Prof. Dr. H.–J. Reinhardt
Prof. Dr. B. Dreseler
Stefan Schuß

Dept. Mathematik
Univ. Siegen

Übungsaufgaben (5)
zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ im Wintersemester 2012/2013
(Abgabetermin: Mittwoch, 14.11.2012, 10 Uhr)

14. Es sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|g_k(x)|\,dx<\infty.$$

Zeigen Sie: Die Reihe $g := \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ konvergiert fast überall und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}g_k(x)\,dx.$$

15. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei für $x\in\mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x)=\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$, wobei

$$\chi_{[0,n]}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x\in[0,n] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ und $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx=1\ \forall n\in\mathbb{N}$.

b) Ist das ein Widerspruch zu dem Satz von Lebesgue? (mit Begründung)

Hinweis zu b: Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch keine integrierbare Funktion majorisiert wird.

16. Sei $E\subset\mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, $f\in L^p(E)$, $1\le p<\infty$ und $M=\{x\in E\mid f(x)\neq 0\}$ mit $\lambda(M)<\infty$. Zeigen Sie: $f\in L^q(E)$ für alle $1\le q\le p$.
Hinweis: Es ist $f=f\chi_M$. Verwenden Sie die Ungleichung von Hölder.

17. **(Bonusaufgabe)** Sei $E\subset\mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, $1\le p<\infty$ und $f\in L^p(E)$ beschränkt. Zeigen Sie: $f\in L^q(E)$ für alle $p\le q<\infty$.