Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Stefan Schuß **Univ. Siegen**

Übungsaufgaben (2)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“
im Wintersemester 2012/13
(Abgabetermin: Mittwoch, 24.10.2012, 9 Uhr)

4. Sei H ein prähilbertscher Raum mit dem Skalarprodukt $(.,.)$, sei H_m ein m-dimensionaler Teilraum und $w_1, \ldots, w_m$ eine orthonormale Basis in H_m. Beweisen Sie: Dann wird durch die Vorschrift

$$Pu = \sum_{k=1}^{m} (u, w_k) w_k \ , \quad u \in H \ ,$$

eine beschränkte lineare Abbildung in H definiert mit den Eigenschaften $P^2 = P$ sowie

(a) $Pu = u \Longleftrightarrow u \in H_m$

(b) $(Pu, v) = (u, Pv) \ , \quad u, v \in H$

(c) $0 \leq (u, Pu) = \|Pu\|^2 \leq \|u\|^2 \ , \quad u \in H \ .$

5. Zeigen Sie:

(a) Für $1 \leq p \leq q < \infty$ gilt die Inklusion $\ell^p \subset \ell^q$, genauer

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \quad \forall x \in \ell^p$$

Hinweis: Behandeln Sie zunächst den Fall $\|x\|_p = 1$.

(b) $\bigcup_{p<\infty} \ell^p \subset c_0$.

6. Sei X metrischer Raum und D, X_0 Teilmengen von X.
Zeigen Sie: [1]

a) D dicht in $X_0 :\Longleftrightarrow \forall\, x \in X_0 \,\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, z \in D : |x, z| < \varepsilon \Longleftrightarrow c\ell(D) \supset X_0$

b) $A = \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist nirgendsdicht in $\mathbb{R}$.

Hinweis zu b): Sie können die Äquivalenz von „nirgendsdicht“ zu $\operatorname{int}\big(c\ell(A)\big) = \emptyset$ benutzen.

[1] $c\ell(D) = \overline{D}$ = Abschließung von $D = \big\{x \in X : |x, D| = 0\big\}$
int (B) = größte offene Teilmenge von B