Prof. Dr. H.–J. Reinhardt **Dept. Mathematik**
Prof. Dr. B. Dreseler **Univ. Siegen**
Stefan Schuß

Übungsaufgaben (6) zur Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ im Wintersemester 2012/2013

(Abgabetermin: Mittwoch, 21.11.2012, 10 Uhr)

18. Bekanntlich ist die Menge $\mathbb{Q}_{[0,1]} := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ abzählbar. Sei $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}_{[0,1]}$ und $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = q_j \text{ für ein } j \leq n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von riemann-integrierbaren (alternativ regel-integrierbaren) Funktionen, deren punktweiser Grenzwert nicht riemann- bzw. regel-integrierbar ist.

19. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $1 \leq p < r < q < \infty$. Zeigen Sie: $L^p(E) \cap L^q(E) \subset L^r(E)$. Beweisen Sie dazu die Ungleichung $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^\beta$ für alle $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$, wobei

$$\alpha = \frac{r^{-1} - q^{-1}}{p^{-1} - q^{-1}}, \quad \beta = \frac{p^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - q^{-1}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung von Hölder.

20. Eine Kugel $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Radius $r > 0$ sei gegeben durch

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq r \right\}, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial K} (F(x), n(x))\, dS(x)$ durch ∂K für das Vektorfeld

$$F(x) = e^{-\alpha\|x\|} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Verwenden Sie dazu den Satz von Gauß.

21. **(Bonusaufgabe)** Seien F und K das Vektorfeld und die Kugel aus Aufgabe 20. Die Oberfläche ∂K von K wird parametrisiert durch

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} r\sin(u)\cos(v) \\ r\sin(u)\sin(v) \\ r\cos(u) \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathcal{R} := [0,\pi] \times [0,2\pi).$$

Damit ist

$$\int_{\partial K} \big(F(x), n(x)\big)\, dS(x) = \int_{\mathcal{R}} \big(F(\varphi(u,v)), \varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)\big)\, du dv$$

mit den partiellen Ableitungen φ_u bzw. φ_v von φ nach u bzw. v und dem Kreuzprodukt $x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)^T,\ x, y \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Integral direkt, d.h. ohne den Satz von Gauß anzuwenden.