wintersemester 2012/13
(Abgabetermin: Mittwoch, 17.10.2012, 10 Uhr)

1. Sei M ein metrischer Raum, zum Beispiel der n–dimensionale Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|.\|$ und der Metrik $|x,y| = \|x-y\|$. Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller nicht leeren beschränkten abgeschlossenen Teilmengen von M. Zeigen Sie: Für jedes Paar von Mengen $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ existiert dann

$$d_0(G_1,G_2) = \sup_{x\in G_1} |x,G_2|\,,\; d(G_1,G_2) = \max\left(d_0(G_1,G_2)\,,\; d_0(G_2,G_1)\right)$$

mit der Abkürzung

$$|x,G| = \inf_{y\in G} |x,y|\,, \quad x\in M\;,\;\; G\in\mathcal{G}\;.$$

Die Funktion $d(.,.)$ definiert einen Abstand, den *Hausdorff–Abstand,* für die Mengen in $\mathcal{G}$, so daß $\mathcal{G}$ ein metrischer Raum wird.

2. Sei $[a,b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengeraden $\mathbb{R}$ und für jedes h aus einer Nullfolge I_0 sei G_h eine Gitterpunktmenge der Gestalt

$$G_h = \left\{ x\in[a,b] \,\middle|\, x = a+jh,\; j=0,\ldots,N_h \right\}\;, \quad hN_h = b-a\,.$$

Beweisen Sie damit für den Hausdorff–Abstand d die Beziehung

$$d\left(G_h,[a,b]\right) \le h \longrightarrow 0 \quad (h\in I_0)\,.$$

3. Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und u eine Zahl. Beweisen Sie: Dann und nur dann ist die Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{j\in\mathbb{N}} u_j = u$, wenn die Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kompakt ist und für jede konvergente Teilfolge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}'}$, $\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}$, gilt $\lim\limits_{j\in\mathbb{N}'} u_j = u$.