Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Stefan Schuß **Univ. Siegen**

Übungsaufgaben (3)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“
im Wintersemester 2012/2013

(Abgabetermin: Mittwoch, 31.10.2012, 10 Uhr)

7. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und Z ein linearer Teilraum von X. Zeigen Sie: $(Z, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum genau dann, wenn Z abgeschlossen ist.

8. Es sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(.,.)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in der Einheitskugel $K_1(0) = \{z \in H \mid \|z\| < 1\}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

9. Es sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $(.,.)$ und $T : H \to H$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $(x, Ty) = (Tx, y),\ \forall x, y \in H$. Zeigen Sie:

   a) Für jedes Element $x \in H$ ist die Abbildung $(x, .) : H \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig.

   b) Die Abbildung T ist stetig.

   Hinweis zu b: Satz vom abgeschlossenen Graphen.

10. **(Bonusaufgabe)** Sei $[a, b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlengerade $\mathbb{R}$ und für jedes h aus einer Nullfolge I_0 sei G_h eine Gitterpunktmenge der Gestalt

$$G_h = \{x \in [a, b] \mid x = a + jh,\ j = 0, ..., N_h\}$$

mit einer durch $\frac{b-a}{h} - 1 < N_h \le \frac{b-a}{h}$ eindeutig bestimmten ganzen Zahl N_h. Beweisen Sie damit für den Hausdorff-Abstand d (vergl. Übungsblatt(1)) die Beziehung

$$d(G_h, [a, b]) \le h \longrightarrow 0 \ (h \in I_0).$$