Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Stefan Schuß **Univ. Siegen**

Übungsaufgaben (11)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ im Wintersemester 2012/2013

(Abgabetermin: Mittwoch, 16.01.2013, 10 Uhr)

35. Sei $T : X \longrightarrow Y$ ein linearer injektiver Operator, X, Y normierte Räume.
Zeigen Sie für das Komplement $\mathcal{C}M = X \backslash M$ einer beliebigen Menge $M \subset X$, dass

$$T(\mathcal{C}M) = T(X) \backslash T(M)$$

36. Seien E, E_1, F, F_1 normierte Räume, $L_1 : E_1 \to E$, $L_2 : F \to F_1$ lineare beschränkte Abbildungen und $K : E \to F$ ein linearer kompakter Operator. Zeigen Sie:

$$L_2 K L_1 : E_1 \to F_1 \quad \text{ist linear und kompakt.}$$

Hinweis: Die Linearität ist klar und braucht nicht bewiesen zu werden.

37. a) Zeigen Sie, dass die Folge $x_n(t) = \cos(n\pi t)$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, keine Cauchy-Folge in $L^2(0, 1)$ ist.
b) Zeigen Sie, dass
$$D := \{x \in C[0, 1] \mid -1 \le x(t) \le 1\}$$
in keinem der Funktionenräume $C[0, 1]$ und $L^2(0, 1)$ kompakt ist.

Hinweise:

zu a) Sie können benutzen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthogonalsystem in $L^2(0, 1)$ ist.

zu b) Argumentieren Sie indirekt, benutzen Sie a), und dass $C[0, 1]$ stetig in $L^2(0, 1)$ eingebettet ist.