Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Stefan Schuß **Univ. Siegen**

Übungsaufgaben (12)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ im Wintersemester 2012/2013
(Abgabetermin: Mittwoch, 23.01.2013, 10 Uhr)

38. Seien $G_n \subset [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, endliche Gitterpunktmengen, $\alpha_n(y)$, $y \in G_n$, $n \in \mathbb{N}$, positive Gewichte, so dass

$$\sum_{y \in G_n} \alpha_n(y) \leq \beta\,, \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Operatoren $K_n : C[a,b] \to C[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, seien durch

$$(K_n u)(x) = \sum_{y \in G_n} \alpha_n(y) k(x,y) u(y)\,, \ x \in [a,b]\,, \ u \in C[a,b]\,, \ n \in \mathbb{N}\,,$$

erklärt, wobei $k(.,.)$ einen stetigen Kern darstellt.

Zeigen Sie: Ist (u_n) eine beschränkte Folge in $C[a,b]$, dann ist $(K_n u_n)$ eine kompakte Folge.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Arzela-Ascoli.

39. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := \left(|x|y^2\right)^{1/2}$. Zeigen Sie:

(a) f ist in $(0,0)$ differenzierbar.
(b) f ist in $(0,1)$ und $(1,0)$ nicht differenzierbar.
(c) Geben Sie eine Folge $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ an mit

$$x_n \cdot y_n > 0\,, \ n \in \mathbb{N}\,, \quad \lim_n x_n = \lim_n y_n = 0\,, \quad \lim_n \frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,.$$

Hinweis: Die hier betrachtete Funktion liefert ein Beispiel für eine Funktion, die an der Stelle $(0,0)$ differenzierbar ist (vgl. (a)), deren partielle Ableitung nach x an dieser Stelle aber nicht stetig ist (vgl. (c)). Es liegt auch keine globale Differenzierbarkeit vor (vgl. (b)).

40. **(Bonusaufgabe)** Sei X ein Banachraum, $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $T : A \longrightarrow A$ *expandierend,* d. h. es gibt $q > 1$ mit

$$\|T(x) - T(y)\| \geq q\|x - y\|\,, \quad x,y \in A\,.$$

Sei $B := T(A)$ abgeschlossen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(a) T hat einen Fixpunkt, d. h. es gibt $x \in A$ mit $T(x) = x$.
(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^n(A) \neq \emptyset$ $(T^1 := T\,,\ T^{n+1} := T \circ T^n)$.
(c) Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $\lim_n \|x_n - T(x_n)\| = 0$.

Hinweise: Für die Folgerung (c) $\Longrightarrow$ (a) sollten Sie zunächst zeigen, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist. Dann können Sie noch benutzen, dass ein Fixpunkt von T^{-1} offenbar auch ein Fixpunkt von T ist. Wegen der Eigenschaft „expandierend“ ist T offenbar injektiv und damit $T : A \longrightarrow T(A)$ bijektiv.